УДК 532.5

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОНКОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ИСПАРЕНИЯ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ ОБЕРБЕКА-БУССИНЕСКА

Резанова Е.В., Тарасов Я.А.

Алтайский государственный университет,
654069, Россия, Барнаул, пр. Ленина, 61

В настоящей работе проводится математическое моделирование тонких слоев жидкости, стекающих по неравномерно нагретой наклонной подложке под действием сопутствующего потока газа с учетом термокапиллярных и гравитационных факторов. Данные течения сопровождаются переносом массы через свободную границу раздела в результате испарения. Построению подобных математических моделей и их численному исследованию посвящены работы [1-5]. В работе [5] моделирование проводилось при помощи уравнений Навье-Стокса и уравнения переноса тепла, а также обобщенных кинематического, динамических и энергетического условий [1, 4].

В настоящей работе моделирование проводится на основе уравнений конвекции Обербека-Буссинеска в двумерном случае. В задаче введены два характерных масштаба длины, поскольку характерная длина деформации свободной поверхности намного превосходит амплитуду деформации. Пусть l – продольная характерная длина и d – поперечная характерная длина, при этом $l >> d$. Тогда $\varepsilon = d/l$ является малым параметром системы. С учетом вышесказанного система уравнений в безразмерном виде записывается следующим образом:

$$Re\varepsilon^2(u_t + uu_x + wu_z) = u_{zz} - p'_x + \varepsilon^2 u_{xx} - \gamma_1 \sin\alpha T,$$

$$Re\varepsilon^4(w_t + uw_x + ww_z) = \varepsilon^2 w_{zz} - p'_z + \varepsilon^4 w_{xx} + \gamma_2 \cos\alpha T,$$

$$u_x + w_z = 0,$$

$$RePr\varepsilon^2(T_t + uT_x + wT_z) = \varepsilon^2 T_{xx} + T_{zz}.$$

Здесь (u, w) – компоненты вектора скорости, T – температура, $p' = p - \dfrac{\gamma_1}{Bu} x \sin\alpha + \gamma_2 z \cos\alpha$ – отклонение давления p от гидростатического давления, $Re = \dfrac{u_* l}{\nu}$ – число Рейнольдса, $Pr = \dfrac{\nu}{\chi}$ – число Прандтля, $\gamma_1 = \dfrac{Gr}{\varepsilon}$, $\gamma_2 = \dfrac{Gr}{\mathrm{Re}}$, где $Gr = \dfrac{d^3 g\beta T_*}{\nu^2}$ – число Грасгофа, ρ – некоторое относительное значение плотности жидкости, χ – коэффициент температуропроводности, ν – коэффициент кинематической вязкости, β – коэффициент теплового расширения жидкости, T^* – характерная температура, u^* – характерная продольная скорость. Система координат выбрана таким образом, что вектор силы тяжести имеет компоненты $(g\sin\alpha, -g\cos\alpha)$.

На термокапиллярной границе раздела искомые функции удовлетворяют обобщенным кинематическому, динамическим и энергетическому условиям. На твердой границе выполняются условия прилипания, а также задан нагрев. Для определения потока массы через границу раздела используется уравнение Герца-Кнудсена [3, 4]. Заметим, что для замыкания постановки задачи требуется задать также начальное состояние системы (начальные условия для функций u, w, T), а также начальное положение свободной границы и условия на бесконечности для функции ее определяющей. Дальнейшее моделирование поводится в случае, когда $Re = O(1)$.

Искомые функции u, w, T, p' определяются с помощью разложения по степеням малого параметра ε. Тогда главные члены разложения для этих функций примут следующий вид с учетом выполнения условий на твердой подложке:

$$u^0 = \frac{z^4}{24}\gamma_2 \cos\alpha\, A_x + \frac{z^3}{6}(\gamma_2 \cos\alpha\, (\Theta_0)_x + \gamma_1 \sin\alpha\, A) +$$

$$+ \frac{z^2}{2}((C_0)_x + \gamma_1 \sin\alpha\, \Theta_0) + C_1 z,$$

$$w^0 = -\frac{z^5}{120}\gamma_2 \cos\alpha\, A_{xx} - \frac{z^4}{24}(\gamma_2 \cos\alpha\, (\Theta_0)_{xx} + \gamma_1 \sin\alpha\, A_x) -$$

$$-\frac{z^3}{6}((C_0)_{xx} + \gamma_1 \sin\alpha\, (\Theta_0)_x) - \frac{z^2}{2}(C_1)_x,$$

$$p^0 = \frac{z^2}{2}\gamma_2 \cos\alpha\, A + z\gamma_2 \cos\alpha\, \Theta_0 + C_0,$$

$$T^0 = A(x,t) z + \Theta_0(x,t).$$

Получены также выражения для первых членов разложения всех искомых функций по степеням малого параметра ε. Данные выражения представляют собой полиномы относительно z четвертой степени для первой компоненты скорости, пятой степени для второй компоненты скорости, второй степени для давления и первой для температуры.

Ограничиваясь только главными членами разложения, можно определить толщину слоя h с помощью следующего эволюционного уравнения:

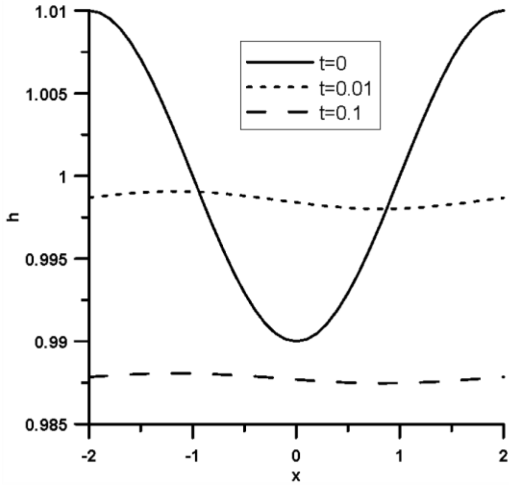
$$h_t + \frac{h^4}{24}\gamma_2 \cos\alpha\, A_x h_x + \frac{h^3}{6} h_x(\gamma_2 \cos\alpha\, (\Theta_0)_x + \gamma_1 \sin\alpha\, A) +$$

$$\frac{h^2}{2} h_x((C_0)_x + \gamma_1 \sin\alpha\, \Theta_0) + C_1 h h_x + \frac{h^5}{120}\gamma_2 \cos\alpha\, A_{xx} +$$

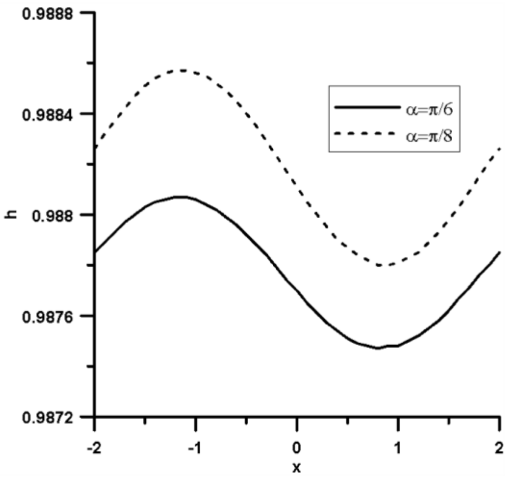
$$+ \frac{h^4}{24}(\gamma_2 \cos\alpha\, (\Theta_0)_{xx} + \gamma_1 \sin\alpha\, A_x) + \frac{h^3}{6}((C_0)_{xx} +$$

$$+ \gamma_1 \sin\alpha\, (\Theta_0)_x) + \frac{h^2}{2}(C_1)_x + \frac{E\alpha_J}{\varepsilon}(Ah + \Theta_0) = 0.$$

Здесь $E = \dfrac{kT_*}{\lambda_U \nu\rho}$, $\alpha_J = \alpha\rho_s\lambda_U\left(\dfrac{M}{2\pi R_g T_s^3}\right)^{\frac{1}{2}}(T - T_s)$, λ_U – скрытая теплота парообразования, R_g — универсальная газовая постоянная, M – молекулярная масса, ρ_s – плотность газа, T_s – температура насыщенного пара, α – коэффициент аккомодации. Отметим, что функции C_0, C_1 определяются с помощью обобщенных условий на термокапиллярной границе раздела. Функция A определяется исходя из граничного теплового режима. Зная значения функции h можно определить искомые функции продольной и поперечной скоростей, температуры и давления.



а



б

Рис. 1. Изменение толщины слоя жидкости с течением времени (а) и зависимость толщины слоя жидкости от угла наклона подложки в момент времени t = 0.1 (б).

В рамках данной модели проведены численные исследования по формированию течений тонкого слоя жидкости для системы "этанол-азот". На рисунке 1а представлена динамика периодического стекания слоя по неравномерно нагретой подложке с учетом испарения с течением времени. Рисунок 1б демонстрирует зависимость толщины слоя жидкости от угла наклона подложки (на рисунках приведены безразмерные значения параметров). Представлены численные результаты исследования зависимости толщины слоя стекающей жидкости от гравитационных и термокапиллярных сил, а также угла наклона подложки. В ходе численного исследования проводится сравнение математических моделей течения тонких слоев жидкостей основанных на системах уравнений Навье-Стокса и Обербека-Буссинеска.

Авторы выражают искреннюю благодарность научному руководителю Гончаровой Ольге Николаевне за постановку задачи и обсуждение результатов.

Список литературы:

1. Iorio C.S., Goncharova O.N., Kabov O.A. Heat and mass transfer control by evaporative thermal pattering of thin liquid layer // Computational Thermal Sci. 2011. №3(4). P. 333-342.
2. Kabova Yu.O., Kuznetsov V.V., Kabov O.A. Temperature dependent viscosity and surface tension effects on deformations off non-isothermal falling liquid film // Int. J. of Heat and Mass Transfer. 2012. Vol. 55. P. 1271-1278.
3. Miladinova S., Slavtchev S., Lebron G., Legros J.-C. Long-wave instabilities of non-uniformly heated falling films // J. Fluid Mech. 2002. Vol. 453. P. 153-175.
4. Гончарова О.Н. Моделирование течений в условиях тепло- и массопереноса на границе // Известия АлтГУ. 2012. № 73(1/2). С. 12-18.
5. Гончарова О.Н., Резанова Е.В., Тарасов Я.А. Моделирование термокапиллярных течений в тонком слое жидкости с учетом испарения // Известия АлтГУ. 2014. № 81(1/1). С. 47-52.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-08-00163).