УДК 532; 621.4

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ГИДРОДИНАМИКИ ЗАКРУЧЕННОГО ТЕЧЕНИЯ ПОТОКА ДИСПЕРСНОЙ СМЕСИ В ДИФФУЗОРЕ

Бабаходжаев Р.П., Хамидов А.А., Шакиров А.О., Каримов А.А.

Ташкентский государственный технический университет (Узбекистан)

Известно, что в горелочных устройствах закрутка потока формирует и стабилизирует пламя, интенсифицирует процесс сжигания смеси топлива и воздуха [1]. В работе [2] рассмотрена осесимметрическая задача о двухпараметрическом одноразовом винтовом движении идеальной несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе. Установим границы возможного существования различных режимов течения потоков, зависящей от относительной интенсивности вращения потока. Для этого должны быть известны расходные характеристики сопла, из которого происходит винтовое истечение потока газов в двух идеальных случаях – изоэнтропический и изотермический [4]. Установлено, что при изоэнтропическом истечении (течение одномерное), расход газа имеет относительно меньшее значение, чем при изотермическом процессе. Во многих прикладных задачах имеет место закрученное течение потока дисперсной смеси (жидкостей, газов или мелких твердых частиц).

В работе [6] рассмотрена автомодельная задача закрученного потока дисперсной смеси (в Озееновом приближении) в полуограниченном цилиндре. Приняты допущения: течение дисперсной смеси стационарное, компоненты смеси несжимаемые, концентрация равномерная. Определены распределения осевых, радиальных и тангенциальных составляющих скорости.

Рассмотрим закрученное (винтовое) течение дисперсной смеси в диффузоре. Смесь состоит из несущей жидкости (кинематическая вязкость ν_1, истинная плотность ρ_{1i}, объемная концентрация f_1) и мелких твердых частиц (кинематическая вязкость ν_2, объемная концентрация f_2). Закрутка потока осуществляется завихрителем, расположенного на входе диффузора. Предполагается, что поток «свободного вихря» дисперсной смеси входит в полуограниченный диффузор с радиусом *R*. В этом случае считается заданным циркуляция n – ой фазы смеси Γ_n в виде:

$$\Gamma_n(0, r) = \Gamma_{n0}(r) = f_n \Gamma_0(r) \tag{1}$$

Винтовое движение смеси жидкостей и газов описывается уравнениями движения и неразрывности при постоянстве приведенной плотности смеси и отсутствии фазового превращения.

Для решения задачи винтового движения дисперсной смеси в диффузоре примем модель многофазных взаимодействующих смесей Х.А. Рахматулина [3; 5]. Тогда, уравнения движения и неразрывности имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{V}_n}{\partial t} + grad\,(P_n + \dfrac{V_n^2}{r} + U_n) + [\vec{\Omega}_n, \vec{V}_n] = \nu_n \nabla^2 \vec{V}_n + k_n (\vec{V}_p - \vec{V}_n) \\ \dfrac{\partial \rho_n}{\partial t} + div(\rho_n \vec{V}_n) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

$$f_1 + f_2 = 1; \quad \rho_n = \rho_{ni} f_n \tag{3}$$

где: V_n – вектор скорости частиц n- ой фазы смеси, $V_n = |\vec{V}_n|$;
$\vec{\Omega}_n$ – угловая скорость n- ой частицы смеси ($\vec{\Omega}_n = \mathrm{rot}\,\vec{V}_n$);
ρ_n, ρ_{ni} – приведенные и истинные плотности n- ой фазы смеси;
f_n – объемная концентрация n- ой смеси;
k_n – коэффициент взаимодействия фаз.

Принимаем, что течение осесимметричное, стационарное и каждая фаза смеси несжимаемы (ρ_{ni} = const). Тогда из уравнения (2) и (3) получим зависимость, отражающую связь между скоростями фаз смеси [5]:

$$\vec{V}_1 = [f_1 \vec{V}_{10} + f_2 \vec{V}_{20} - f_2 \vec{V}_2] \cdot \frac{1}{f_1} \qquad u \quad f_1 = 1 - f_2; \tag{4}$$

Предположим, что организуемое завихрителем течение смеси винтовое. Тогда, имеет место равенство:

$$\mathrm{rot}\,\vec{V}_n = \widetilde{k}_n \vec{V}_n \tag{5}$$

где: $\widetilde{k}_n$ – коэффициент закрутки; l_n – длина одного витка винтового движения.

В случае $\widetilde{k}_n$ = const или f_n = const вдоль траектории движения частиц, равенство (5) удовлетворяет уравнение неразрывности. Из равенства (5) получим связь между осевыми, радиальными и тангенциальными составляющими n- той фазы смеси и уравнение для искомой тангенциальной скорости имеет следующий вид:

$$u_{nr}(z,r) = -\frac{1}{\widetilde{k}_n} \frac{\partial u_{n\theta}}{\partial z}, \qquad U_{nz}(z,r) = \frac{1}{\widetilde{k}_n\, r} \frac{\partial (r u_{n\theta})}{\partial r} \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 u_{n\theta}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_{n\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{n\theta}}{\partial r} + (\widetilde{k}_n^2 - \frac{1}{r^2})\, u_{n\theta} \tag{7}$$

Проведя операцию ротации в системе уравнений (2), получаем систему уравнений в следующем виде (7а):

$$rot\left[\ \frac{\partial \vec{V}_n}{\partial t} + grad(P_n + \frac{V_n^2}{r} + U_n) + rot[\vec{\Omega}_n, \vec{V}_n]\ \right] = \nu_n\ rot\nabla^2 \vec{V}_n + rot[\widetilde{k}_n(\vec{V}_p - \vec{V}_n)]$$

$$\frac{\partial(rot\,\vec{V}_n)}{\partial t} + [rot\,\vec{\Omega}_n, \vec{V}_n] + [\vec{\Omega}_n, rot\ \vec{V}_n] = \nu_n \nabla^2\ rot\ \vec{V}_n + (\vec{\Omega}_p - \vec{\Omega}_n)\ \widetilde{k}_n \tag{7а}$$

Учитывая равенство (5), получим:

$$\widetilde{k}_n\ \frac{\partial \vec{V}_n}{\partial t} + \left[\vec{\Omega}_n, \vec{\Omega}_n\right] + \widetilde{k}_n\ [\vec{V}_n\ \vec{V}_n] = \nu_n\ \nabla^2\ \vec{\Omega}_n + \widetilde{k}_n \cdot k_n\ (\vec{V}_p - \vec{V}_n) \tag{7б}$$

откуда:

$$\frac{\partial \vec{V}_n}{\partial t} = \nu_n \nabla^2 \vec{\Omega}_n + k_n\ (\vec{V}_p - \vec{V}_n) \tag{7в}$$

Подставляя полученное равенство (7в) в уравнение (2), получим:

$$grad\ (P_n + \frac{V_n^2}{r} + U_n\ ) + [\vec{\Omega}_n, \vec{V}_n] = 0 \tag{7г}$$

Так как: $\vec{\Omega}_n = \widetilde{k}_n\ \vec{V}_n$, то тогда:

$$[\vec{\Omega}_n, \vec{V}_n] = \widetilde{k}_n\ [\vec{V}_n, \vec{V}_n] = 0\,. \tag{7д}$$

Следовательно, получим интеграл Бернулли для осесимметричного винтового течения дисперсной смеси:

$$P_n + \rho_n \frac{V_n^2}{2} + U_n = const \tag{8}$$

где: $\mathrm{P_n} = \int \frac{\partial p}{\rho_{ni}}$ - функция давления n- ой фазы смеси;

U_n – потенциал внешних сил, для гравитационной силы $U_n = \rho\ g\ z$.

Из равенства (8) можно получить выражение для давления, полученное в работе [5] для смеси идеальных жидкостей:

$$P + \frac{1}{2}(\rho_1\ V_1^2 + \rho_2 V_2^2\ ) + \rho\, g\, z = C \tag{9}$$

где: $C = P_{вх} + \frac{1}{2}[\ \rho_1 V_{1вх}^2 + \rho_2\ V_{2вх}^2\ ] + \rho\, g\, z_0$; $\qquad \rho = \rho_1 + \rho_2$

Модуль скорости n- ой фазы смеси выразиться как:

$$V_n^2 = U_{n\theta}^2 + U_{n\,r}^2 + U_{n\,z}^2, \tag{9а}$$

Таким образом, рассматриваемая задача сведена к определению тангенциальной скорости смеси $U_{n\,\theta}(\hat{z},\hat{r})$, для которой получено уравнение (7).

Введем безразмерные параметры в виде:

$$r = \hat{r}\cdot R, \quad z = \hat{Z}\,R, \quad U_{n\,\theta} = \frac{U_{n\,\theta}}{V_{n\ z}(0,\hat{r})} \tag{9б}$$

Для уравнения (7) имеем следующие условия на входе в диффузор:

$$V_n(0,\hat{r}) = \sqrt{U^2_{n\,z}(0;\hat{r}) + U^2_{n\ r}(0;\hat{r}) + U^2_{n\,\theta}(0;\hat{r})} \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 U_{n\,\theta}}{\partial \hat{z}^2} + \frac{\partial^2 U_{n\,\theta}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}}\ \frac{\partial U_{n\,\theta}}{\partial \hat{r}} + (\lambda^2_n - \frac{1}{\hat{r}^2})\,\widehat{U}_{n\,\theta} = 0 \tag{11}$$

где: $\lambda_n = R\cdot\widetilde{k}_n$.

Проведем разделение переменных по координатам $\hat{z},\ \hat{r}$ для тангенциальной скорости в виде:

$$\hat{U}_{n\,\theta} = \sum_{s=1}^{N} Z^{(s)}_n\ R^s_n\,(\hat{r}) \tag{12}$$

Полагая, что $\hat{U}_{n\,\theta} = Z_n\,(\hat{z})\ R^s_n\,(\hat{r})$, из уравнения (11) получим дифференциальные уравнения с разделяющимся переменными:

$$\frac{Z''_n}{Z_n} = -(\ m^{(s)}_n\ )^2, \qquad R''_n + \frac{1}{\hat{r}}\ R'_n + [\ \lambda^2_n - (\ m^s_n\ )^2 - \frac{1}{\hat{r}^2}\ ]R_n = 0 \tag{12а}$$

Решениями полученных уравнений при $\lambda^2_n > (m^{(S)}_n)^2$ будут:

$$Z^{(s)}_n = A^{(s)}_n\ \sin(m^{(s)}_n\,\hat{z}) + B^{(s)}_n\ \cos(m^{(s)}_n\,\hat{z}) \tag{12б}$$

$$R^s_n = J_1\ (\lambda^{(s)}_n\ \hat{r})\ ; \tag{12в}$$

где: $\lambda^{(s)}_n = \sqrt{\lambda^2_n - (m^{(s)}_n)^2}$.

Тогда, решение уравнения (11) будет иметь следующий вид:

$$\hat{U}_{n\theta} = \sum_{s=1}^{N} J_1(\lambda^{(s)}_n\ \hat{r})\,[B^{(s)}_{\text{n}}\ \cos(m^{(s)}_n\,\hat{z}) + A^{(s)}_n \sin(m^{(s)}_n\,\hat{z})] \tag{13}$$

где $m^{(s)}_n$ является решением уравнения $J_1(m^{(s)}_n) = 0$, которое получено из условия $U_{n\theta}(\hat{z},1) = 0$, что означает нулевое значение тангенциальной скорости на стенке диффузора.

Пользуясь равенствами (13) и (6), получим выражения для осевой и радиальной составляющей скорости:

$$\hat{U}_{nz}(\hat{z},\hat{r}) = \frac{1}{\widetilde{k}_n} \sum_{s=1}^{s} \left\{ \frac{\partial J_1(\lambda_n^{(s)} \hat{r})}{\partial \hat{r}} + \frac{1}{\hat{r}} J_1(\lambda_n^{(s)} \hat{r}) \right\} (B_n^{(s)} \; cos(m_n^{(s)} \hat{z}) + A_n^{(s)} \sin(m_n^{(s)} \hat{z}) \tag{13а}$$

Так как

$$\frac{\partial J_1(\lambda_n^{(s)} \hat{r})}{\partial \hat{r}} = -\frac{1}{\hat{r}} J_1(\lambda_n^{(s)} \hat{r}) + J_0(\lambda_1^{(s)} \hat{z}) \tag{13б}$$

решение получим в виде:

$$U_{nz}(\hat{z},\hat{r}) = \sum_{s=1}^{N} Д_n^{(s)} J_0(\lambda_n^{(s)} \hat{r}) \left[\cos(m_n^{(s)} \hat{z}) + A_n^{(s)} \sin(m_n^{(s)} \hat{z})\right] \tag{13в}$$

где: $$Д_n^{(s)} = \frac{a_n^{(s)}}{k_n^*} J_0(\lambda_n^{(s)}) .$$

При этом принято, что $A_n^{(s)} = 0$.

Тогда, распределение осевой скорости определяется равенством:

$$U_{nz}(\hat{z},\hat{r}) = \sum_{s=1}^{N} Д_n^{(s)} J_0(\lambda_n^{(s)} \hat{r}) \cos(m_n^{(s)} \hat{z}) \tag{14}$$

где: a_m^s - коэффициент разложения функции $U_n(\hat{r})$ по Бесселевой функции $J_0(\lambda_n^{(s)})$, дающей распределение осевой скорости у входа в диффузор в виде:

$$U_{nz}(0;\hat{r}) = U_n^0 , \qquad U_n^0 = \sum_{s=1}^{N} a_m^{(s)} J_0(\lambda_m^{(s)}) \tag{14а}$$

Радиальная скорость определяется из равенств (6) и (13):

$$U_{n\theta} = -\frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial U_{n\theta}}{\partial \hat{z}} = \frac{1}{\hat{r}} \sum_{s=1}^{N} m_n^{(s)} J_1(\lambda_n^s \hat{r}) [-B_n^{(s)} \sin(m_n^{(s)} \hat{z})] \tag{15}$$

Откуда получим:

$$U_{n\theta} = \sum_{s=1}^{N} \frac{m_n^{(s)} a_n^{(s)}}{\hat{r}} J_1(\lambda_n^{(s)} \hat{r}) \sin(m_n^{(s)} \hat{z}) + \overset{0}{U}_{n\theta} \tag{15а}$$

где: $\overset{0}{U}_{n\theta} = \dfrac{\overset{0}{U}_{n\theta}}{\overset{0}{U}_n}$ - характеризует тангенциальную скорость на входе в диффузор.

Из равенств (14) и (15) имеем, что на расстояниях $\hat{z}_k$ и $\hat{z}_k^*$ от входа в диффузор осевая и тангенциальная скорости будут равными нулю. При этом, расстояния $\hat{z}_k$ и $\hat{z}_k^*$ определяются как:

$$\hat{z}_k = \frac{2k+1}{2m_n^{(s)}}\pi , \qquad \hat{z}_k^* = \frac{\pi k}{m_n^{(s)}}; \; (k=1,\dots n), \qquad (15б)$$

где: $m_n^{(s)}$ - корень функции Бесселя $J_1(m_n^{(s)}) = 0$

При относительно малой интенсивности вращения потока $\lambda_n^{(s)} < m_n^{(s)}$ течение становится плавным без образования нулевых скоростей.

Результаты анализа полученных функциональных зависимостей по определению составляющих скоростей подтверждают, что они качественно согласуются с экспериментальными данными, полученными в работе [7].

Литература

1. Гупта А., Лилли Д., Сайред Н. Закрученные потоки – М., Мир, 1987, 588с.
2. Рахматуллин Х.А. – Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред. //ПММ. Т. 20. Выпуск 1, 1956 г.
3. Гостинцев Ю.А., Покил П.Ф., Успенский О.А., Поток Громеко – Бельтрами в полубесконечной цилиндрической трубе. // Изв. АН СССР, МЖГ № 2, 1971г.
4. Гостинцев Ю.А. Расходные характеристики сопла при истечении винтового потока газа.//Изв. АН СССР, МЖГ. №4. 1969г., с.153-161.
5. Хамидов А.А., Худойкулов Г.И. Теория струй многофазных вязких жидкостей. - Ташкент, «Фан», 2003г., 146 с.
6. Хамидов А.А., Исанов Р.Ш., Рузматов М.И. Закрученный поток аэрированной смеси в цилиндрической трубе. // Сб. научных статьей. Международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы обеспечения интеграции науки, образования и производства». –Ташкент. 2008г., с.283-286.
7. Бабаходжаев Р.П., Юнусов Б.Х., Каримов А.А., Алимбаев А.У. Некоторые результаты экспериментального исследования гидродинамики интенсифицированного кипящего слоя бурого низкосортного угля. //Материалы докладов национальной конференции по теплоэнергетике. –Казань. 2006 г., Том 1, с.113-116.