

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ТЕПЛОФИЗИКИ ИМ. С.С. КУТАТЕЛАДЗЕ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК



На правах рукописи

Сальников Михаил Владимирович

**ИССЛЕДОВАНИЕ АНИЗОТРОПИИ ПЛАЗМЫ ВОКРУГ
ПЫЛЕВЫХ ЧАСТИЦ СФЕРИЧЕСКОЙ И
НЕСФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ**

Специальность 01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Геннадий Иванович Сухинин

Новосибирск, 2020

Оглавление

Стр.

Введение.	5
Глава 1. Подходы к изучению плазмы вблизи пылевых частиц	11
1.1. Предмет изучения пылевой плазмы. Значимость пылевой плазмы. Важнейшие открытия.	11
1.2. Метод Particle-In-Cell.	15
1.3. Метод Linear Response.. . . .	21
1.4. Заключение по главе 1.	25
Глава 2. Расчет самосогласованного пространственного распределения потенциала плазмы вблизи изолированных сферических пылевых частиц.	26
2.1. Зарядка пылевых частиц в бесстолкновительной газоразрядной плазме. Приближение ограниченного орбитального движения.	26
2.2. Уравнение Пуассона.	30
2.3. Разложение пространственного распределения потенциала плазмы по полиномам Лежандра.	32
2.4. Описание численной модели, созданной для расчёта самосогласованного пространственного распределения потенциала, вокруг изолированных сферических пылевых частиц через разложение плотности объёмного заряда по полиномам Лежандра	35
2.5. Результаты расчёта численной модели, которая основана на разложении пространственного распределения плотности объёмного заряда по полиномам Лежандра.	51
2.6. Описание численной модели, созданной для расчёта самосогласованного пространственного распределения потенциала,	

вокруг изолированных сферических пылевых частиц через прямое решение уравнения Пуассона.	87
2.7. Результаты расчёта численной модели, которая основана на прямом решении уравнения Пуассона.	91
2.8. Последовательное и параллельное выполнение модели	99
2.9. Заключение по главе 2.	105

Глава 3. Расчет самосогласованного пространственного распределения потенциала плазмы вблизи изолированных пылевых частиц формы эллипсоида вращения.

3.1. Описание численной модели, созданной для расчёта самосогласованного пространственного распределения потенциала, вокруг изолированных несферических пылевых частиц.	107
3.2. Результаты расчёта пространственных распределений вблизи несферических пылевых частиц.	114
3.3. Устойчивость ориентации пылевых частиц несферической формы во внешнем электростатическом поле.	123
3.4. Заключение по главе 3.	132

Глава 4. Расчет самосогласованного пространственного распределения потенциала плазмы вблизи бесконечной цепочки сферических пылевых частиц.

4.1. Описание численной модели, созданной для расчёта самосогласованного пространственного распределения потенциала, вокруг бесконечной цепочки сферических пылевых частиц	134
4.2. Результаты расчёта самосогласованного потенциала плазмы вблизи бесконечной цепочки сферических пылевых частиц	139
4.3. Заключение по главе 4.	150

Заключение.	151
Список литературы.	153

Введение

Плазма из ионизованного газа с включением микронных пылевых частиц широко изучается современной наукой в отдельной области исследований, именуемой «физика пылевой плазмы». Пылевая плазма обнаруживает себя не только в лабораторных и промышленных установках, она широко распространена в природе — в ионосфере Земли, на поверхностях планет и их спутниках, в планетарных кольцах, хвостах комет, межпланетных и межзвёздных облаках.

Пылевые частицы изучают как с помощью экспериментов, так и с помощью численного моделирования. В число экспериментальных исследований входит изучение пылевой плазмы в разрядах постоянного и переменного тока, в условиях микрогравитации и в условиях земного тяготения. Экспериментальные исследования показали, что очень часто в пылевой плазме возникают эффекты самоорганизации пылевых частиц. Однако, с помощью экспериментов, возможно установить только макропараметры пылевой плазмы, такие как: пространственное распределение пылевых частиц, температуру и заряд зёрен пыли, дрейфовую скорость ионов и электронов и др.

Экспериментальное исследование макропараметров данной задачи не дало ответа на вопрос, по какой причине в пылевой плазме происходит самоорганизация пылевых зёрен, в результате которой образуются пылевые кристаллы. Исследования показали, что за упорядочивание частиц пыли ответственны возмущения, которое пылевые частицы вызывают в распределении плазмы вокруг них. Изучение такого возмущения ведётся с помощью численных методов.

Традиционными методами численного исследования влияния пылевых частиц на окружающую плазму являются методы «Линейного отклика» (LR-Linear Response) и «PIC» (Particle-In-Cell).

Цель данной работы - построение численной модели, позволяющей определить самосогласованное распределение ионной плотности и потенциала плазмы вблизи пылевых частиц различной формы в присутствии постоянного внешнего электростатического поля, для различных параметров пылевой плазмы.

Для достижения данной цели поставлены и решены следующие **задачи**:

1. Создание численной модели, которая рассчитывает самосогласованные пространственные распределения плотности ионов и потенциала вокруг пылевых частиц различной формы.
2. Изучение процесса формирования вейка за пылевой частицей, которая находится под влиянием внешнего электростатического поля.
3. Изучение зависимости самосогласованных пространственных распределений плотности объёмного заряда и потенциала плазмы вблизи пылевой частицы от различных параметров пылевой плазмы

Научная новизна:

1. Разработана новая численная модель, которая позволяет итерационно рассчитывать самосогласованные пространственные распределения плотности ионов и потенциала плазмы вблизи микронных пылевых частиц различной формы, а также вблизи бесконечных цепочек пылевых частиц, которые находятся во внешнем электростатическом поле.
2. С помощью численного моделирования впервые получены эмпирические аппроксимации для зависимостей характеристик вейка и дипольного момента системы «пылевая частица — облако ионов» от напряжённости внешнего электростатического поля.
3. Впервые, показано, что полученная в расчетах зависимость заряда пылевой частицы эллипсоидальной и дискообразной формы от средней длины свободного пробега процесса ион-нейтральной перезарядки повторяет вид аналогичной зависимости для сферической частицы, когда средняя длина свободного пробега оказывается большей ионной длины

Дебая. В эту зависимость, в качестве геометрических параметров, входит емкость частицы.

4. Впервые, с помощью численного моделирования, показано, что, характеристики вейка, формирующегося вблизи изолированной пылевой частицы, не зависят от формы пылевой частицы, а определяются электрической ёмкостью этой пылевой частицы, когда её форма представляет собой эллипсоид вращения.

5. С помощью численного моделирования впервые показано, что дипольный момент ионного облака, сформированного вокруг отдельно взятой пылевой частицы в цепочке, уменьшается с увеличением напряжённости внешнего электростатического поля, что приводит к тому, что самосогласованное пространственное распределение потенциала вокруг пылевых частиц в цепочке стремится к симметричному виду с ростом напряжённости внешнего электростатического поля.

Научная и практическая значимость работы.

Полученные данные о формировании и развитии вейков за пылевой частицей позволяют учесть диполь-дипольное взаимодействие между облаками ионов, формирующимися вокруг заряженных частиц микронного размера, которые левитируют в слабоионизованной среде. Представленные результаты помогут более точно описать процесс формирования пылевых кристаллов в пылевой плазме для различных параметров пылевой плазмы. Полученные зависимости основных характеристик вейка (его величины и положения) от параметров пылевой плазмы позволяют более точно учесть то влияние, которое пылевые частицы оказывают друг на друга через возмущения в окружающей плазме. Разработанная в данной работе модель послужит фундаментом для трёхмерной модели, которая опишет взаимодействия пылевых частиц в пылевых кристаллах и цепочках.

Результаты данной работы представляют интерес для создания установок плазменного напыления, разработки плазменных генераторов,

оптимизации работы фильтровальных установок для промышленной очистки воздуха, а также для создания лекарственных препаратов с адресной доставкой в органы дыхательной системы и т.д.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Численная модель для итерационного расчёта на дебаевских масштабах самосогласованных распределений плотности ионов и потенциала вблизи одиночных пылевых частиц в слабоионизованной плазме с внешним электростатическим полем при учёте резонансной перезарядки ионов с нейтральными атомами. Аналогичная модель для цепочки сферических пылевых частиц.

2. Формирование вейка за пылевой частицей микронного размера в численном моделировании ее обтекания слабоионизованной плазмой. Признаками вейка являются возникновение ионной фокусировки и локального максимума в потенциале с появлением ненулевого дипольного момента в системе пылевая частица – плазма.

3. Эмпирическая зависимость, которая аппроксимирует результаты численного моделирования, представляющая зависимости параметров вейка, величины и положения его локального максимума, от напряжённости внешнего электростатического поля, средней длины свободного пробега процесса резонансной перезарядки ионов с нейтральными атомами и электрической ёмкости пылевой частицы.

4. Эмпирическая зависимость, которая аппроксимирует результаты численного моделирования, представляющая зависимости суммарного заряда окружающей плазмы и дипольного момента системы «пылевая частица – ионное облако» от напряжённости внешнего электростатического поля, средней длины свободного пробега процесса резонансной перезарядки ионов с нейтральными атомами и электрической ёмкости пылевой частицы.

5. Моделирование динамики двух плоских заряженных дисков, находящихся под воздействием внешнего электрического поля, при учёте их

диполь-дипольного взаимодействия и трения об плазму, показало, что устойчивой ориентацией двух заряженных дисков является такое, при котором их плоскости параллельны вектору внешнего поля.

Достоверность полученных результатов.

Разработанная модель основана на использовании аппарата вычислительной математики. Была проведена методологическая работа по изменению параметров вычислительной области: размера вычислительной сетки, размеров куба, в котором происходило моделирование траекторий, временного шага при моделировании уравнений Ньютона и т.д. В результате проделанной методологической работы было продемонстрировано, что параметры вычислительной области не влияют на получаемый результат. Данной моделью были решены типовые задачи: определение потенциала среды вблизи сферической и несферической проводящей фигуры в вакууме и низкотемпературной плазме. Было проведено сравнение полученных данных: зависимости средней дрейфовой скорости ионов от приведенного поля и параметров вейка от скорости потока плазмы с общепризнанными результатами численных и экспериментальных исследований.

Личный вклад автора.

Основные научные результаты, включённые в диссертацию и выносимые автором на защиту, получены соискателем лично. Автором создана представленная в данной работе численная модель. Автором проведён анализ и интерпретация полученных численных данных, сформулированы заключения, послужившие основой выводов диссертации. На основе полученных результатов, автором данной работы подготавливались выступления на конференциях и публикации в рейтинговых журналах.

Апробация работы.

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях: 4th International Conference on the Physics of Dusty Plasma and Burning Plasmas. Odessa, Ukraine. August 25-29, 2013; 17th International Congress on Plasma Physics, Lisbon, Portugal, September 15-19, 2014; 15th International Conference on the Physics of Non-Ideal Plasmas. Almaty, August 30 – September 4, 2015; 9-ой международной научной конференции «современные достижения физики и фундаментальное физическое образование». 12-14 Октября 2016. Алматы. Казахский национальный Университет им. Аль Фараби, Казахстан; РК-4 Symposium November 2016. German Aerospace Center (DLR) Oberpfaffenhofen; 8th International Conference on the Physics of Dusty Plasma. May 20-25, 2017, Prague, Czech Republic; Всероссийская конференция «XXXIV Сибирский теплофизический семинар» Новосибирск, 27-30 августа 2018 г.; 16th International Conference on the Physics of Non-Ideal Plasmas/ September 24-28, 2018. Saint-Malo, France; 24th International Symposium on Plasma Chemistry. Naples (Italy). June 9-14 2019.

Публикации:

Основные научные результаты по теме диссертации изложены в 9 научных статьях, опубликованных в журналах из списка ВАК.

Объём и структура работы.

Диссертация состоит из введения, четырёх глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 166 страницы с 62 рисунками. Список цитируемой литературы содержит 143 наименований.

Глава 1. Литературный обзор.

В данной главе показана актуальность изучения пылевой плазмы. Приведена хронологическая последовательность важнейших открытий в физике пылевой плазмы. Рассмотрены основные численные методы, которыми исследуется пространственное распределение потенциала вокруг изолированной пылевой частицы, обтекаемой плазменным потоком.

1.1. Предмет изучения пылевой плазмы. Значимость пылевой плазмы. Важнейшие открытия.

Объект исследования данной работы - пылевая плазма. С первого взгляда, пылевая плазма несильно отличается от обычной - это ионизованный газ, в котором оказались микронные частички твёрдого вещества, которые могут состоять как из проводящего материала, так и являться диэлектриками [1,2]. Когда такие частички попадают в ионизованный газ, они начинают испытывать столкновения с ионами и электронами. В результате этих столкновений, твердые частицы приобретают большой по величине электрический заряд [3-5]. При размерах порядка микрона, заряд, индуцированный на поверхности пылевых частиц, может составлять десятки тысяч зарядов электронов. Системы, называемые пылевой плазмой, также именуют терминами: «коллоидная плазма», «комплексная плазма», «плазма с конденсированной дисперсной фазой».

Впервые пылевую плазму в лабораторных условиях получил и пронаблюдал Ленгмюр, который в своей работе 1924-ого года [6] описал находку следующим образом: «мы явились свидетелями феномена удивительной красоты, который может представлять теоретический интерес». Однако вопрос изучения феноменов, связанных с пылевой плазмой, был отложен на десятки лет.

Как обнаружилось позднее при астрономических наблюдениях, пылевая плазма невероятно широко распространена в космосе. Почти нет таких космических тел, вблизи которых бы не находилось пылевая плазма. Она обнаруживает себя в космических газовых скоплениях [7], хвостах комет [8], вблизи искусственных спутников и космических аппаратов, орбитирующих вокруг Земли. В 1983 году обнаружилось, что из пылевой плазмы частично состоят планетарные кольца Сатурна. В работе [9] было обнаружено, что, под действием невероятно массивных заряженных объектов, в этих кольцах образовывались пустоты, как в виду взаимного расталкивания пылевых частиц, так из-за действия на них магнитных и гравитационных полей самого Сатурна.

Позднее пылевая плазма вновь обнаруживает себя в лабораторных условиях [10,11], где неожиданно становится источником проблем в промышленных процессах плазменной обработки поверхностей. В 1986-ом году была теоретически предсказана возможность того, что пылевые частицы могут образовываться в газовых разрядах [12]. В 1994-ом году было экспериментально показано, что плазма высокочастотного разряда – оптимальная среда для роста пылевых частиц, которые затем левитируют в стратах этого разряда [13]. После открытия того, что пылевые частицы могут левитировать в условиях земной гравитации, а не только в условиях микрогравитации, изучение пылевой плазмы интенсифицировалось.

Характерная особенность пылевой плазмы - возможность наблюдать за отдельными пылевыми частицами невооружённым глазом. Это стало следствием относительно большого размера и массы этих частиц. В 1994-ом году четырьмя независимыми научными группами было продемонстрировано образование пылевых кристаллов в газовом разряде [13-17]. Оно объяснялось сильным взаимодействием сильнозаряженных пылевых частиц, из-за которого стало возможным образование в стратах структур, схожих по своим свойствам с кристаллами и жидкостями. Вскоре было

обнаружено, что, при изменении параметров разряда, давления газа и количества пылевых частиц, можно пронаблюдать фазовые переходы между агрегатными состояниями среды [18]. Таким образом, пылевая плазма, которую легко получить в лабораторных условиях, позволяет, без использования высокоточного микроскопа, наблюдать процессы, которые обычно происходят на молекулярном уровне в газе, жидкости или твёрдом теле [19-23].

В лабораторных условиях пылевую плазму изучают в газовых разрядах, где температура плазмы близка к комнатной. Наиболее распространены экспериментальные исследования пылевой плазмы для благородного газа аргона (Ar). Стандартные параметры газоразрядной плазмы, в которой исследуются эффекты, связанные с пылевыми частицами, следующие: давление газа $p_g=10^{-1}-10^1$ торр, плотность нейтральных атомов $n_g=10^{15}-10^{17}$ см⁻³, коэффициент ионизации $I=10^{-8}-10^{-6}$, плотность ионов и электронов $n_i=n_e=10^4-10^{12}$ см⁻³, напряжённость приведённого поля $E/p=1-10$ В/(см·торр), температура электронов $T_e=10^4-10^5$ К, температура ионов $T_i=300-1000$ К. При таких параметрах, ионная длина Дебая $\lambda_i=10^{-5}-10^{-1}$ см, электронная длина Дебая $\lambda_e=10^{-4}-1$ см, число частиц плазмы в сфере Дебая $n_d=10^2-10^{10}$ [24, 25]. Средняя длина пробега ионов $l_i=10^{-4}-10^{-2}$ см. Средняя длина пробега электронов $l_e=10^{-3}-10^{-1}$ см.

К изучению пылевой плазмы существуют два подхода: микроскопический и макроскопический. Макроскопический подход рассматривает такие эффекты как: фазовые переходы [26], термодинамические и транспортные свойства, волновые эффекты [27] и различные коллективные взаимодействия [28]. Микроскопический подход, с другой стороны, рассматривает эффекты, связанные с взаимодействием газоразрядной плазмы с одной или несколькими пылевыми частицами. Однако, даже в приближении изолированной пылевой частицы, возникает потребность в изучении множества процессов, таких как: зарядка пылевой

частицы, экранировка пылевых частиц, флуктуация заряда на пылевой частице, влияние различных сил на пылевую частицу. Феномен экранировки пылевой частицы плазмой - это образование облака ионов вокруг сильно заряженного пылевого зерна. Ионы этого облака, словно электроны в реальном атоме, частично экранируют отрицательный заряд частицы пыли [29-36].

Затрагивая вопрос влияния на пылевые частицы внешних сил, то наибольший интерес представляет то влияние, которое оказывает на систему «пылевая плазма - облако ионов» внешнее электростатическое поле. Это поле сильно искривляет облако ионов, что также порождает ряд явлений [37-39]. Одно из самых значительных из них: фокусировка ионов в области за пылевой частицей. Из-за ионной фокусировки потенциал вблизи пылевой частицы искажается и вниз по потоку за частицей пыли образуется осциллирующая структура, которая, в научных трудах, традиционно именуется «вейком» (wake) [40]. Данная структура - предмет обширных научных исследований [41-58]. Вейк приводит к возникновению сил, которыми пылевые частицы воздействуют друг на друга через плазму, что приводит к серьёзным структурным последствиям [59-67]. Общепринято, что именно вейк - причина формирования пылевых кристаллов [68-70].

Из-за большого количества параметров и временных масштабов данной задачи, крайне затруднительно исследовать возмущения плазмы вблизи пылевых частиц аналитическими методами. Фокусировка ионов активно изучалась численными методами в работах [42,47,50,71]. Однако, многие численные модели, использованные в прошлом, не являлись самосогласованными [30]. Например, очень часто в качестве моделей пылевых частиц выступали объекты точечного размера, обладающие фиксированным зарядом [47,50].

Большинство исследований, посвящённых изолированным пылевым частицам, проводилось для сферических пылевых частиц. Однако, в целом,

как в космических, так и в промышленных условиях, форма пылевой частицы отлична от идеальной сферы. Несмотря на важность учёта «неправильной» формы пылевых зёрен [72], малое количество работ посвящено исследованию таких пылевых частиц. В экспериментах [73-78] было зафиксировано формирование структур из цилиндрических пылевых частиц длиной 300 мкм диаметрами 15 и 7.5 мкм. Вытянутые частицы левитировали в стратах в различных плоскостях и выстраивались параллельно друг другу. При этом они могли быть ориентированы как параллельно, так и перпендикулярно внешнему электрическому полю, в зависимости от параметров разряда.

Исторически, для изучения вейка, формирующегося вблизи изолированных пылевых частиц, используют следующие численные подходы:

1. Метод «Частицы-В-Ячейке (Particle-In-Cell «PIC»).
2. Метод «Линейного Отклика» (Linear Response «LR»).

Рассмотрим эти подходы подробнее.

1.2. Метод Particle-In-Cell.

Исторически методы PIC и его вариации возникли как альтернатива классическим алгоритмам. Изначально PIC получил развитие в научно-прикладных областях, например в исследовании управляемого термоядерного синтеза.

Метод PIC возник в 1955 г., а его создание приписывается Харлоу [79]. PIC был разработан для расчёта задач, где конечно-разностные схемы были непригодными. Типичными примерами таких задач являются задача о мощном взрыве над земной поверхностью с образованием кратера, задача об обжати сферического пузыря цилиндрической ударной волной, задача о турбулентном перемешивании на границе двухслойной жидкости с

неустойчивой стратификацией, задача о высокоскоростном соударении тел и др.

В формировании современного представления о методах PIC большую роль сыграли работы Яненко [80]. Значительный прогресс методов PIC в задачах вычислительной аэродинамики достигнут благодаря Белоцерковскому [81], которым была создана модификация «метод крупных частиц», которая позволила проводить расчеты сложных течений на ЭВМ средней мощности.

В 1970-х возникли алгоритмы «вихри-в-ячейках» (vortices-in-cells — VIC) [80]. Комплекс VORTEX использовался для расчета плоских завихренных течений и динамики токов в замагниченной плазме в приближении «ведущего центра» (guiding center plasma). С помощью VIC решались задачи о сворачивании вихревой пелены, неустойчивости тонких сдвиговых слоёв и компактных областей концентрированной завихренности [82].

В физике плазмы PIC используется с 1950-х для расчета электронных и ионных пучков [83]. На основе PIC были созданы детально разработанные вычислительные модели плазмы. В них были воспроизведены эффекты, недостижимые в лабораторных экспериментах. Методы PIC применяются в астрофизике для моделирования взаимодействия галактик, где прямые физические эксперименты невозможны.

PIC - наиболее эффективный численный подход, используемый для моделирования физических процессов в многокомпонентных средах [84]. Методика PIC состоит в том, что траектории электронов и ионов рассчитываются из уравнений Ньютона, в которых кулоновские взаимодействия учтены лишь в некоторой области [85]. Обычно, эта область ограничена несколькими электронными длинами Дебая.

Цель PIC - самосогласованное определение пространственных распределений ионов и электронов вокруг пылевой частицы, а так же

самосогласованного значения заряда, индуцированного на пылевой частице потоками ионов и электронов.

Проблема нескольких временных масштабов в этом подходе возникает с первого шага вычислений. Отношение масс пылевых частиц, ионов и электронов очень велико, поэтому, если для расчёта траекторий ионов и электронов выбирать временной масштаб, соответствующий массе электронов, то ионы в таком вычислении окажутся обездвиженными [66,86].

С проблемами временного масштаба в PIC борются двумя способами:

1. Исклчением временного масштаба пылевых частиц. В данном подходе принимается приближение, что пылевая частица в системе - полностью изолирована. Такое приближение называется ОСР (one-component-plasma). В этом приближении взаимодействия между частицами пыли рассматривается через искажения, которые сильно заряженные пылевые частицы индуцируют в плазме. Неоднократно доказано, что подобное приближение позволяет рассчитывать пространственные распределения плотности объёмного заряда и потенциала вблизи пылевой частицы с хорошей точностью [62-64]. ОСР основано на расщеплении кластера пылевых частиц на изолированные пылевые частицы, взаимодействующих с низкотемпературной плазмой через потенциал Дебая [87,88]. Потенциал Дебая – достаточно точное приближение, которое подходит для исследований коллективных процессов в пылевой плазме [89-91], самоорганизации пылевых частиц [5,85], спектральных свойств пылевых кластеров [92,93], а также «фазовых переходов» в кристаллах пылевых частиц [94,95].

2. Нормировкой ионной массы. Если проводить прямое моделирование движения электронов и ионов, то временной шаг должен соответствовать временному масштабу самых лёгких и быстрых частиц – электронов. Другими словами, временной шаг должен быть меньше плазменного периода или обратной электронной плазменной частоты. В силу

того, что время зарядки пылевой частицы приблизительно равно ионному плазменному периоду, то для самосогласованного расчёта траекторий ионов и электронов вокруг пылевой частицы, необходимо рассчитать большое число временных итераций уравнения Ньютона. Ускорения вычислений возможно достичь, повторно применив исключение временного масштаба, приняв за распределение плотности электронов распределение Больцмана. Такое приближение применяется крайне часто и называется гибридным PIC методом [96]. Однако, такое приближение часто оказывается неточным. При температурах электронов близких к температурам ионов, пространственное распределение электронов отлично от распределения Больцмана [97]. Поэтому применяется метод нормировки ионной массы – в расчёте используются уменьшенные массы ионов (reduced ion mass), что повышает плазменную частоту ионов [98]. В [52] показано, что если принять, что масса иона тождественна сотне масс электронов, то такое вычисление даёт разумные результаты. Несмотря на количественные различия, результаты оказываются качественно верными.

Указанные приближения позволяют сократить время расчёта самосогласованных распределений, однако этого всё ещё оказывается недостаточно, в силу того, что моделирование взаимодействия между суперпозицией всех движущихся ионов и электронов крайне трудоёмко. Если провести разложение дифференциалов в уравнении движения Ньютона до первого порядка, то трудоёмкость моделирования n частиц окажется равной $O(n^2)$, так как необходимо рассчитать n^2 кулоновских взаимодействий. Здесь O - функция, которая показывает количество времени, затраченное ЭВМ на указанную операцию. Из-за большого числа моделируемых частиц, прямой подход неэффективен. Для упрощения вычислений используется вычислительная сетка [99], которая позволяет значительно ускорить расчёт. Для того, чтобы достичь ускорения, суммарный заряд ионов и электронов, которые расположены внутри ячеек, приписывается узлам вычислительной

сетки. После каждого шага по времени в узлах сетки, с помощью уравнения Пуассона, рассчитывается электрический потенциал. Трудоемкость алгоритма, в котором используется сетка, равна $O(n) + O(n_g \log(n_g))$, где n_g - число узлов сетки, которое значительно меньше числа моделируемых ионов и электронов. Здесь $O(n_g \log(n_g))$ - сложность решения уравнения Пуассона.

Общий алгоритм определения самосогласованных пространственных распределений плотности объёмного заряда и потенциала в PIC [80], следующий:

1. В случайное место системы помещается n электронов и ионов. Координаты ионов и электронов могут подчиняться как равномерному распределению, так и распределению, соответствующему определённому заряду пылевой частицы.
2. Ионам и электронам присваиваются начальные скорости, таковые, что средняя скорость потока всех n частиц по выделенной оси равна v_d . Здесь v_d – скорость дрейфа плазмы, параметр, который задаётся в качестве константы.
3. Для n частиц решается уравнение Ньютона с шагом по времени равным dt , который определён таким образом, чтобы быть меньше электронного периода плазмы. В подавляющем большинстве случаев, уравнение Ньютона решается через линейное разложение дифференциала по времени (leap-frog method).
4. Фиксируется расположение каждого иона и электрона относительно узлов вычислительной сетки. Для узлов сетки рассчитывается уравнение Пуассона.
5. Вновь решается уравнение Ньютона, при этом новый потенциал системы равен тому, что рассчитался в узлах сетки.

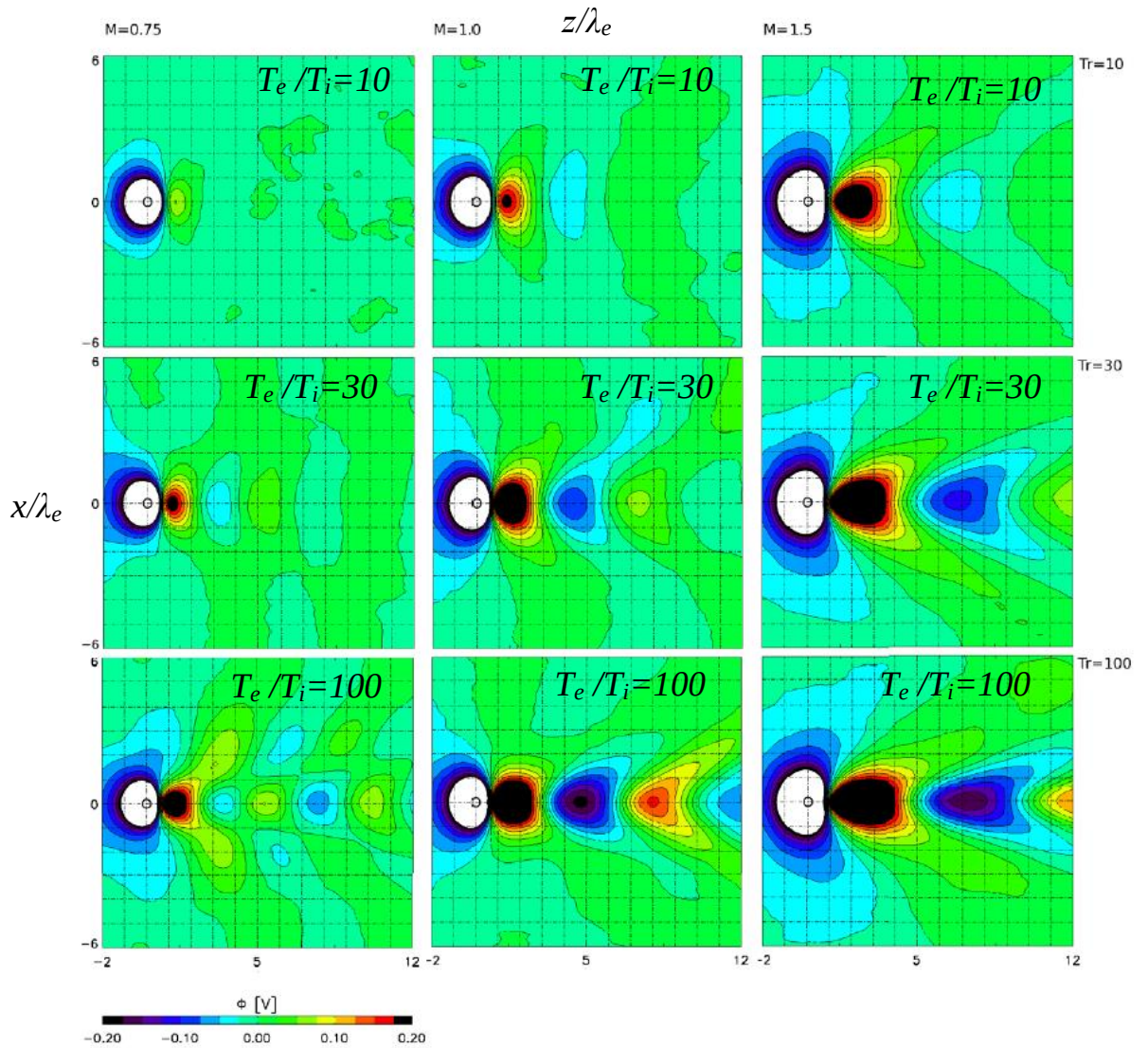


Рисунок 1.2.1. Самосогласованное пространственное распределение потенциала $U(x,z)$, полученное методом PIC в работе [100]

На Рисунке 1.2.1. показан результат расчёта методом PIC: самосогласованное пространственное распределение потенциала вблизи изолированной сферической пылевой частицы. По осям абсцисс и ординат – координаты x и z , представленные в электронных длинах Дебая. На Рисунке представлено самосогласованное пространственное распределение потенциала $U(x,z)$, для параметров, которые являются стандартными для лабораторной плазмы. Данный результат получен методом PIC в работе [100]. На Рисунке 1.2.1. представлено распределение $U(x,z)$ для различных отношений температур ионов и электронов: $T_r = T_e/T_i = 10, 30, 100$ и для

различных значений дрейфовой скорости плазмы, которые представлены в числах M . В [100] величина M определяется как:

$$M = u_i / c_s = u_i / \sqrt{kT_e / m_i}. \quad (1.2.1)$$

и представляет собой параметр, выполняющий роль чисел Маха в стандартном газе.

На Рисунке 1.2.1. представлен как дозвуковой режим ($M = 0.75$), так переходной ($M = 1.0$) и сверхзвуковой ($M = 1.5$) режимы.

Основной недостаток данного метода - ускорение расчётов требует большого количества упрощений. В их число входят: линейное разложение уравнений Ньютона и Пуассона, расчёт бесстолкновительной плазмы, нормировка ионной массы. Прямое вычисление без подобных приближений оказывается гораздо более трудоёмким.

1.3. Метод Linear Response.

Согласно приближению однокомпонентной плазмы, пылевую плазму можно разделить на подсистемы, которые состоят из изолированных частиц пыли, взаимодействующих со средой через динамически экранированный Кулоновский потенциал. Такой потенциал позволяет рассчитать то влияние, которое плазменные потоки оказывают на диэлектрический отклик в плазме. Функцию диэлектрической проницаемости $\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$ можно определить настолько сложной, насколько это возможно, чтобы модель динамического экранирования была способна описать любые эффекты, возникающие вблизи пылевых частиц. В число этих эффектов входит и формирование вейка [48,64].

Если предположить, что плазменный отклик на частицу пыли достаточно слабый (линейный), то электрический потенциал можно рассчитать через Фурье-преобразование:

$$U(r) = \int d^3k \frac{eZ_d}{2\pi^2 k^2 \varepsilon(\vec{k}, \vec{k} \cdot \vec{u}_i)} e^{i\vec{k}\vec{r}}; \quad (1.3.1)$$

Здесь Z_d – заряд пылевой частицы, u_i – скорость потока ионов, $\vec{r}$ – расстояние до пылевой частицы. В плазме, где распределение электронов равновесное, диэлектрическая проницаемость представлена через функцию, которая учитывает ион - нейтральные столкновения по модели Бхатнагара-Гросса-Крука [101,102].

$$\varepsilon(\vec{k}, \omega) = 1 + \frac{1}{k^2 \lambda_e^2} + \frac{1}{k^2 \lambda_i^2} \left(\frac{1 + \zeta_i Z(\zeta_i)}{1 + \frac{i \vartheta_{in}}{\sqrt{2} k v_{Ti}} Z(\zeta_i)} \right). \quad (1.3.2)$$

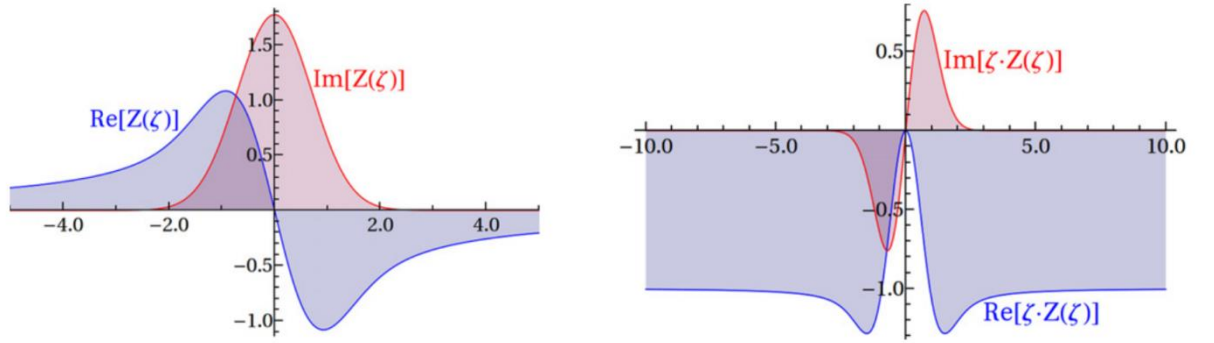


Рисунок 1.3.1. Мнимая и действительная части дисперсии плазмы $Z(\zeta)$ (слева) и выражения $\zeta \cdot Z(\zeta)$ (справа), которые представлены в формуле в (1.3.2) [100].

Здесь использована переменная:

$$\zeta_i = \frac{i \vartheta_{in} - \vec{k} \vec{u}_i}{\sqrt{2} k v_{Ti}}, \quad (1.3.3)$$

где v_{Ti} – тепловая скорость ионов.

В данном подходе экранирование электронами предполагается статическим (подчиняется потенциалу Дебая), в силу того, что электронным дрейфом можно пренебречь относительно тепловой скорости электронов ($u_e \ll v_{Te}$).

Функция $Z(\zeta)$ из (1.3.2) равна:

$$Z(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-t^2)}{t - \zeta} dt = i\sqrt{\pi} \exp(-\zeta^2) \operatorname{Erfc}(-i\zeta). \quad (1.3.4)$$

На Рисунке 1.3.1 приведены $Z(\zeta)$ и $\zeta Z(\zeta)$. Когда число Маха $M = 0$, то есть, когда направленный поток плазмы отсутствует и $u_i=0$, формула (1.3.2) сводится к сферически симметричному потенциалу Дебая-Хюккеля. Если $u_i \gg v_{Ti}$, то функция $\zeta Z(\zeta)$ стремится к единице, а расстояние, на котором заряд пылевой частицы экранируется ионами, растёт.

Общий алгоритм метода линейного отклика сводится к итеративному расчёту уравнения (1.3.1), при заданной функции диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$.

На Рисунке 1.3.2. показано самосогласованное пространственное распределение потенциала $U(x, z)$, полученное методом линейного отклика [100] для параметров плазмы, стандартных для лабораторных условий [103, 104]. На Рисунке 1.3.2. представлены пространственные распределения потенциала $U(x, z)$ для различных отношений температур ионов и электронов: $T_r = T_e/T_i = 10, 30, 100$ и различных чисел Маха. Частота столкновений ионов с нейтральными атомами являлась константой и была равна $\vartheta_{in}/\omega_{pi} = 0.1$, где ω_{pi} – плазменная частота. Из пространственных распределений потенциала видно, что, при усилении плазменного потока, за пылевой частицей возникает вейк. Чем больше число Маха M , тем более выраженной становится анизотропия.

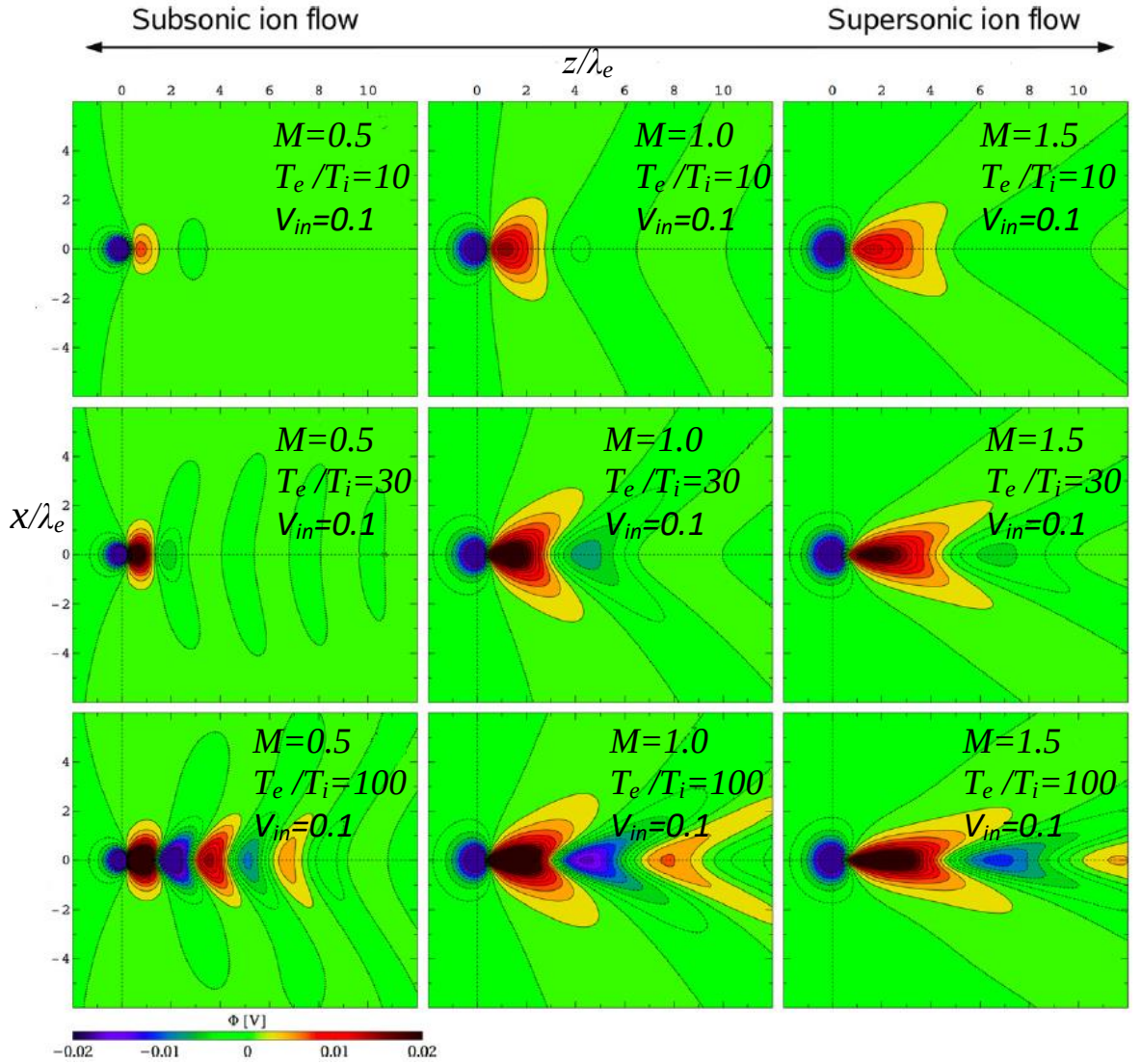


Рисунок 1.3.2. Самосогласованное пространственное распределение потенциала $U(x,z)$, полученное методом линейного отклика

Метод линейного отклика не лишён недостатков. Этот подход не способен рассчитать самосогласованный заряд пылевой частицы конечного размера. Другими словами, метод линейного отклика способен проводить расчёт самосогласованного пространственного распределения потенциала лишь вблизи точечных частиц, заряд которых фиксирован. Для больших значений параметра M в пространственном распределении потенциала возникают мнимые осцилляции [100]. Несмотря на то, что этот метод обладает относительно малой вычислительной трудоёмкостью, максимум развития этого подхода — расчёт распределения потенциала вблизи

изолированных частиц пыли. Данный подход не пригоден к изучению распределения потенциала вблизи множества пылевых частиц, а также вблизи пылевых частиц несферической формы.

1.4. Заключение по главе 1.

Представленный выше литературный обзор продемонстрировал что:

1. Изучение пылевой плазмы обладает большой значимостью, в силу того что она широко распространена как в космосе, так и в промышленности.

2. В силу своей многокомпонентности, крайне трудно решить задачу самоорганизации пылевых частиц только аналитическими методами.

3. В настоящий момент существуют два численных метода, которые рассчитывают самосогласованное пространственное распределение потенциала плазмы вокруг пылевых частиц в плазменном потоке – PIC и LR, однако оба метода имеют свои недостатки. В первом случае расчёт оказывается трудоёмким, что ведёт к необходимости применения ряда приближений. Во втором случае невозможно учесть конечный размер и форму пылевой частицы.

Данные выводы демонстрируют необходимость в создании модели, которая обладала бы большей скоростью вычислений, при этом избегала бы радикальных упрощений, что позволит с бóльшей точностью проводить исследования как изолированных пылевых частиц, так и пылевых кластеров.

Глава 2. Расчет самосогласованного пространственного распределения потенциала плазмы вблизи изолированных сферических пылевых частиц.

В данной главе проведён обзор модуля расчётной модели, в котором итеративным образом производится расчёт самосогласованных пространственных распределений плотности ионов и потенциала, вокруг изолированных сферических пылевых частиц, которые находятся под действием внешнего электростатического поля.

2.1. Зарядка пылевых частиц в бесстолкновительной газоразрядной плазме. Приближение ограниченного орбитального движения.

Если твёрдую частицу микронного размера поместить в ионизированный газ, то на её поверхность начинают падать электроны и ионы. В силу бóльшей подвижности, на поверхность пылевой частицы падает больше электронов, чем ионов, и пылевая частица приобретает отрицательный заряд. К отрицательно заряженной пылевой частице притягиваются ионы, а электроны, наоборот, отталкиваются от неё (см. Рисунок 2.1.1). В момент, когда потоки электронов и ионов уравниваются, заряд пылевой частицы становится равновесным, и испытывает лишь незначительные флуктуации.

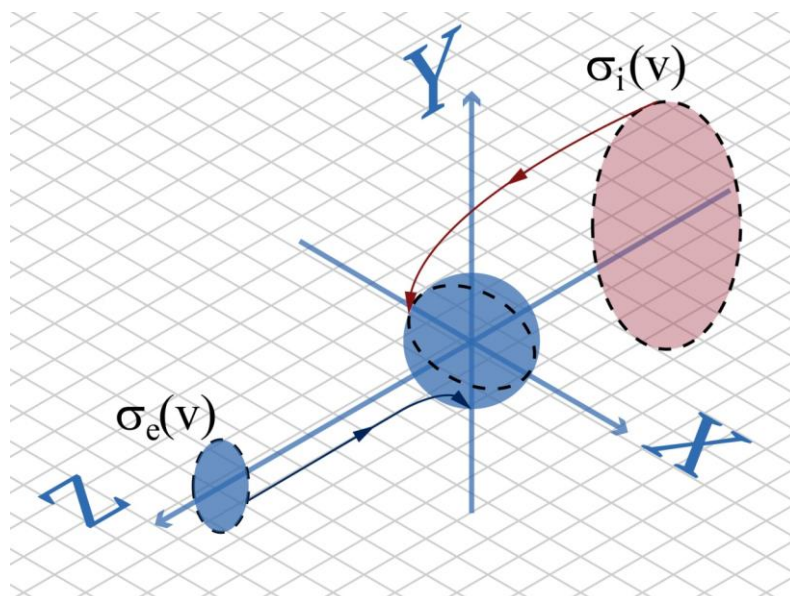


Рисунок 2.1.1. Схематичное изображение сечений падения электронов и ионов на пылевую частицу.

Традиционно, чтобы описать процессы зарядки пылевых частиц в газоразрядной плазме, в ход идут аналитические модели, которые широко используются для описания физических процессов, протекающих вблизи электрических зондов, помещённых в плазму. Одна из таких моделей - приближение ограниченного орбитального движения или «Orbit Motion Limited» (OML). Суть этого приближения заключается в том, что движение ионов и электронов в плазме считается бесстолкновительным. Сама пылевая частица в таком приближении считается изолированной, то есть соседняя к ней пылевая частица находится на таком удалении от неё, что потенциал, который соседняя частица индуцирует в плазме, не влияет на траектории электронов и ионов в окрестности рассматриваемой пылевой частицы [105]. В силу этого допущения, существует возможность рассчитать величины сечений, с которыми ионы и электроны падают на пылевую частицу, исходя из законов сохранения моментов импульса и энергии. Основное условие приближения OML можно представить в виде неравенства:

$$r_0 \ll \lambda_i \ll l_{i(e)}. \quad (2.1.1)$$

Здесь $\lambda_i = \left(\frac{kT_i}{4\pi e^2 n_\infty} \right)^{1/2}$ – ионная длина Дебая, r_0 – радиус пылевой частицы, $l_{i(e)}$ – длина свободного пробега ионов (электронов), n_∞ – плотность ионов в невозмущённой плазме, а kT_i – тепловая энергия ионов [105]. Если принять за истину тот факт, что поглощение электронов и ионов пылевой частицей совершается только при их касании с поверхностью пылевой частицы, то сечения поглощения электронов и ионов определяются из формул:

$$\sigma_e(v) = \begin{cases} \pi r_0^2 \left(1 + \frac{2e\varphi_s}{m_e v_e^2} \right), & \frac{2e\varphi_s}{m_e v_e^2} > -1 \\ 0, & \frac{2e\varphi_s}{m_e v_e^2} < -1 \end{cases} \quad (2.1.2)$$

$$\sigma_i(v) = \pi r_0^2 \left(1 - \frac{2e\varphi_s}{m_i v_i^2} \right). \quad (2.1.3)$$

Здесь e – единица элементарного заряда, $v_{i(e)}$ – относительная скорость ионов и электронов, $m_{i(e)}$ – ионная (электронная) масса, φ_s – поверхностный потенциал пылевой частицы. Ионы в данном рассмотрении считаются однозарядными, потенциал поверхности пылевой частицы принят отрицательным, а сечения $\sigma_{i(e)}(v)$ не зависят от точного вида потенциала вблизи пылевой частицы.

Потоки электронов и ионов, приходящие на поверхность пылевой частицы в единицу времени, определяются интегралом:

$$I_{i(e)} = n_{i(e)} \int v \sigma_{i(e)}(v) f_{i(e)}(v) d^3v. \quad (2.1.4)$$

Здесь $n_{i(e)}$ – концентрация ионов (электронов). Если распределение скоростей ионов и электронов подчиняется распределению Максвелла,

$$f_{i(e)} = (2\pi v_{T_{i(e)}}^2)^{-3/2} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{T_{i(e)}}^2}\right), \quad (2.1.5)$$

где $v_{T_{i(e)}} = \sqrt{\frac{T_{i(e)}}{m_{i(e)}}}$ - тепловая скорость ионов (электронов), то потоки ионов и

электронов определяются соотношениями:

$$I_e = \sqrt{8\pi} r_0^2 n_e v_{Te} \exp\left(\frac{e\varphi_s}{kT_e}\right), \quad (2.1.6)$$

$$I_i = \sqrt{8\pi} r_0^2 n_i v_{Ti} \left(1 - \frac{e\varphi_s}{kT_i}\right). \quad (2.1.7)$$

Заряд пылевой частицы определяется условием равновесия потоков ионов и электронов, падающих на пылевую частицу:

$$I_i = I_e. \quad (2.1.8)$$

Для удобства введём безразмерные параметры: $\tilde{z} = \frac{Z_d e^2}{r_0 k T_e}$ - абсолютная

величина заряда сферической пылевой частицы, $\tau = \frac{T_e}{T_i}$ - отношение

тепловых энергий ионов и электронов, $\mu = \frac{m_e}{m_i}$ - отношение масс ионов и

электронов. Стандартными для лабораторной газоразрядной плазмы являются соотношения $\tau \gg 1$, $\mu \ll 1$ [105].

Условие равновесия потоков (2.1.8), после использования соотношений (2.1.6) и (2.1.7) и приведения переменных к безразмерному виду, примет вид:

$$\exp(-\tilde{z}) = \frac{n_i}{n_e} \left(\frac{\mu}{\tau}\right)^{1/2} (1 + \tilde{z} \tau). \quad (2.1.9)$$

В случае, когда рассматривается задача изолированной пылевой частицы, условие квазинейтральности заряда в системе принимает форму: $n_i = n_e$. В таком случае, конечный вид уравнения (2.1.9) окажется следующим:

$$\exp(-\tilde{z}) = \left(\frac{\mu}{\tau}\right)^{1/2} (1 + \tilde{z} \tau). \quad (2.1.10)$$

Из уравнения (2.1.10) можно итеративно рассчитать заряд пылевой частицы в приближении OML. Это решение затем используется в численной модели в качестве начального приближения для величины заряда пылевой частицы, в отсутствие в системе внешнего электростатического поля.

2.2. Уравнение Пуассона.

Введём обозначения для пространственных распределений потенциала и плотности объёмного заряда плазмы: $U(\vec{r})$ и $n(\vec{r})$ соответственно. Уравнение, впервые полученное Пуассоном, которое, через пространственное распределение плотности объёмного заряда, определяет потенциал системы однозначным образом, следующее:

$$\Delta U(\vec{r}) = -4\pi en(\vec{r}). \quad (2.2.1)$$

Определим решение этого уравнения в виде функции Грина:

$$U(\vec{r}) = \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') n(\vec{r}') dV'. \quad (2.2.2)$$

Здесь $\vec{r}$ - радиус-вектор точки наблюдения поля, индуцированного объёмным зарядом в элементе объёма dV' , при этом $\vec{r}'$ - радиус-вектор, отвечающий за положение этого объёма в пространстве. Применив теперь к (2.2.2) оператор Лапласа и подставив в правую часть (2.2.2) уравнение Пуассона (2.2.1), выведем:

$$\int_V \nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') n(\vec{r}') dV' = -4\pi en(\vec{r}). \quad (2.2.3)$$

Таким образом,

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi e \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (2.2.4)$$

что следует из определения дельта-функции Дирака. Другими словами, функция G удовлетворяет уравнению Пуассона в случае, когда в системе находится точечный заряд.

Определим значение функции Грина (2.2.4) из соображения о том, что дельта-функция сферически симметрична, а значит, таковым должен быть и потенциал точечного заряда. Обозначим $R = \vec{r} - \vec{r}'$, тогда, для всех точек вне положения заряда, будет верным:

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (RG) = 0. \quad (2.2.5)$$

Проинтегрировав (2.2.5) по переменной R и введя нормировочное условие о том, что функция Грина равна нулю на бесконечности, получим:

$$G = \frac{C}{R}. \quad (2.2.6)$$

Здесь C – константа интегрирования, которая определяется из условия того, что электрическое поле, определяемое функцией Грина, совпадает с полем точечного заряда:

$$E = -\frac{dG}{dR} = \frac{C}{R^2} = \frac{1}{R^2}. \quad (2.2.7)$$

Таким образом:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.2.8)$$

Подставляя решение (2.2.8) в уравнение (2.2.2) получаем решение для уравнения Пуассона (2.2.1):

$$U(\vec{r}) = \int_v \frac{en(\vec{r}')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.2.9)$$

Взяв градиент от выражения (2.2.9), можно получить выражение для пространственного распределения электрического поля:

$$E(\vec{r}) = \int_v \frac{en(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (2.2.10)$$

2.3. Разложение пространственного распределения потенциала плазмы по полиномам Лежандра.

Если в системе, где в плазму помещён точечный заряд eZ_d , отсутствует анизотропия в виде внешнего поля или потока плазмы, то потенциал, индуцированный этим точечным зарядом, будет равен потенциалу Дебая-Хюккеля (Debye-Hückel):

$$U_D(r) = -\frac{eZ_d}{r} \exp(-r / \lambda_i). \quad (2.3.1)$$

Потенциал, индуцируемый точечным зарядом в системе, может и не совпадать с (2.3.1). Однако неоднократные численные исследования [102,106] систем, состоящих из изолированной пылевой частицы и окружающей плазмы, показали, что конечный потенциал вблизи пылевой частицы конечного размера с хорошей точностью совпадает с потенциалом Дебая (2.3.1). Такое совпадение считается необычным [102]. Потому, в представленной далее численной модели, в качестве начального приближения потенциала, индуцированного вблизи пылевой частицы, будет выбираться потенциал формы (2.3.1).

При отсутствии в плазме внешнего поля, пространственное распределение потенциала $U(r)$, а также пространственное распределение плотности электронов $n_e(r)$ и ионов $n_i(r)$ системы «пылевая частица – окружающая плазма» сферически симметричны.

При возникновении постоянного внешнего поля, направленного по одной из координатных осей (возьмём для простоты ось z), потенциал системы $U(r, \theta)$ становится цилиндрически симметричным. Полное пространственное распределение потенциала, в таком случае, можно представить в виде:

$$U_{tot}(r, \theta) = U(r, \theta) - Er \cos \theta, \quad E = const., \quad (2.3.2)$$

Здесь E – напряжение внешнего электростатического поля, а $U(r, \theta)$ – суперпозиция потенциалов пылевой частицы и окружающей её плазмы. Обозначим пространственные распределения плотности электронов и ионов как $n_e(r, \theta)$ и $n_i(r, \theta)$ соответственно. Пространственное распределение плотности объёмного заряда системы, использованное в параграфе 2.2, определяется выражением:

$$n(r, \theta) = n_i(r, \theta) - n_e(r, \theta). \quad (2.3.3)$$

В силу цилиндрической симметрии, уравнение Пуассона (2.2.1) можно записать в виде:

$$-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U_{tot}(r, \theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U_{tot}(r, \theta)}{\partial \theta} \right) = 4\pi e n(r, \theta). \quad (2.3.4)$$

Потенциал $U(r, \theta)$ из (2.3.2), также удовлетворяет (2.3.4), в силу того, что $\Delta(E_z r \cos \theta) \equiv 0$.

Если в задаче используется частица заряда eZ_d , то, используя (2.2.9), формулу (2.3.4) можно привести к виду:

$$\begin{aligned} U(r, \theta) &= -\frac{eZ_d}{r} + e \int_{r_0}^{\infty} dr' r'^2 \int_0^{\pi} d\theta' \sin \theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{n(r', \theta')}{|\vec{r}' - \vec{r}|} = \\ &= -\frac{eZ_d}{r} + e \int_{r_0}^{\infty} dr' r'^2 \int_0^{\pi} d\theta' \sin \theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{n(r', \theta')}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}}. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Здесь

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi'). \quad (2.3.6)$$

Используем следующее полиномиальное разложение [107]:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}} = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^k P_k(\cos \gamma), \quad r' < r, \quad (2.3.7)$$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}} = \frac{1}{r'} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'} \right)^k P_k(\cos \gamma), \quad r' > r. \quad (2.3.8)$$

Здесь $P_k(\cos \theta)$ – полиномы Лежандра,

$$P_0(\cos \theta) = 1, P_1(\cos \theta) = \cos \theta, P_2(\cos \theta) = (3\cos^2 \theta - 1)/2 \dots \quad (2.3.9)$$

Разложим пространственные распределения плотности объёмного заряда и потенциала системы по полиномам (2.3.9):

$$n(r, \theta) = \sum_{k=0} n^{(k)}(r) P_k(\cos \theta), \quad (2.3.10)$$

$$U(r, \theta) = \sum_{k=0} U^{(k)}(r) P_k(\cos \theta). \quad (2.3.11)$$

Используя условие ортогональности полиномов Лежандра [107]:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} P_k(\cos \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4\pi \delta_{kn}}{2k+1}, \quad (2.3.12)$$

и условие ортогональности:

$$\begin{aligned} P_j(\cos \gamma) = & P_j(\cos \theta) P_j(\cos \theta') + \\ & + 2 \sum_{m=-j}^{m=j} \frac{(j-m)!}{(j+m)!} P_j^m(\cos \theta) P_j^m(\cos \theta') \cos(\varphi - \varphi'), \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

где $P_j^m(\cos \theta)$ - присоединенные полиномы Лежандра. Подставим (2.3.7-2.3.13) в (2.3.5) и проинтегрируем по углам θ и φ :

$$\begin{aligned} U(r, \theta) = & -\frac{eZ_d}{r} + \sum_{k=0} U^{(k)}(r) P_k(\cos \theta) = \\ = & -\frac{eZ_d}{r} + \sum_k \frac{4\pi e}{2k+1} \left[\frac{1}{r^{k+1}} \int_{r_0}^r dx x^{k+2} n^{(k)}(x) + r^k \int_r^\infty dx \frac{n^{(k)}(x)}{x^{k-1}} \right] P_k(\cos \theta) \\ = & -\frac{eZ_d}{r} + 4\pi e \left[\frac{1}{r} \int_{r_0}^r dx x^2 n^{(0)}(x) + \int_r^\infty dx x n^{(0)}(x) \right] + \\ & + \frac{4\pi e}{3} \left[\frac{1}{r^2} \int_{r_0}^r dx x^3 n^{(1)}(x) + r \int_r^\infty dx n^{(1)}(x) \right] P_1(\cos \theta) + \\ & + \frac{4\pi e}{5} \left[\frac{1}{r^3} \int_{r_0}^r dx x^4 n^{(2)}(x) + r^2 \int_r^\infty dx \frac{n^{(2)}(x)}{x} \right] P_2(\cos \theta) + \dots \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Первый член в выражении (2.3.14) - кулоновский потенциал, создаваемый заряженной пылевой частицей. Члены разложения, которые следуют за первым, представляют собой реакцию ионизированной системы на появление в ней пылевой частицы. Эти члены можно разделить на

изотропный ($k=0$), дипольный ($k=1$), квадрупольный ($k=2$) (и так далее). Все члены с $k>0$ возникают только при наличии в системе анизотропии.

При отсутствии внешнего поля, потенциал может быть представлен в виде (2.3.1). Пространственное распределение плотности ионов, в таком случае, определяется из (2.3.6):

$$-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U^{(0)}(r)}{\partial r} \right) = 4\pi e n^{(0)}(r), U^{(0)}(r) = -\frac{eZ_d}{r} \exp(-r/\lambda_i). \quad (2.3.15)$$

Следовательно, распределение плотности объёмного заряда:

$$n^{(0)}(r) = \frac{eZ_d}{4\pi e^2 \lambda_i^2 r} \exp(-r/\lambda_i). \quad (2.3.16)$$

2.4. Описание численной модели, созданной для расчёта самосогласованного пространственного распределения потенциала, вокруг изолированных сферических пылевых частиц через разложение плотности объёмного заряда по полиномам Лежандра.

Определение самосогласованного пространственного распределения потенциала вблизи пылевой частицы – задача трудоёмкая.

Для получения полного самосогласованного решения задачи изолированной пылевой частицы, окружённой низкотемпературной плазмой, необходимо определить функцию распределения для ионов и электронов и потенциал, исходя из системы уравнений Больцмана-Пуассона:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{E}}{m_i} \frac{\partial f_i}{\partial \vec{v}} &= \left(\frac{df_i}{dt} \right)_{coll}, \\ \frac{\partial f_e}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f_e}{\partial \vec{r}} - \frac{\vec{E}}{m_e} \frac{\partial f_e}{\partial \vec{v}} &= \left(\frac{df_e}{dt} \right)_{coll}, \\ \Delta U(\vec{r}) &= -4\pi e n(\vec{r}). \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

В целях решения данных уравнений, часто применяют методы численного моделирования, в которых рассчитываются траектории ионов и

электронов, что позволяет моделировать эволюцию системы. В таком подходе полученные траектории будут характеристиками системы уравнений (2.4.1).

В представленной ниже модели проводится моделирование траекторий ионов в эффективном поле. При этом действует предположение, что пространственное распределение плотности электронов в расчётной области удовлетворяют распределению Больцмана. В этом случае, система (2.4.1) сводится к виду:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{E}}{m_i} \frac{\partial f_i}{\partial \vec{v}} = \left(\frac{df_i}{dt} \right)_{coll},$$

$$\Delta U(\vec{r}) = -4\pi en(\vec{r}). \quad (2.4.2)$$

Задача, решённая в виде (2.4.2), является модельной. Для решения системы (2.4.2) была разработана численная модель, основным подходом к расчёту самосогласованного пространственного распределения потенциала в которой является итерационный метод. В данном параграфе будет рассмотрена та часть модели, которая предназначена для расчёта самосогласованного пространственного распределения потенциала в случае слабой анизотропии плазмы вокруг изолированной пылевой частицы сферической формы. Это позволяет использовать для определения самосогласованного пространственного распределения потенциала разложение пространственного распределения плотности объёмного заряда системы по полиномам Лежандра.

Геометрия системы. Численная модель описывает систему, которая состоит из изолированной сферической пылевой частицы и окружающей её плазмы. Электроны, а также, частично, ионы [29-36], будут экранировать заряд этой пылевой частицы. Исходя из целей задачи, геометрия расчетной области была выбрана в виде куба. В центр этого куба была помещена непроницаемая сфера радиуса $r_0 \ll \lambda_i$. В этой системе также присутствует внешнее электростатическое поле E , направленное по оси z . Длина граней

куба задавалась равной $2L$ (от $-L$ до L для координатных осей). Величина L выбиралась эмпирически, таким образом, чтобы, при каждом уникальном наборе параметров: размере пылевой частицы и напряжённости внешнего электростатического поля, значение плотности ионов на границе вычислительной системы соответствовало значению плотности ионов в невозмущённой плазме.

Граничные условия на потенциал. Геометрия системы предполагает, что к граням расчётной области, ограниченной кубом, примыкают кубы того же объёма, с непроницаемой сферой в центре каждого из них. Такая постановка задачи, налагает на совокупный потенциал ионов, электронов и пылевой частицы (из которого исключается потенциал внешнего электростатического поля) следующее граничное условие:

$$\left. \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial x} \right|_{x=L,-L} = \left. \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial y} \right|_{y=L,-L} = \left. \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial z} \right|_{z=L,-L} = C,$$

где постоянная C была выбрана равной нулю.

Динамика ионов. В начале вычислений генерировался один ион, координаты и компоненты скоростей которого задавались случайно. Скорости иона задавались таким образом, чтобы их величины подчинялись распределению Максвелла для температуры ионов равной $T_i = 300\text{K}$.

Чтобы рассчитать траекторию этого сгенерированного иона, были использованы уравнения движения Ньютона, более подробное обсуждение которых приведено ниже. Из уравнений Ньютона рассчитывалась траектория движения иона в поле, индуцированным пылевой частицей и внешним электростатическим полем. Во время этого движения данный ион мог:

- 1) упасть на пылевую частицу ($r \leq r_0$),
- 2) вылететь за пределы вычислительной области ($|x/y/z| > L$),
- 3) столкнуться с нейтральным атомом.

Выполнение первого условия означало, что ион достиг поверхности пылевой частицы - непроницаемой сферы. В таком случае, этот ион считался

поглощённым, и вместо него генерировался новый - со случайным положением и скоростями.

В случае, когда ион выходил за область вычислений по какой-либо из координатных осей, он переносился по этой координатной оси в противоположный край кубической области:

$$x_{n+1} = -\text{sgn}(x_n) \parallel x_n \parallel - \parallel 2L \parallel, \text{ если } : x_n > L. \quad (2.4.3)$$

При этом, значения компонент скорости этого иона не изменялись.

Если ион пролетал дистанцию, которая была соизмерима с длиной свободного пробега этого иона, то моделировался процесс столкновения этого иона с нейтральным атомом. В данной работе рассматривается два типа столкновений. Первым типом столкновений являлся процесс резонансной перезарядки иона с нейтральным атомом в собственном газе с сечением σ_{res} . В первом случае происходило моделирование процесса передачи заряда, который заключался в том, что генерировался новый ион, положение которого совпадало с положением прошлого иона. Значения компонент скорости нового иона переопределялись согласно распределению Максвелла:

$$x_{n+1} = |x_n|, \quad v_{x,n+1} = \text{Random}(f_{vx}), \quad f_{vx} = \sqrt{\left(\frac{m_i}{2\pi k T_i}\right)} \exp\left(\frac{-m_i v_{x,n+1}^2}{2k T_i}\right) \quad (2.4.4)$$

Здесь m_i – масса ионов, T_i - температура ионов, k - постоянная Больцмана.

Время между этими столкновениями определялось средней длиной свободного пробега l_i процесса резонансной перезарядки ионов с нейтральными атомами. Средняя длина свободного пробега – один из основных параметров данной задачи и для каждого вычисления задавался константой. Для каждого конкретного иона рассчитывалась собственная длина свободного пробега l , которая подчинялась распределению:

$$f_l = \frac{\exp(-l/l_i)}{l_i}. \quad (2.4.5)$$

Вторым типом столкновений, которые моделировались в описываемой модели, были ион-нейтральные упругие столкновения с сечением σ_{el} . При моделировании этого типа столкновений, положение наблюдаемого иона всё также оставалось прежним, однако его скорости изменялись следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{V}_{ц.м.} &= \frac{\vec{V}_n + \vec{u}}{2}, \quad \vec{v}_{n,ц.м.} = \vec{V}_n - \vec{V}_{ц.м.}, \\ \vec{v}_{n+1,ц.м.} &= |\vec{v}_{n,ц.м.}| \vec{n}, \quad \vec{v}_{n+1} = \vec{v}_{n+1,ц.м.} + \vec{V}_{ц.м.}. \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Здесь $\vec{V}_{ц.м.}$ – скорость центра масс, $\vec{u}$ – скорость нейтрального атома, которая генерировалась случайным образом, согласно распределению Максвелла, $\vec{n}$ – случайно направленный вектор единичной длины. Таким образом, модуль скорости иона сохраняется в системе центра масс. Время между упругими столкновениями ионов и нейтральных атомов также определялось из средней длины свободного пробега.

Сечения двух типов столкновений σ_{res} и σ_{el} отличаются в несколько раз. В данной модели однозарядная плазма, в которой находится сильно заряженная пылевая частица, является ионизированным благородным газом аргон. В случае аргона, для иона, энергия которого равна одному электрон вольту ($\varepsilon = 1eV$) сечение процесса резонансной перезарядки ионов с нейтральными атомами $\sigma_{res} = 55.3 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2$ [108,109] и изменяется незначительно с изменением энергии иона.

В качестве апробации блока модели, посвящённого моделированию динамики ионов, был проведён ряд расчётов. В системе, где отсутствовала пылевая частица, генерировался ион со своим уникальным набором координат, скоростей и длиной свободного пробега, а затем, рассчитывалась дрейфовая скорость этого иона во внешнем электростатическом поле. Расчёты проводились для случаев, когда учитывался только процесс

резонансной перезарядки ионов с нейтральными атомами или только упругие столкновения ионов с нейтральными атомами. Сравнение полученных результатов с результатами эксперимента, проведённого для однозарядной плазмы Ar^+ , представлено на Рисунке 2.4.1:

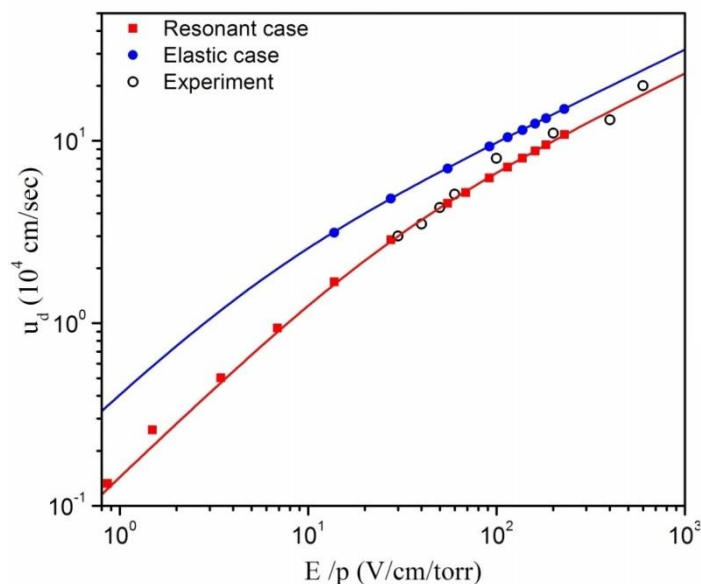


Рисунок 2.4.1. Зависимость дрейфовой скорости иона от приведённого внешнего электростатического поля для различных типов взаимодействий ионов с нейтральными атомами. Белыми точками обозначены результаты эксперимента, проведённого для однозарядной плазмы Ar^+ [110]

Из Рисунка 2.4.1 видно, что зависимость дрейфовой скорости ионов от приведённого поля, рассчитанная только при учёте процесса резонансной перезарядки ионов с нейтральными атомами, имеет наилучшее совпадение с результатами эксперимента. Данные, представленные на этой зависимости, были опубликованы в работе [111].

Определение распределения ионов. Несмотря на то, что расчёт траекторий ионов происходит в декартовых координатах, вычисление пространственного распределения плотности ионов $n_i(r, \varphi, \theta)$ осуществлялось в сферических координатах r, φ, θ .

В этом подходе направление $\theta=0^\circ, 180^\circ$ (ось z) отвечает за направление внешнего электростатического поля E . Таким образом, удаётся исключить зависимость пространственных распределений от полярного угла φ . Выбранная в форме куба вычислительная область была разделена на ячейки (i,j) по радиусу и азимутальному углу (см. Рисунок 2.4.2) так, чтобы объём каждой ячейки подчинялся следующему закону:

$$V_{i,j} = 2\pi r_i^2 \Delta r_i \sin \theta_j \Delta \theta_j. \quad (2.4.7)$$

Здесь i - порядковый номер ячейки, отвечающий за деление по радиусу, j - порядковый номер ячейки, отвечающий за деление по углу.

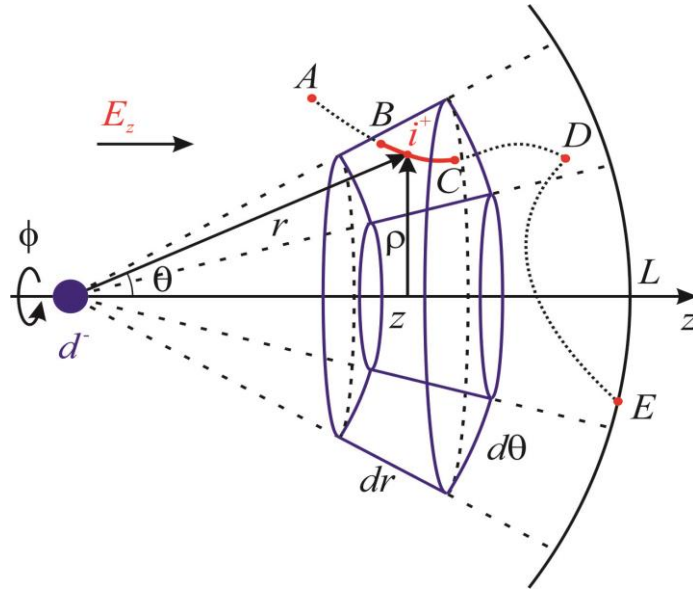


Рисунок 2.4.2. Схематическое изображение разделения вычислительной области на ячейки по радиусу и азимутальному углу.

Время $T_{i,j}$, которое наблюдаемый ион провёл в сегменте пространства (i,j) , записывается в массив, отвечающий данному сегменту. При этом значение времени нормируется на объём ячейки $V_{i,j}$:

$$n_i(i, j) = n_i(i, j) + \frac{T_{i,j}}{V_{i,j}}. \quad (2.4.8)$$

Накопленное таким образом время прямо пропорционально ионной плотности в каждой точке пространства $n_i(i, j) = A n_i(r, \theta, \varphi)$. Коэффициент пропорциональности определяется из условия того, что пространственное распределение плотности ионов на границе вычислительной области совпадало с плотностью ионов в невозмущённой плазме n_∞ :

$$A = n_\infty / \langle n_i(i, j) \rangle_{border}. \quad (2.4.9)$$

Здесь $\langle n_i(i, j) \rangle_{border}$ – усреднённое время пребывания ионов в граничных сегментах системы.

Безразмерные переменные. Расчёт самосогласованных пространственных распределений в численной модели проводится с использованием безразмерных переменных. Все величины, которые имели размерность длины, нормировались на ионную длину Дебая λ_i . Пространственные распределения плотностей ионов $n_i(r, \theta, \varphi)$ и электронов $n_e(r, \theta, \varphi)$ нормировались на плотность ионов невозмущённой плазмы n_∞ , которая в модели задавалась в качестве параметра. Энергия ионов нормировалась на тепловую энергию ионов в невозмущённой плазме kT_i . Скорости ионов, а также все временные параметры в модели были нормированы на тепловую скорость ионов $V_T = \sqrt{kT_i/m_i}$ и время $T = \sqrt{m_i \lambda_i^2 / kT_i}$ соответственно. При таком выборе нормировочных коэффициентов, безразмерный заряд пылевой частицы $\tilde{Q}$ и безразмерная напряжённость внешнего электростатического поля $\tilde{E}$ задаются выражениями:

$$\tilde{Q} = \frac{e^2 Z_d}{\lambda_i kT_i}, \quad \tilde{E} = \frac{e E \lambda_i}{kT_i}. \quad (2.4.10)$$

Разложение по полиномам Лежандра. Начальный потенциал, определяющий траектории ионов, которые движутся в кубической расчётной области в начале вычислений, выбран в виде (2.3.2). В сферической системе координат, после процедуры нормировки на размерные параметры,

суперпозиция потенциалов Дебая-Хюккеля и внешнего электростатического поля запишется в следующем виде:

$$U_{tot}(r, \theta) = U_0(r, \theta) - \tilde{E}r \cos \theta = -\frac{\tilde{Q}}{r} \exp(-r) - \tilde{E}r \cos \theta. \quad (2.4.11)$$

В случае, когда внешнее электростатическое поле $\tilde{E} < 1$, пространственные распределения плотностей ионов $n_i(r, \theta)$ и электронов $n_e(r, \theta)$, а также электрического потенциала $U(r, \theta)$ искривляются слабо в направлении $\tilde{E}$.

В случае, когда напряжённость $\tilde{E}$ внешнего электростатического поля мала, пространственное распределение плотности объёмного заряда $n(r, \theta)$ в уравнении Пуассона (2.2.1) можно разложить по полиномам Лежандра и таким образом определить $U(r, \theta)$ по формуле (2.3.14). В таком подходе безразмерное пространственное распределение плотности объёмного заряда $n(r, \theta)$ можно записать в виде:

$$n(r, \theta) = \frac{n_i(r, \theta) - n_e(r, \theta)}{n_\infty} = \sum_{k=0} n_k(r) P_k(\cos \theta), \quad (2.4.12)$$

$$n_k(r) = \frac{2k+1}{2} \int_0^\pi n(r, \theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

Здесь пространственное распределение электронной плотности $n_e(r, \theta)$ задаётся распределением Больцмана, $n_e(r, \theta) = n_\infty \exp(-eU(r, \theta)/kT_e)$, где $U(r, \theta)$ – потенциал предыдущей итерации расчёта.

В случае, когда внешнее электростатическое поле $\tilde{E} < 0.1$, для полноценного описания задачи сферической изолированной пылевой частицы в плазме, достаточно первых двух членов полиномиального разложения:

$$\begin{aligned}
n_0(r) &= \frac{1}{2} \int_0^\pi n(r, \theta) P_0(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi n(r, \theta) \sin \theta d\theta, \\
n_1(r) &= \frac{3}{2} \int_0^\pi n(r, \theta) P_1(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{3}{2} \int_0^\pi n(r, \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta.
\end{aligned} \tag{2.4.13}$$

Первые два члена разложения пространственного распределения плотности объёмного заряда особенно важны. Нулевой, изотропный член разложения $n_0(r)$ определяет полный заряд окружающей плазмы $\tilde{Q}_{pl}$ вокруг пылевой частицы заряда $\tilde{Q}$ через интеграл:

$$\tilde{Q}_{pl} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\pi n(r, \theta) r^2 \sin \theta d\theta dr = \int_0^\infty n_0(r) r^2 dr. \tag{2.4.14}$$

При совпадении значений двух зарядов $\tilde{Q}_{pl}$ и $\tilde{Q}$ выполняется условие квазинейтральности, которое заключается в равенстве зарядов, индуцированного потоками ионов и электронов на пылевую частицу и индуцированного в окружающей плазме отрицательно заряженной пылевой частицей. Выполнение условия квазинейтральности - одно из основных требований к самосогласованности пространственного распределения плотности объёмного заряда.

Под действием внешнего электростатического поля облако ионов искажается относительно отрицательно заряженной частицы пыли, что приводит к появлению в системе дипольного момента. Первый анизотропный член разложения $n_1(r)$ определяет дипольный момент системы через интеграл:

$$\tilde{P}_{pl} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\pi n(r, \theta) r^3 \cos \theta \sin \theta d\theta dr = \frac{1}{3} \int_0^\infty n_1(r) r^3 dr. \tag{2.4.15}$$

Используя безразмерные переменные, формулу (2.3.14) можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned}
U_{tot}(r, \theta) = U(r, \theta) - \tilde{E}r \cos \theta = -\frac{\tilde{Q}}{r} + \sum_{k=0} U_k(r) P_k(\cos \theta) - \tilde{E}r \cos \theta = \\
-\frac{\tilde{Q}}{r} + \sum_k \frac{1}{2k+1} \left[\frac{1}{r^{k+1}} \int_{r_0}^r n_k(r) x^{k+2} dx + r^k \int_r^\infty n_k(r) x^{1-k} dx \right] P_k(\cos \theta) - \\
-\tilde{E}r \cos \theta.
\end{aligned} \tag{2.4.16}$$

или, для случая, когда напряжённость внешнего электростатического поля мала $\tilde{E} < 0.1$:

$$\begin{aligned}
U(r, \theta) = -\frac{\tilde{Q}}{r} + \left[\frac{1}{r} \int_{r_0}^r dx x^2 n^{(0)}(x) + \int_r^\infty dx x n^{(0)}(x) \right] + \\
+ \frac{1}{3} \left[\frac{1}{r^2} \int_{r_0}^r dx x^3 n^{(1)}(x) + r \int_r^\infty dx x n^{(1)}(x) \right] P_1(\cos \theta) - \tilde{E}r \cos \theta.
\end{aligned} \tag{2.4.17}$$

Самосогласованное пространственное распределение компонент силы. В силу того, что объём сегментов, разделяющих вычислительную область, уникален для каждого сегмента, определение компонент силы методами конечно-разностных схем сопряжено с трудностями. В целях достижения более высокой точности расчёта компонент силы, компоненты силы в данной модели определялись из дифференцирования формулы (2.4.16) по координатным направлениям.

Формулы, по которым определяются компоненты силы, для декартовой системы координат, могут быть представлены в виде:

$$F_\alpha(x, y, z) = -\frac{dU_{tot}(x, y, z)}{dr_\alpha}. \tag{2.4.18}$$

Подставляя (2.4.16) в (2.4.18) и производя покомпонентное дифференцирование, получим формулы для компонент силы в конечной форме:

$$\begin{aligned}
F_x(x, y, z) &= -\frac{\tilde{Q}_x}{r^3} + \\
&+ \sum_k \frac{x}{2k+1} \left[\frac{k+1}{r^{k+3}} \int_{r_0}^r n_k(r) x^{k+2} dx - kr^{k-2} \int_r^\infty n_k(r) x^{1-k} dx \right] P_k(\cos\theta) + \\
&+ \frac{xz}{r^3} \sum_k \frac{1}{2k+1} \left[\frac{1}{r^{k+1}} \int_{r_0}^r n_k(r) x^{k+2} dx + r^k \int_r^\infty n_k(r) x^{1-k} dx \right] P_k'(\cos\theta), \\
F_y(x, y, z) &= -\frac{\tilde{Q}_y}{r^3} + \\
&+ \sum_k \frac{y}{2k+1} \left[\frac{k+1}{r^{k+3}} \int_{r_0}^r n_k(r) x^{k+2} dx - kr^{k-2} \int_r^\infty n_k(r) x^{1-k} dx \right] P_k(\cos\theta) + \\
&+ \frac{yz}{r^3} \sum_k \frac{1}{2k+1} \left[\frac{1}{r^{k+1}} \int_{r_0}^r n_k(r) x^{k+2} dx + r^k \int_r^\infty n_k(r) x^{1-k} dx \right] P_k'(\cos\theta), \\
F_z(x, y, z) &= -\frac{\tilde{Q}_z}{r^3} + \\
&+ \sum_k \frac{z}{2k+1} \left[\frac{k+1}{r^{k+3}} \int_{r_0}^r n_k(r) x^{k+2} dx - kr^{k-2} \int_r^\infty n_k(r) x^{1-k} dx \right] P_k(\cos\theta) + \\
&+ \frac{\rho^2}{r^3} \sum_k \frac{1}{2k+1} \left[\frac{1}{r^{k+1}} \int_{r_0}^r n_k(r) x^{k+2} dx + r^k \int_r^\infty n_k(r) x^{1-k} dx \right] P_k'(\cos\theta) - \tilde{E}z.
\end{aligned} \tag{2.4.19}$$

Расчёт траекторий ионов. В данной модели, траектории ионов определяются итеративным решением уравнений Ньютона.

$$\frac{d^2 r_\alpha}{dt^2} = -\frac{dU(x, y, z)}{dr_\alpha}, \quad r_\alpha = x, y, z. \tag{2.4.20}$$

Для начального потенциала вида (2.4.11), формулы (2.4.20) принимают вид:

$$\frac{d^2 r_\alpha}{dt^2} = -\frac{\tilde{Q}\left(\frac{1}{r}+1\right)r_\alpha e^{-r}}{r^2} + \frac{d(\tilde{E} \cdot z)}{dr_\alpha}. \quad (2.4.21)$$

В данной модели, эти уравнения решаются по схеме Рунге-Кутты четвёртого порядка. Коэффициенты k этой схемы, в случае уравнения Ньютона вида (2.4.21), определяются соотношениями:

$$k_{1,v_\alpha} = -\left(\frac{\tilde{Q}\left(\frac{1}{r}+1\right)r_\alpha e^{-r}}{r^2} - \tilde{E} \frac{dz}{dr_\alpha} \right) dt, \quad k_{1,r_\alpha} = v_\alpha dt, \quad (2.4.22)$$

$$r = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^3 (r_\alpha)^2},$$

$$k_{2,v_\alpha} = -\left(\frac{\tilde{Q}\left(\frac{1}{r_1}+1\right)\left(r_\alpha + \frac{k_{1,r_\alpha}}{2}\right)e^{-r_1}}{r_1^2} - \tilde{E} \frac{d\left(z + \frac{k_{1,z}}{2}\right)}{dr_\alpha} \right) dt, \quad k_{2,r_\alpha} = \left(v_\alpha + \frac{k_{1,v_\alpha}}{2}\right) dt, \quad (2.4.23)$$

$$r_1 = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^3 \left(r_\alpha + \frac{k_{1,r_\alpha}}{2}\right)^2}.$$

$$k_{3,v_\alpha} = -\left(\frac{\tilde{Q}\left(\frac{1}{r_2}+1\right)\left(r_\alpha + \frac{k_{2,r_\alpha}}{2}\right)e^{-r_2}}{r_2^2} - \tilde{E} \frac{d\left(z + \frac{k_{2,z}}{2}\right)}{dr_\alpha} \right) dt, \quad k_{3,r_\alpha} = \left(v_\alpha + \frac{k_{2,v_\alpha}}{2}\right) dt, \quad (2.4.24)$$

$$r_2 = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^3 \left(r_\alpha + \frac{k_{2,r_\alpha}}{2}\right)^2}.$$

$$k_{4,v_\alpha} = - \left(\frac{\tilde{Q} \left(\frac{1}{r_3} + 1 \right) (r_\alpha + k_{3,r_\alpha}) e^{-r_3}}{r_3^2} - \tilde{E} \frac{d(z + k_{3,z})}{dr_\alpha} \right) dt, \quad k_{4,r_\alpha} = (v_\alpha + k_{3,v_\alpha}) dt,$$

$$r_3 = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^3 (r_\alpha + k_{3,r_\alpha})^2}, \quad (2.4.25)$$

$$r_{\alpha,(n+1)} = r_{\alpha,(n)} + \frac{1}{6} (k_{1,r_\alpha} + 2k_{2,r_\alpha} + 2k_{3,r_\alpha} + k_{4,r_\alpha}),$$

$$v_{\alpha,(n+1)} = v_{\alpha,(n)} + \frac{1}{6} (k_{1,v_\alpha} + 2k_{2,v_\alpha} + 2k_{3,v_\alpha} + k_{4,v_\alpha}). \quad (2.4.26)$$

Результаты расчётов ионных траекторий по указанной выше схеме обладают четвёртым порядком точности. В описываемой модели временной шаг dt , по которому раскладываются дифференциалы по времени, определяется таким образом, чтобы каждый сегмент пространства объёма (2.4.7) ион преодолевал не менее чем за десять периодов по времени dt . Соотношения (2.4.21-26) приведены для случая, когда потенциал вычислительной области задан суперпозицией потенциалов Дебая и внешнего электростатического поля (2.4.11). В случае, когда потенциал определяется уравнением (2.4.16), в соотношениях (2.4.22-26), определяющих коэффициенты k_{1-4,r_α} используются компоненты силы, определённые уравнениями (2.4.19).

Определение заряда пылевой частицы. Заряд пылевой частицы определяется из условия (2.1.8) равенства потоков ионов и электронов, которые падают на пылевую частицу. Для удобства определения заряда пылевой частицы использована следующая форма безразмерного заряда пылевой частицы:

$$\tilde{z} = \frac{e^2 Z_d}{r_0 k T_e}. \quad (2.4.27)$$

Поток электронов на частицу определяется, исходя из приближения OML (2.1.6):

$$I_e = \sqrt{8\pi} r_0^2 n_\infty v_e \exp(-\tilde{z}). \quad (2.4.28)$$

В свою очередь, поток ионов вычисляется из соотношения:

$$I_i = \frac{N_{fall}}{T_{calc}} n_\infty V_{syst}. \quad (2.4.29)$$

Здесь V_{syst} - общий объём вычислительной области, который, в случае, когда геометрия расчётной области выбрана в виде куба, равен $V_{syst} = 8L^3$; T_{calc} - общее время, которое прошло с момента запуска расчёта самосогласованной модели; N_{fall} - общее число ионов, поглощенных пылевой частицей с момента запуска расчёта.

Безразмерный заряд пылевой частицы, определённый в виде (2.4.27), определяется на каждой итерации согласно соотношению:

$$\tilde{z}_{(n+1)} = \tilde{z}_{(n)} - h \frac{(I_i - I_e)}{n_\infty V_{syst}}. \quad (2.4.30)$$

Здесь h - коэффициент, выбранный эмпирически так, чтобы итеративный процесс расчёта заряда (2.4.30) сходил.

После проведённой процедуры коррекции величины заряда пылевой частицы, записанного в форме (2.4.27), заряд пылевой частицы переопределяется, для соответствия форме (2.4.10), из соотношения:

$$\tilde{Q} = \tilde{z} \frac{r_0 T_e}{\lambda_i T_i}, \quad (2.4.31)$$

затем, заряд пылевой частицы в форме (2.4.31) используется в расчёте траекторий ионов и пространственного распределения самосогласованного потенциала.

Общая итеративная схема расчёта самосогласованного потенциала следующая:

1) Производится поочерёдный расчёт траекторий ионов уравнением (2.4.20), для потенциала, который представляет собой суперпозицию потенциалов Дебая и внешнего электростатического поля (2.4.11). Количество одновременно рассчитываемых траекторий зависит от числа используемых потоков процессора ЭВМ.

2) Из этих траекторий рассчитывается, какое количество времени каждый ион пробыл в каждом сегменте пространства.

3) После того как произведён расчёт пространственного распределения плотности ионов $n_i(r, \theta)$ из соотношения (2.4.9), из соотношений (2.4.12) определяется пространственное распределение плотности объёмного заряда $n(r, \theta)$, а затем производится расчёт гармоник $n_k(r)$ полиномиального разложения Лежандра.

4) Согласно соотношениям (2.4.30-31), корректируется величина заряда пылевой частицы.

5) Из формул (2.4.16) и (2.4.19) производится расчёт потенциала $U(r, \theta)$ и компонент силы $F_a(x, y, z)$, которые отвечают текущему пространственному распределению плотности объёмного заряда $n(r, \theta)$ и текущей величине заряда пылевой частицы $\tilde{Q}$.

6) Итеративная схема переходит к шагу первому, однако в уравнениях (2.4.20) теперь используются самосогласованные пространственные распределения компонент силы, определённые (2.4.19).

Единичное выполнение данного алгоритма названо «итерацией». Затраты времени на расчёт одной итерации зависели от размеров выбранной области, напряжённости внешнего электростатического поля и размеров пылевой частицы. В среднем, время, затраченное на расчёт одной итераций, было таковым, что за одно выполнение указанного выше алгоритма модель успевала сгенерировать 10^6 ионов.

Алгоритм повторялся до тех пор, пока всякое дальнейшее изменение в пространственных распределениях плазмы можно бы было охарактеризовать

как флуктуацию. Получение конечного результата в среднем занимало 10^4 итераций. Это число определено эмпирически.

Важно отметить, что конечное самосогласованное пространственное распределение потенциала и конечное самосогласованное значение заряда пылевой частицы не зависят от выбранной формы начального пространственного распределения потенциала и начального значения заряда пылевой частицы. Расчёты для различных начальных условий $U_0(r, \theta)$ и $\tilde{Q}_0$ показали, что, при идентичных параметрах пылевой плазмы, самосогласованный результат остаётся неизменным.

2.5. Результаты расчёта численной модели, которая основана на разложении пространственного распределения плотности объёмного заряда по полиномам Лежандра.

Результаты численного моделирования, представленные далее, получены для однозарядной низкотемпературной плазмы благородного газа аргона Ar, в которой левитировала изолированная сферическая пылевая частица. Температура электронов задавалась равной $T_e = 3 \text{ eV}$, соотношение температур ионов и электронов $\tau = T_e/T_i = 100$. Ионная длина Дебая $\lambda_i = 0.01 \text{ см}$. Радиусы пылевых частиц r_0 задавались так, чтобы $r_0/\lambda_i \sim 0.01$. Плотность ионов невозмущённой плазмы $n_\infty \approx 10^8 \text{ см}^{-3}$. Плотность нейтрального газа $n_g \approx 10^{16} \text{ см}^{-3}$. Если не оговорено особо, то, при расчёте траекторий ионов, учитываются лишь процессы резонансной перезарядки ионов с нейтральными атомами.

Исходя из представленных выше параметров, плазма, моделирование динамики которой производится в описанной модели, является неравновесной, в силу того, что температура электронов намного превышает температуру ионов [112].

В этой задаче не рассмотрено явление электронной эмиссии с поверхности пылевой частицы, которая становится существенной для энергий электронов $T_e \geq 10 \text{ eV}$ и в иных случаях, для целей численного моделирования, обычно, опускается [113,114].

Заряд пылевой частицы. Когда частица пыли попадает в плазму, она испытывает множественные столкновения с ионами и электронами. В результате этих столкновений величина заряда, индуцированная потоком плазмы на пылевую частицу, становится таковой, чтобы потоки ионов и электронов, попадающих на поверхность пылевой частицы, совпадали. На Рисунке 2.5.1 представлена зависимость заряда пылевой частицы от средней длины свободного пробега l_i процесса резонансной перезарядки ионов с нейтральными атомами, рассчитанная из соотношения (2.4.30). Эта зависимость рассчитана для различных радиусов r_0 пылевой частицы. В целях удобства, заряд пылевой частицы представлены в форме (2.4.27).

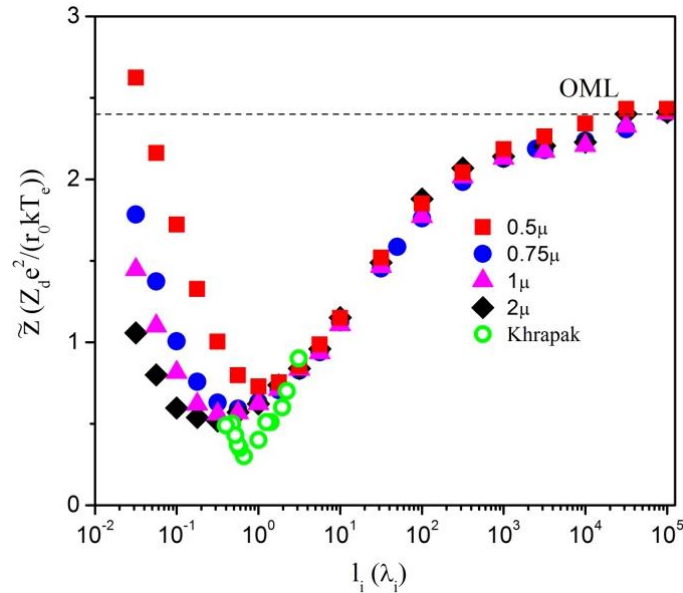


Рисунок 2.5.1. Зависимость величины заряда пылевой частицы $\tilde{Z}$ от средней длины свободного пробега l_i процесса резонансной перезарядки ионов с нейтральными атомами для различных радиусов r_0 пылевой частицы.

Вид полученной зависимости полностью повторяет вид зависимости заряда от частоты столкновений, определённой аналитически в работе [115]. В случае, когда средняя длина свободного пробега $l_i \rightarrow \infty$, значение безразмерного заряда пылевой частицы $\tilde{z}$ приближается к постоянному значению, приблизительно равному $\tilde{z} \sim 2.4$, что совпадает со значением, которое было получено с помощью приближения OML в работах [105,116]. На Рисунке 2.5.1. видно появление минимума в зависимости $\tilde{z}(l_i)$, который появляется в интервале значений средней длины свободного пробега $l_i = 0.3 - 2\lambda_i$. Величина заряда $\tilde{z}$ пылевой частицы в точках минимума хорошо согласуется с экспериментальными данными, полученными в работе [117].

Появление минимума в зависимости $\tilde{z}(l_i)$ объясняется частотой столкновения ионов. В случае, когда выполняются условия приближения OML (свободномолекулярного случая), длина свободного пробега ионов бесконечная, а плазма является бесстолкновительной. В таком случае, ионы очень редко падают на пылевую частицу, вследствие чего из (2.1.10) и (2.4.30) определяется наибольший заряд. При уменьшении l_i , столкновения ионов с нейтральными атомами происходят чаще. В данной модели, когда ион сталкивается с нейтральным атомом, его скорости переопределяются, согласно распределению Максвелла, и ион теряет кинетическую энергию. Если столкновение происходит вблизи пылевой частицы, на расстояниях меньших электронной длины Дебая, то такой ион притягивается частицей пыли и падает на её поверхность. С уменьшением средней длины свободного пробега l_i увеличивается и количество ионов, падающих на пылевую частицу. Следовательно, из условия (2.1.8), растёт величина её заряда. Однако, если и дальше уменьшать l_i , то ионы, которые перезаряжаются вблизи пылевой частицы, успевают до падения принять участие во множестве столкновений, что ведёт к неоднократной потере ионом его ускорения в сторону пылевой частицы. Чем меньше средняя длина свободного пробега процесса

резонансной перезарядки ионов с нейтральными атомами, тем больше таких столкновений происходит. При достаточно малых l_i плазма приближается по своим свойствам к сплошной среде, где ионы передвигаются короткими рывками. В таком случае, среднее время, которое занимает процесс падения иона на поверхность пылевой частицы, растёт, а число ионов, падающих на пылевую частицу в единицу времени, уменьшается. Из условия (2.1.8), величина заряда пылевой частицы начинает расти. Поэтому в зависимости $\tilde{z}(l_i)$ возникает минимум. Данные, представленные на этой зависимости, были опубликованы в работах [118-120].

Самосогласованные пространственные распределения потенциала и плотности объёмного заряда. Вокруг сильно заряженной частицы орбитируют ионы, создавая ионное облако. Под воздействием внешнего электростатического поля это ионное облако искривляется, а за пылевой частицей возникает возмущение, именуемое вейком. Процесс появления вейка продемонстрирован на Рисунке 2.5.2., где изображены пространственные распределения плотности объёмного заряда $n(\rho, z)$ и потенциала $U(\rho, z)$ в цилиндрических координатах.

На Рисунке 2.5.2. запечатлён процесс того, как сферическое облако ионов искривляется с ростом напряжённости внешнего электростатического поля. Справа от пылевой частицы, на расстоянии $4.5\lambda_i$, в $n(\rho, z)$ возникает отрицательная область, которая свидетельствует о том, что электронов этой области больше, чем ионов. Причину возникновения этой ямы можно увидеть на правой серии графиков, где изображено $U(\rho, z)$. После возникновения внешнего электростатического поля в пространственном распределении потенциала возникает вейк, первый максимум которого находится в точке $3.6\lambda_i$. Из пространственного распределения потенциала становится ясно, что ионная яма в левой серии графиков возникает вследствие того, что ионы выталкиваются из сектора пространства, где расположена положительная область потенциала.

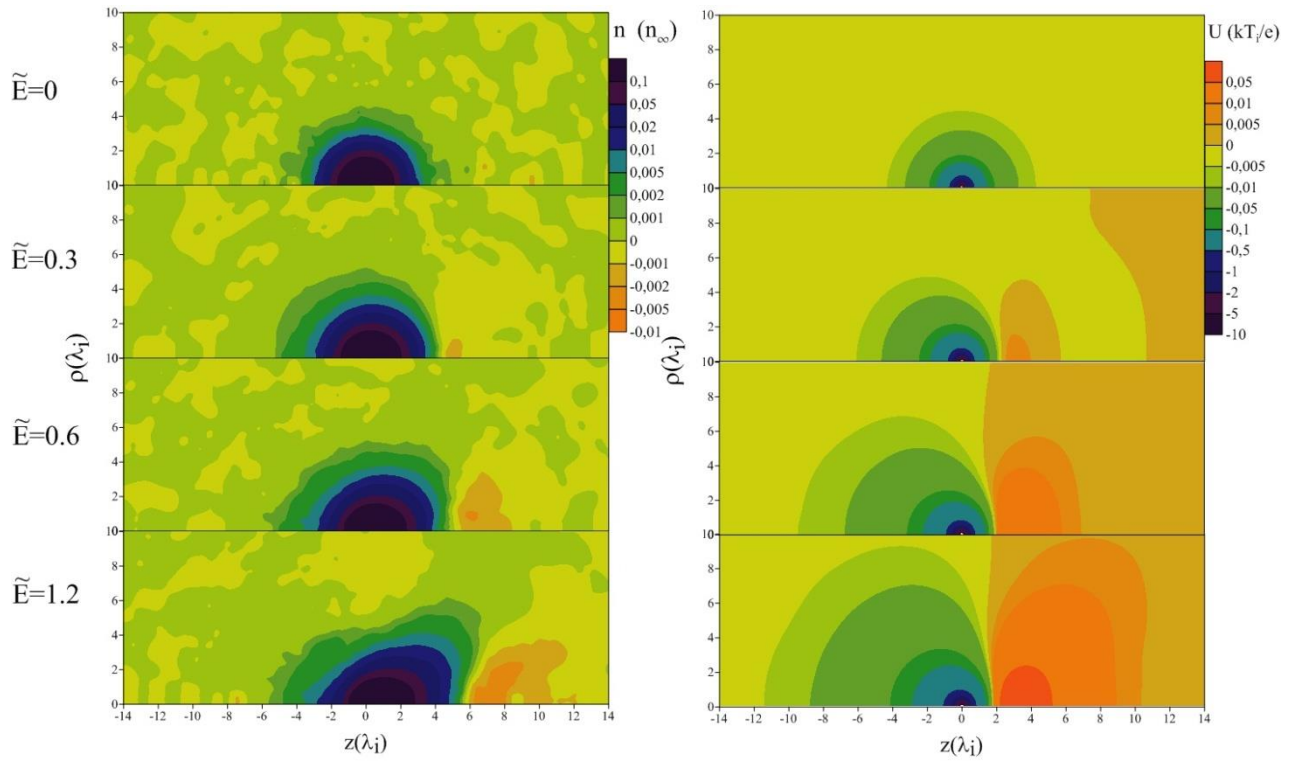


Рисунок 2.5.2. Пространственные распределения плотности объёмного заряда $n(\rho, z)$ (левая серия графиков) и потенциала $U(\rho, z)$ (правая серия графиков) для средней длины свободного пробега $l_i = 5 \lambda_i$, радиуса пылевой частицы $r_0 = 1$ мкм и для различных значений электростатического поля $\tilde{E}$.

При увеличении напряжённости внешнего электрического поля, яма в пространственном распределении плотности объёмного заряда растёт, а ионное облако искривляется всё сильнее. Также растёт положительная область в пространственном распределении потенциала. Квазипериодическая структура, возникающая в пространственном распределении потенциала, когда напряжённость внешнего электростатического поля $\tilde{E} = 0.3$, оказывается неустойчивой и разрушается с ростом $\tilde{E}$. В работе [100] подобную неустойчивость структуры вейка связывают с конечной длиной свободного пробега ионов. Данные, представленные на Рисунке 2.5.2, были частично опубликованы в работе [121].

Разложение плотности объёмного заряда по полиномам Лежандра.

На Рисунке 2.5.3. изображён срез пространственного распределения плотности объёмного заряда $n(\rho, z)$ по направлению внешнего электростатического поля, для координаты $\rho=0$, где тенденции, возникающие с ростом напряжённости внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, наиболее очевидны.

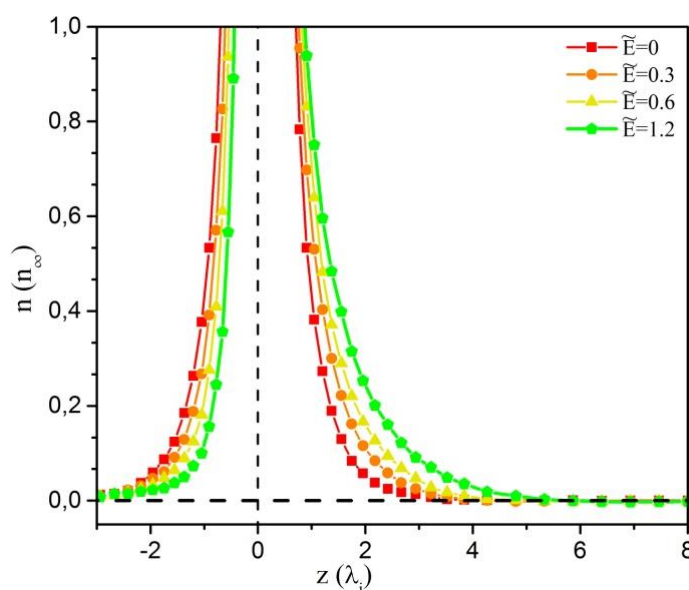


Рисунок 2.5.3. Пространственное распределение плотности объёмного заряда $n(\rho=0, z)$, представленное для координаты $\rho=0$, при $l_i = 5 \lambda_i$, $r_0 = 1$ мкм и для различных значений внешнего электростатического поля $\tilde{E}$.

Результаты, представленные на Рисунке 2.5.3., показывают, как справа от пылевой частицы, с ростом напряжённости внешнего электростатического поля, растёт плотность объёмного заряда, что является следствием ионной фокусировки. Фокусирующиеся ионы вносят положительный вклад в распределение потенциала $U(\rho, z)$ справа от пылевой частицы, что приводит к образованию в этом месте ($\sim 3,6 \lambda_i$) положительного максимума (см. Рисунок 2.5.2). На Рисунке 2.5.3. показано, что плотность объёмного заряда $n(\rho, z)$ падает слева от частицы пыли, что приводит к тому, что отрицательная

область в пространственном распределении потенциала $U(\rho, z)$, слева от пылевой частицы, уширяется.

Пространственное распределение плотности объёмного заряда $n(r, \theta)$ раскладывалось по полиномам Лежандра $n_k(r)$. Самые важные из этих членов – нулевой изотропный $n_0(r)$ и первый анизотропный $n_1(r)$, которые отвечают за общий заряд плазмы $\tilde{Q}_{pl}$ и общий дипольный момент плазмы $\tilde{P}_{pl}$ в вычислительной области.

На Рисунке 2.5.4. представлены гармоники $n_0(r)$ и $n_1(r)$, умноженные на r^2 и r^3 соответственно – на множители, которые стоят в подынтегральных выражениях (2.4.14-15). На Рисунке 2.5.4. продемонстрировано влияние, которое напряжённость внешнего электростатического поля $\tilde{E}$ оказывает на вид функций $n_0(r) r^2$ и $n_1(r) r^3$.

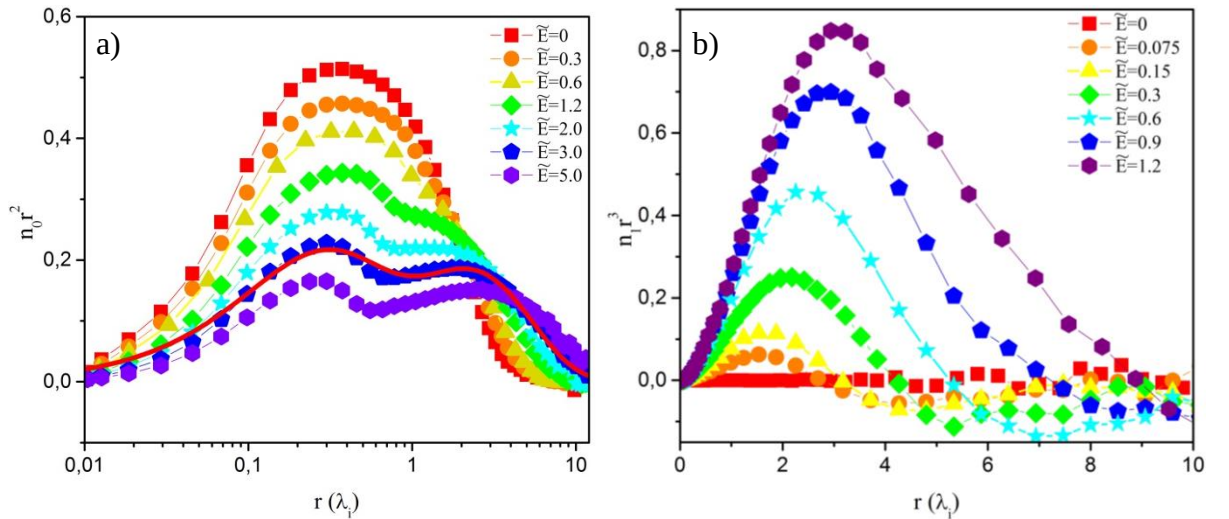


Рисунок 2.5.4. Функции а) $n_0(r)r^2$ и б) $n_1(r)r^3$, при $l_i = 5 \lambda_i$, $r_0 = 1$ мкм, для различных значений внешнего электростатического поля $\tilde{E}$.

Из Рисунка 2.5.4 а) видно, что для малых значений внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, у функции $n_0(r)r^2$ наблюдается один максимум на расстоянии $r \approx 0.3 - 0.5 \lambda_i$ от пылевой частицы. Такой вид $n_0(r)r^2$ означает, что облако ионов, сформированное вокруг пылевой частицы, представляет

собой оболочку, подобную атомной. В этой структуре, вместо положительно заряженного атомного ядра, в центре находится отрицательно заряженная пылевая частица. При увеличении $\tilde{E}$, значение этого максимума уменьшается, а радиальное распределение $n_0(r)r^2$ искривляется, что приводит к появлению второго максимума на расстоянии $r \approx 3 - 4 \lambda_i$. На этом расстоянии в пространственном распределении потенциала $U(\rho, z)$ возникает положительная область (см. Рисунок 2.5.2). Функция $n_0(r)r^2$, искривлённая в виде «верблюжьих горбов», может быть аппроксимирована суперпозицией двух функций Дебая с различными длинами экранирования $\lambda_1 < \lambda_i, \lambda_2 > \lambda_i$. Одно из таких приближений изображено на Рисунке 2.5.4 а) красной линией.

На Рисунке 2.5.4. б) представлено радиальное распределение функции $n_1(r)r^3$. В отсутствии внешнего электростатического поля, $n_k(r)=0$, где $k > 0$, с точностью до вычислительного шума. При появлении в системе внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, появляется гармоника $n_1(r)$, которая растёт с ростом $\tilde{E}$ линейно. С увеличением напряжённости внешнего электростатического поля, в функции $n_1(r)r^3$ появляется второй локальный минимум на расстоянии $r > 4 \lambda_i$. Для удалённых регионов, где $r > 10 \lambda_i$, значения гармоники $n_1(r)$ становятся сопоставимыми со значениями вычислительного шума ($n_1(r) < 10^{-4} n_\infty$). Максимум функции $n_1(r)r^3$ располагается на том же расстоянии от пылевой частицы, что и второй максимум в функции $n_0(r)r^2$. Величина максимума в функции $n_1(r)r^3$ растёт с ростом напряжённости внешнего электростатического поля линейно. Положение максимума функции $n_1(r)r^3$ линейно смещается в сторону от пылевой частицы. Данные, представленные на Рисунке 2.5.4., были опубликованы в работе [118].

На Рисунке 2.5.5. изображены радиальные функции $n_0(r)r^2$ и $n_1(r)r^3$ представленные для различных значений радиуса пылевой частицы r_0 и внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, при средней длине свободного

пробега ионов равной $l_i = 5 \lambda_i$. Для демонстрации того влияния, который радиус пылевой частицы оказывает на форму радиального распределения $n_0(r)r^2$, выбраны значения напряжённости $\tilde{E}=0.3$ и 5, в то время как для демонстрации влияния величины радиуса на распределение $n_1(r)r^3$ были выбраны значения $\tilde{E}=0.3$ и 1.2. Такой выбор объясняется удобством в представлении результатов. Кроме того, функции $n_0(r)r^2$ и $n_1(r)r^3$ были нормированы на радиус r_0 пылевой частицы.

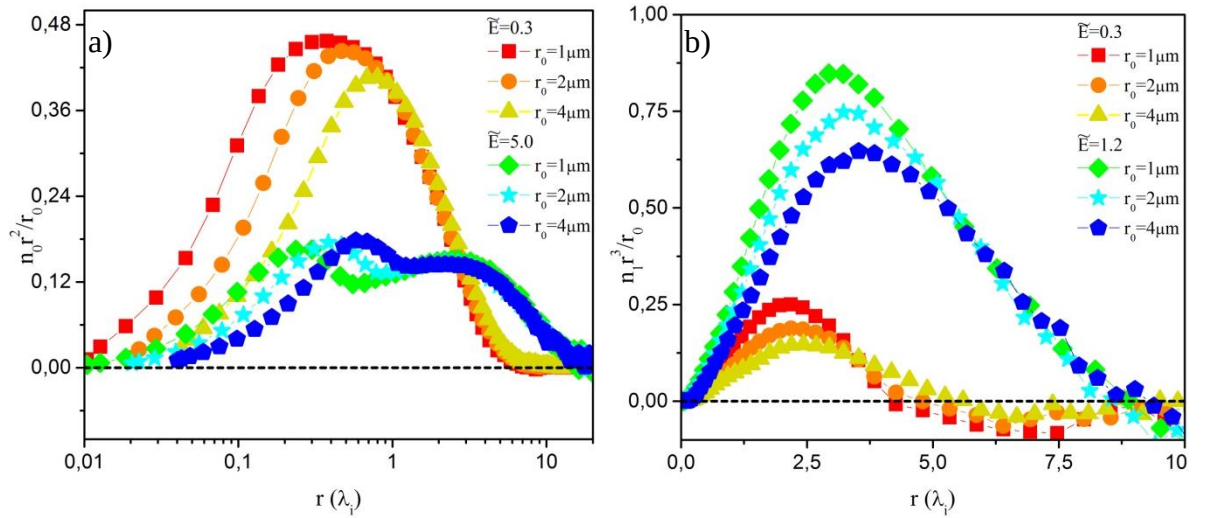


Рисунок 2.5.5. Функции а) $n_0(r)r^2/r_0$ и б) $n_1(r)r^3/r_0$, при $l_i = 5 \lambda_i$, для различных значений внешнего электростатического поля $\tilde{E}$ и радиуса пылевой частицы r_0 .

Из Рисунка 2.5.5 а) видно, что та часть радиального распределения $n_0(r)r^2/r_0$, которая находится левее первого локального максимума распределения, линейно смещается правее, удаляясь от пылевой частицы с ростом радиуса r_0 пылевой частицы. Увеличение радиуса пылевой частицы не влияет на форму той части радиального распределения $n_0(r)r^2/r_0$, которая находится правее первого локального максимума распределения, таким образом, на расстояниях $r > \lambda_i$ от пылевой частицы, функции $n_0(r)r^2/r_0$ совпадают. Другими словами, пылевые частицы экранируются единообразно.

На расстояниях $r < \lambda_i$ вклад функции $n_0(r)r^2$ в интеграл (2.4.14) незначителен. Линейное удаление распределения $n_0(r)r^2$ от пылевой частицы, с ростом радиуса r_0 пылевой частицы - следствие того, что, в случае бóльших пылевых частиц, ионы чаще падают на пылевую частицу в области $r < \lambda_i$, и, таким образом, вносят меньший вклад в пространственное распределение плотности объёмного заряда $n(\rho, z)$. Значения локальных максимумов радиальных распределений $n_0(r)r^2/r_0$ совпадают для разных r_0 с хорошей точностью.

С другой стороны, из Рисунка 2.5.5 б) видно, что те части радиальных распределений $n_1(r)r^3/r_0$, что располагаются левее и правее от локальных экстремумов этих распределений, совпадают, при этом значения этих экстремумов падают с увеличением радиуса r_0 пылевой частицы. Результаты, представленные на Рисунке 2.5.5, показывают, что, даже в случае слабой анизотропии, нормировка на радиус частицы r_0 не позволяет получить одно самосогласованное пространственное распределение плотности объёмного заряда из другого. Данные, представленные на Рисунке 2.5.5., были опубликованы в работе [122].

На Рисунке 2.5.6. представлены радиальные распределения $n_0(r)r^2$ и $n_1(r)r^3$ для различных значений средней длины свободного пробега ионов l_i , и внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, при $r_0 = 1$ мкм. Аналогично Рисунку 2.5.5., для демонстрации функций $n_0(r)r^2$ выбраны значения напряжённости внешнего электростатического поля $\tilde{E}=0.3$ и 5, а для демонстрации $n_1(r)r^3$ - $\tilde{E}=0.3$ и 1.2.

На Рисунке 2.5.6 а) показано, что для $\tilde{E}=0.3$, при увеличении l_i , единственный максимум радиального распределения $n_0(r)r^2$ растёт. Это является следствием роста заряда пылевой частицы $\tilde{Q}$ с ростом l_i , который происходит для данного интервала длин свободного пробега (см. Рисунок 2.5.1.). С увеличением заряда пылевой частицы $\tilde{Q}$, растёт плотность ионов

вблизи пылевой частицы. Ионы с большими длинами свободного пробега l_i дольше орбитируют вокруг пылевой частицы, внося больший вклад в пространственное распределение плотности ионов. Для $\tilde{E}=5$ различия в распределениях $n_0(r)r^2$, рассчитанных для различных l_i , менее существенны. При увеличении l_i всё также увеличиваются значения локальных максимумов радиального распределения $n_0(r)r^2$, однако различия в значениях этих максимумов, измеренных для различных l_i , существенно меньше, чем для случая $\tilde{E}=0.3$. Это свидетельствует о том, что траектории ионов, в случае $\tilde{E}=5$, существенно искривляются. Существующие различия в радиальных распределениях $n_0(r)r^2$ обусловлены только изменением заряда пылевой частицы $\tilde{Q}$ при изменении параметра l_i .

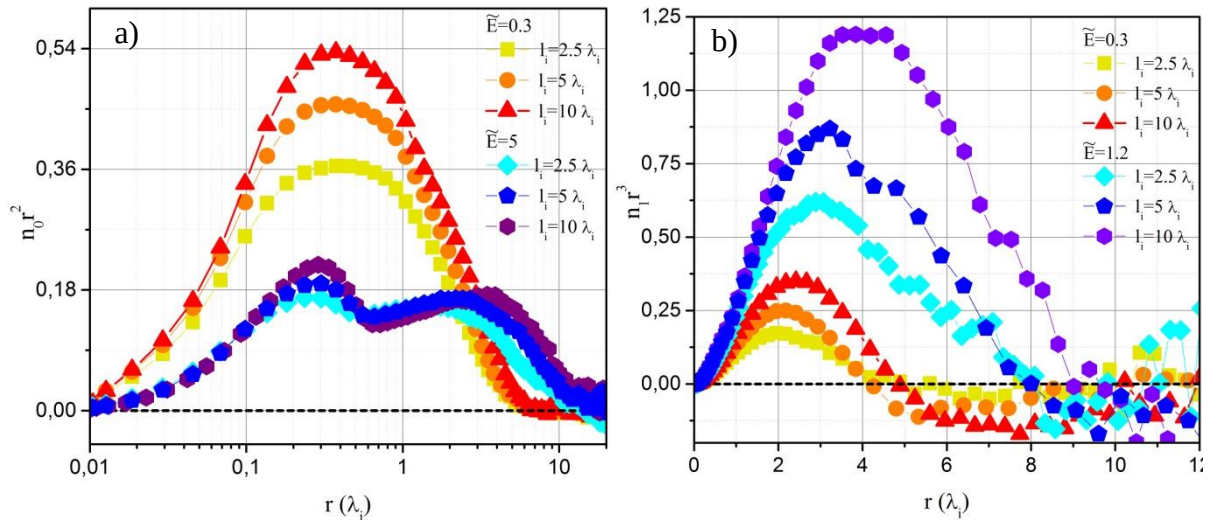


Рисунок 2.5.6. Функции а) $n_0(r)r^2$ и б) $n_1(r)r^3$, при $r_0 = 1$ мкм, для различных значений средней длины свободного пробега ионов l_i и внешнего электростатического поля $\tilde{E}$.

На Рисунке 2.5.6 б) наблюдается обратная картина – при большем поле, $\tilde{E}=1.2$, разница в радиальных распределении $n_1(r)r^3$ возрастает. Это объясняется тем, что, при увеличении средней длины свободного пробега l_i , растёт вклад ионов в пространственное распределение плотности объёмного

заряда вниз по потоку от пылевой частицы – там, где расположен вейк. Более того, с ростом l_i растёт и $\tilde{Q}$, а, следовательно, ещё больше становится вейк. Таким образом, чем реже происходят столкновения ионов с нейтральными атомами и чем ближе по свойствам моделируемая плазма к бесстолкновительной плазме, тем больше становится вейк, формирующийся за пылевой частицей. Данные, представленные на Рисунке 2.5.6., были опубликованы в работе [120].

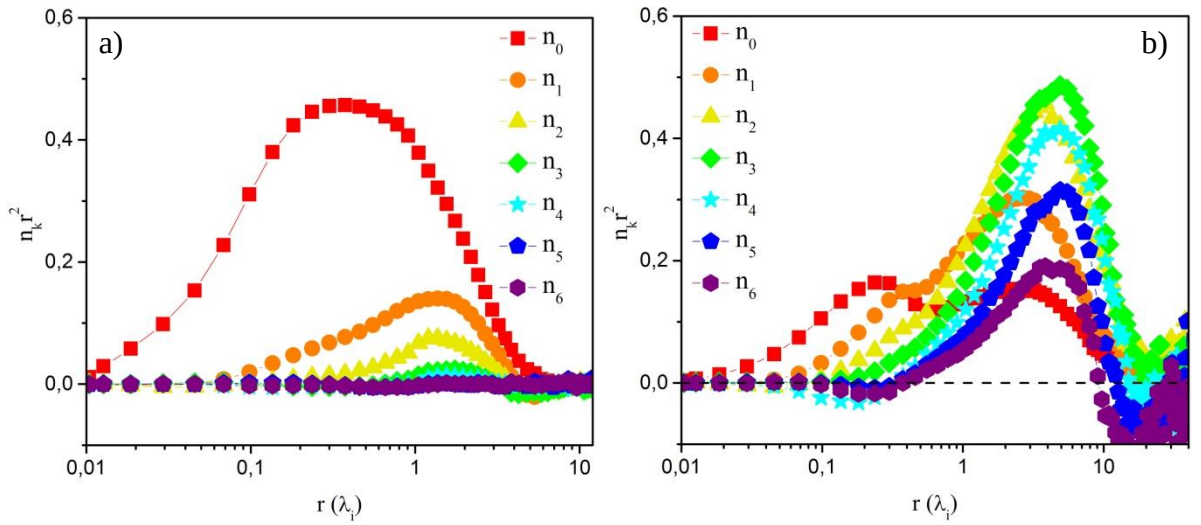


Рисунок 2.5.7. Радиальные распределения $n_k(r)r^2$ для случаев а) $\tilde{E}=0.3$ и б) $\tilde{E}=5$ при $l_i = 5 \lambda_i$, $r_0 = 1$ мкм.

Кроме гармоник $n_0(r)$ и $n_1(r)$, вклад которых в расчёт пространственного распределения самосогласованного потенциала наибольший, в численной модели рассчитываются гармоники $n_k(r)$. На Рисунке 2.5.7. представлены значения гармоники $n_k(r)$ для $\tilde{E}=0.3$ и 5 при значениях средней длины свободного пробега $l_i = 5 \lambda_i$ и радиуса пылевой частицы $r_0 = 1$ мкм. Для удобства, гармоники представлены в виде $n_k(r)r^2$.

Из Рисунка 2.5.7. а) видно, что, для $\tilde{E}=0.3$, гармоники $n_0(r)$ и $n_1(r)$ вносят наибольший вклад в пространственное распределение плотности объёмного заряда. С увеличением индекса k , гармоники быстро затухают и уже

функцию $n_5(r)$ можно считать равной нулю. На Рисунке 2.5.7 б) продемонстрировано, что, при $\tilde{E} = 5$, гармоники $n_0(r)$ и $n_1(r)$ не являются основными, и оказываются меньше гармоник $n_{2-4}(r)$. Ионное облако, в случае $\tilde{E} = 5$, оказывается существенно искривленным, и такая анизотропия не описывается в полной мере первой десяткой гармоник $n_k(r)$. Для $\tilde{E} = 5$, последней гармоникой, значения которой оказываются отличными от вычислительного шума, является функция $n_{20}(r)$

Несмотря на то, что ранее объявлялось, что основными для вычисления самосогласованного пространственного распределения потенциала являются гармоники $n_0(r)$ и $n_1(r)$ – в случае сильных полей, их явно оказывается недостаточно. Для каждого отдельного случая (для каждого набора $\tilde{E}$, l_i , r_0) задавалось собственное условие достаточности разложения (2.4.12), которое состояло в том, что описание (2.4.12) является достаточным, если последний $n_k(r)$ равен нулю с точностью до вычислительного шума. Данные, представленные на Рисунке 2.5.7., были опубликованы в работе [118].

Выполнение условия квазинейтральности в расчётной области. Важнейшим условием, при выполнении которого пространственное распределение потенциала можно считать самосогласованным, является условие сохранения заряда. Заряд, индуцированный на пылевой частице потоком ионов и электронов (2.4.10), должен быть равен заряду окружающей плазмы (2.4.14). На Рисунке 2.5.8. представлена зависимость заряда пылевой частицы и суммарного заряда окружающей плазмы, рассчитанного из (2.4.14), от напряжённости внешнего электрического поля для различных значений радиуса пылевой частицы и длины свободного пробега ионов. Для удобства, они были представлены в форме (2.4.27). Такой вид удобен тем, что в нём исключается из рассмотрения радиус пылевой частицы.

Из результатов, представленных на Рисунке 2.5.8., видно, что заряд пылевой частицы $\tilde{z}$ растёт с ростом $\tilde{E}$ линейно. Такой рост объясняется тем, что ионы, которые при малых $\tilde{E}$ орбитировали вокруг пылевой частицы,

вырываются из ионного облака под действием внешнего электростатического поля, которое затем уносит их в сторону вейка. При малой величине $\tilde{E}$ ион, столкнувшись с нейтральным атомом вблизи пылевой частицы, падает на пылевую частицу. При увеличении $\tilde{E}$, ион, после столкновения, с большей вероятностью уносится внешним электростатическим полем вниз по потоку от пылевой частицы. В результате, количество ионов, упавших на пылевую частицу, снижается. Следовательно, из (2.4.30) снижается и заряд пылевой частицы.

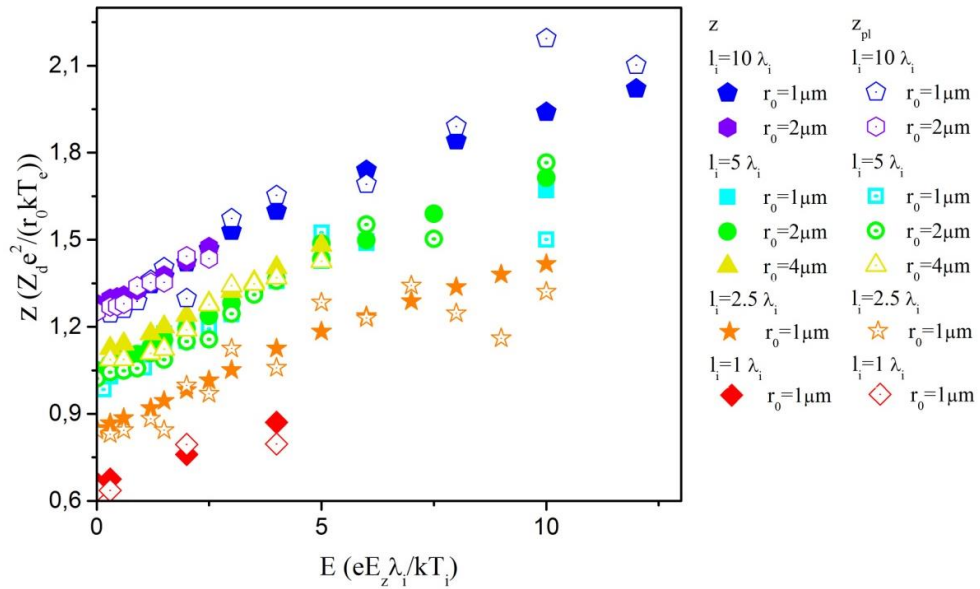


Рисунок 2.5.8. Зависимость заряда пылевой частицы $\tilde{Z}$ и суммарного заряда окружающей плазмы $\tilde{Z}_{pl}$ от напряжённости внешнего электростатического поля $\tilde{E}$ для различных значений средней длины свободного пробега l_i и радиуса пылевой частицы r_0 .

Рисунок 2.5.8. показывает, насколько хорошо выполняется условие квазинейтральности. Из Рисунка 2.5.8. видно, что, для $\tilde{E} < 4$, $\tilde{Z}$ и $\tilde{Z}_{pl}$ совпадают – среднее отклонение в их значения находится в пределах 3%. С увеличением $\tilde{E}$, это отклонение увеличивается: для $\tilde{E} > 5$ оно достигает 11%. Несмотря на учёт гармоник $n_k(r)$ с $k > 20$, данная модель сталкивается с

трудностями при описании случаев сильной анизотропии. Данные, представленные на Рисунке 2.5.8., были опубликованы в работах [111, 118, 121, 122].

Захваченные и свободные ионы. Ионы, орбитирующие вокруг пылевой частицы, можно разделить на два типа. Ионы, траектории которых финитны, и ионы с инфинитными траекториями. Первый сорт ионов называется захваченными, второй – свободными. Определению этих ионов посвящены работы [102,106].

Данная модель позволяет разделить пространственное распределение плотности ионов на две части: на плотность захваченных и свободных ионов.

Полная энергия каждого конкретного иона определяется формулой:

$$En = \varepsilon_k + U(r, \theta) - \tilde{E}r \cos \theta. \quad (2.5.1)$$

Здесь ε_k - кинетическая энергия иона. В отсутствии внешнего электростатического поля, любой ион, полная энергия которого оказывается отрицательной, является захваченным. Ион, в таком случае, всегда попадает в потенциальную яму (см. Рисунок 2.5.9.). Если в системе присутствует внешнее электростатическое поле, то потенциальная яма искривляется добавочным членом $-\tilde{E}r \cos \theta$, и в ней появляется локальный максимум $U_{\max}(r_{\max}, \theta_{\max})$. Этот максимум разделяет область надвое – область, где ионы могут стать захваченными, и область, где орбиты ионов любой энергии будут инфинитными. Данные, представленные на Рисунке 2.5.9., были опубликованы в работе [118].

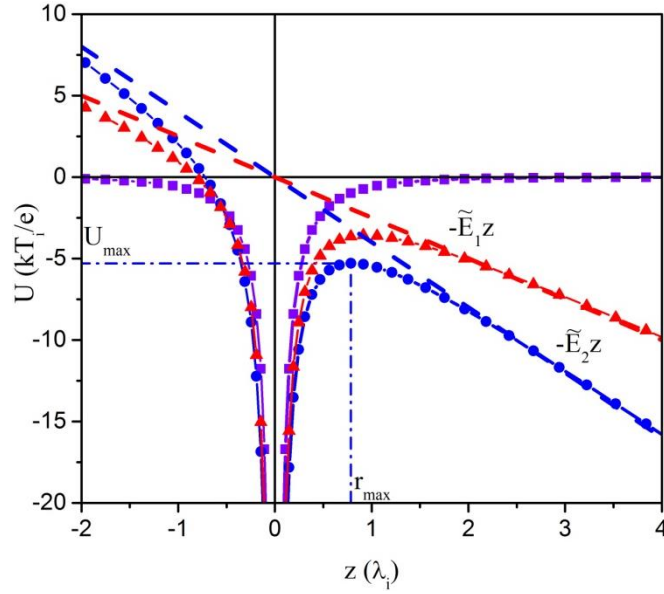


Рисунок 2.5.9. Пространственное распределение полного электрического потенциала системы $U_{tot}(\rho=0, z)$, представленное для координаты $\rho=0$, для различных значений $\tilde{E}$.

Условие разделения ионов на захваченные и свободные в данной модели следующее: если полная энергия иона оказывается меньше $U_{\max}(r_{\max}, \theta_{\max})$, а его расстояние до пылевой частицы оказывалось меньше $r_{\max}$, тогда ион считался захваченным, иначе он считался свободным.

На Рисунке 2.5.10. представлены радиальные распределения захваченных $n_{i, \text{trapped}}(r)$ и свободных $n_{i, \text{free}}(r)$ ионов, рассчитанные для случая $l_i = 5 \lambda_i$, $r_0 = 1$ мкм, в отсутствии внешнего электрического поля. На данном графике приведено сравнение с аналогичными радиальными распределениями, полученными в [123-125]. Из Рисунка 2.5.10. видно, что радиальные распределения, полученные представленной моделью, хорошо согласуются с радиальными распределениями, представленными в [123-125]. Данные, представленные на Рисунке 2.5.10., были опубликованы в работе [118].

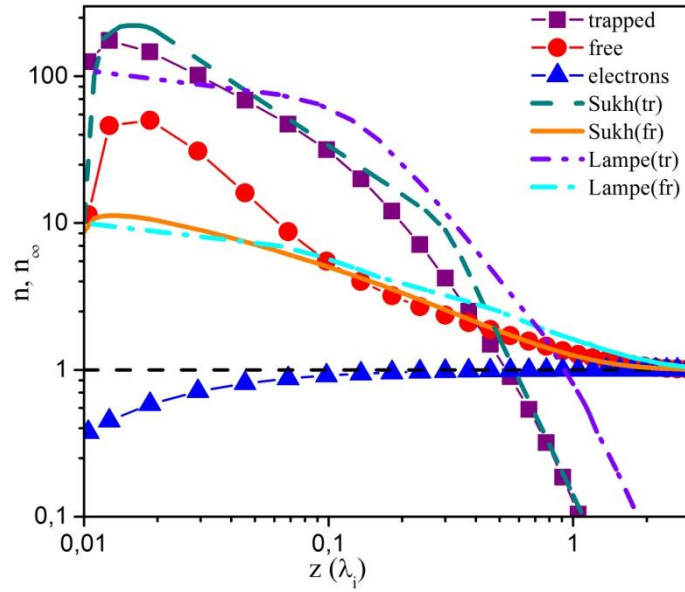


Рисунок 2.5.10. Радиальное распределение плотности захваченных $n_{i,trapped}(r)$ и свободных $n_{i,free}(r)$ ионов при $l_i = 5 \lambda_i$, $r_0 = 1$ мкм в отсутствии внешнего электростатического поля.

Аналогично пространственному распределению плотности объёмного заряда $n(r, \theta)$, пространственные распределения $n_{i,trapped}(r, \theta)$ и $n_{i,free}(r, \theta)$ можно разложить на гармоники по формулам, аналогичным (2.4.12), и рассмотреть, какой тип ионов вносит бóльший вклад в суммарный заряд плазмы.

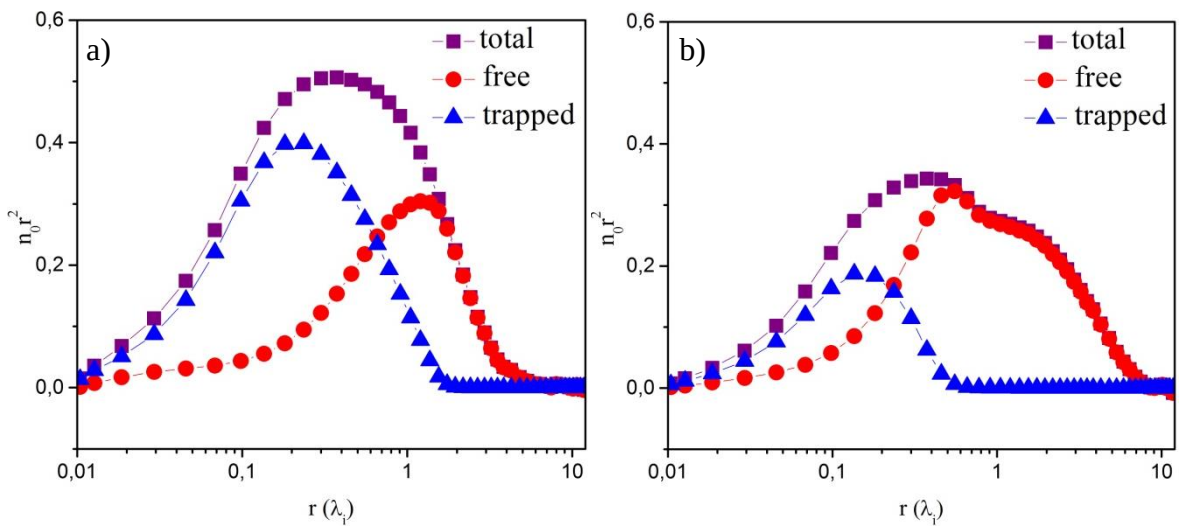


Рисунок 2.5.11. Функции $n_0(r)r^2$, рассчитанные для захваченных и свободных ионов, при $l_i = 5 \lambda_i$, $r_0 = 1$ мкм, для а) $\tilde{E} = 0$ и б) $\tilde{E} = 1.2$.

На Рисунке 2.5.11. видно, что, в отсутствии внешнего электростатического поля, захваченные ионы вносят основной вклад в интеграл (2.4.14) суммарного заряда окружающей плазмы (~60%). При возникновении внешнего электростатического поля, число захваченных ионов снижается, из-за того, что величина максимума $U_{\max}(r_{\max}, \theta_{\max})$, уменьшается с ростом $\tilde{E}$. Число свободных ионов, при этом, растёт, и, при случае $\tilde{E}=1.2$, они вносят основной вклад в интеграл (2.4.14).

Гармоники $n_k(r)$ для индекса $k > 1$, которые появляются при наличии в системе внешнего электростатического поля, определяются свободными ионами, а потому не рассмотрены. Данные, представленные на Рисунке 2.5.11., были опубликованы в работе [118].

Пространственное распределение потенциала. На Рисунке 2.5.12. изображён срез пространственного распределения потенциала $U(\rho, z)$ по направлению внешнего электростатического поля, для координаты $\rho=0$, для различных значений внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, при $l_i = 5 \lambda_i$, $r_0 = 1$ мкм.

На Рисунке 2.5.12. продемонстрирован процесс образования вейка справа по координате z от пылевой частицы. В отсутствии внешнего электростатического поля, пространственное распределение потенциала $U(\rho, z)$ сферически симметрично. В присутствии внешнего электростатического поля, траектории ионов искривляются по направлению $\tilde{E}$. Асимметрия пространственного распределения плотности объёмного заряда $n(\rho, z)$ приводит к асимметрии в пространственном распределении потенциала $U(\rho, z)$. Рисунок 2.5.12. показывает, что, при увеличении $\tilde{E}$, справа от пылевой частицы появляется локальный максимум. Для значений средней длины свободного пробега $l_i = 5 \lambda_i$, радиуса пылевой частицы $r_0 = 1$ мкм и величины внешнего электростатического поля $\tilde{E}=1.2$ этот максимум расположен на расстоянии $z \approx 4 \lambda_i$.

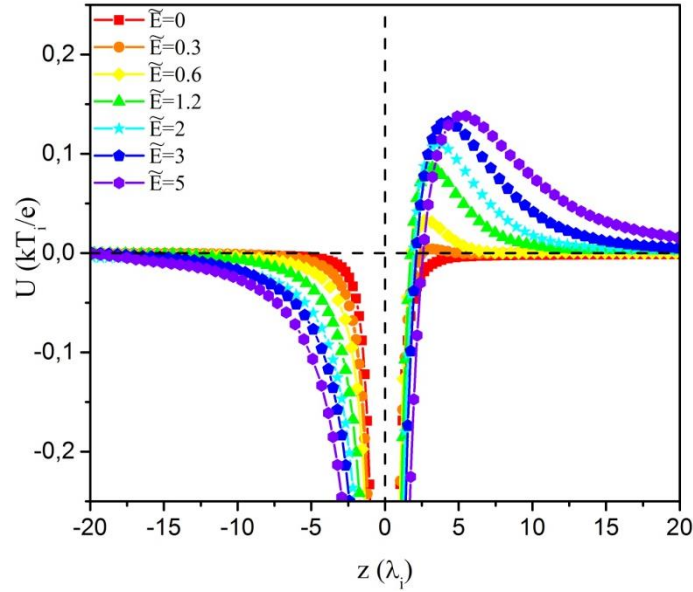


Рисунок 2.5.12. Пространственное распределение потенциала $U(\rho=0, z)$, представленное для координаты $\rho=0$, при $l_i = 5 \lambda_i$, $r_0 = 1 \text{ мкм}$ и для различных значений внешнего электростатического поля $\tilde{E}$.

При малых $\tilde{E}$, максимум пространственного распределения потенциала $U_{\max}(\rho_{\max}, z_{\max})$ растёт линейно с увеличением $\tilde{E}$, однако вскоре рост локального максимума потенциала останавливается. При этом пространственное распределение потенциала слева от пылевой частицы уширяется. Данные, представленные на Рисунке 2.5.12., были опубликованы в работе [118].

На Рисунке 2.5.13. изображён срез пространственного распределения потенциала $U(\rho, z)$, рассчитанного для различных значений радиуса пылевой частицы r_0 и внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, при средней длине свободного пробега ионов $l_i = 5 \lambda_i$. Для демонстрации влияния, которое размер пылевой частицы оказывает на пространственное распределение потенциала $U(\rho=0, z)$, выбраны значения $\tilde{E}=0.6$ и 5. Распределение $U(\rho=0, z)$ на Рисунке 2.5.13. было нормировано на радиус r_0 пылевой частицы.

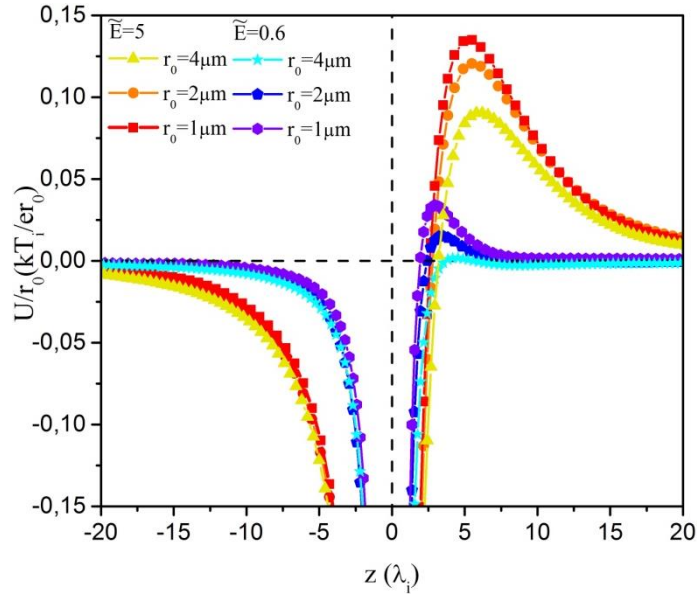


Рисунок 2.5.13. Пространственное распределение потенциала $U(\rho=0, z)/r_0$, представленное для координаты $\rho=0$, для различных значений r_0 , при $\tilde{E}=0.6$ и 5, для $l_i = 5 \lambda_i$.

Пространственное распределение потенциала, представленное на Рисунке 2.5.13., показывает, что нормированные на радиус пылевой частицы r_0 пространственные распределения потенциала $U(\rho=0, z)/r_0$, измеренные для различных r_0 , совпадают друг с другом везде, кроме области, где сформирован вейк. Другими словами, нормируя пространственное распределение потенциала на радиус пылевой частицы r_0 , можно получить относительно верное пространственное распределение, за исключением области вейка. Данные, представленные на Рисунке 2.5.13., были опубликованы в работе [122].

На Рисунке 2.5.14. изображён срез пространственного распределения потенциала $U(\rho, z)$, рассчитанного для различных значений средней длины свободного пробега ионов l_i для двух различных значений внешнего поля $\tilde{E}=0.3$ и 4, при радиусе пылевой частицы $r_0 = 1 \text{ мкм}$.

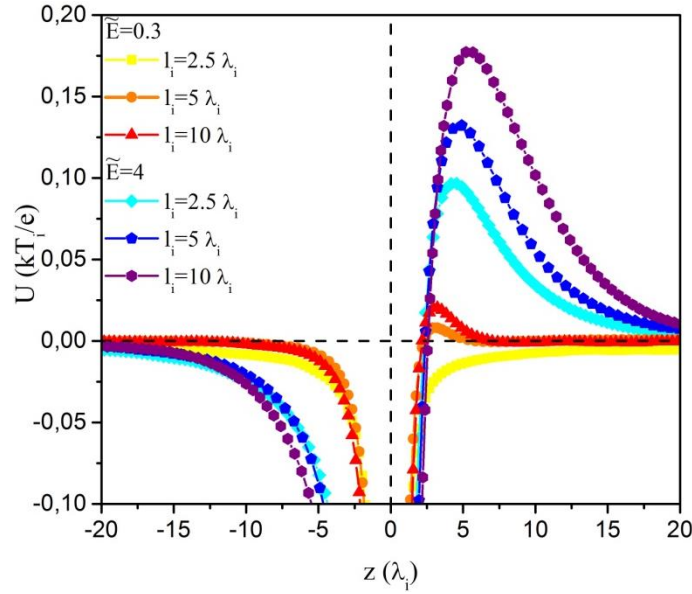


Рисунок 2.5.14. Пространственное распределение потенциала $U(\rho=0, z)$, представленное для координаты $\rho=0$, представленное для различных значений средней длины свободного пробега ионов l_i для $\tilde{E}=0.3$ и 4, при $r_0 = 1$ мкм.

Из Рисунка 2.5.14. видно, что локальный максимум в пространственном распределении потенциала растёт с увеличением средней длины свободного пробега. Такое увеличение вызвано усилением эффекта ионной фокусировки справа от пылевой частицы. Пространственные распределения потенциала $U(\rho=0, z)$, представленные на Рисунке 2.5.14. демонстрируют, что, чем меньше значение средней длины свободного пробега l_i , тем большая величина $\tilde{E}$ необходима, чтобы возник вейк. То есть, в случае $\tilde{E}=0.3$, для $l_i = 10 \lambda_i$ локальный максимум образовался, в то время как для $l_i = 2.5 \lambda_i$, пространственное распределение потенциала $U(\rho=0, z)$ отрицательно во всей области. Данные, представленные на Рисунке 2.5.14., были опубликованы в работе [120].

Рассмотрим зависимость величины максимума вейка и расстояния от максимума вейка до пылевой частицы от параметров плазмы, более детально. Кроме того, учитывая широкий охват рассмотренных значений $(l_i, r_0, \tilde{E})$, стоит провести сравнение полученных результатов с работой [100], где были

рассмотрены зависимости характеристик вейка от скорости плазменного потока, рассчитанные методами PIC и LR.

В [100] для задачи, решённой методом LR, заряд пылевой частицы был выбран в качестве параметра $Q_{d,LR} = -10^4 e_0$, а для задачи, решенной методом PIC, он рассчитывался самосогласованно и оказался равным $Q_{d,PIC} = -10^5 e_0$, при этом радиус частицы был задан $r_0 = 0,185 \lambda_e$.

Стоит отметить, что задачи о возникновении внешнего электростатического поля и об обтекании пылевой частицы потоком плазмы различны. В первом случае ионы и электроны движутся в разные стороны, при этом нейтральные атомы, в среднем, не движутся, во втором – ионы, электроны и нейтральные атомы движутся в одном направлении с одинаковой дрейфовой скоростью.

В силу того, что в данной работе и в работе [100] заряды пылевых частиц существенно различаются, для адекватного сравнения необходимо привести характеристики вейка к единой форму. Поэтому результаты, рассчитанные представленной ранее численной моделью, были нормированы на отношение зарядов пылевых частиц в данной работе и в работе [100]. Для $r_0 = 1; 2; 4 \text{ мкм}$ отношение зарядов составило приблизительно 1.25; 2.50; 5.00 в сравнении с LR и 12.5; 25.0; 50.0 в сравнении с PIC.

Данные, полученные методом LR, приведены для разных отношений температур τ . Для $\tau = 10, 30$ моделировалась бесстолкновительная плазма, а при $\tau=50$, моделировалась плазма со средней длиной свободного пробега ионов $l_i = 10 \lambda_i$. Данные, полученные методом PIC, также приведены для различных значений τ , однако все расчёты этим методом, представленные в работе [100], проводились для бесстолкновительной плазмы.

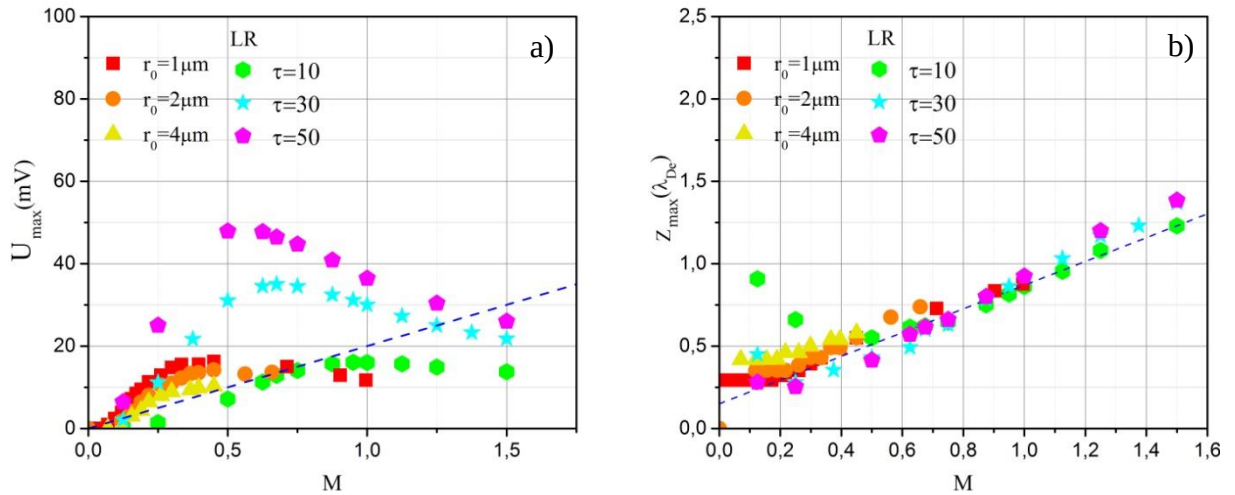


Рисунок 2.5.15. Зависимости а) величины максимума вейка $U_{\max}$ и б) расстояния от максимума вейка до пылевой частицы $Z_{\max}$ от числа Маха, в сравнении с результатами расчёта методом LR в работе [100], для различных радиусов пылевой частицы r_0 , при $l_i = 5 \lambda_i$.

На Рисунке 2.5.15. представлены зависимости величины максимума вейка $U_{\max}$ и расстояния от максимума вейка до пылевой частицы $Z_{\max}$ от дрейфовой скорости ионов для различных радиусов пылевой частицы r_0 . Дрейфовая скорость была представлена в виде (1.2.1). На Рисунке 2.5.15. приведено сравнение с зависимостями характеристик вейка от числа маха M , полученными в работе [100] методом LR. Представленные зависимости нормированы на отношения зарядов, которые указаны выше. Из Рисунка 2.5.15. видно, что зависимости $Z_{\max}(M)$, полученные двумя методами, совпадают, при этом зависимости $U_{\max}(M)$, различаются, что обусловлено аналитической природой метода LR и существенной разницей в используемых параметрах.

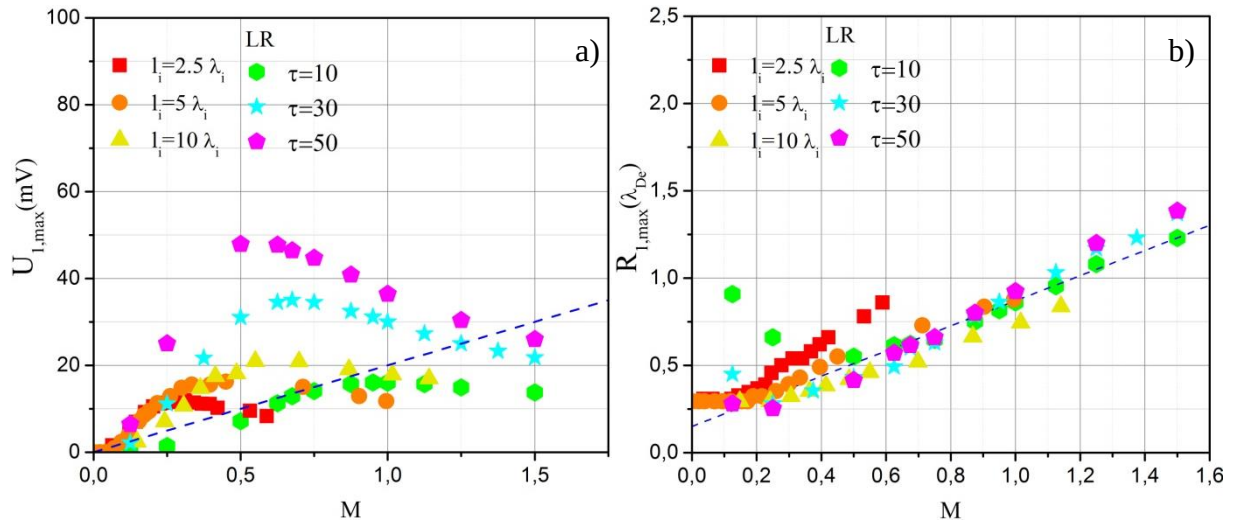


Рисунок 2.5.16. Зависимости а) величины максимума вейка U_{max} и б) расстояния от максимума вейка до пылевой частицы Z_{max} от числа Маха, в сравнении с результатами расчёта методом LR в работе [100], для различных значений средней длины свободного пробега l_i , при $r_0 = 1$ мкм.

На Рисунке 2.5.16. представлены зависимости величины максимума вейка U_{max} и расстояния от максимума вейка до пылевой частицы Z_{max} от дрейфовой скорости ионов для различных значений средней длины свободного пробега l_i . На Рисунке 2.5.16. приведено сравнение с зависимостями характеристик вейка от числа маха M , полученными в работе [100] методом LR. Зависимость $U_{max}(M)$, полученную описанным методом, можно условно разделить на две области – область линейного роста и область насыщения. При достижении области насыщения, рост значения максимума вейка U_{max} останавливается. Чем меньше l_i , тем быстрее зависимость достигает области насыщения. Учёт в столкновений ионов с нейтральными атомами разрушает вейк. С ростом средней длины свободного пробега, максимум вейка удаляется от пылевой частицы, то есть, с ростом l_i увеличивается дистанция, на которой фокусируются ионы.

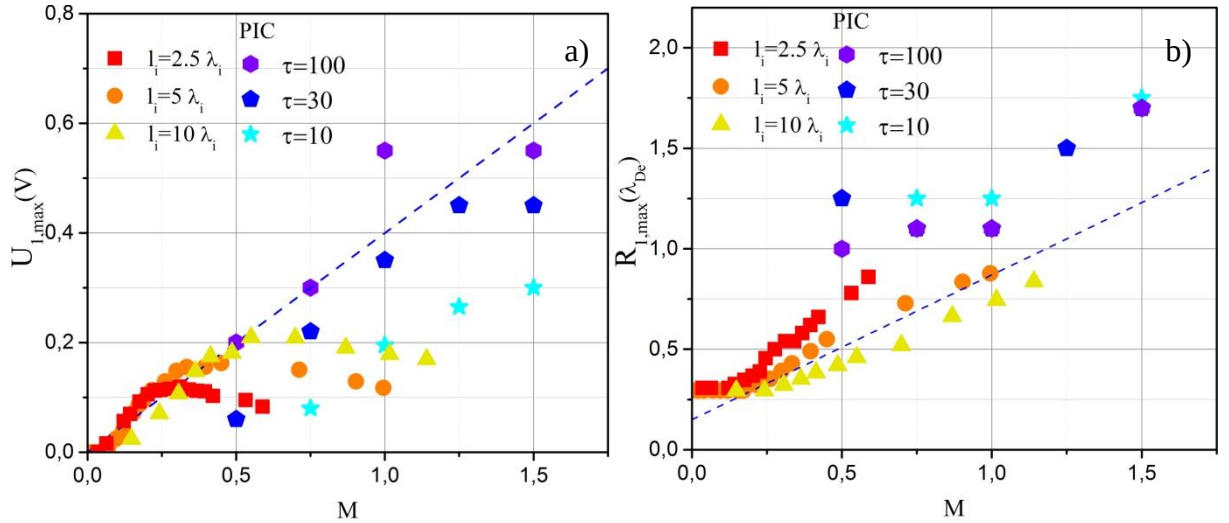


Рисунок 2.5.17. Зависимости а) величины максимума вейка U_{max} и б) расстояния от максимума вейка до пылевой частицы Z_{max} от числа Маха, в сравнении с результатами расчёта методом PIC в работе [100], для различных значений средней длины свободного пробега l_i , при $r_0 = 1$ мкм.

На Рисунке 2.5.17. представлены зависимости $U_{max}(M)$ и $Z_{max}(M)$, для различных значений r_0 . На Рисунке 2.5.17. приведено сравнение с зависимостями $U_{max}(M)$ и $Z_{max}(M)$ полученными в работе [100] методом PIC. В работе [100] производится расчёт самосогласованных пространственных распределений плотности ионов и электронов и потенциала в случае, когда столкновения ионов с нейтральными атомами не учитываются. Поэтому сравниваемые зависимости $U_{max}(M)$ находятся в разных диапазонах данных. Если провести аппроксимацию зависимости $U_{max}(M)$, полученной методом PIC для $\tau=100$, то, в диапазоне значений $M < 0.5$, эта аппроксимация будет совпадать с зависимостями $U_{max}(M)$, полученными вышеописанным методом. Зависимость $U_{max}(M)$, измеренная методом PIC, не включает в себя данные $M < 0.5$ в силу неустойчивости данного метода [100].

Зависимости $Z_{max}(M)$, представленные на Рисунке 2.5.17. б), согласуются заметно хуже, чем при сравнении с $Z_{max}(M)$, рассчитанным методом LR. Данные, представленные на Рисунках 2.5.15., 2.5.16. и 2.5.17., были опубликованы в работах [118-120, 122].

Дипольный момент облака ионов. Функция $n_1(r)r^3$ определяет дипольный момент ионного облака (2.4.15). На расстояниях $r > 10 \lambda_i$, $n_1(r) < 10^{-4} n_\infty$, что сравнимо с величиной вычислительного шума. Функция $n_1(r)r^3$ в этой области перекрывается шумом, и рассчитать интеграл (2.4.15) для $r > 10 \lambda_i$ с хорошей точностью – задача крайне трудоёмкая. Дипольный момент может быть вычислен в некотором ограниченном пространстве, в котором этот шум достаточно мал. Переопределим выражение (2.4.15):

$$\tilde{P}_{pl} = \frac{1}{3} \int_0^{r_1} n_1(r) r^3 dr. \quad (2.5.2)$$

Здесь верхний предел интеграла, r_1 – точка, где функция $n_1(r)r^3$ впервые обращается в ноль. Точка r_1 – место, где анизотропная часть пространственного распределения плотности ионов становится отрицательной, то есть расстояние, на котором заканчивается искривлённое облако ионов. Анизотропия ионного облака, то есть ионная фокусировка, является основной причиной возникновения локального максимума в потенциале.

На Рисунке 2.5.18. представлена зависимость дипольного момента ионного облака $\tilde{P}_{pl}$ (2.5.2), от напряжённости внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, для различных значений средней длины свободного пробега ионов l_i и радиуса пылевой частицы r_0 . На Рисунке 2.5.18. видно, что, при увеличении l_i , как и при увеличении r_0 , дипольный момент $\tilde{P}_{pl}$ растёт. Однако такой результат кажется самоочевидным и, хотя по нему можно констатировать общую тенденцию, этого кажется недостаточным. Для полноценного анализа полученных зависимостей необходимо провести нормировку, связанную со значениями радиуса пылевой частицы и средней длины свободного пробега. Такая нормировка была определена эмпирически в качестве коэффициента

$r_0\sqrt{l_i}$. Данные, представленные на Рисунке 2.5.18., были опубликованы в работах [111,119-122].

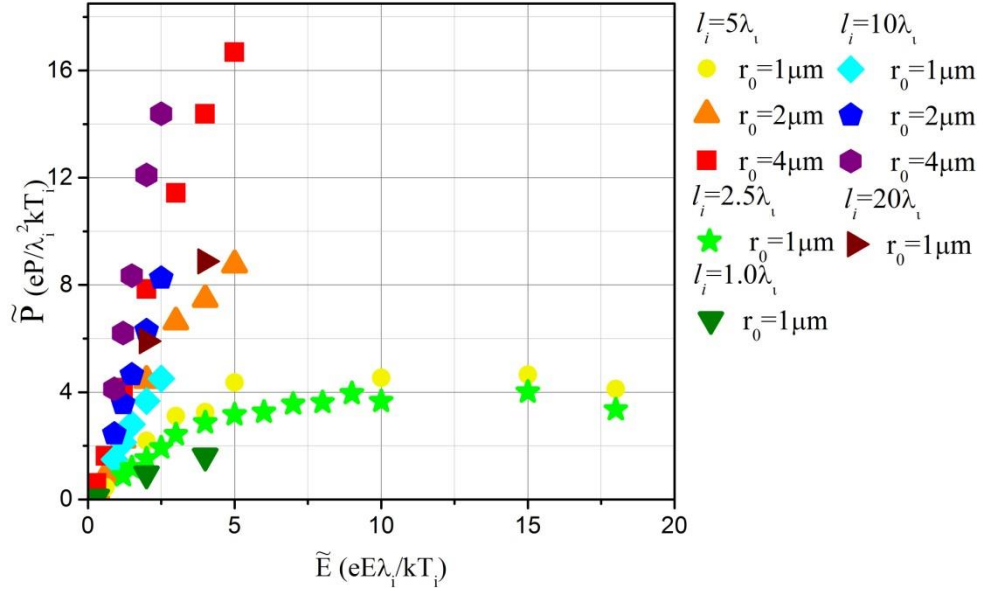


Рисунок 2.5.18. Зависимость дипольного момента ионного облака $\tilde{P}_{pl}$ от напряжённости внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, для различных значений средней длины свободного пробега l_i и радиуса пылевой частицы r_0 .

На Рисунке 2.5.19. представлена зависимость дипольного момента ионного облака $\tilde{P}_{pl}/(r_0\sqrt{l_i})$, от напряжённости внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, для различных значений средней длины свободного пробега ионов l_i и радиуса пылевой частицы r_0 . Эту зависимость можно условно разделить на две области – область слабой и сильной анизотропии. В области слабой анизотропии ($\tilde{E} < 4$), зависимости дипольного момента ионного облака от $\tilde{E}$, полученные для разных l_i и r_0 , совпадают. В области сильной анизотропии ($\tilde{E} > 4$) возникает расхожимость, при этом $\tilde{P}_{pl}(\tilde{E})$, измеренные для меньших l_i , оказываются больше. Данные, представленные на Рисунке 2.5.19., были опубликованы в работах [111,119-122].

Представленная на Рисунке 2.5.19. общая зависимость может быть аппроксимирована следующим образом:

$$\tilde{P}_{pl} = A_p r_0 \tilde{E} \sqrt{l_i} (1 + (\tilde{E} / B_p)^2)^{-\gamma}. \quad (2.5.3)$$

Здесь $A_p = 0.82 \pm 0.2$, $B_p = 7.0 \pm 0.2$, $\gamma = 0.75$ – коэффициенты, установленные эмпирически.

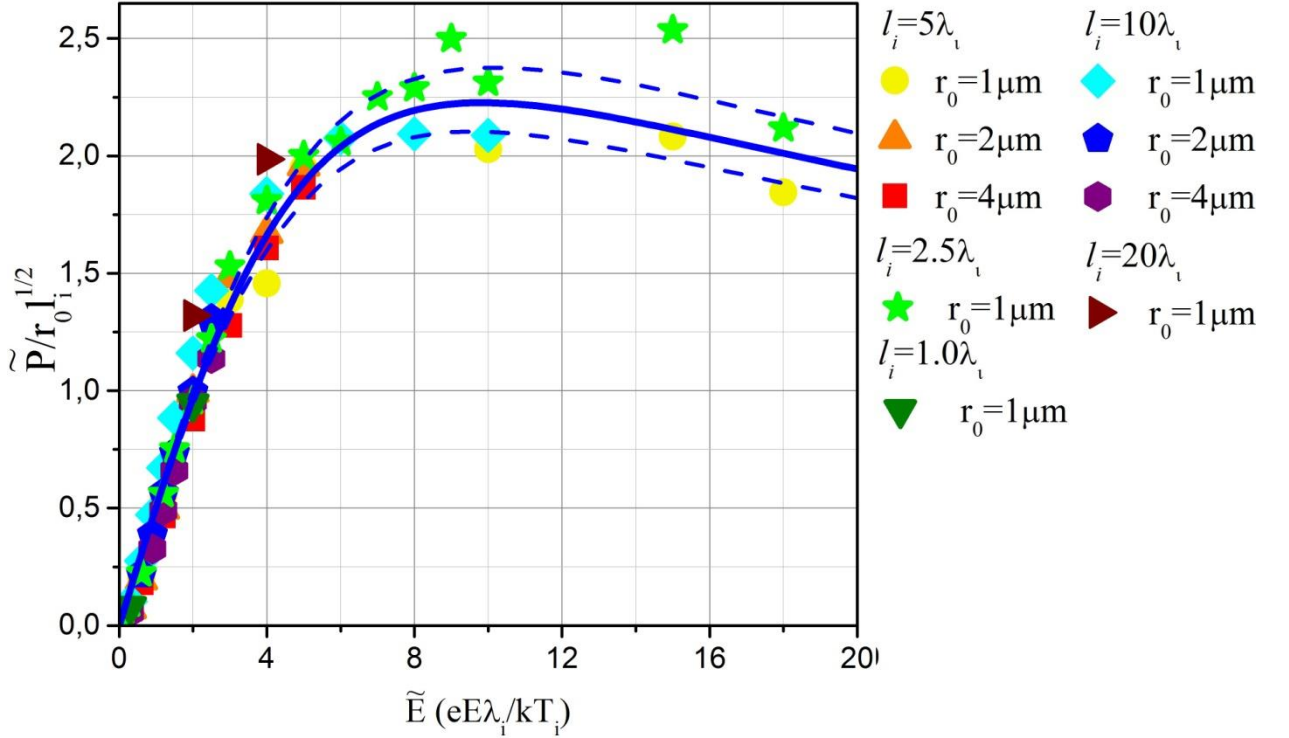


Рисунок 2.5.19. Зависимость дипольного момента ионного облака $\tilde{P}_{pl}/(r_0 \sqrt{l_i})$ от напряжённости внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, для различных значений средней длины свободного пробега l_i и радиуса пылевой частицы r_0 .

В данной модели не учитывается то влияние, которое оказывает поляризация самой пылевой частицы на пространственное распределение потенциала в расчётной области. Так как дипольный момент пропорционален объёму пылевой частицы ($\sim r_0^3$) [126], для частиц микронного размера, его величина будет на 3-6 порядков меньше, чем дипольный момент облака ионов ($\sim \lambda_i^3$). Дипольный момент пылевой частицы начинает влиять на

пространственное распределение потенциала в плазме, когда размер пылевой частицы становится сопоставимым с ионной длиной Дебая [127].

На Рисунке 2.5.20. представлены зависимости $U_{\max}$ и $Z_{\max}$ от напряжённости внешнего электростатического поля $\tilde{E}$. Для $U_{\max}$ проведена нормировка на $\sqrt{r_0 l_i}$.

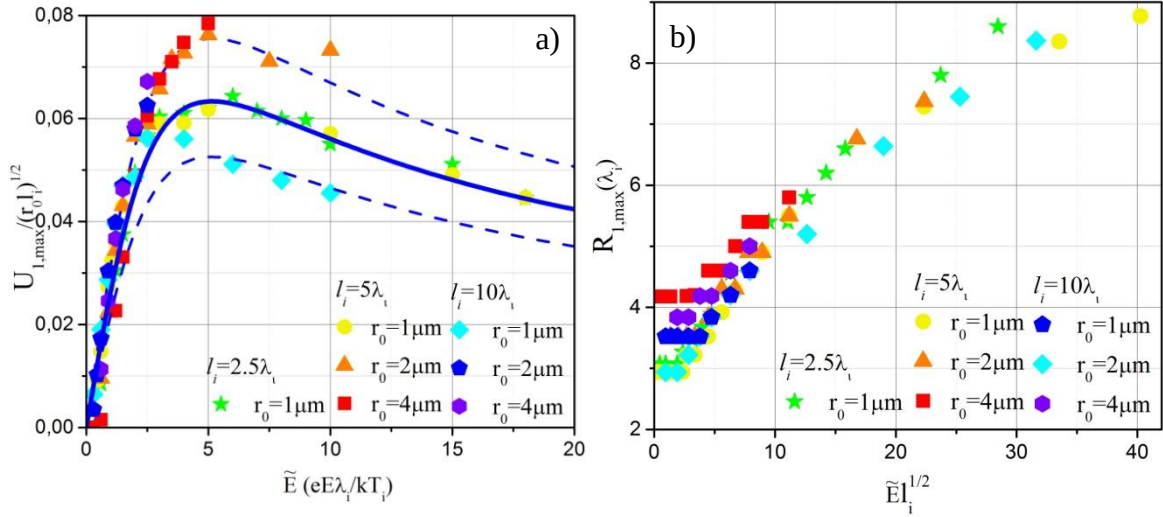


Рисунок 2.5.20. Зависимости а) $U_{\max}/(\sqrt{r_0 l_i})$ от $\tilde{E}$ и б) $Z_{\max}$ от $\tilde{E}\sqrt{l_i}$, для различных значений l_i и r_0 .

Из Рисунка 2.5.20. а) видно, что зависимости $U_{\max}/(\sqrt{r_0 l_i})$ от $\tilde{E}$, рассчитанные для различных значений средней длины свободного пробега l_i и радиуса пылевой частицы r_0 , с хорошей точностью совпадают в случае $\tilde{E} < 4$. Представленная на Рисунке 2.5.20. а) общая зависимость может быть аппроксимирована следующим образом:

$$U_{\max} = A_U \tilde{E} \sqrt{r_0 l_i} (1 + (\tilde{E} / B_U)^2)^{-\gamma}. \quad (2.5.4)$$

Здесь $A_U = 0.028 \pm 0.005$, $B_U = 0.35 \pm 0.2$, $\gamma = 0.75$ – коэффициенты, установленные эмпирически.

Таким образом, выведены аппроксимации, которые позволяют оценить дипольный момент системы и параметры вейка для широкого интервала

значений $\tilde{E}$, l_i и r_0 . Данные, представленные на Рисунке 2.5.20., были опубликованы в работах [111,119-122].

Оценка дипольного момента по величине локального максимума вейка. Дипольный момент можно определить иначе. Представим, что потенциал, схожий с кулоновским, индуцирован в точке $Z_{\max}$ положительно заряженной частицей $Q_{\max} = U_{\max} Z_{\max}$. В таком случае, дипольный момент относительно начала координат, будет равен:

$$\tilde{P}_q = aQ_{\max} Z_{\max} = aU_{\max} Z_{\max}^2. \quad (2.5.5)$$

Здесь a – нормировочный коэффициент.

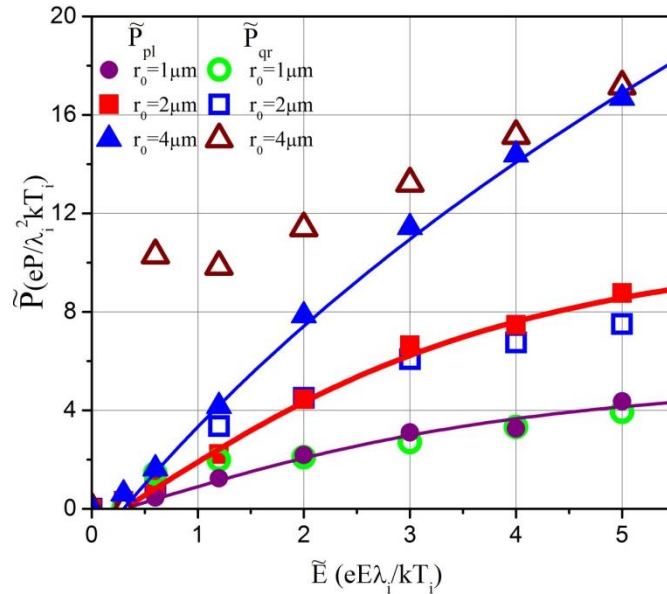


Рисунок 2.5.21. Зависимость дипольных моментов $\tilde{P}_{pl}$ и $\tilde{P}_q$ от напряжённости внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, для различных r_0 , при $l_i = 5 \lambda_i$

На Рисунке 2.5.21. представлены зависимости дипольного момента ионного облака от напряжённости внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, которые рассчитаны двумя способами: по формуле (2.5.2) и по оценке (2.5.5), которая рассчитана для $a = 0.5$. Как видно из Рисунка 2.5.21., при $a = 0.5$, зависимости с хорошей точностью совпадают. Точность этого совпадения

спадает при приближении значения напряжённости внешнего электростатического поля $\tilde{E}$ к нулю, в силу того, что положительный пик в потенциале возникает не сразу. Например, для случая $l_i = 5 \lambda_i$ и $r_0 = 1 \text{ мкм}$, положительный пик возникает при $\tilde{E} = 0.33$. Данные, представленные на Рисунке 2.5.21., были опубликованы в работе [111].

Разные типы столкновений. Зависимость дрейфовой скорости ионов от напряжённости внешнего электростатического поля существенно различается для разных типов столкновений ионов с нейтральными атомами. Учёт только резонансного процесса перезарядки ионов с нейтральными атомами предоставляет наилучшее совпадение результатов численного моделирования с данными эксперимента [110], однако важно иметь представление о том, какие изменения произойдут в системе, если в ней ведётся учёт только упругих столкновений ионов с нейтральными атомами.

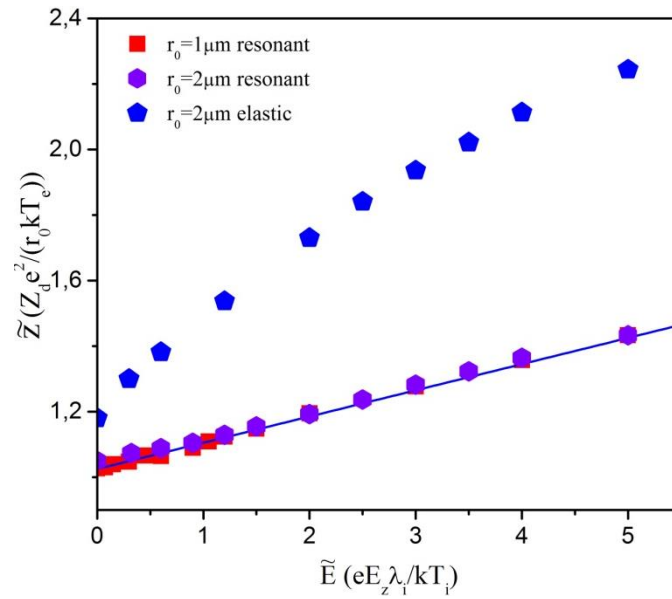


Рисунок 2.5.22. Зависимость заряда пылевой частицы $\tilde{Z}$ от напряжённости внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, измеренная для различных типов столкновений, при $l_i = 5 \lambda_i$.

На Рисунке 2.5.22. продемонстрирована зависимость заряда пылевой частицы от напряжённости внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, измеренная для различных типов взаимодействий ионов с нейтральными атомами. В случае упругих столкновений видно, что заряд пылевой частицы растёт быстрее с увеличением $\tilde{E}$. Такой результат ожидаем, так как, при упругих столкновениях, ионы не теряют полностью свою кинетическую энергию. Из-за этого, ионы, сталкивающиеся вблизи пылевой частицы, с меньшей вероятностью попадают на её поверхность. Следовательно, из условия равенства потоков ионов и электронов, попадающих на пылевую частицу, значение заряда, индуцированного на пылевой частице, растёт. Данные, представленные на Рисунке 2.5.22., были опубликованы в работе [111].

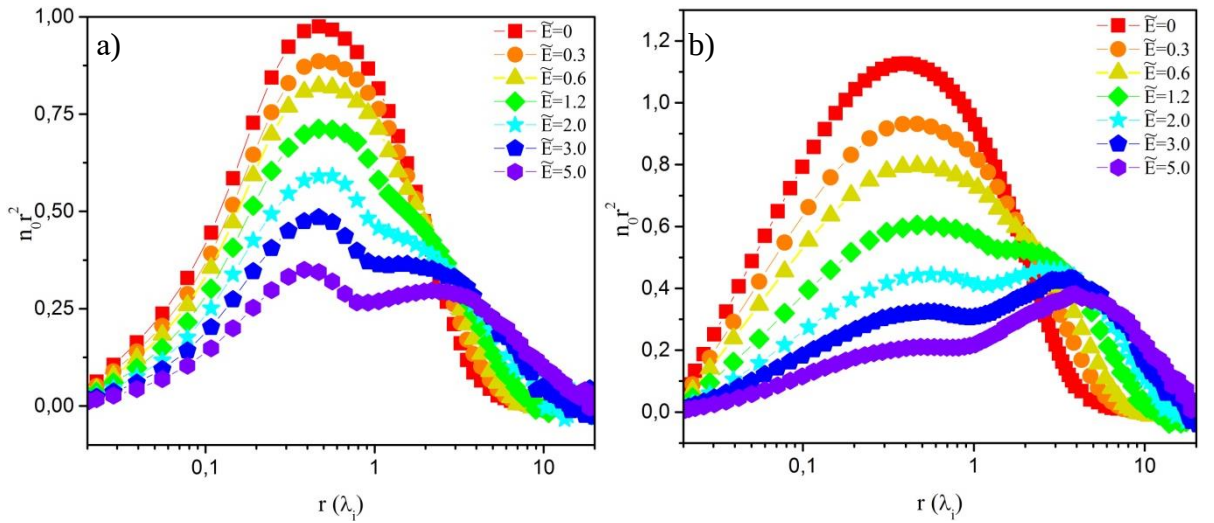


Рисунок 2.5.23. Функция $n_0(r)r^2$ для случаев а) резонансной перезарядки и б) упругих столкновений ионов с нейтральными атомами при $l_i = 5 \lambda_i$, $r_0 = 2 \text{ мкм}$, для различных значений напряжённости внешнего электростатического поля $\tilde{E}$.

На Рисунке 2.5.23. продемонстрировано сравнение функций $n_0(r)r^2$, измеренных для разных типов взаимодействий ионов с нейтральными атомами. Видно, как, при увеличении напряжённости внешнего

электростатического поля $\tilde{E}$, функции $n_0(r)r^2$ искривляются, и проявляется второй максимум. Однако, в случае упругих столкновений, это искривление оказывается сильнее, а второй максимум в распределении $n_0(r)r^2$ становится больше первого. Данные, представленные на Рисунке 2.5.23., были опубликованы в работе [111].

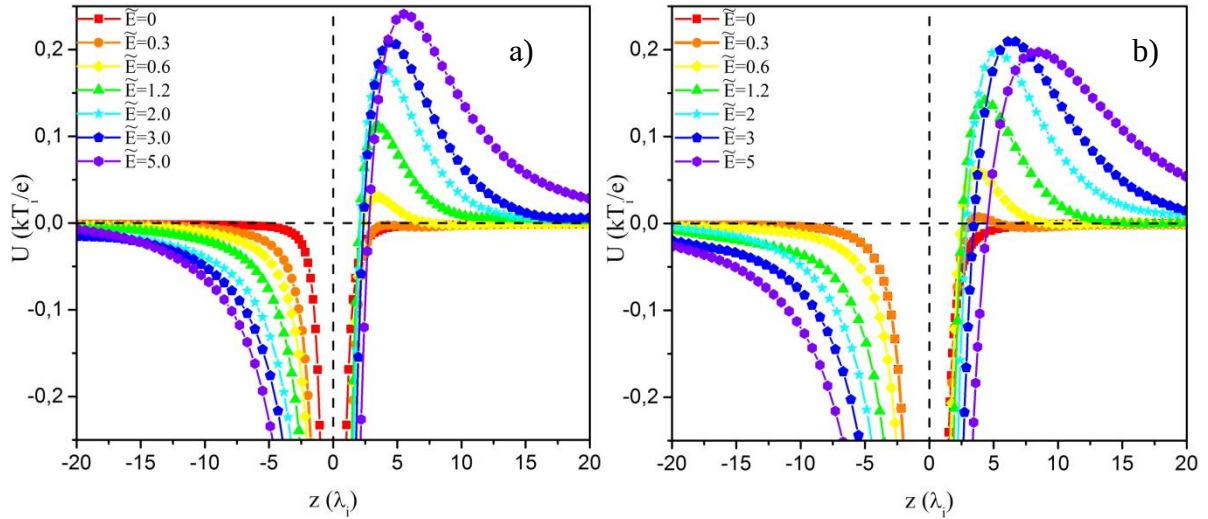


Рисунок 2.5.24. Пространственное распределение потенциала $U(\rho=0, z)$, представленное для координаты $\rho=0$, измеренное для случая а) резонансной перезарядки и б) упругих столкновений ионов с нейтральными атомами, при $l_i = 5 \lambda_i$, $r_0 = 2 \text{ мкм}$, для различных значений внешнего электростатического поля $\tilde{E}$.

На Рисунке 2.5.24. показано сравнение срезов пространственного распределения потенциала $U(\rho, z)$ по направлению внешнего электростатического поля, рассчитанных для различных типов взаимодействий ионов с нейтральными атомами. Из Рисунка 2.5.25. видно, что, для малых значений $\tilde{E}$, значение положительного максимума потенциала U_{max} оказывается большим для случая, когда учитываются только упругие столкновения, кроме того сам пик уширяется. С увеличением $\tilde{E}$, U_{max} продолжает рост в случае учёта только резонансной перезарядки и начинает спадать в случае учёта только упругих столкновений, что говорит о

том, что область насыщения, достигается быстрее в случае учёта только упругих столкновений. Данные, представленные на Рисунке 2.5.24., были опубликованы в работе [111].

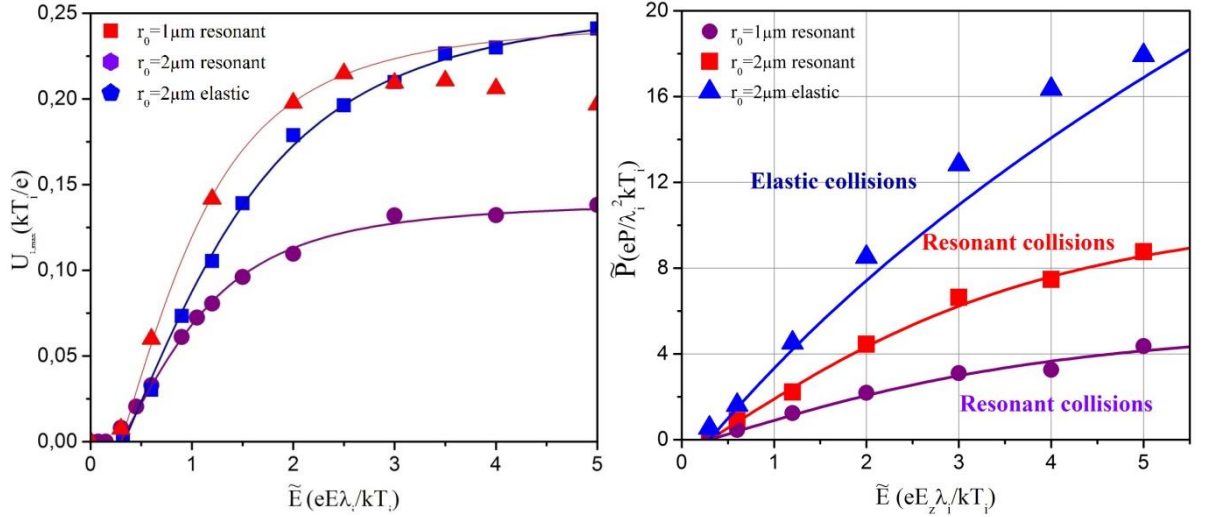


Рисунок 2.5.25. Зависимости а) величины максимума вейка U_{max} и б) дипольного момента ионного облака $\tilde{P}_{pl}$ от напряжённости внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, измеренные для различных типов взаимодействий ионов с нейтральными атомами, при $l_i = 5 \lambda_i$, $r_0 = 2 \text{ мкм}$.

На Рисунке 2.5.25. продемонстрированы зависимости величины максимума вейка U_{max} и дипольного момента ионного облака $\tilde{P}_{pl}$ от напряжённости внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, измеренные для различных типов взаимодействий ионов с нейтральными атомами, при $l_i = 5 \lambda_i$, $r_0 = 2 \text{ мкм}$. Из Рисунка 2.5.25. а) видно, что, в случае учёта только упругих столкновений, область насыщения достигается быстрее. После прохождения области насыщения начинается спад величины максимума вейка U_{max} . Это объясняется ростом средней кинетической энергии ионов с увеличением напряжённости внешнего электростатического поля. Средняя кинетическая энергия становится таковой, что ионы не задерживаются в вейке, улетая на

бесконечность, и не вносят вклад в пространственное распределение плотности ионов вниз по потоку от пылевой частицы.

В случае учёта только упругих столкновений, облако ионов искажается сильнее и дипольный момент, индуцированный в системе, становится больше. Это подтверждают зависимости, показанные на Рисунке 2.5.25. б). Из Рисунка 2.5.25. б) видно, что дипольный момент, измеренный в случае учёта только упругих столкновений, в два раза больше того, что измерен в случае, когда учтена только резонансная перезарядка. Данные, представленные на Рисунке 2.5.25., были опубликованы в работе [111].

Применимость приближения пространственного распределения плотности электронов распределение Больцмана. Как уже было указано ранее в параграфе четыре данной главы, представленной численной моделью решается задача, где плотность электронов описывается распределением Больцмана, которое верно для случая, когда систему можно считать равновесной. Однако описываемую систему нельзя считать равновесной по двум причинам: во-первых, как уже было указано ранее, в случае, когда температура электронов намного превышает температуру ионов $T_e \gg T_i$, такая система считается неравновесной [112]. Во-вторых, нельзя пренебречь и процессом зарядки самой пылевой частицы. В силу того, что заряд пылевой частицы определяется равенством потоков ионов и электронов, рекомбинирующих на её поверхности, то это значит, что система с пылевой частицей поглощает плазму. Следовательно, для поддержания на одинаковом уровне параметров ионизации и концентрации частиц, необходим постоянно действующий источник ионов и электронов. В этом случае система вблизи пылевой частицы является открытой, что противоречит условию о равновесности системы, выполнение которого необходимо для применения приближения о соответствии пространственного распределения электронов распределению Больцмана [105]. В силу указанных факторов, ожидаемо, что для пространственного распределения плотности электронов будут иметь

место отклонения от распределения Больцмана, в особенности, вблизи пылевой частицы, на расстояниях меньших, чем длина экранирования.

Однако стоит отметить, что, из-за того, что пылевая частица заряжается до большого по величине отрицательного заряда, она начинает расталкивать электроны вокруг себя, то есть значение пространственного распределения плотности электронов у пылевой частицы $n_e(r, \theta) < n_\infty$, при этом для пространственного распределения плотности ионов $n_i(r, \theta) \gg n_\infty$, для $r < \lambda_i$. Таким образом, несмотря на искажения в пространственном распределении плотности электронов, это искажение будет оказывать минимальное влияние на пространственное распределение плотности объёмного заряда вблизи пылевой частицы, а также на пространственное распределение потенциала.

Второй существенной погрешностью, которая появляется из-за того, что в данной системе не проводится расчёт динамики электронов, является вносимая ошибка в определение заряда пылевой частицы. Поток электронов (2.1.6), вывод которого был проведён аналитически, отвечает случаю, когда функцию распределения скоростей электронов можно описать распределением Максвелла. Основным условием применимости распределения Максвелла является условие об изотропности системы. Исходя из определения изотропной системы, можно утверждать, что описание распределением Максвелла не удовлетворяется при любой величине внешнего поля $\tilde{E}$, отличной от нуля. В силу этого на пылевой частице будет накапливаться заряд, отличный от того, что представлен на Рисунке 2.5.8. Несмотря на это, на Рисунках 2.5.19 и 2.5.20 показано, что зависимость характеристики вейка и дипольного момента системы от напряжённости $\tilde{E}$ с хорошей точностью описываются эмпирическими аппроксимациями (2.5.3) и (2.5.4). Наибольшая точность этих аппроксимации достигается для $\tilde{E} < 4$. Другими словами, если, при расчёте электронной динамики, на пылевой частице накопится другой заряд, то новые зависимости характеристик вейка и дипольного момента системы от $\tilde{E}$ с

хорошей точностью совпадут с представленными Рисунок 2.5.19 и 2.5.20, для $\tilde{E} < 4$ и будут иметь меньшее совпадение с данными, рассчитанными для $\tilde{E} > 4$.

Исходя из вышесказанного, полученные результаты расчёта самосогласованных пространственных распределений можно считать объективными в случае, когда измерение пространственных распределений осуществляется для $r > \lambda_i$, при этом, если это измерение проводилось для малых напряжённостей внешнего электростатического поля $\tilde{E} < 4$.

2.6. Описание численной модели, созданной для расчёта самосогласованного пространственного распределения потенциала, вокруг изолированных сферических пылевых частиц через прямое решение уравнения Пуассона

Разложение по полиномам Лежандра действительно в случае слабой анизотропии, поэтому возникает необходимость проверить данные пятого параграфа вычислением, точность которого бы не зависела от величины внешнего электростатического поля $\tilde{E}$.

Для этого, на базе модели, представленной в параграфе четыре, была создана модифицированная модель. Эта модель сохраняет преимущества более ранней версии модели, касающиеся анализа данных, при этом обладает более высокой точностью вычислений для случаев, когда анизотропия в вычислительной области велика.

Далее, мы поочерёдно рассмотрим, что во второй модификации модели осталось прежним, а что изменилось относительно первой модификации модели.

Расчёт времени. В данной модификации, для расчёта самосогласованного пространственного распределения потенциала, используется прямое решение уравнения Пуассона. В силу того, что внешнее

электростатическое поле $\tilde{E}$ направлено по оси z , решаемая задача цилиндрически симметрична, и потому кажется целесообразным разделение вычислительного пространства на сегменты, отвечающие цилиндрической координатной системе. Однако для расчёта гармоник $n_k(r)$ удобным является разделение пространства на сферические сегменты. Поэтому вычислительная область в данной модификации разделена, как согласно сферической симметрии, так и согласно цилиндрической симметрии. Альтернативным вариантом был расчёт (2.4.12) из распределения плотности объёмного заряда, записанного в цилиндрических координатах, переходя с помощью преобразований из одной системы координат в другую стандартным преобразованием. Однако такой расчёт ведёт к потере точности.

Одновременно с разделением (2.4.7) вычислительная область подразделяется на ячейки (k,l) по цилиндрическим координатам ρ и z (см. Рисунок 2.6.1.) так, чтобы объём каждой ячейки был равен:

$$V_{k,l} = \rho_k \Delta \rho_k \Delta z_l. \quad (2.6.1)$$

Здесь l - порядковый номер ячейки, отвечающий за разделение объёма по радиальной координате, k - порядковый номер ячейки, отвечающий за разделение объёма по координате z .

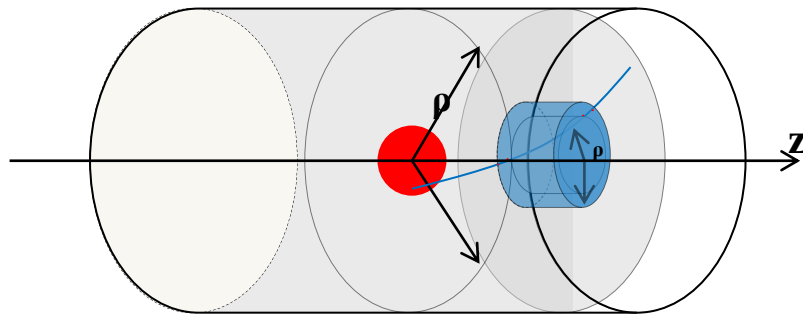


Рисунок 2.6.1. Схематическое изображение разделения расчётной области на цилиндрические ячейки.

Времена $T_{i,j}$ и $T_{k,l}$, которые наблюдаемый ион провёл в сегментах пространства (i,j) и (k,l) , записываются в массивы, отвечающие данным

сегментам. После этого $T_{i,j}$ и $T_{k,l}$ нормируется на объёмы (2.4.7) и (2.6.1) соответственно:

$$n_i(i, j) = n_i(i, j) + \frac{T_{i,j}}{V_{i,j}}, \quad n_i(k, l) = n_i(k, l) + \frac{T_{k,l}}{V_{k,l}}. \quad (2.6.2)$$

Как и для случая сферического деления, накопленное время прямо пропорционально ионной плотности в каждой точке пространства $n_i(k, l) = B n_i(\rho, z)$. Коэффициент пропорциональности, который позволяет накопленное время с пространственным распределением плотности ионов, определялся выражением:

$$B = n_\infty / \langle n_i(k, l) \rangle_{border}. \quad (2.6.3)$$

Здесь $\langle n_i(k, l) \rangle_{border}$ - усреднённое время пребывания ионов в граничных сегментах системы.

Вычисление потенциала. В начале расчёта в системе задаётся потенциал идентичный (2.4.11), который в цилиндрической системе координат запишется в виде:

$$U_0(\rho, z) = -\frac{\tilde{Q}}{r} \exp(-r) - \tilde{E}z, \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2}. \quad (2.6.4)$$

Из накопленного времени пребывания ионов, производится расчёт пространственного распределения плотности объёмного заряда $n(\rho, z)$:

$$n(\rho, z) = \frac{n_i(\rho, z) - n_e(\rho, z)}{n_\infty}. \quad (2.6.5)$$

Из полученного пространственного распределения плотности объёмного заряда $n(\rho, z)$ (2.6.5) можно рассчитать полный заряд и дипольный момент окружающей плазмы:

$$\tilde{Q}_{cil} = 2\pi \iint_{V_{syst}} n(\rho, z) \rho d\rho dz, \quad (2.6.6)$$

$$\tilde{P}_{cil} = 2\pi \iint_{V_{syst}} zn(\rho, z) \rho d\rho dz. \quad (2.6.7)$$

Условия квазинейтральности превращается в условие равенства $\tilde{Q}_{cil}$, $\tilde{Q}_{pl}$ и $\tilde{Q}$.

Перепишем (2.2.9) для безразмерных переменных, с учётом потенциала точечного заряда:

$$U(\rho, z) = -\frac{\tilde{Q}}{r} + \iiint_{V_{syst}} \frac{n(\rho', \varphi', z') \rho' d\rho' d\varphi' dz'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.6.8)$$

По формуле (2.6.8) во второй модификации модели происходит расчёт самосогласованного пространственного распределения потенциала.

Компоненты силы. Как и в первой модификации модели, компоненты силы рассчитываются по формулам, которые можно получить через покомпонентное дифференцирование (2.6.8):

$$\begin{aligned} F_x(x, y, z) &= -\frac{\tilde{Q}x}{r^3} + \iiint_{V_{syst}} \frac{(x - x')n(\rho', \varphi', z')\rho' d\rho' d\varphi' dz'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \\ F_y(x, y, z) &= -\frac{\tilde{Q}y}{r^3} + \iiint_{V_{syst}} \frac{(y - y')n(\rho', \varphi', z')\rho' d\rho' d\varphi' dz'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \\ F_z(x, y, z) &= -\frac{\tilde{Q}z}{r^3} + \iiint_{V_{syst}} \frac{(z - z')n(\rho', \varphi', z')\rho' d\rho' d\varphi' dz'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \tilde{E}z. \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

Моделирование движения ионов во второй модификации модели производится по формуле (2.4.20), где для коэффициентов k_{1-4, r_α} используются компоненты силы, определённые (2.6.9).

Общая итеративная схема расчёта самосогласованного пространственного распределения потенциала во второй модификации модели следующая:

1) Поочерёдно рассчитываются траектории ионов с помощью уравнения Ньютона (2.4.20), которые рассчитываются для потенциала (2.6.4).

2) Из этих траекторий рассчитывается, сколько времени каждый ион пробыл в каждом элементе пространства (2.6.2).

3) По формулам (2.6.5) производится расчёт пространственного распределения плотности объёмного заряда $n(\rho, z)$.

4) По формулам (2.4.30-31) корректируется величина заряда пылевой частицы.

5) Из формул (2.6.8) и (2.6.9) производится расчёт самосогласованного пространственного распределения потенциала $U(\rho, z)$ и компонент силы $F_a(x, y, z)$.

6) Итерации зацикливаются. В (2.4.20) теперь используются компоненты силы, определённые (2.6.9).

2.7. Результаты расчёта численной модели, которая основана на прямом решении уравнения Пуассона

Далее представлено сравнение самосогласованных пространственных распределений плотности объёмного заряда и потенциала, рассчитанных двумя модификациями используемой модели: первой, где расчёт самосогласованного пространственного распределения потенциала производится путём разложения пространственного распределения объёмного заряда по полиномам Лежандра, и второй, представленной в предыдущем параграфе. Параметры, для которых производились расчёты, аналогичны тем, что были выбраны в параграфе пятом данной главы.

Самосогласованные пространственные распределения потенциала и объёмного заряда. На Рисунках 2.7.1. и 2.7.2. представлено сравнение процессов возникновения вейка в самосогласованных пространственных распределениях плотности объёмного заряда и потенциала, который растёт с увеличением напряжённости внешнего электростатического поля. Пространственные распределения, представленные на Рисунках 2.7.1. и 2.7.2. рассчитаны для величин средней длины свободного пробега $l_i = 5 \lambda_i$ и радиуса пылевой частицы $r_0 = 2 \text{ мкм}$.

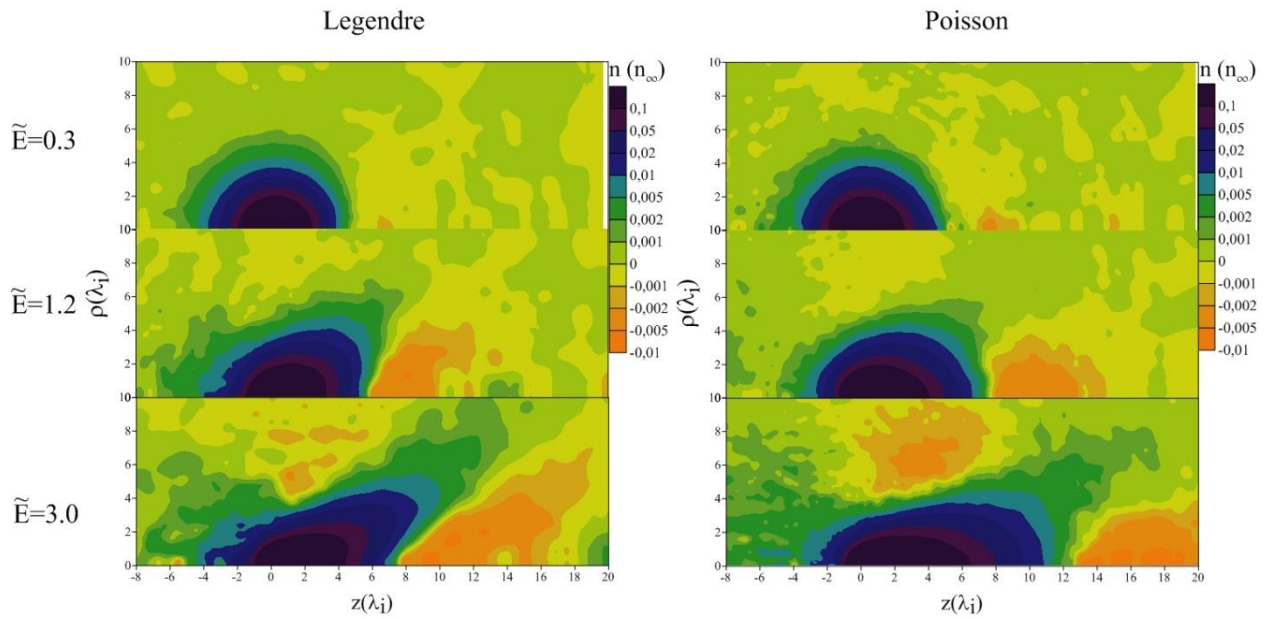


Рисунок 2.7.1. Пространственные распределения плотности объёмного заряда $n(\rho, z)$, рассчитанного в двух модификациях модели: первой, где расчёт пространственного распределения самосогласованного потенциала производится из разложения плотности по полиномам Лежандра (левый набор графиков) и второй, где расчёт пространственного распределения самосогласованного потенциала производится из прямого решения уравнения Пуассона (правый набор графиков), при $l_i = 5 \lambda_i$ и $r_0 = 2 \text{ мкм}$ и различных значениях $\tilde{E}$.

Представленные на Рисунке 2.7.1. самосогласованные пространственные распределения плотности объёмного заряда $n(\rho, z)$ показывают, что различия в самосогласованных распределениях, полученные двумя модификациями, в случае $\tilde{E} < 1.2$, несущественны: облака ионов искривляются схожим образом, а ионная яма образуется на одинаковом расстоянии от пылевой частицы. Однако, при увеличении напряжённости внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, распределение $n(\rho, z)$, полученное прямым решением уравнения Пуассона, искривляется в сторону поля сильнее, а ионная яма сдвигается вниз по

потоку от пылевой частицы, в сравнении расчётом, выполненном первой модификацией.

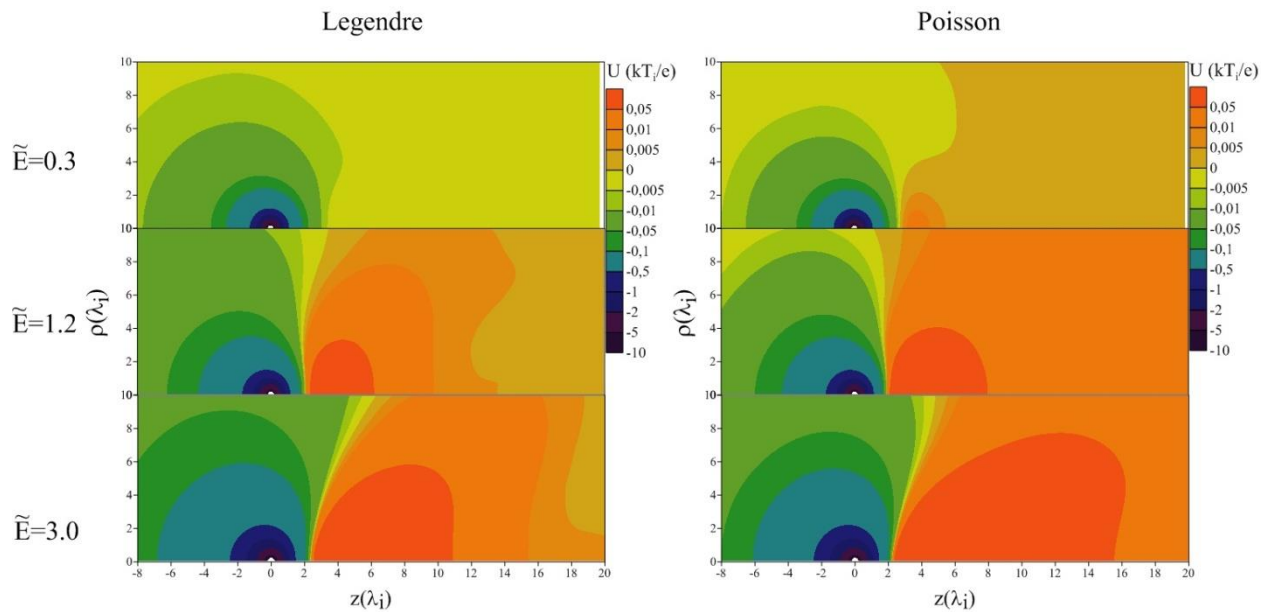


Рисунок 2.7.2. Пространственные распределения потенциала $U(\rho, z)$, рассчитанного в двух модификациях модели: первой, где расчёт пространственного распределения самосогласованного потенциала производится из разложения плотности по полиномам Лежандра (левый набор графиков) и второй, где расчёт пространственного распределения самосогласованного потенциала производится из прямого решения уравнения Пуассона (правый набор графиков), при $l_i = 5 \lambda_i$ и $r_0 = 2 \text{ мкм}$ и различных значениях $\tilde{E}$.

Аналогичное сравнение, выполненное для самосогласованных пространственных распределений потенциала $U(\rho, z)$, можно наблюдать на Рисунке 2.7.2. При возникновении $\tilde{E}$, различия в распределениях возрастают: величина локального максимума $U_{\max}$ в $U(\rho, z)$, вычисленном во второй модификации, становится большее, положение этого максимума $Z_{\max}$ сдвигается вниз по потоку от пылевой частицы, а область, где $U(\rho, z) > 0$, уширяется.

Различия в самосогласованных распределениях, представленных на Рисунках 2.7.1. и 2.7.2., показывают, что, с ростом $\tilde{E}$, и, как следствие, с ростом анизотропии в вычислительной области, сумма гармоник, представленная формулой (2.4.12), всё хуже справляется с задачей описания пространственного распределения объёмного заряда $n(\rho, z)$. Как следствие, падает точность расчёта самосогласованного пространственного распределения потенциала $U(\rho, z)$.

Разложение плотности объёмного заряда по полиномам Лежандра.

На Рисунке 2.7.3. представлены срезы самосогласованного пространственного распределения плотности объёмного заряда $n(\rho, z)$ по направлению внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, то есть для координаты $\rho=0$, рассчитанного для двух модификаций модели.

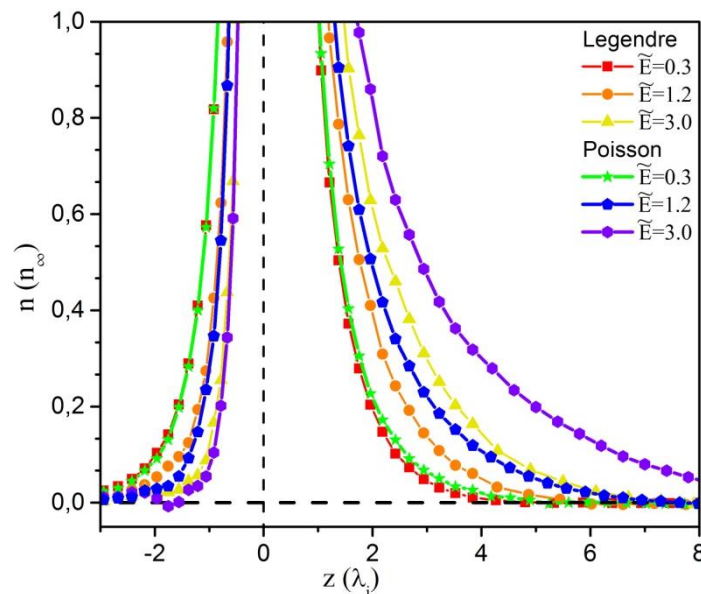


Рисунок 2.7.3. Пространственное распределение плотности объёмного заряда $n(\rho=0, z)$, представленное для координаты $\rho=0$, при $l_i = 5 \lambda_i$, $r_0 = 2 \text{ мкм}$, для различных значений внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, рассчитанное двух модификаций модели.

Результаты, представленные на Рисунке 2.7.3., также показывают, что, при возрастании напряжённости внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, различия между самосогласованными распределениями растут. При этом важно отметить, самосогласованные пространственные распределения плотности объёмного заряда $n(\rho, z)$ совпадают для $z < 0$. То есть описания $n(\rho, z)$ разложением (2.4.12) достаточно для области слева от пылевой частицы.

В целях анализа, пространственное распределение плотности объёмного заряда $n(r, \theta)$ раскладывалось в гармоники $n_k(r)$ и во второй модификации. На Рисунке 2.7.4. представлены функции $n_0(r)r^2$ и $n_1(r)r^3$, рассчитанные для двух модификаций модели, для различных напряжённостей внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, при $l_i = 5 \lambda_i$, $r_0 = 2$ мкм.

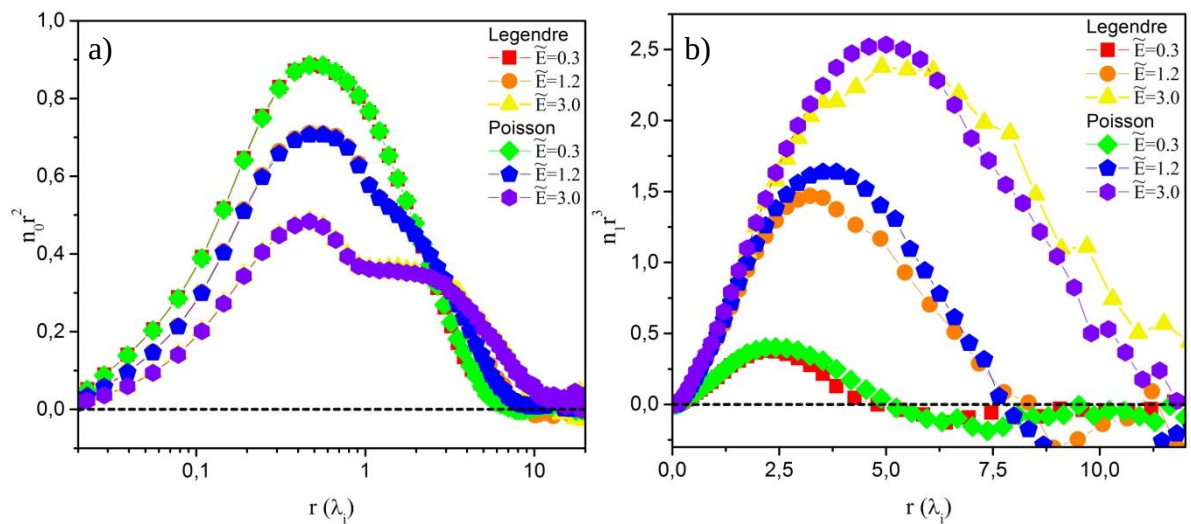


Рисунок 2.7.4. Сравнение функций а) $n_0(r)r^2$ и б) $n_1(r)r^3$, рассчитанных для двух модификаций модели, при $l_i = 5 \lambda_i$, $r_0 = 2$ мкм, для различных $\tilde{E}$.

Из Рисунка 2.7.4 а) видно, что функции $n_0(r)r^2$, рассчитанные в двух модификациях, совпадают. Таким образом, величина совокупного заряда, рассчитанного по формуле (2.4.14), остаётся неизменной в различных модификациях модели.

На Рисунке 2.7.4 б), где представлено радиальное распределение функции $n_I(r)r^3$, между результатами, полученными для двух модификаций модели, появляются различия, которые растут с увеличением $\tilde{E}$. Для $\tilde{E} = 0.3-1.2$ эти различия выражаются в том, что локальный максимум функции $n_I(r)r^3$, рассчитанной для второй модификации модели, оказывается больше, чем локальный максимум функции $n_I(r)r^3$, вычисленной в первой модификации. Это согласуется с распределениями, представленными на Рисунке 2.7.1., где видно, что в $n(\rho, z)$, рассчитанного во второй модификации, облако ионов искривляется сильнее вдоль внешнего электростатического поля.

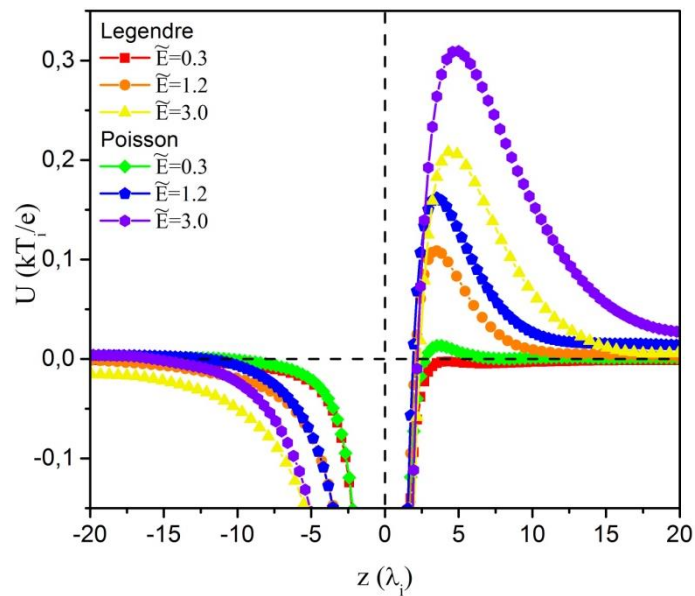


Рисунок 2.7.5. Пространственное распределение потенциала $U(\rho=0, z)$, представленное для координаты $\rho=0$, при $l_i = 5 \lambda_i$, $r_0 = 2$ мкм, для различных значений внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, рассчитанное двух модификаций модели.

Пространственное распределение потенциала. На Рисунке 2.7.5. представлены срезы самосогласованного пространственного распределения потенциала $U(\rho=0, z)$ по направлению внешнего электростатического поля $\tilde{E}$,

то есть для координаты $\rho=0$, рассчитанные для двух модификаций модели, для различных напряжённостей внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, при $l_i = 5\lambda_i$ и $r_0 = 2$ мкм.

С увеличением $\tilde{E}$, растёт разница между $U_{\max}$ и $Z_{\max}$, вычисленными для двух модификаций. При этом важно отметить, что самосогласованные пространственные распределения потенциала $U(\rho, z)$ совпадают для $z < 0$.

На Рисунке 2.7.6. представлено сравнение зависимостей величины локального максимума потенциала $U_{\max}$ и положения локального максимума потенциала $Z_{\max}$ от напряжённости внешнего поля $\tilde{E}$, рассчитанных в двух модификациях модели, при $r_0 = 1$ мкм для различных значений средней длины свободного пробега ионов l_i . Зависимости, представленные на Рисунке 2.7.6., нормированы также как и зависимости, представленные на Рисунке 2.5.20.

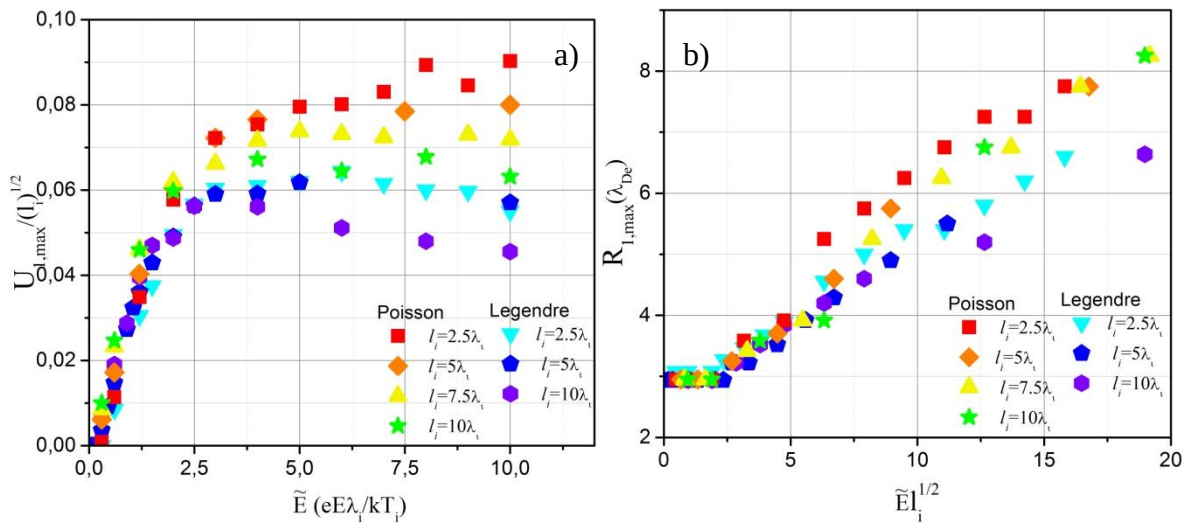


Рисунок 2.7.6. Сравнение зависимостей а) $U_{\max}/(\sqrt{r_0 l_i})$ от $\tilde{E}$ и б) $Z_{\max}$ от $\tilde{E}\sqrt{l_i}$, рассчитанных двумя модификациями модели, для различных l_i , при $r_0 = 1$ мкм.

Зависимости, представленные на Рисунке 2.7.6., демонстрируют, что, когда величина внешнего электростатического поля $\tilde{E} < 2$, характеристики

вейка, рассчитанные двумя модификациями, с хорошей точностью совпадают. С ростом напряжённости электростатического поля, U_{max} , рассчитанные второй модификацией становятся больше, чем U_{max} , рассчитанные первой модификацией, в виду того, что суммы (2.4.14) становятся недостаточно для описания пространственного распределения плотности объёмного заряда. Для напряжённости $\tilde{E} = 2$ различие зависимостей $U_{max}(\tilde{E})$, получаемых двумя модификациями, составляет $\sim 10\%$. В случае $\tilde{E} = 10$, расхождение в $U_{max}(\tilde{E})$ составляет $\sim 30\%$. Расстояние от максимума вейка до пылевой частицы Z_{max} , при больших $\tilde{E}$, также оказывается больше во второй модификации, вследствие того, что ионное облако вытягивается сильнее в сторону поля.

Дипольный момент облака ионов. По формуле (2.5.2) из радиального распределения $n_I(r)r^3$ для второй модификации также можно определить безразмерный дипольный момент искажённого ионного облака.

На Рисунке 2.7.7. представлено сравнение зависимостей дипольного момента ионного облака $\tilde{P}_{pl}$, рассчитанных для двух модификаций модели, от величины внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, для различных l_i и при $r_0 = 1$ мкм. К зависимостям $\tilde{P}_{pl}(\tilde{E})$ применена нормировка $r_0\sqrt{l_i}$,

Представленная на Рисунке 2.7.7. зависимость $\tilde{P}_{pl}(\tilde{E})$ показывает, что, несмотря на различия в функциях $n_I(r)r^3$, представленных на Рисунке 2.7.4, зависимости $\tilde{P}_{pl}(\tilde{E})$, рассчитанные для двух модификаций, хорошо согласуются между собой.

В результате проведённого сравнения зависимостей самосогласованных пространственных распределений, характеристик вейка и дипольного момента ионного облака от параметров пылевой плазмы, рассчитанных двумя модификациями модели, сделан вывод, что результаты, полученные

расчётом первой модификации, обладают хорошей точностью в случае, когда значение внешнего электростатического поля $\tilde{E} < 2$.

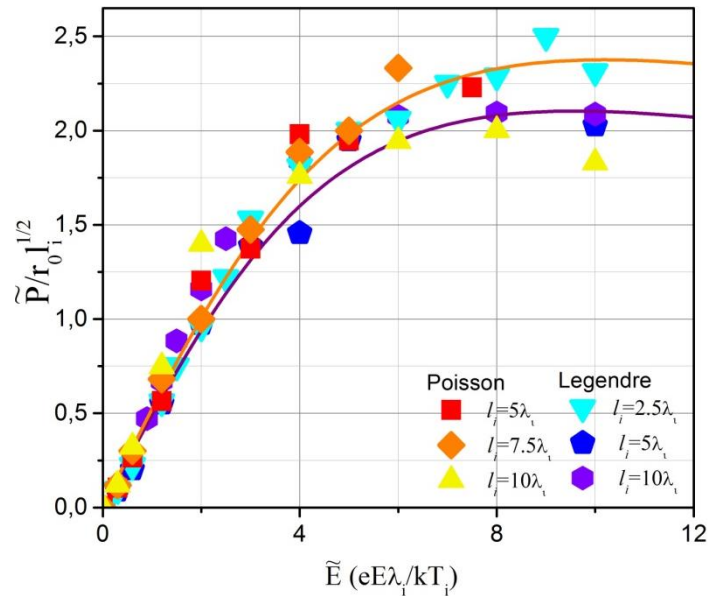


Рисунок 2.7.7. Сравнение зависимостей дипольного момента системы $\tilde{P}_{pl}/(r_0\sqrt{l_i})$ от напряжённости внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, рассчитанного для разных модификаций модели, для различных l_i и для $r_0 = 1$ мкм.

При увеличении напряжённости внешнего электростатического поля, точность расчёта первой модификации существенно снижается, что делает необходимым использование прямого решения уравнения Пуассона для расчёта самосогласованного пространственного распределения потенциала плазмы вблизи изолированной пылевой частицы.

2.8. Последовательное и параллельное выполнение модели.

Выполнение расчётов в первой модификации модели было последовательным, в то время как для второй модификации был применён

стандарт MPI параллельного программирования, где происходило разделение вычислительных потоков на вычислительных ядрах процессора.

Чтобы понять, какое преимущество даёт такой подход, рассмотрим подробнее полный цикл вычислений последовательной модели. Общая схема вычислительного процесса изображена на Рисунке 2.8.1. В первую очередь в программе инициализируются массивы и переменные, которые отвечают за запись координат иона, пространственного распределения потенциала, времени счёта, заряда пылевой частицы, размера вычислительной области и так далее. Затем определяются начальные положения, скорости и собственная длина пробега одного конкретного иона, а также определяется – в каком конкретно сегменте пространства он находится. Этот ион далее будем называть *наблюдаемым*. Суть линейной версии программы в том, что наблюдаемый ион в системе один. После того, как инициализированы переменные, программа входит в бесконечный цикл, который может быть прерван лишь по соответствующей команде оператора.

В начале этого цикла определяется временной шаг dt , с которым будет производиться вычисление уравнения Ньютона по формулам (2.4.19-26). Шаг по времени определяется как наименьшее из двух величин. Первая величина – собственная длина пробега иона, делённая на модуль скорости иона, помноженной на коэффициент, равный сотне. Вторая – линейный размер сегмента пространства, в котором оказался ион, делённый на модуль скорости иона, помноженной на коэффициент, равный десяти.

После определения величины временного шага dt , производится расчёт уравнений Ньютона, в результате которого определяются новые координаты и скорости наблюдаемого иона, и рассчитывается длина пути, который ион прошёл за шаг времени dt . За этим следует проверка трёх условий: вышел ли ион за пределы вычислительной области, упал ли ион на пылевую частицу, вылетел ли наблюдаемый ион за область.

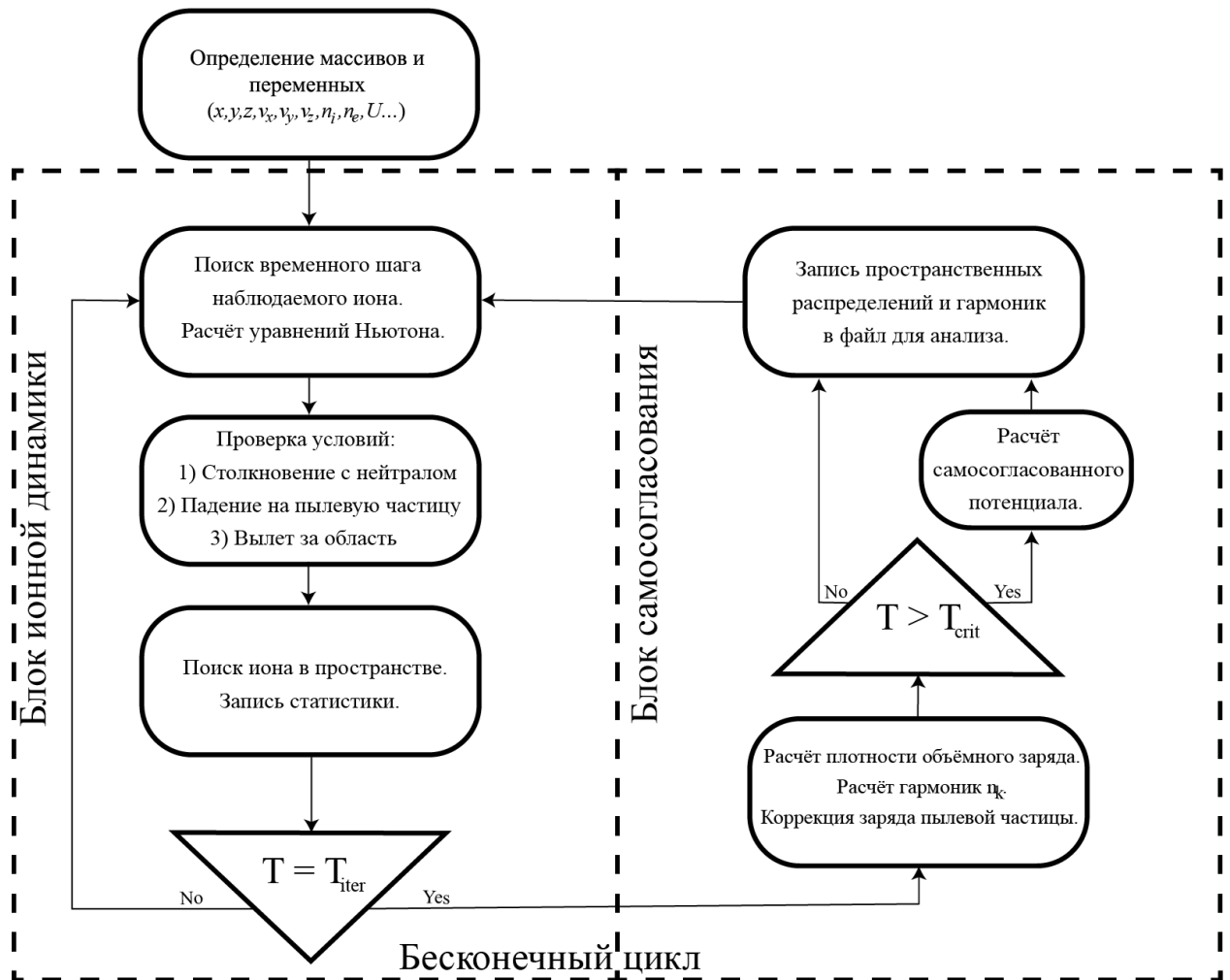


Рисунок 2.8.1. Общая схема последовательной версии модели.

Затем вновь происходит поиск сегмента, в котором расположен ион, и происходит запись временного шага dt , нормированного на объём этого сегмента, в соответствующий элемент массива. Полное время расчёта вычисляется в качестве суммы всех учтённых dt .

Бесконечный цикл затем возвращает программу к определению временного шага dt . Так происходит до тех пор, пока полное время расчёта не становится кратным времени, которое занимает одна расчетная итерация. Когда время становится кратным времени итерации, программа переходит в режим «согласования». Если программа находится в режиме исчисления начальной итерации, то в этой части программы происходит коррекция заряда по формуле (2.4.30), вычисление распределения плотности ионов по

формуле (2.4.9), расчёт распределения объёмного заряда и гармоник по формуле (2.4.12) и запись данных в текстовый файл. После записи в файл бесконечный цикл возвращает программу к определению временного шага dt .

Когда полное время расчёта достигает критического, происходит изменение режимов расчёта – с нулевого на самосогласованный. В самосогласованном режиме, если полное время расчёта становится кратным времени итерации, то, в дополнении к указанному в предыдущем абзаце, в блоке «согласования» производится расчёт самосогласованного пространственного распределения потенциала и компонент силы по формулам (2.4.17) и (2.4.19) соответственно. В самосогласованном режиме, уравнения Ньютона вычисляются для переопределённых сил.

В бесконечном цикле существует два «тяжёлых» блока, которые нуждаются в ускорении: блок ионной динамики, где происходит расчёт уравнений Ньютона и запись времени пребывания ионов в каждом сегменте пространства и блок «согласования», где переопределяется потенциал. Один последовательный проход программой первого блока занимает $\sim 10^3$ вычислительных операций. Как указано в конце четвёртого параграфа данной главы, чтобы осуществить одну итерацию, первый блок необходимо рассчитать 10^9 раз (время жизни иона в среднем составляло 100 выполнений блока динамики). Таким образом, полное выполнение блока осуществляется за $\sim 10^{12}$ вычислительных операций. Средний вычислительный процессор в современных персональных компьютерах способен на совершение $3 \cdot 10^9$ операций в секунду. Таким образом, расчёт одной итерации примерно занимает шесть минут. Что, при необходимости рассчитать 10^4 итераций, занимает четыре недели для полного решения задачи.

Второй блок – блок расчета потенциала оказывается не менее тяжёлым. Если рассмотреть двумерный массив, который в среднем состоит из 10^4 элементов (средняя величина как для первой, так и для второй

модификации), то число операций, необходимых для расчета потенциала, составит: для первой модификации скромные 10^{10} вычислительных операций и соизмеримые с первым блоком 10^{12} операций для модификации номер два, что удваивает время счёта до 60 дней и делает расчёт самосогласованного потенциала второй модификацией модели непрактичным в последовательном выполнении.

Вычислительный процессор как персональных, так и специальных вычислительных компьютеров, кроме расчётной частоты, имеет ещё одну важную характеристику, которой является количество ядер процессора. Обычно, каждое ядро вычислительного процессора позволяет вести одновременную обработку двух потоков расчётов. Методы параллельного программирования позволяют использовать все вычислительные потоки процессора одновременно для вычисления единственной программы. Для целей данной программы используется стандарт Windows MPI.

Распараллеливание программы стандартом MPI позволяет ускорить расчёт почти в N раз, где N – число независимых потоков, которое может рассчитывать вычислительный процессор компьютера. Общая схема расчёта в случае, когда программа выполнена с помощью стандарта MPI, представлена на Рисунке 2.8.2.

Остановимся отдельно на двух указанных выше блоках, в силу существующих различий, которые присутствуют в расщеплении этих двух сегментов модели. В случае блока ионной динамики, расщепление стандартом MPI производится крайне просто – в момент определения начальных координат, скоростей и собственных длин свободного пробега наблюдаемого иона, каждый поток генерирует свои значения. Затем, каждый вычислительный поток, независимо друг от друга, линейным образом выполняет расчёт блока ионной динамики. При этом, для каждого расчётного потока, накапливается своё собственное время пребывания ионов в сегментах вычислительной области. При переходе ко второму блоку, массивы времени

пребывания ионов, вычисленные каждым вычислительным потоком, суммируются и объединяются в один массив, из которого производится расчёт самосогласованного распределения потенциала. Такой независимый расчёт позволяет добиться ускорения выполнения блока ионной динамики почти в N раз с поправкой на скорость обмена данных между процессорами.

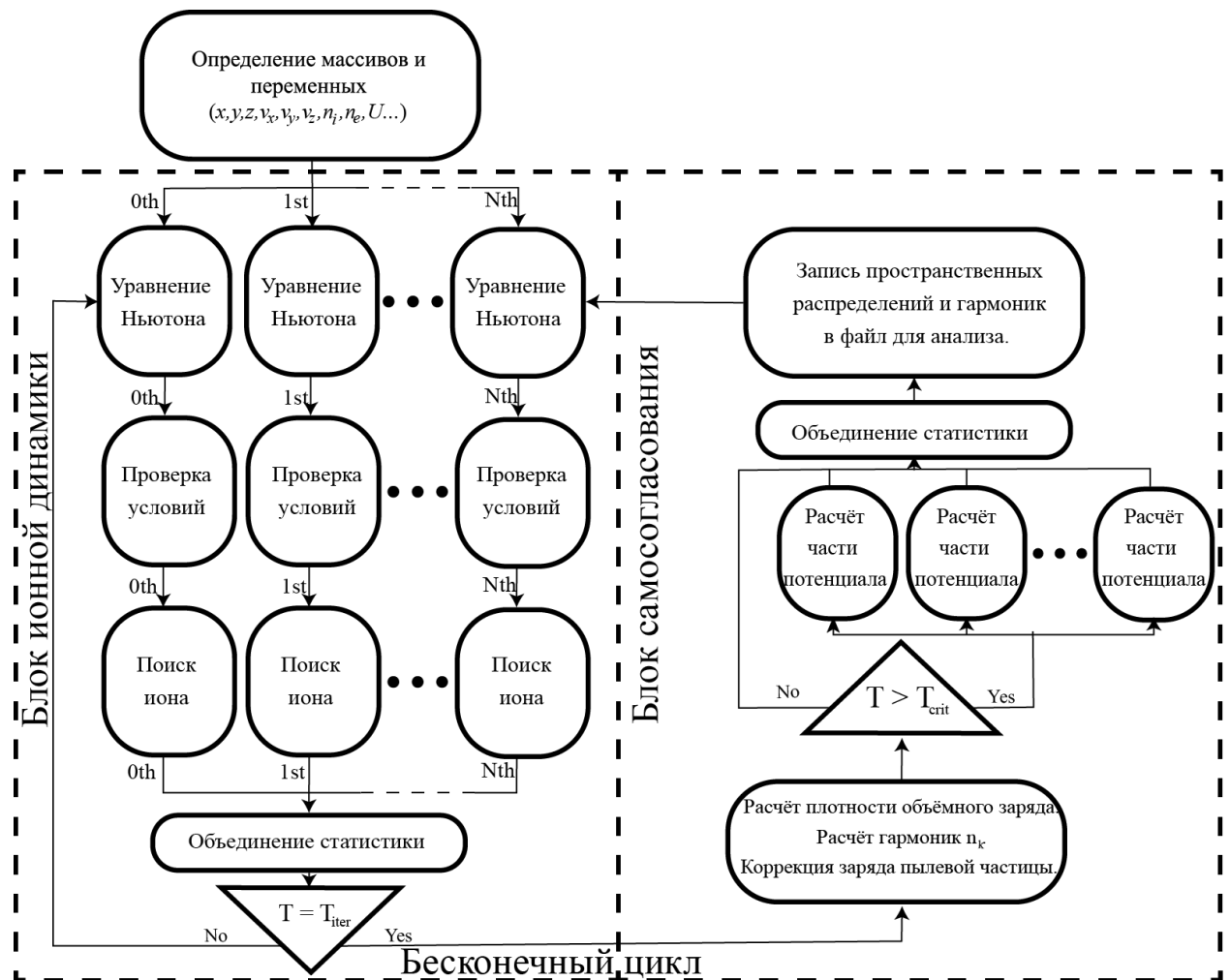


Рисунок 2.8.2. Общая схема параллельной версии модели.

Блок самосогласования расщепляется иным образом. Рассмотрим формулу (2.6.8) второй модификации модели. В случае линейного выполнения, последовательное интегрирование предполагает, что интеграл будет рассчитываться в виде суммы поочерёдно для каждой ячейки пространства. В силу того, что во второй модификации модели расчёт

потенциала не использует приближений конечно-разностных схем, расчёт потенциала для каждого сегмента пространства является независимым от остальных сегментов, а значит, расчёт потенциалов в различных объёмах расчётной области можно производить независимо. На этом и основывается метод расщепления блока согласования: область расчёта интегральных сумм делится на N областей, и каждому потоку процессора приписывается своя область, в которой тот производит расчёт потенциала. После того, как расчёт выполнен, информация с разных потоков суммируется и записывается в виде единого массива для потенциала.

Модификации модели, представленные в четвертом и шестом параграфах, расщепляются с очень высокой долей эффективности. Экспериментально установлено, что время, которое уходит на то, чтобы процессоры обменялись информацией для $N = 40$, занимает 10% от всего времени вычислений, что, при ускорении выполнения расчётов в самих блоках в 40 раз, является несущественным. Таким образом, результат, который линейной версией программы рассчитывался на протяжении двух месяцев, параллельной версией программы рассчитывается всего за два с половиной дня.

2.9. Заключение по главе 2.

1. Создана новая численная модель, которая позволяет рассчитывать самосогласованные пространственные распределения ионной плотности и потенциала вблизи микронных сферических пылевых частиц, находящихся во внешнем электростатическом поле.

2. Показана зависимость пространственных распределений объёмного заряда и потенциала вблизи сферических пылевых частиц от напряжённости внешнего электростатического поля, от средней длины

свободного пробега ионов процесса резонансной перезарядки, от размера пылевой частицы, от типа взаимодействий ионов с нейтральными атомами.

3. Проведён расчёт зависимостей характеристик вейка и дипольного момента ионного облака от напряжённости внешнего электростатического поля, от размера сферической пылевой частицы и от длины свободного пробега ионов процесса резонансной перезарядки. Для всех зависимостей построена общая эмпирическая зависимость, которая аппроксимирует основные параметры вейка, формирующегося вблизи пылевой частицы.

4. Проведена проверка двух модификаций моделей: модификации, где для определения самосогласованного пространственного распределения потенциала использовалось прямое решение уравнения Пуассона, и модификации, где самосогласованное пространственное распределение потенциала определялось через разложение пространственного распределения плотности объёмного заряда по полиномам Лежандра. Результаты двух подходов хорошо согласуются между собой.

5. Показано различие в вычислительной трудоёмкости для последовательной и параллельной версии программы. Представлены схемы вычислительного процесса для обоих случаев

Глава 3. Расчет самосогласованного пространственного распределения потенциала плазмы вблизи изолированных пылевых частиц формы эллипсоида вращения.

В данной главе проведён обзор модуля расчётной модели, в котором итеративным образом производится расчёт самосогласованных пространственных распределений плотности ионов и потенциала, вокруг изолированных пылевых частиц формы эллипсоида вращения, которые находятся под действием внешнего электростатического поля.

3.1. Описание численной модели, созданной для расчёта самосогласованного пространственного распределения потенциала, вокруг изолированных несферических пылевых частиц.

Расчёт самосогласованных пространственных распределений ионной плотности и потенциала, вокруг изолированных несферических пылевых частиц, производится при помощи двух новых модификаций модели. Обозначим эти модули «третьим» и «четвёртым». Далее приведены основные различия модификаций три и четыре, от модификаций, представленных ранее.

Определим положение эллипсоидальных (вытянутых эллипсоидов вращения) и дискообразных (сплюснутых эллипсоидов вращения) частиц так, чтобы в системе сохранялась цилиндрическая симметрия. Таким положением будет то, где равные друг другу полуоси лежат в плоскости, перпендикулярной к вектору внешнего электростатического поля $\vec{E}$. Так как этот вектор направлен по оси z , следовательно, равные полуоси должны лежать в плоскости XY . Обозначим полуось, лежащую на оси z как c , а те, что лежат перпендикулярно внешнему полю, как a . При таком обозначении, для эллипсоидальной частицы полуось c будет являться большей полуосью, а

полуось a – меньшей. Для дискообразной частицы всё будет с точностью наоборот.

Начальный потенциал. Начальное пространственное распределение потенциала в модификациях три и четыре было выбрано в форме:

Для эллипсоидальной частицы:

$$U_{0,el}(\rho, z) = -\frac{\tilde{Q}}{\sqrt{c^2 - a^2}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{\xi + c^2}} \exp(-r) - \tilde{E}z. \quad (3.1.1)$$

Для дискообразной частицы:

$$U_{0,disk}(\rho, z) = -\frac{\tilde{Q}}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{\xi + c^2}} \exp(-r) - \tilde{E}z. \quad (3.1.2)$$

Здесь функции, расположенные перед множителем e^{-r} – потенциалы вытянутого и сплюснутого эллипсоидов в вакууме, которые были выведены аналитически в работе [128]. Здесь a - ось, расположенная в плоскости XU вычислительной области, а c – ось, лежащая на оси. Множитель e^{-r} - оценка, построенная на том, что функции, расположенные перед ним, на бесконечности стремятся к кулоновскому потенциалу. В силу того, что начальный вид потенциала не влияет на конечный результат, такая оценка приемлема.

Одной из важных характеристик несферических пылевых частиц является их электрическая ёмкость [128]:

$$C_{elips} = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{\operatorname{Arch}(c/a)} \quad (3.1.3)$$

$$C_{disk} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{\arccos(c/a)} \quad (3.1.4)$$

Расчёт самосогласованного пространственного распределения потенциала и компонент силы из разложения пространственного распределения плотности объёмного заряда по полиномам Лежандра. В третьей модификации расчёт самосогласованного пространственного

распределения потенциала осуществляется с использованием разложения пространственного распределения плотности объёмного заряда по полиномам Лежандра.

Формула для определения самосогласованного пространственного распределения потенциала вблизи эллипсоидальной частицы оказывается следующей:

$$U_{el}(r, \theta) = -\frac{\tilde{Q}}{\sqrt{c^2 - a^2}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{\xi + c^2}} + \sum_k \frac{1}{2k+1} \left[\frac{1}{r^{k+1}} \int_{r_0}^r n_k(r) x^{k+2} dx + r^k \int_r^\infty n_k(r) x^{1-k} dx \right] P_k(\cos \theta) - \tilde{E} r \cos \theta. \quad (3.1.5)$$

Формула для определения самосогласованного потенциала вблизи дискообразной частицы:

$$U_{disk}(r, \theta) = -\frac{\tilde{Q}}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{\xi + c^2}} + \sum_k \frac{1}{2k+1} \left[\frac{1}{r^{k+1}} \int_{r_0}^r n_k(r) x^{k+2} dx + r^k \int_r^\infty n_k(r) x^{1-k} dx \right] P_k(\cos \theta) - \tilde{E} r \cos \theta. \quad (3.1.6)$$

Аналогичным образом рассчитаны компоненты силы:

Для эллипсоидальной частицы:

$$F_{x,el}(x, y, z) = -\left(\frac{\tilde{Q}}{\sqrt{c^2 - a^2}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{\xi + c^2}} \right)_x + \sum_k \frac{x}{2k+1} \left[\frac{k+1}{r^{k+3}} \int_{r_0}^r n_k(r) x^{k+2} dx - k r^{k-2} \int_r^\infty n_k(r) x^{1-k} dx \right] P_k(\cos \theta) + \frac{xz}{r^3} \sum_k \frac{1}{2k+1} \left[\frac{1}{r^{k+1}} \int_{r_0}^r n_k(r) x^{k+2} dx + r^k \int_r^\infty n_k(r) x^{1-k} dx \right] P_k'(\cos \theta),$$

$$\begin{aligned}
F_{y,el}(x, y, z) = & - \left(\frac{\tilde{Q}}{\sqrt{c^2 - a^2}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{\xi + c^2}} \right)_y + \\
& + \sum_k \frac{y}{2k+1} \left[\frac{k+1}{r^{k+3}} \int_{r_0}^r n_k(r) x^{k+2} dx - k r^{k-2} \int_r^\infty n_k(r) x^{1-k} dx \right] P_k(\cos \theta) + \\
& + \frac{yz}{r^3} \sum_k \frac{1}{2k+1} \left[\frac{1}{r^{k+1}} \int_{r_0}^r n_k(r) x^{k+2} dx + r^k \int_r^\infty n_k(r) x^{1-k} dx \right] P_k'(\cos \theta), \\
F_{z,el}(x, y, z) = & - \left(\frac{\tilde{Q}}{\sqrt{c^2 - a^2}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{\xi + c^2}} \right)_z + \\
& + \sum_k \frac{z}{2k+1} \left[\frac{k+1}{r^{k+3}} \int_{r_0}^r n_k(r) x^{k+2} dx - k r^{k-2} \int_r^\infty n_k(r) x^{1-k} dx \right] P_k(\cos \theta) + \\
& + \frac{\rho^2}{r^3} \sum_k \frac{1}{2k+1} \left[\frac{1}{r^{k+1}} \int_{r_0}^r n_k(r) x^{k+2} dx + r^k \int_r^\infty n_k(r) x^{1-k} dx \right] P_k'(\cos \theta) - \tilde{E}z.
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Для дискообразной частицы:

$$\begin{aligned}
F_{x,disk}(x, y, z) = & - \left(\frac{\tilde{Q}}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{\xi + c^2}} \right)_x + \\
& + \sum_k \frac{x}{2k+1} \left[\frac{k+1}{r^{k+3}} \int_{r_0}^r n_k(r) x^{k+2} dx - k r^{k-2} \int_r^\infty n_k(r) x^{1-k} dx \right] P_k(\cos \theta) + \\
& + \frac{xz}{r^3} \sum_k \frac{1}{2k+1} \left[\frac{1}{r^{k+1}} \int_{r_0}^r n_k(r) x^{k+2} dx + r^k \int_r^\infty n_k(r) x^{1-k} dx \right] P_k'(\cos \theta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{y,disk}(x, y, z) = & - \left(\frac{\tilde{Q}}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{\xi + c^2}} \right)_y + \\
& + \sum_k \frac{y}{2k+1} \left[\frac{k+1}{r^{k+3}} \int_{r_0}^r n_k(r) x^{k+2} dx - k r^{k-2} \int_r^\infty n_k(r) x^{1-k} dx \right] P_k(\cos \theta) + \\
& + \frac{yz}{r^3} \sum_k \frac{1}{2k+1} \left[\frac{1}{r^{k+1}} \int_{r_0}^r n_k(r) x^{k+2} dx + r^k \int_r^\infty n_k(r) x^{1-k} dx \right] P_k'(\cos \theta), \\
F_{z,disk}(x, y, z) = & - \left(\frac{\tilde{Q}}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{\xi + c^2}} \right)_z + \\
& + \sum_k \frac{z}{2k+1} \left[\frac{k+1}{r^{k+3}} \int_{r_0}^r n_k(r) x^{k+2} dx - k r^{k-2} \int_r^\infty n_k(r) x^{1-k} dx \right] P_k(\cos \theta) + \\
& + \frac{\rho^2}{r^3} \sum_k \frac{1}{2k+1} \left[\frac{1}{r^{k+1}} \int_{r_0}^r n_k(r) x^{k+2} dx + r^k \int_r^\infty n_k(r) x^{1-k} dx \right] P_k'(\cos \theta) - \tilde{E}z.
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Расчёт самосогласованного пространственного распределения потенциала и компонент силы из прямого решения уравнения Пуассона. В четвертой модификации расчёт самосогласованного пространственного распределения потенциала осуществляется с использованием прямого решения уравнения Пуассона. Аналогично формуле (2.6.8), самосогласованное распределение потенциала в четвёртой модификации определяется как:

Для эллипсоидальной частицы:

$$\begin{aligned}
U_{el}(\rho, z) = & - \frac{\tilde{Q}}{\sqrt{c^2 - a^2}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{\xi + c^2}} + \\
& + \iiint_{V_{syst}} \frac{n(\rho', \phi', z') \rho' d\rho' d\phi' dz'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \tilde{E}z.
\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Для дискообразной частицы:

$$U_{disk}(\rho, z) = -\frac{\tilde{Q}}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{\xi + c^2}} +$$

$$+ \iiint_{V_{syst}} \frac{n(\rho', \varphi', z') \rho' d\rho' d\varphi' dz'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \tilde{E}z. \quad (3.1.10)$$

Компоненты силы также вычисляются аналогично четвёртой модификации (2.6.9):

Для эллипсоидальной частицы:

$$F_x(x, y, z) = -\left(\frac{\tilde{Q}}{\sqrt{c^2 - a^2}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{\xi + c^2}} \right)_x +$$

$$+ \iiint_{V_{syst}} \frac{(x - x') n(\rho', \varphi', z') \rho' d\rho' d\varphi' dz'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

$$F_y(x, y, z) = -\left(\frac{\tilde{Q}}{\sqrt{c^2 - a^2}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{\xi + c^2}} \right)_y +$$

$$+ \iiint_{V_{syst}} \frac{(y - y') n(\rho', \varphi', z') \rho' d\rho' d\varphi' dz'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

$$F_z(x, y, z) = -\left(\frac{\tilde{Q}}{\sqrt{c^2 - a^2}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{\xi + c^2}} \right)_z +$$

$$+ \iiint_{V_{syst}} \frac{(z - z') n(\rho', \varphi', z') \rho' d\rho' d\varphi' dz'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \tilde{E}z. \quad (3.1.11)$$

Для дискообразной частицы:

$$F_x(x, y, z) = -\left(\frac{\tilde{Q}}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{\xi + c^2}} \right)_x +$$

$$+ \iiint_{V_{syst}} \frac{(x - x') n(\rho', \varphi', z') \rho' d\rho' d\varphi' dz'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

$$\begin{aligned}
F_y(x, y, z) = & - \left(\frac{\tilde{Q}}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{\xi + c^2}} \right)_y + \\
& + \iiint_{V_{\text{syst}}} \frac{(y - y') n(\rho', \phi', z') \rho' d\rho' d\phi' dz'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \\
F_z(x, y, z) = & - \left(\frac{\tilde{Q}}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{\xi + c^2}} \right)_z + \\
& + \iiint_{V_{\text{syst}}} \frac{(z - z') n(\rho', \phi', z') \rho' d\rho' d\phi' dz'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \tilde{E}z.
\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

Определение заряда пылевой частицы в модификациях три и четыре происходит единообразным образом. Для удобства, поток электронов в этих модификация вычисляется в виде, близком к (2.1.6):

$$I_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_{el(disk)} n_\infty v_e \exp\left(-\frac{e\phi_s}{kT_e}\right). \tag{3.1.13}$$

Здесь S_{el} и S_{disk} — площади поверхности эллипсоида и диска соответственно. Данные величины определяются по формулам:

$$S_{el} = 2\pi a \left(a + \frac{c^2}{\sqrt{c^2 - a^2}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c}\right) \right), \quad a < c. \tag{3.1.14}$$

$$S_{disk} = 2\pi a \left(a + \frac{c^2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - c^2}}{c}\right) \right), \quad a > c. \tag{3.1.15}$$

Поток ионов на пылевые частицы несферических форм определяется по формуле (2.4.29).

Затем, в модификациях три и четыре производится корректировка заряда пылевой частицы из соотношения:

$$\tilde{Q}_{(n+1)} = \tilde{Q}_{(n)} - h \frac{(I_i - I_e)}{n_\infty V_{\text{syst}}}; \tag{3.1.16}$$

Общий алгоритм расчёта самосогласованных пространственных распределений полностью повторяет таковые из параграфа четыре (для третьей модификации) и параграфа шесть (для четвёртой модификации) второй главы.

3.2. Результаты расчёта пространственных распределений вблизи несферических пылевых частиц.

Далее представлено сравнение самосогласованных пространственных распределений плотности объёмного заряда и потенциала, рассчитанных вблизи изолированных пылевых частиц эллипсоидальной, сферической и дискообразной формы. Параметры, для которых проводились расчёты самосогласованных пространственных распределений, аналогичны тем, что были выбраны в параграфе пятом второй главы.

Заряд пылевой частицы. Из соотношения (3.1.16), рассчитана зависимость заряда пылевой частицы от средней длины свободного пробега ионов l_i процесса резонансной перезарядки, для различных форм пылевой частицы. Эта зависимость представлена на Рисунке 3.2.1. Заряд пылевой частицы здесь представлен в виде $\tilde{z} = e^2 Z_d / C k T_e$, где C – ёмкость пылевой частиц, определяемая формулами (3.1.3) и (3.1.4).

На Рисунке 3.2.1. показано, что зависимость величины заряда пылевой частицы от средней длины свободного пробега, рассчитанная для эллипсоидальных и дискообразных пылевых частиц, повторяет своим видом аналогичные зависимости, полученные для сферических пылевых частиц. При $l_i \rightarrow \infty$, значения безразмерного заряда пылевой частицы $\tilde{z}$, рассчитанные для пылевых частиц разной формы, совпадают, и, для бесстолкновительной плазмы, величина заряда пылевой частицы $\tilde{z}$ совпадает с тем, что вычисляется из приближения OML $\tilde{z} \sim 2.4$. На Рисунке 3.2.1.

приведены сравнения с результатами численного моделирования, представленными в работе [127], и экспериментальными данными, полученными в работе [130].

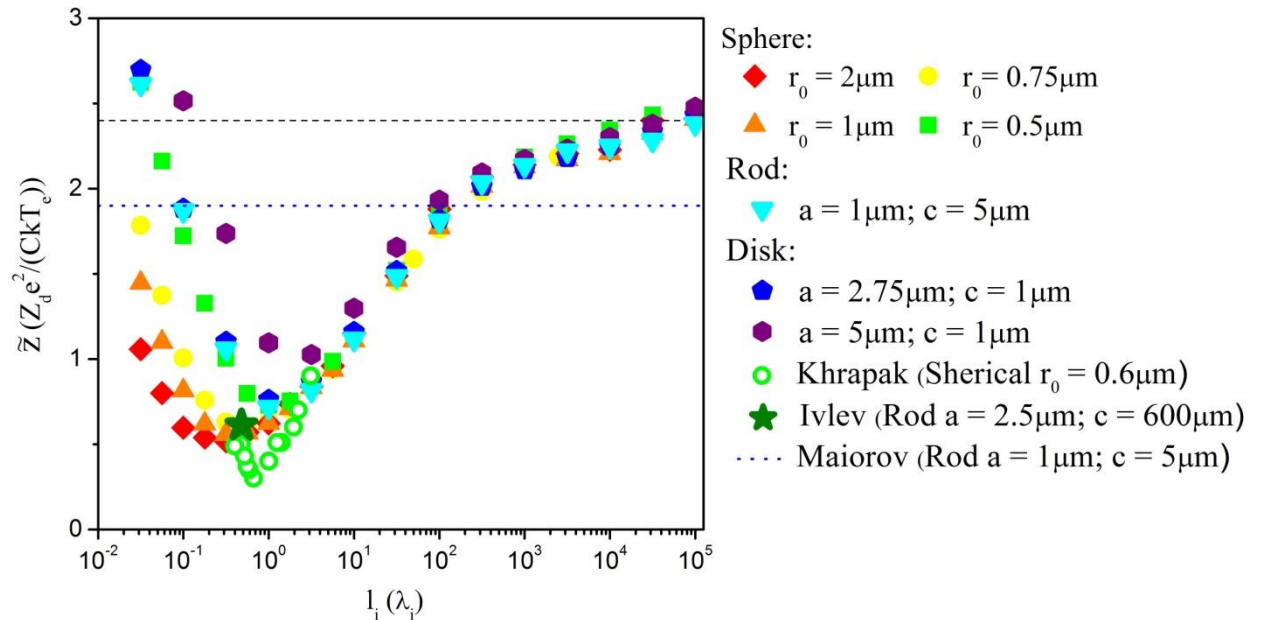


Рисунок 3.2.1. Зависимость заряда пылевой частицы $\tilde{Z}$ от средней длины свободного пробега l_i для пылевых частиц различной формы.

При уменьшении величины средней длины свободного пробега l_i , зависимости $\tilde{Z}(l_i)$, рассчитанные для пылевых частиц разных ёмкостей, перестают совпадать между собой. Из зависимости $\tilde{Z}(l_i)$ можно заключить, что заряд пылевой частицы, для случая $l_i > \lambda_i$, определяется электрической ёмкостью C пылевой частицы. В силу того, что для уединённого проводника верно $q = C\phi$, то можно заключить, что для $l_i > \lambda_i$ потенциал, индуцированный на поверхности проводящей пылевой частицы, определяется формой этой частицы. Данные, представленные на Рисунке 3.2.1., были частично опубликованы в работе [131].

Самосогласованные пространственные распределения потенциала и плотности объёмного заряда. На Рисунке 3.2.2. и Рисунке 3.2.3.

представлено сравнение процессов возникновения вейка в самосогласованных пространственных распределениях плотности объёмного заряда и потенциала, который растёт с увеличением напряжённости внешнего электростатического поля. Пространственные распределения, представленные на Рисунках 3.2.2. и 3.2.3., рассчитаны вблизи двух пылевых частиц: эллипсоидальной пылевой частицы (ряд графиков в левой части), где большая полуось пылевой частицы была равна 5 мкм, а малая 1 мкм; сферической пылевой частицы (ряд графиков в правой части) радиуса $r_0 = 2$ мкм.

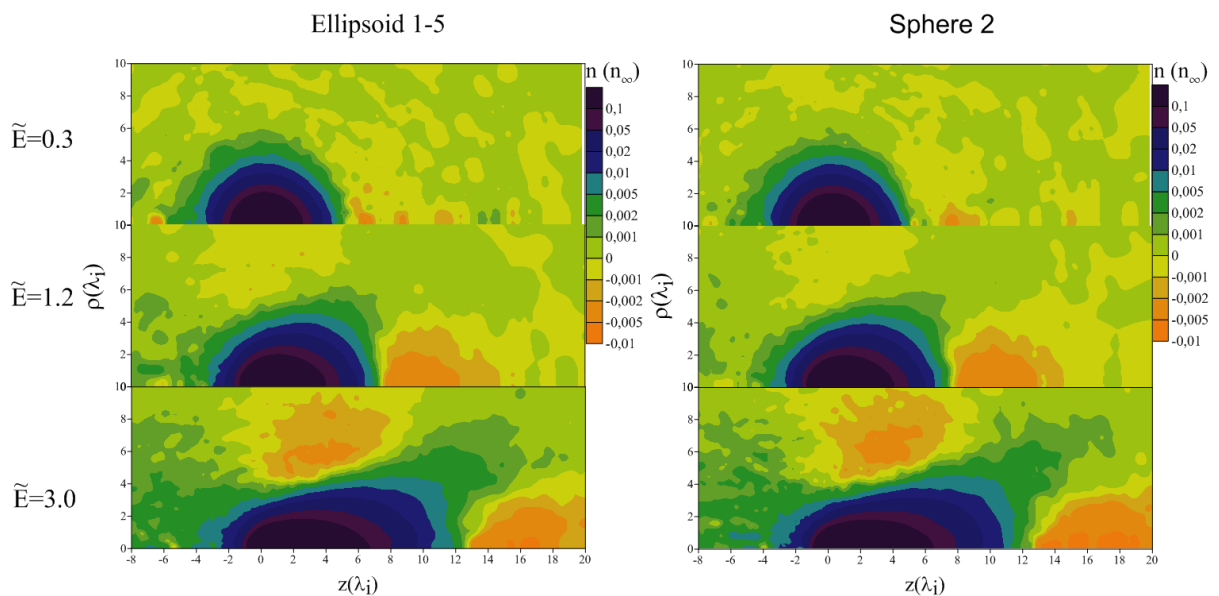


Рисунок 3.2.2. Пространственное распределение плотности объёмного заряда $n(\rho, z)$, рассчитанное вблизи эллипсоидальной частицы с соотношением полуосей 1-5 мкм (левая часть) и вблизи сферической пылевой частицы радиуса $r_0 = 2$ мкм (правая часть) при средней длине свободного пробега $l_i = 5 \lambda_i$ и для различных значений напряжённости внешнего электростатического поля $\tilde{E}$.

На Рисунке 3.2.2 изображено самосогласованное пространственное распределение плотности объёмного заряда $n(\rho, z)$, на Рисунке 3.2.3. —

самосогласованное пространственное распределение потенциала $U(\rho, z)$. Формы пылевых частиц выбраны таким образом, чтобы электрические ёмкости C пылевых частиц совпадали по величине.

Самосогласованные пространственные распределения плотности объёмного заряда $n(\rho, z)$, представленные на Рисунке 3.2.2. и рассчитанные вблизи двух разных по форме пылевых частиц совпадают, с точностью до вычислительного шума.

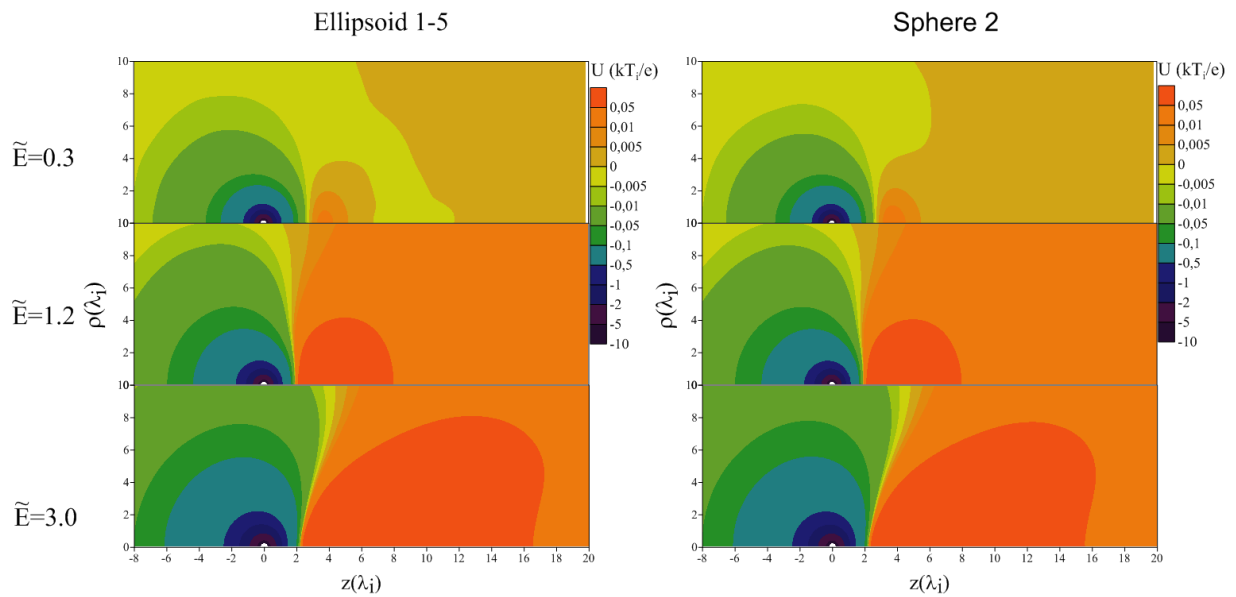


Рисунок 3.2.3. Пространственное распределение потенциала $U(\rho, z)$, рассчитанное вблизи эллипсоидальной частицы с соотношением полуосей 1-5 $\mu\text{м}$ (левая часть) и вблизи сферической пылевой частицы радиуса $r_0 = 2 \mu\text{м}$ (правая часть) при средней длине свободного пробега $l_i = 5 \lambda_i$ и для различных значений напряжённости внешнего электростатического поля $\tilde{E}$

Аналогично, самосогласованные пространственные распределения потенциала $U(\rho, z)$, измеренные для двух пылевых частиц одинаковой ёмкости, совпадают с хорошей точностью (см. Рисунке 3.2.3.).

Плотность объёмного заряда. На Рисунке 3.2.4. представлен срез пространственного распределения плотности объёмного заряда $n(\rho, z)$ по

направлению внешнего электростатического поля, для координаты $\rho=0$, рассчитанного при $l_i = 5 \lambda_i$, для различных значений $\tilde{E}$.

Пространственные распределения $n(\rho, z)$, представленные на Рисунке 3.2.4., рассчитаны для пылевых частиц различной формы: сферической пылевой частицы радиуса $r_0 = 2 \text{ мкм}$, эллипсоидальной пылевой частицы с соотношением полуосей 1-5 мкм , а также дискообразной пылевой частицы с соотношением полуосей 2.75-1 мкм .

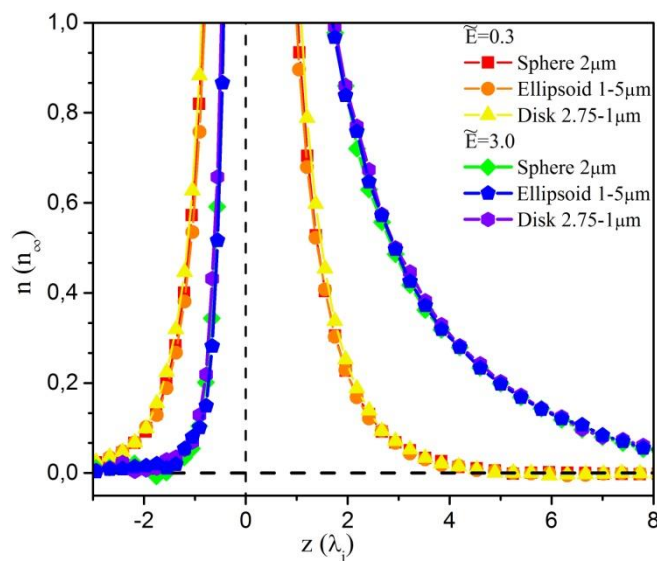


Рисунок 3.2.4. Пространственное распределение плотности объёмного заряда $n(\rho=0, z)$, представленное для координаты $\rho=0$, при $l_i = 5 \lambda_i$, для различных значений внешнего электростатического поля $\tilde{E}$ и для пылевых частиц различной формы.

Величины электрических ёмкостей пылевых частиц, для которых проведён расчёт самосогласованных пространственных распределений плотности объёмного заряда $n(\rho=0, z)$, совпадают и равны $C = 2$. Из Рисунка 3.2.4. видно, что, во всей области рассчитанных значений $\tilde{E}$, пространственные распределения плотности объёмного заряда совпадают для пылевых частиц разной формы. Этот результат кажется очевидным, так как

потенциалы формы (3.1.1) и (3.1.2) стремятся к потенциалу Кулона, с удалением точки наблюдения от заряженной частицы.

На Рисунке 3.2.5. представлено сравнение радиальных распределений $n_0(r)r^2$ и $n_1(r)r^3$, рассчитанных для пылевых частиц разной формы, но одинаковой электрической ёмкости $C = 2$.

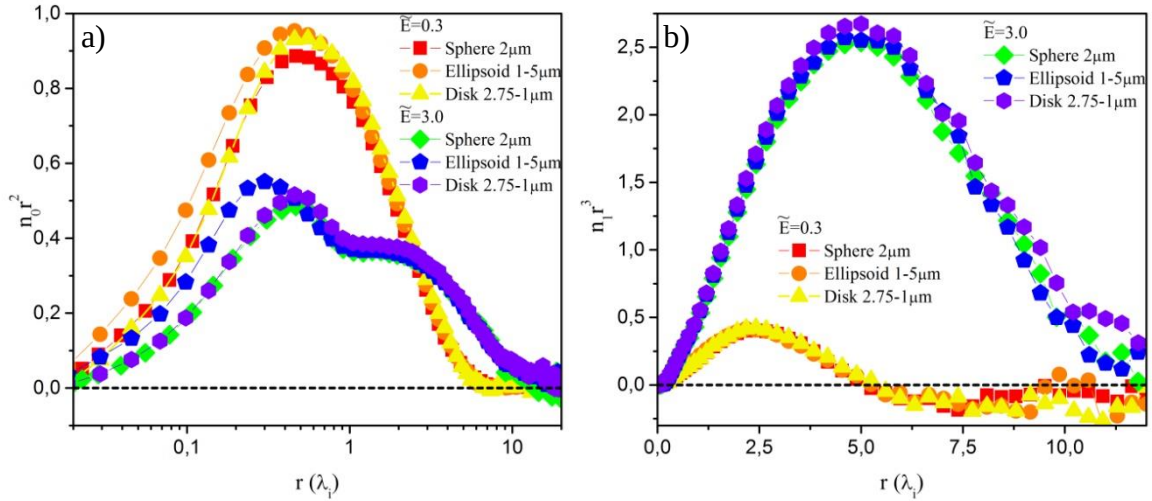


Рисунок 3.2.5. Функции а) $n_0(r)r^2$ и б) $n_1(r)r^3$, при $l_i = 5 \lambda_i$, для частиц пыли разной формы, при различных напряжённостях внешнего электростатического поля $\tilde{E}$.

Из Рисунка 3.2.5 а) видно, что, для малых значений напряжённостей внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, в функции $n_0(r)r^2$ наблюдается единственный локальный максимум, расположенный на расстоянии $r \approx 0.45 \lambda_i$ от пылевой частицы. Величина этого локального максимума для пылевых частиц различной формы, отличается несущественно. При $r < 0.45 \lambda_i$, радиальное распределение $n_0(r)r^2$ оказывается смещённым в сторону пылевой частицы, для случая, когда форма пылевой частицы представляет собой вытянутый эллипсоид вращения. При $r > 0.45 \lambda_i$, функций $n_0(r)r^2$, рассчитанные для различных по форме пылевых частиц, совпадают. То есть, на расстояниях, больших, чем ионная длина Дебая, все

искажения в радиальных распределениях $n_0(r)r^2$, связанные с изменением формы частиц пыли, пренебрежимо малы. С ростом $\tilde{E}$, на расстоянии $r \approx 3\lambda_i$, в распределении $n_0(r)r^2$ появляется второй максимум, величина которого остаётся неизменной с изменением формы пылевой частицы. Данные, представленные на Рисунке 3.2.5., были частично опубликованы в работе [131].

На Рисунке 3.2.5 б), где представлено сравнение радиальных распределений $n_1(r)r^3$, наблюдается полное совпадение этих функций, рассчитанных для пылевых частиц различной формы.

Пространственное распределение потенциала. На Рисунке 3.2.6. представлены срезы самосогласованного пространственного распределения потенциала $U(\rho=0, z)$ по направлению внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, то есть для координаты $\rho=0$, рассчитанные для пылевых частиц разной формы, но одинаковой ёмкости, для различных напряжённостей внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, при $l_i = 5\lambda_i$.

Из Рисунка 3.2.6., видно, что различия в самосогласованных пространственных распределениях потенциала $U(\rho, z)$, измеренных для пылевых частиц различной формы, но одинаковой ёмкости, оказываются несущественными.

Зависимости параметров вейка U_{max} , Z_{max} от напряжённости внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, измеренные для пылевых частиц разной формы, представлены на Рисунке 3.2.7. Зависимость U_{max} была нормирована на коэффициент $\sqrt{C}$.

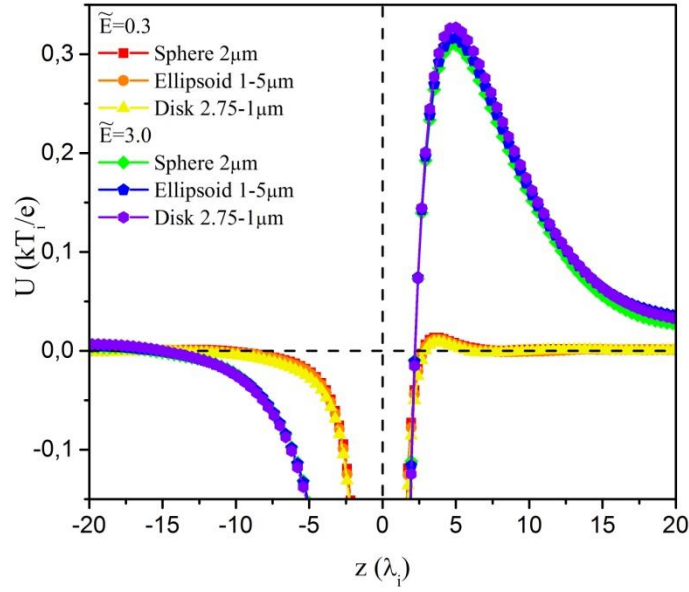


Рисунок 3.2.6. Пространственное распределение потенциала $U(\rho=0, z)$, представленное для координаты $\rho=0$, при $l_i = 5 \lambda_i$, для различных значений внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, рассчитанное для пылевых частиц разной формы.

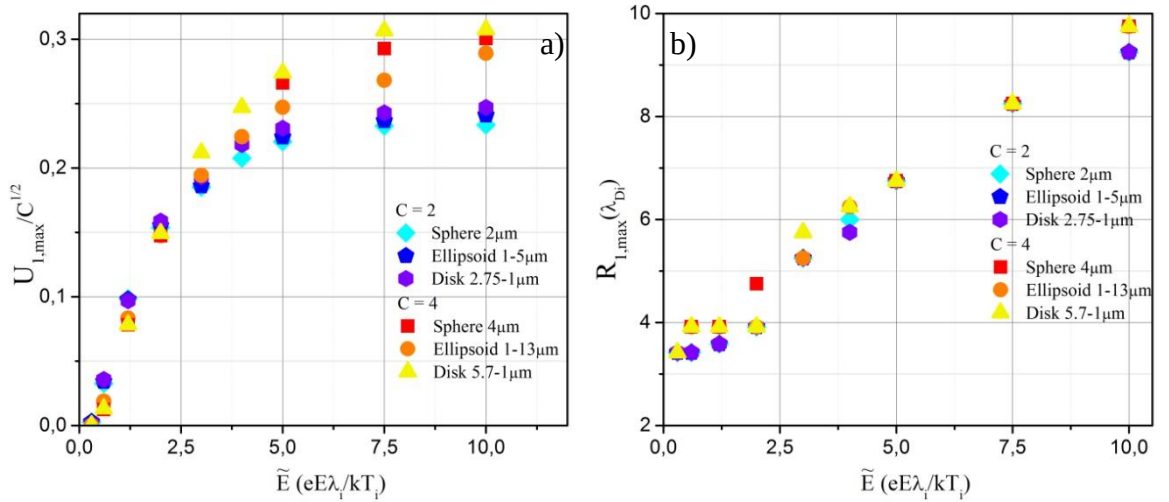


Рисунок 3.2.7. Сравнение зависимостей а) $U_{\max}/(\sqrt{C})$ и б) $Z_{\max}$ от напряжённости внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, рассчитанных для пылевых частиц различных по форме, при $l_i = 5 \lambda_i$.

Полученные зависимости демонстрируют, что форма пылевых частиц не является определяющей в вопросе характеристик вейка. Основным

фактором, влияющим на величину и положение локального максимума в пространственном распределении самосогласованного потенциала, является ёмкость пылевой частицы. Это позволяет расширить описание (2.5.4):

$$U_{\max} = A_U \tilde{E} \sqrt{Cl_i} (1 + (\tilde{E} / B_U)^2)^{-\gamma}. \quad (3.2.1)$$

Дипольный момент облака ионов. На Рисунке 3.28. представлено сравнение зависимостей дипольного момента ионного облака $\tilde{P}_{pl}$ от напряжённости внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, измеренных для различных по форме пылевых частиц. Зависимости, представленные на Рисунке 3.3.8., нормированы на ёмкость C пылевой частицы.

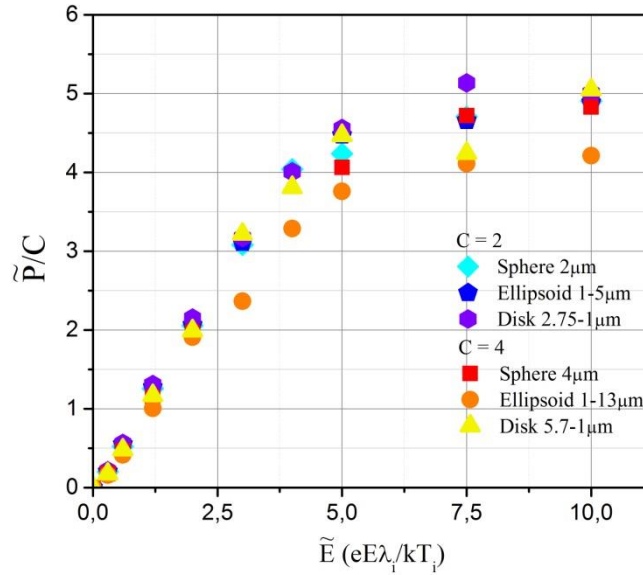


Рисунок 3.2.8. Сравнение зависимостей $\tilde{P}_{pl}(\tilde{E})/C$, измеренных для пылевых частиц разной формы, при $l_i = 5 \lambda_i$.

Рисунок 3.2.8. показывает, что зависимости $\tilde{P}_{pl}(\tilde{E})$, рассчитанные для пылевых частиц различной формы, совпадают. Это позволяет расширить описание (2.5.3), включив в рассмотрение величину электрической ёмкости:

$$\tilde{P}_{pl} = A_p C \tilde{E} \sqrt{l_i} (1 + (\tilde{E} / B_p)^2)^{-\gamma}. \quad (3.2.2)$$

Таким образом, в результате сравнения самосогласованных пространственных распределений, рассчитанных для пылевых частиц разной формы, сделан вывод, что искажения, вызванные несферической формой пылевых частиц, оказывают несущественное влияние на самосогласованные пространственные распределения потенциала и плотности объёмного заряда плазмы, а также на характеристики вейка, на расстояниях $r > \lambda_i$, если характерный размер пылевой частицы не превышает λ_i .

3.3. Устойчивость пространственной ориентации пылевых частиц несферической формы во внешнем электростатическом поле.

Модификации численной модели под номером три и четыре основаны на предположении того, что пылевые частицы расположены относительно вектора внешнего электростатического поля таким образом, что их равные полуоси лежат в плоскости, ортогональной вектору внешнего электростатического поля. Однако выбранная ориентация несферических пылевых частиц в пространстве может оказаться неустойчивой, и пылевая частица развернётся относительно вектора электростатического поля по-другому.

Распределение заряда на поверхности проводящего эллипсоида. В общем случае, эллипсоид описывается уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a < b < c. \quad (3.3.1)$$

Распределение заряда по поверхности проводящего эллипсоида хорошо известно [132]:

$$\sigma(x, y, z) = -\frac{\tilde{Q}}{4\pi abc} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-1/2}. \quad (3.3.2)$$

В случае, когда система вырождена ($a = b < c$), и соотношение полуосей

$\beta = \frac{c}{a} > 1$, (3.3.1) записывается, как:

$$\frac{\rho^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \rho(z) = a \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}; \quad (3.3.3)$$

Элемент поверхности эллипсоида равен:

$$dS = 2\pi\rho ds, \quad ds = \sqrt{dz^2 + d\rho^2} \quad (3.3.4)$$

Заряд на поверхности эллипсоида:

$$d\tilde{Q} = \sigma(z) 2\pi\rho \frac{ds}{dz} dz = \sigma(z) 2\pi a c \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2} \left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right)} \frac{dz}{c}. \quad (3.3.5)$$

Формула (3.3.2) преобразуется как:

$$\sigma(z) = -\frac{\tilde{Q}}{4\pi abc} \left(\frac{\rho^2}{a^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-1/2} = \frac{-\tilde{Q}}{4\pi abc \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2} \left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right)}}. \quad (3.3.6)$$

Подставляя (3.3.6) в (3.3.5) получаем:

$$\frac{d\tilde{Q}}{dz} = \frac{Q}{2c}, \quad (3.3.7)$$

что означает, что заряд однородно распределен вдоль фигуры вращения.

Рассмотрим теперь тела вращения формы:

$$\rho\left(\frac{z}{c}\right) = a \sqrt{1 - \left(\frac{z}{c}\right)^{2n}}. \quad (3.3.8)$$

В отсутствии внешнего электрического поля, заряд на поверхности проводящего тела распределен так, что выполняется условие эквипотенциальности, т.е.:

$$\varphi_s(z) = \iint \frac{\sigma(z') \rho(z') \sqrt{1 + \left(\frac{d\rho'}{dz'}\right)^2}}{\sqrt{(z - z')^2 + \rho^2(z) + \rho^2(z') - 2\rho(z)\rho(z')\cos\varphi'}} dz' d\varphi' = \text{const.} \quad (3.3.9)$$

Дипольный и квадрупольный моменты эллипсоида. Для удобства перейдем к безразмерному представлению $\delta = z/c$, $\tilde{\rho} = \rho(z)/a$, $\tilde{\sigma}(\delta) = \sigma(z)a^2/Q$ и введём обозначение:

$$\tilde{R} = \frac{R(z, z', \varphi')}{a} \sqrt{(z - z')^2 + \rho^2(z) + \rho^2(z') - 2\rho(z)\rho(z')\cos\varphi'} \quad (3.3.10)$$

Применим уже знакомое разложение по полиномам Лежандра подынтегральной функции (3.3.9):

$$\tilde{\sigma}(\delta)\tilde{\rho}(\delta)\sqrt{1 + \frac{a^2}{c^2}(d\tilde{\rho}/d\delta)^2} = \tilde{\sigma}(\delta)g(\delta) = \sum_k \mu_k P_k(\delta), \quad (3.3.11)$$

где $g(\delta) = \tilde{\rho}(\delta)\sqrt{1 + (d\tilde{\rho}/d\delta)^2}$ определяется формой выбранной фигуры. Для фигуры, заданной формулой (3.3.8), эта функция равна:

$$g(\delta) = \sqrt{1 - \delta^{2n} \left(1 - n^2 \frac{a^2}{c^2} \delta^{2n-2} \right)} \quad (3.3.12)$$

Потенциал поверхности в безразмерной форме записывается как $\Phi = \frac{\phi_s a^2}{\tilde{Q}c}$. Тогда, с учётом (3.3.10-11), условие эквипотенциальности (3.3.9) принимает вид:

$$\Phi = \int d\delta' \int \sum_k \mu_k P_k(\delta') \frac{d\varphi'}{\tilde{R}(z, z', \varphi')} = const. \quad (3.3.13)$$

Умножим теперь это условие на $P_l(\delta)$ и проинтегрируем его, что даст следующее матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} U_{00} & 0 & U_{02} & 0 & U_{04} & 0 & U_{06} \\ 0 & U_{11} & 0 & U_{13} & 0 & U_{15} & 0 \\ U_{20} & 0 & U_{22} & 0 & U_{24} & 0 & U_{26} \\ 0 & U_{31} & 0 & U_{33} & 0 & U_{35} & 0 \\ U_{40} & 0 & U_{42} & 0 & U_{44} & 0 & U_{46} \\ 0 & U_{51} & 0 & U_{53} & 0 & U_{55} & 0 \\ U_{60} & 0 & U_{62} & 0 & U_{64} & 0 & U_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\Phi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.3.14)$$

где:

$$U_{lk} = U_{kl} = \int_{-1}^{+1} d\delta P_l(\delta) \int_{-1}^{+1} d\delta' P_k(\delta') \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{\tilde{R}(\delta, \delta', \varphi')}. \quad (3.3.15)$$

Представленная матрица симметрична, а её элементы отличны от нуля только когда l и k обладают одинаковой четностью. При $\tilde{E} = 0$ отличны от нуля только μ_{2k} . Матричное уравнение (3.3.14) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} U_{00} & U_{02} & U_{04} & U_{06} \\ U_{20} & U_{22} & U_{24} & U_{26} \\ U_{40} & U_{42} & U_{44} & U_{46} \\ U_{60} & U_{62} & U_{64} & U_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_2 \\ \mu_4 \\ \mu_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\Phi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3.16)$$

Коэффициент μ_0 определяет заряд эллипсоида:

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &= \iiint \sigma(z') \rho(z') \sqrt{1 + (d\rho'/dz')^2} dz' d\varphi' = \\ &= 2\pi \frac{\tilde{Q}c}{a} \int \tilde{\sigma}(\delta') \tilde{\rho}(\delta') \sqrt{1 + \frac{a^2}{c^2} (d\tilde{\rho}'/d\delta')^2} d\delta' = \\ &= 2\pi \frac{\tilde{Q}c}{a} \int \sum_{k=0} \mu_k P_k(\delta') d\delta' = 4\pi \frac{\tilde{Q}c}{a} \mu_0, \quad \mu_0 = \frac{a}{4\pi c}; \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

Схожим образом можно определить его дипольный момент:

$$\tilde{P} = \frac{8\pi}{9} ac^2 \mu_1 \tilde{E}, \quad (3.3.18)$$

А также квадрупольный момент:

$$\tilde{D}_{zz} = \frac{2}{3} \tilde{Q}c^2 \frac{1}{\beta^2} (\beta^2 - 1). \quad (3.3.19)$$

Условие равновесия пространственной ориентации эллипсоидальной пылевой частицы. Равновесие пространственной ориентации левитирующей пылевой частицы определяется равенством электростатических и гравитационных сил. В экспериментах было замечено, что в DC-разряде пылевые частицы упорядочивались горизонтально, а RF-разряде короткие пылевые частицы упорядочивались вертикально, в то время как длинные - горизонтально [75-78].

Полная энергия пылевой частицы определяется формулой:

$$\Sigma(z, \theta) = mgz + \tilde{Q}\varphi_s(z) - \tilde{P}\tilde{E}\cos(\theta) - \frac{(3\cos(\theta)^2 - 1)}{12}\tilde{D}_{zz}\nabla\tilde{E} \quad (3.3.20)$$

Рассмотрим случай, когда осью вращения пылевой частицы является ось y (см. Рисунок 3.3.1.), а внешнее электростатическое поле и его градиент направлены вдоль оси z .

Условие того, что пылевая частица будет левитировать, определяется из равенства нулю производной по z энергии пылевой частицы (3.3.20):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma}{\partial z} &= mg - \tilde{Q}\tilde{E} - \tilde{P}\nabla\tilde{E}\cos(\theta) = 0 \\ \Rightarrow mg &= \tilde{Q}\tilde{E} + \tilde{P}\nabla\tilde{E}\cos(\theta) \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

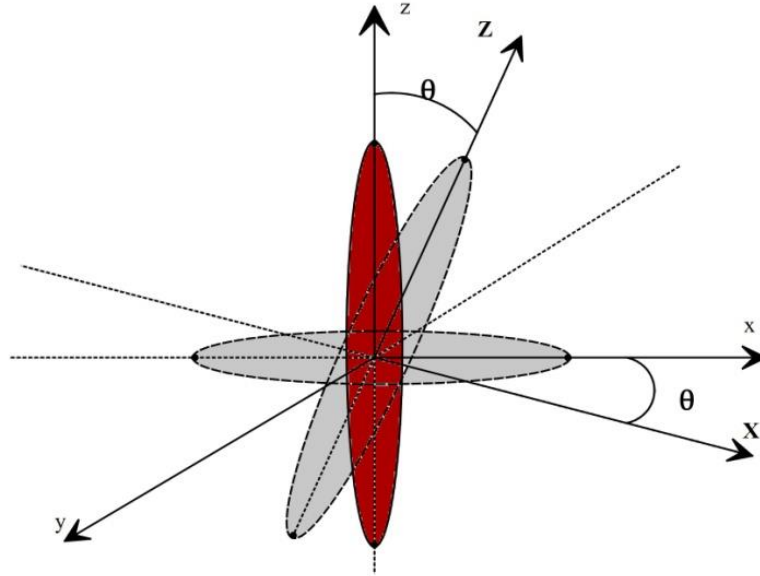


Рисунок 3.3.1. Схематичное изображение вращающегося эллипсоида.

Условие того, что пылевая частица не вращается вокруг оси, определяется из равенства производной энергии по углу θ .

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} = \left(\frac{1}{4}\tilde{D}_{zz}\nabla\tilde{E} + \tilde{P}\tilde{E}\right)\sin(2\theta) = 0 \quad (3.3.22)$$

Уравнение (3.3.22) имеет два решения $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Первое решение соответствует упорядочиванию пылевых частиц продольно вектору внешнего электростатического поля, второе – перпендикулярно.

Устойчивость (3.3.22) решений определяется второй производной полной энергии частицы:

$$\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \theta^2} = \left(\frac{1}{4} \tilde{D}_{zz} \nabla \tilde{E} + \tilde{P} \tilde{E} \right) \cos(2\theta) > 0 \quad (3.3.23)$$

Тогда условие устойчивости пространственной ориентации определяется как:

$$\frac{\tilde{P} \tilde{E}}{\tilde{D}_{zz} \nabla \tilde{E}} > 1 \quad (3.3.24)$$

Выполнение этого условия означает, что пылевые частицы упорядочиваются вдоль вектора внешнего электрического поля. Обратное ему условие, таким образом:

$$\frac{\tilde{P} \tilde{E}}{\tilde{D}_{zz} \nabla \tilde{E}} < 1 \quad (3.3.25)$$

означает, что пылевые частицы упорядочиваются перпендикулярно вектору внешнего электрического поля. При этом, величины дипольного и квадрупольного моментов, индуцированных на поверхности пылевых частиц, определяются по уравнениям (3.3.18-19).

В работах [75,130], где использовался RF-разряд, вытянутые пылевые частицы длиной более 300 мкм и шириной 7.5 мкм упорядочивались продольно вектору внешнего электрического поля, а менее 300 мкм - упорядочивались перпендикулярно. Чем короче пылевая частица, тем больше вероятность того, что момент вращения, индуцированный электрическим диполем, больше квадрупольного момента вращения. При этом в DC-разрядах левитирующие пылевые частицы всегда упорядочивались горизонтально [75-78].

В силу того, что в модификациях три и четыре используется электростатическое поле, градиент $\nabla \tilde{E}$ равен нулю. Таким образом, в модификациях три и четыре, для вытянутой пылевой частицы всегда будет выполняться условие (3.3.24).

Условие равновесия пространственной ориентации дискообразной пылевой частицы. Диполь-дипольное взаимодействие. Рассмотрим теперь задачу вращения двух тонких близко расположенных дискообразных частиц, которые находятся в постоянном внешнем электростатическом поле, при аспектном соотношении $\beta = \frac{c}{a} < 1$.

Два диска левитируют в поле $\tilde{E}$ рядом друг с другом. Введём переменные $\theta_{1,2}$ - углы между вектором внешнего электростатического поля и осями плоскости первого и второго дисков соответственно (см. Рисунок 3.3.2.). Диски могут быть пространственно ориентированы относительно поля под разными углами $\theta_{1,2}$.

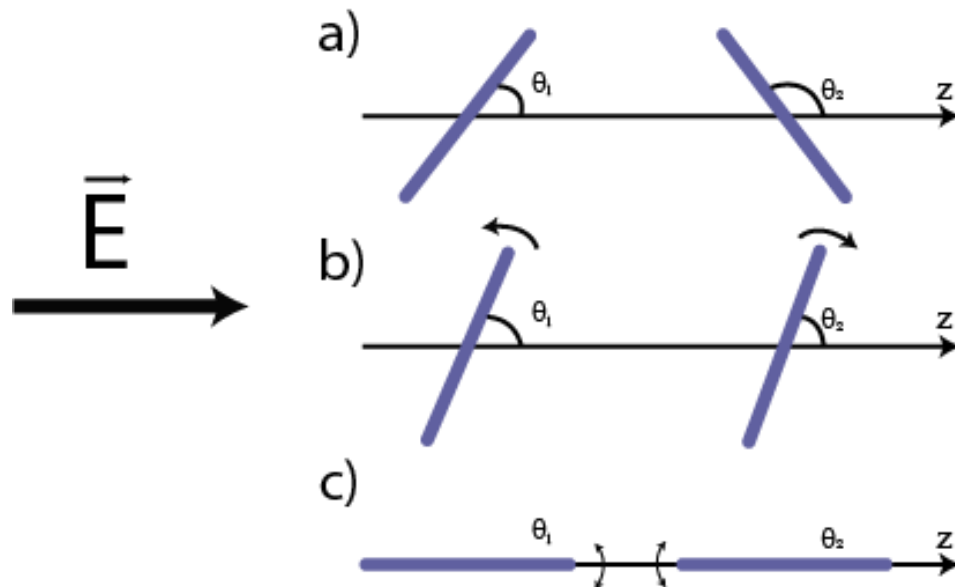


Рисунок 3.3.2. Схематичное изображение вращающихся дисков.

Угол между двумя дисками определяется из следующего соотношения:

$$\cos \Theta = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \quad (3.3.26)$$

Параметр R - расстояние между двумя дисками, заряды которых равны $\tilde{Q}$. Индуцированные на пылевых дисках дипольные моменты будут задаваться выражением:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\alpha \tilde{Q} \exp(-R/\lambda_i)}{R^2} (1 + R/\lambda_i) \cos \theta_1, \\ p_2 &= \frac{\alpha \tilde{Q} \exp(-R_{12}/\lambda_i)}{R^2} (1 + R/\lambda_i) \cos \theta_2. \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

где α - коэффициент поляризации диска вдоль его плоскости. Потенциал диполь-дипольного взаимодействия в данном случае:

$$\begin{aligned} U(R) &= \frac{(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)}{R^3} - \frac{(\vec{p}_1 \cdot \vec{R})(\vec{p}_2 \cdot \vec{R})}{R^5} = \frac{\alpha^2 \tilde{Q}^2 \exp(-2R/\lambda_i)}{R^7} (1 + R/\lambda_i)^2 \cdot \\ &\cdot (-2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \cos \theta_1 \cos \theta_2. \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

Общая кинетическая энергия вращательного движения дисков равна:

$$E_k = \frac{I}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{I}{2} \dot{\theta}_2^2. \quad (3.3.29)$$

Оператор Лагранжа данной системы будет выражаться через сумму её потенциальной и кинетической энергий:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_k} = 0; \quad L(\theta_1, \theta_2) = E_k(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) - U(\theta_1, \theta_2). \quad (3.3.30)$$

Таким образом, уравнение вращения заряженных дисков:

$$\begin{aligned} I \ddot{\theta}_1 + \frac{\alpha^2 \tilde{Q}^2}{R^7} \left[4 \cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos^2 \theta_2 + \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2 \right] &= M(\dot{\theta}_1), \\ I \ddot{\theta}_2 + \frac{\alpha^2 \tilde{Q}^2}{R^7} \left[4 \cos \theta_2 \sin \theta_2 \cos^2 \theta_1 + \frac{1}{2} \sin 2\theta_2 \sin 2\theta_1 \right] &= M(\dot{\theta}_2). \end{aligned} \quad (3.3.31)$$

Здесь $M = -\mathcal{M} \dot{\theta}_k$ - момент силы трения. Введём новые обозначения:

$$\theta_+ = \theta_1 + \theta_2, \quad \theta_- = \theta_1 - \theta_2, \quad \omega = \frac{\alpha^2 \tilde{Q}^2 \exp(-2R/\lambda_i)}{IR^7} (1 + R/\lambda_i)^2. \quad (3.3.32)$$

Здесь ω – частота вращения дисков. В новых переменных уравнения (3.3.31) записываются как:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_+ + \omega^2 \left[4 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \frac{\sin \theta_+}{\theta_+} + \frac{\sin 2\theta_+}{2\theta_+} \right] \theta_+ &= -\gamma \dot{\theta}_+, \\ \ddot{\theta}_- + \omega^2 \left[4 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \frac{\sin \theta_-}{\theta_-} + \frac{\sin 2\theta_-}{2\theta_-} \right] \theta_- &= -\gamma \dot{\theta}_-.\end{aligned}\tag{3.3.33}$$

Решим эти уравнения численно, взяв параметр частоты $\omega = 1$ и коэффициент трения об плазму $\gamma = 0.01$. На Рисунке 3.3.3. представлены результаты численного расчёта системы уравнений (3.3.33).

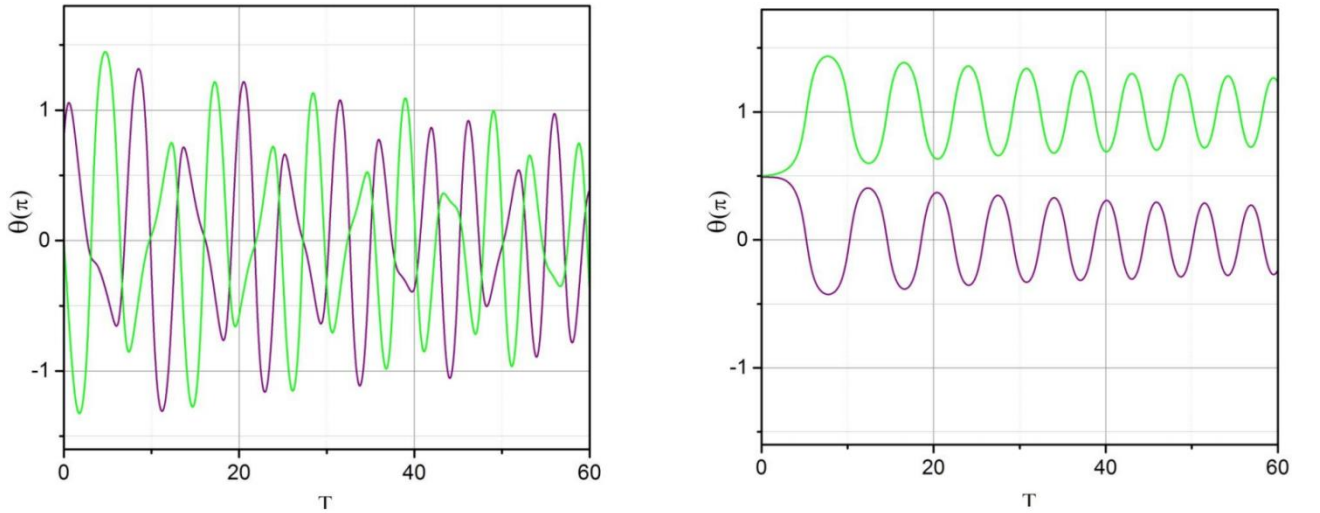


Рисунок 3.3.3. Эволюция углов θ_1 (зелёная кривая) и θ_2 (фиолетовая кривая) со временем, в случае, когда а) плоскость первого диска лежит в плоскости вектора внешнего электростатического поля, а плоскость второго – перпендикулярно; дискам придали угловую скорость б) плоскости обоих дисков лежали перпендикулярно вектору внешнего электростатического поля; диски сместили по углу.

Здесь показана зависимость углов θ_1 (зелёная кривая) и θ_2 (фиолетовая кривая) для двух случаев. В первом случае, плоскость первого диска лежала в плоскости вектора внешнего электростатического поля, а плоскость второго –

перпендикулярно, и этим дискам придали небольшое угловое ускорение. Во втором, диски, плоскости которых покоились перпендикулярно вектору внешнего электростатического поля, сместили на небольшой угол. Результаты, представленные на Рисунке 3.3.3., показывают, что, в обоих случаях, диски начинают колебаться вокруг равновесного положения, которое оказывается таковым, что плоскости заряженных дисков упорядочиваются продольно вектору внешнего электростатического поля, а значит, такая пространственная ориентация заряженных дисков оказывается более устойчивой.

Это означает, что результаты, представленные для дискообразных частиц в параграфе два данной главы, неточны. Выбранное в параграфе два расположение необходимо для сохранения цилиндрической симметрии в расчётной области. Однако данной погрешностью можно пренебречь, так как показано, что на самосогласованное пространственное распределение потенциала вдали от пылевой частицы влияет только ёмкость пылевой частицы, а не её форма. В связи с этим, можно заключить, что ориентация фигуры в пространстве также слабо повлияет на самосогласованные пространственные распределения плотности объёмного заряда и потенциала.

3.4. Заключение по главе 3.

1. Создана новая численная модель, которая позволяет рассчитывать самосогласованные пространственные распределения плотности объёмного заряда и потенциала вблизи эллипсоидальных и дискообразных пылевых частиц, находящихся под воздействием внешнего электростатического поля.

2. Показана зависимость самосогласованных пространственных распределений плотности объёмного заряда и потенциала вблизи

несферических пылевых частиц от напряжённости внешнего электростатического поля, от формы пылевой частицы.

3. Рассчитана зависимость заряда пылевой частицы от её электрической ёмкости и формы, а также от длины пробега ионов процесса резонансной перезарядки.

4. Продемонстрировано совпадение самосогласованных пространственных распределений потенциала и плотности объёмного заряда вдали от пылевых частиц, для разных форм пылевых частиц, обладающих одинаковой ёмкостью.

5. Исследована устойчивость пространственной ориентации эллипсоида и двух дисков, находящихся во внешнем электростатическом поле..

Глава 4. Расчет самосогласованного пространственного распределения потенциала плазмы вблизи бесконечной цепочки сферических пылевых частиц.

В данной главе проведён обзор модуля расчётной модели, в котором итеративным образом производится расчёт самосогласованных пространственных распределений плотности ионов и потенциала, вокруг бесконечной цепочки сферических пылевых частиц, которая находится под действием внешнего электростатического поля.

4.1. Описание численной модели, созданной для расчёта самосогласованного пространственного распределения потенциала, вокруг бесконечной цепочки сферических пылевых частиц.

В изучении изолированных пылевых частиц остаётся всё меньше и меньше белых пятен. Потому логичным шагом в дальнейшем изучении пылевых частиц является отход от приближения изолированной пылевой частицы (ОСР) и переход к пылевым цепочкам, появление которых не раз засвидетельствовано в газоразрядной плазме.

Далее приведён обзор численной модели, которая использовалась для расчета пространственного распределения самосогласованного потенциала плазмы вокруг одномерной бесконечной цепочки сферических пылевых частиц. В силу того, что данная, пятая модификация модели, ближе всего к модификации номер два, то обсуждение ниже будут касаться различий именно этих двух модификаций.

Геометрия системы. Объект изучения в пятой модификации - бесконечная цепочка сферических пылевых частиц. Прямое моделирование траекторий ионов вблизи *действительно* бесконечной цепочки пылевых частиц - задача невыполнимая. «Бесконечность» пылевой цепочки задавалась граничными условиями вычислительной области, которые учитывали

периодичность пространственного распределения потенциала, индуцированного пылевой цепочкой. В целях выполнения поставленной задачи, геометрия вычислительной области была определена следующим образом. Система, в которой происходит расчёт траекторий ионов, представляет собой правильную четырёхугольную призму, в которой площади оснований значительно больше площади боковых граней (см. Рисунок 4.1.1.). Длина рёбер оснований призмы равна L , а сами основания лежат в плоскости XY . Длина наименьших рёбер боковых граней равна D , где D - расстояние между пылевыми частицами. В центре этой призмы находится непроницаемая сфера радиуса r_0 .

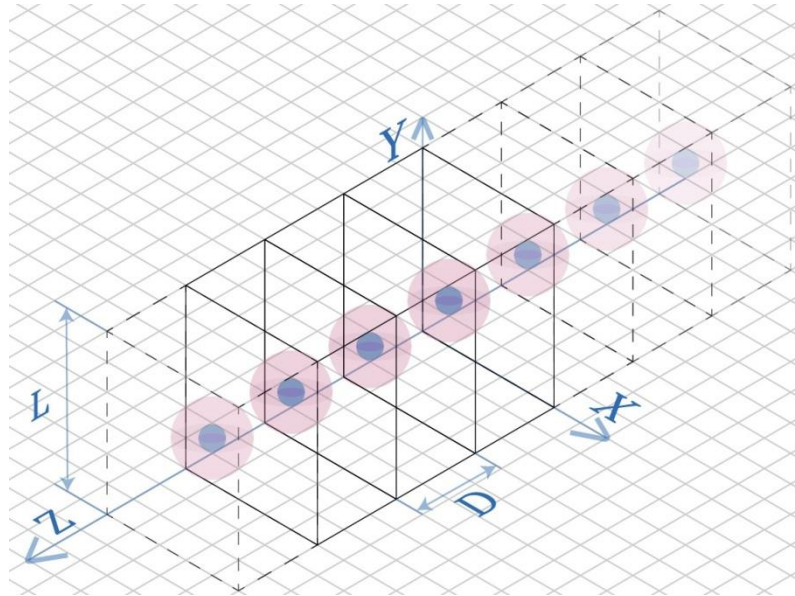


Рисунок 4.1.1. Схематическое изображение системы, в которой производится расчёт самосогласованного пространственного распределения потенциала вокруг цепочки сферических пылевых частиц

Непосредственного расчета траекторий ионов, как и потенциала, вблизи соседних пылевых частиц не осуществляется. Вычисление самосогласованных пространственных распределений плотности ионов и потенциала, а также расчёт траекторий ионов происходит лишь для единственной прямой призмы, где присутствует только одна пылевая

частица. Суть модели заключается в том, что начальное и самосогласованное пространственные распределения потенциала в вычислительной области, ограниченной прямоугольной призмой, учитывает, что к большим граням правильной призмы примыкают точь-в-точь такие же прямые призмы, заряд пылевой частицы, распределение потенциала и распределение плотности объёмного заряда в которых идентичны таковым в основной вычислительной области.

Начальный потенциал в пятой модификации - суперпозиция от потенциалов всех учтённых пылевых частиц, а также потенциала внешнего электрического поля. Общее число частиц в задаче определяется выражением:

$$N = 2k + 1. \quad (4.1.1)$$

Здесь k - число учтённых соседей справа и слева от пылевой частицы. Таким образом, начальный потенциал, индуцированный в вычислительной области, можно записать в виде:

$$U_{0,chain}(\rho, z) = -\frac{\tilde{Q}}{r} e^{-r} - \sum_k \frac{\tilde{Q}}{r_{k,2}} e^{-r_{k,2}} - \sum_k \frac{\tilde{Q}}{r_{k,1}} e^{-r_{k,1}} - \tilde{E}z, \quad (4.1.2)$$

$$r_{k,1}^2 = (D^2 + r^2 - 2kDz), \quad r_{k,2}^2 = (D^2 + r^2 + 2kDz).$$

Здесь $r_{k,1}, r_{k,2}$ - расстояния от иона, находящегося под наблюдением, до соседних пылевых частиц (слева и справа от вычислительной области).

Расчёт потенциала в пятой модификации производится по формуле, аналогичной формуле (2.6.8), с поправкой на суперпозицию, указанную в (4.1.2):

$$U(\rho, z) = -\frac{\tilde{Q}}{r} - \sum_k \frac{\tilde{Q}}{r_{k,1}} - \sum_k \frac{\tilde{Q}}{r_{k,2}} - \tilde{E}z + \iiint_{V_{syst}} \frac{n(\rho', \varphi', z') \rho' d\rho' d\varphi' dz'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} +$$

$$+ \sum_k \iiint_{V_{syst}} \frac{n(\rho', \varphi', z') \rho' d\rho' d\varphi' dz'}{|\vec{r}_{k,1} - \vec{r}'|} + \sum_k \iiint_{V_{syst}} \frac{n(\rho', \varphi', z') \rho' d\rho' d\varphi' dz'}{|\vec{r}_{k,2} - \vec{r}'|}. \quad (4.1.3)$$

Самосогласованное пространственное распределение потенциала рассчитывается только в центральной прямой призме, однако учитывает пространственное распределения плотностей объёмного заряда в примыкающих к ней областях.

Расчёт компонент силы также происходит согласно расширенной версии формулы (2.6.9):

$$\begin{aligned}
 F_x(x, y, z) = & -\frac{\tilde{Q}_x}{r^3} - \sum_k \frac{\tilde{Q}_x}{r_{k,1}^3} - \sum_k \frac{\tilde{Q}_x}{r_{k,2}^3} + \\
 & + \iiint_{V_{\text{syst}}} \frac{(x - x')n(\rho', \varphi', z')\rho' d\rho' d\varphi' dz'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \\
 & + \sum_k \iiint_{V_{\text{syst}}} \frac{(x - x')n(\rho', \varphi', z')\rho' d\rho' d\varphi' dz'}{|\vec{r}_{k,1} - \vec{r}'|} + \\
 & + \sum_k \int \iiint_{V_{\text{syst}}} \frac{(x - x')n(\rho', \varphi', z')\rho' d\rho' d\varphi' dz'}{|\vec{r}_{k,2} - \vec{r}'|}, \\
 F_y(x, y, z) = & -\frac{\tilde{Q}_y}{r^3} - \sum_k \frac{\tilde{Q}_y}{r_{k,1}^3} - \sum_k \frac{\tilde{Q}_y}{r_{k,2}^3} + \\
 & + \iiint_{V_{\text{syst}}} \frac{(y - y')n(\rho', \varphi', z')\rho' d\rho' d\varphi' dz'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \\
 & + \sum_k \iiint_{V_{\text{syst}}} \frac{(y - y')n(\rho', \varphi', z')\rho' d\rho' d\varphi' dz'}{|\vec{r}_{k,1} - \vec{r}'|} + \\
 & + \sum_k \int \iiint_{V_{\text{syst}}} \frac{(y - y')n(\rho', \varphi', z')\rho' d\rho' d\varphi' dz'}{|\vec{r}_{k,2} - \vec{r}'|},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_z(x, y, z) = & -\frac{\tilde{Q}z}{r^3} - \sum_k \frac{\tilde{Q}z}{r_{k,1}^3} - \sum_k \frac{\tilde{Q}z}{r_{k,2}^3} + \\
& + \iiint_{V_{syst}} \frac{(z - z')n(\rho', \varphi', z')\rho' d\rho' d\varphi' dz'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \\
& + \sum_k \iiint_{V_{syst}} \frac{(z - z')n(\rho', \varphi', z')\rho' d\rho' d\varphi' dz'}{|\vec{r}_{k,1} - \vec{r}'|} + \\
& + \sum_k \iiint_{V_{syst}} \frac{(z - z')n(\rho', \varphi', z')\rho' d\rho' d\varphi' dz'}{|\vec{r}_{k,2} - \vec{r}'|} - \tilde{E}z.
\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Отличия алгоритма расчёта самосогласованного распределения потенциала в модификации пять от того, что представлен в описании второй модификации, изменений почти не претерпел. Единственными исключениям являются:

1) Дополнительное условие для окончания расчёта: введено требование о том, что на границах системы должна выполняться периодичность самосогласованных пространственных распределений плотности объёмного заряда и потенциала.

2) В пятой модификации модели объём вычислительной области меньше, чем во второй, в 10-20 раз. Потому количество реализаций ионов, необходимых для перехода на следующую итерацию, было отнормировано соответствующим образом. Отдельно стоит упомянуть нулевую итерацию, переход с которой на первую требует более долгого расчёта во избежание появления расходимости в задаче. Если для изолированного случая минимально необходимое время пребывания ионов в сегментах система накапливалось на протяжении расчёта 10^8 траекторий ионов, то пятой модификации таких траекторий должно было быть рассчитано 10^7 .

4.2. Результаты расчёта самосогласованного потенциала плазмы вблизи бесконечной цепочки сферических пылевых частиц.

Результаты численного моделирования, представленные далее, рассчитаны для тех же параметров, что и для задачи изолированной пылевой частицы, представленной во второй главе. Радиусы пылевых частиц задавались равными $r_0 = 1$ мкм, а значение средней длины свободного пробега процесса резонансной перезарядки $l_i = 5 \lambda_i$. Расстояние D между пылевыми частицами в пятой модификации задавалось в качестве параметра.

Заряд пылевой частицы. Когда частица пыли попадает в плазму, она испытывает столкновения с большим количеством ионов и электронов, однако, в случае цепочки пылевых частиц, поток ионов на пылевую частицу изменяется, в силу влияния соседних пылевых частиц на траектории ионов. При достаточном удалении пылевых частиц друг от друга, потоки ионов и электронов на поверхности пылевых частиц пыли равны тем, что индуцируются в случае изолированных пылевых частиц.

На Рисунке 4.2.1. изображена зависимость безразмерного заряда пылевой частицы $\tilde{Q}$ от расстояния между частицами D в отсутствии внешнего электростатического поля. Из этой зависимости видно, что заряд $\tilde{Q}$ пылевой частицы уменьшается при уменьшении межчастичного расстояния. Для $D > 6 \lambda_i$ заряд пылевых частиц в цепочке равен тому заряду, который индуцируется на поверхности изолированных пылевых частиц. Зависимость, представленная на Рисунке 4.2.1., демонстрирует поведение, хорошо известное из экспериментальных работ, касающихся цепочек пылевых частиц. Когда плотность пылевых частиц в объёме растёт, величина заряда каждой отдельной пылевой частицы снижается [134-136]. Этот эффект объясняется истощением электронов в окружающей плазме. В результате этого истощения, меньшее количество электронов падает на каждую отдельную пылевую частицу. Из этого следует, что, из условия равенства

потоков ионов и электронов на поверхность пылевой частицы, на её поверхности индуцируется меньший по величине заряд. Данные, представленные на Рисунке 4.2.1., были опубликованы в работе [137].

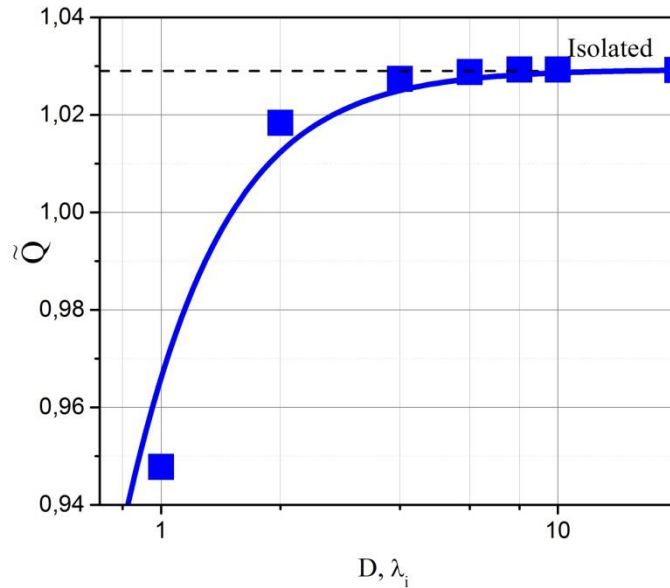


Рисунок 4.2.1. Зависимость заряда пылевой частицы $\tilde{Q}$ от межчастичного расстояния D , при $r_0 = 1$ мкм, $l_i = 5 \lambda_i$, в отсутствии внешнего электростатического поля $\tilde{E}$.

Периодичность самосогласованных пространственных распределений. С помощью модификации пять рассчитаны самосогласованные распределения плотности объёмного заряда и потенциала вокруг бесконечной цепочки сферических пылевых частиц. Результат этого вычисления представлен на Рисунке 4.2.2., где изображены срезы самосогласованных пространственных распределений плотности объёмного заряда $n(\rho, z)$ и потенциала $-U(\rho, z)$ по направлению внешнего электростатического поля, для координаты $\rho=0$, для случая, когда межчастичное расстояние $D = 4 \lambda_i$.

Появление периодичности в распределениях объёмного заряда и потенциала на границах вычислительной области $z = -0.5 D$, $z = 0.5 D$

является одним из необходимых условий, при котором решённую задачу можно считать самосогласованной. Данные, представленные на Рисунке 4.2.2., были опубликованы в работе [137].

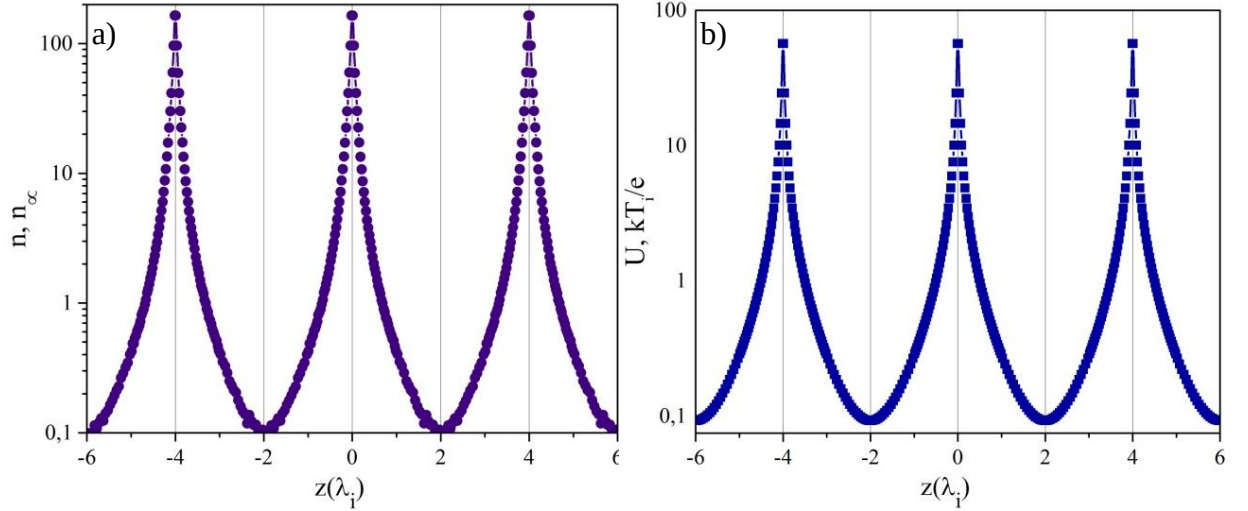


Рисунок 4.2.2. Самосогласованные пространственные распределения а) плотности объёмного заряда $n(\rho=0, z)$ б) потенциала $-U(\rho=0, z)$, представленные для координаты $\rho=0$, для межчастичного расстояния $D = 4 \lambda_i$, при $l_i = 5 \lambda_i$, $r_0 = 1$ мкм, в отсутствии внешнего электростатического поля $\tilde{E}$.

Критерий изолированности пылевой частицы. Является ли пылевая частица изолированной или нет, можно судить из пространственного распределения плотности объёмного заряда $n(\rho, z)$. В пятой модификации модели, в целях более глубокого анализа самосогласованных распределений, производится разложение пространственного распределения плотности объёмного заряда $n(\rho, z)$ по полиномам Лежандра. На Рисунке 4.2.3. продемонстрировано радиальное распределение $n_0(r)r^2$, для различных межчастичных расстояний D , в отсутствии внешнего электрического поля $\tilde{E}$.

Разложение пространственного распределения плотности объёмного заряда $n(\rho, z)$ производилось по сфере радиуса $0.5 D$, а потому не затрагивало области, где $\rho > 0.5 D$. На Рисунке 4.2.3. также представлена функция $n_0(r)r^2$, рассчитанная для случая изолированной пылевой частицы, которая

продемонстрирована ранее на Рисунке 2.5.4. При уменьшении межчастичного расстояния D , растёт несовпадение между функциями $n_0(r)r^2$, рассчитанными для случая изолированной пылевой частицы, и для случая цепочки пылевых частиц. При межчастичном расстоянии $D = 4 \lambda_i$, пылевую частицу, находящуюся в цепочке, всё ещё можно считать изолированной, однако, при дальнейшем уменьшении значения D , функция $n_0(r)r^2$ искривляется, что говорит о том, что на ионы в расчётной области оказывает влияние потенциал соседних пылевых частиц.

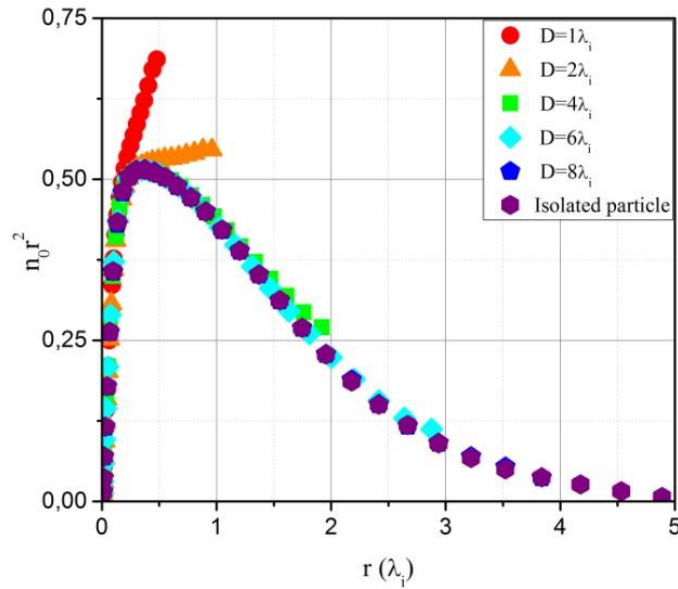


Рисунок 4.2.3. Радиальное распределение $n_0(r)r^2$, представленное для различных значений межчастичного расстояния D , при $l_i = 5 \lambda_i$, $r_0 = 1 \text{ мкм}$, в отсутствии внешнего электростатического поля $\tilde{E} \dots$

Таким образом, из Рисунков 4.2.1. и 4.2.3., можно заключить, что, для средней длины свободного пробега ионов $l_i = 5 \lambda_i$ процесса резонансной перезарядки, пылевую частицу радиуса $r_0 = 1 \text{ мкм}$ можно считать изолированной, при $D \geq 6 \lambda_i$. Данные, представленные на Рисунке 4.2.3., были опубликованы в работе [137].

Самосогласованные пространственные распределения объёмного заряда и потенциала. На Рисунке 4.2.4. представлены самосогласованные

пространственные распределения плотности объёмного заряда $n(\rho, z)$ (серия графиков в верхней половине) и потенциала $U(\rho, z)$ (серия графиков в нижней половине), для межчастичных расстояний $D = 1; 2; 4 \lambda_i$.

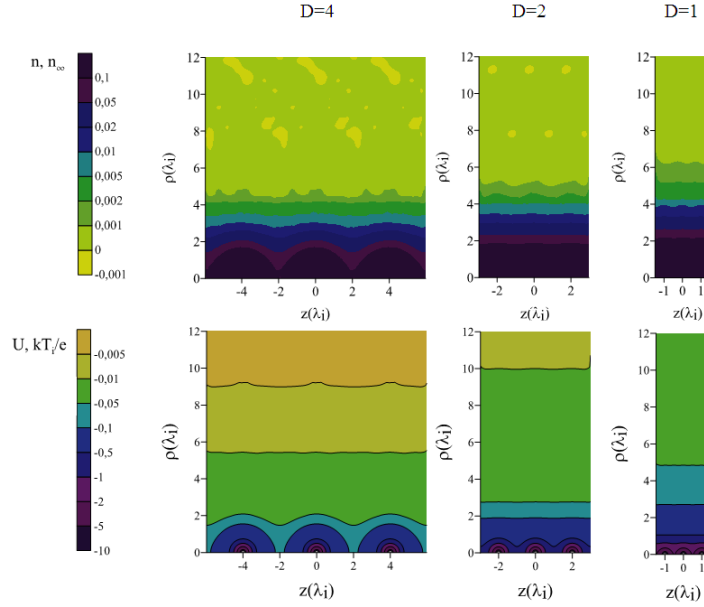


Рисунок 4.2.4. Самосогласованные пространственные распределения плотности объёмного заряда $n(\rho, z)$ (серия графиков в верхней половине) и потенциала $U(\rho, z)$ (серия графиков в нижней половине), для межчастичных расстояний $D = 1; 2; 4 \lambda_i$, при $l_i = 5 \lambda_i$, $r_0 = 1$ мкм, в отсутствии внешнего электростатического поля $\tilde{E}$.

Из Рисунка 4.2.4. можно установить, что условия периодичности, установленные на пространственные распределения плотности объёмного заряда и потенциала, выполняются. Также из Рисунка 4.2.4. видно, что при достаточно больших расстояниях D между пылевыми частицами, каждую из них окружает собственное ионное облако, слабо взаимодействующее с облаками ионов соседних пылевых частиц. Чем ближе друг к другу пылевые частицы, тем более плотно прижатыми друг к другу оказываются облака ионов, пока, при определённом D , они не сливаются в единый слой. Для $D = 4 \lambda_i$, сливаются воедино лишь внешние слои самосогласованных пространственных распределений плотности объёмного заряда $n(\rho, z)$ и

потенциала $U(\rho, z)$: $0 < n(\rho, z) < 0.005 n_\infty$, $0 < U(\rho, z) < -0.05 kT_i/e$. При сближении частиц на расстояние $D = 2 \lambda_i$ в объединение вовлекаются: $0 < n(\rho, z) < 0.05 n_\infty$, $0 < U(\rho, z) < -kT_i/e$. Для $D = \lambda_i$, $0 < n(\rho, z) < 0.1 n_\infty$, $0 < U(\rho, z) < -2 kT_i/e$.

При сближении пылевых частиц, облако ионов уширяется. Если, для случая $D = 4 \lambda_i$ граница слоя $n(\rho, z) = 0.005 n_\infty$ проходит в точке $\rho = 3.3 \lambda_i$, то для $D = \lambda_i$ эта граница смещается до $\rho = 4.2 \lambda_i$. При сближении пылевых частиц, ионные облака сильно искривляются, что приводит к тому, что более лёгкие слои выдавливает в сторону внешней границы вычислительной области. Данные, представленные на Рисунке 4.2.4., были опубликованы в работе [137].

На Рисунке 4.2.5. представлены самосогласованные пространственные распределения объёмного заряда $n(\rho, z)$ (серия графиков в верхней половине) и потенциала $U(\rho, z)$ (серия графиков в нижней половине) для различных величин внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, при $l_i = 5 \lambda_i$, $r_0 = 1 \text{ мкм}$.

Из верхней части Рисунка 4.2.5., где изображено самосогласованное распределение объёмного заряда $n(\rho, z)$, видно, что, при возникновении внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, облака ионов сливаются. Для напряжённости внешнего электростатического поля $\tilde{E} = 0$, пылевые частицы обособлены, значение потенциала между ними $U(\rho, z) \approx -0.1 kT_i/e$, а потенциальный слой $U(\rho, z) \approx -0.05 kT_i/e$ не выходит за пределы $\rho = 2 \lambda_i$. Для поля $\tilde{E} = 20$, сливается воедино слой $U(\rho, z) \approx -0.5 kT_i/e$, при этом, граница потенциального слоя $U(\rho, z) \approx -0.05 kT_i/e$ достигает $\rho = 4.3 \lambda_i$.

Для случая $\tilde{E} = 20$ становится заметным появление локальных максимумов между пылевыми частицами. Как и для случая изолированных пылевых частиц, появление максимумов обусловлено фокусировкой ионов [101,120,137]. В случае изолированной частицы, при наличии в системе такого большого внешнего электростатического поля, за пылевой частицей возник бы вейк. Так как в данной модели, непосредственно за пылевой

частицей, левитирует другая пылевая частица, вейк разрушается, становясь заметным вновь лишь при большой напряжённости внешнего электростатического поля $\tilde{E}$. Данные, представленные на Рисунке 4.2.5., были опубликованы в работе [139].

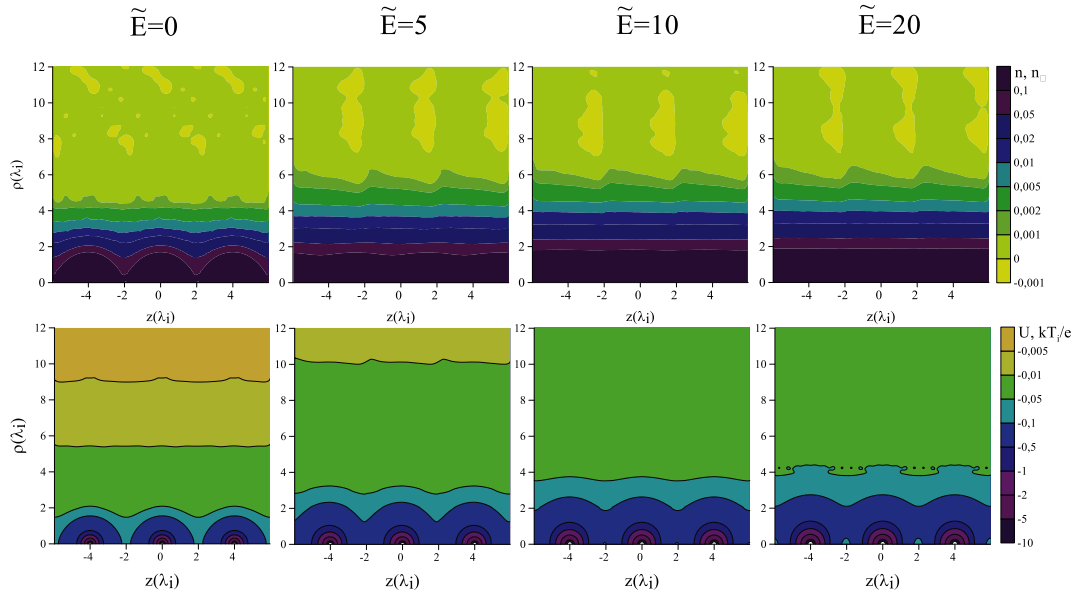


Рисунок 4.2.5. Самосогласованные пространственные распределения плотности объёмного заряда $n(\rho, z)$ (серия графиков в верхней половине) и потенциала $U(\rho, z)$ (серия графиков в нижней половине), для межчастичного расстояния $D = 4 \lambda_i$, при $l_i = 5 \lambda_i$, $r_0 = 1$ мкм, для различных значений внешнего электростатического поля $\tilde{E}$.

В пятой модификации, расстояние D между пылевыми частицами – заданный параметр, что неверно – пылевая частица, в общем случае, занимает такое положение, которое отвечает положительному максимуму, формирующемуся за пылевой частицей в результате ионной фокусировки [140-143], а также импульсу, который был передан ей рассеивающимся потоками ионов и электронов. Однако можно провести оценку, согласно которой, положение максимума вейка является точкой, в которой будет располагаться соседняя пылевая частица. Зависимость этого положения от

напряжённости внешнего электростатического поля представлена на Рисунке 2.5.20. b).

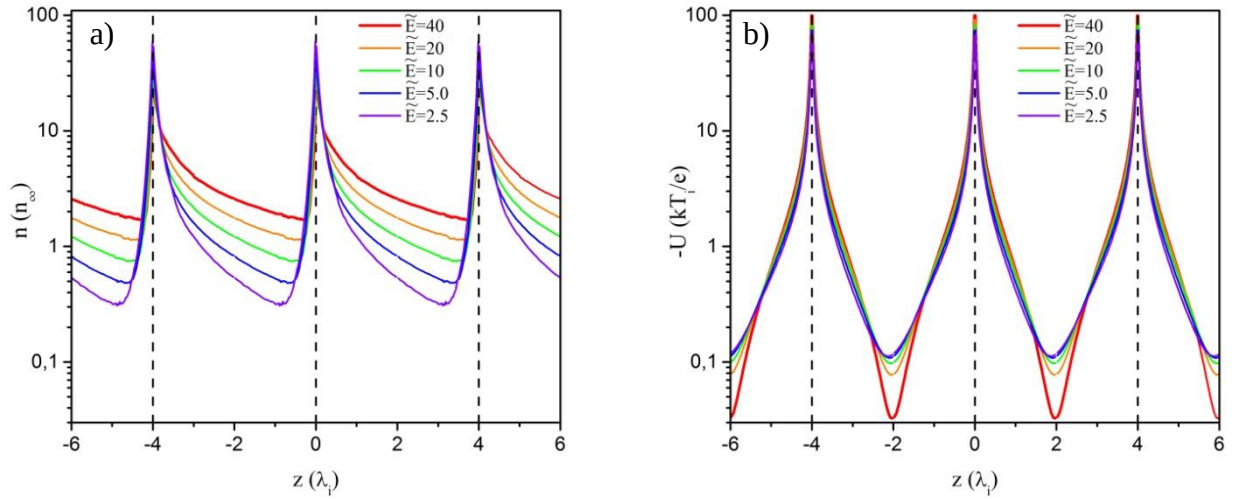


Рисунок 4.2.6. Самосогласованные пространственные распределения а) плотности объёмного заряда $n(\rho=0, z)$ б) потенциала $-U(\rho=0, z)$, представленные для координаты $\rho=0$, для межчастичного расстояния $D = 4 \lambda_i$, при $l_i = 5 \lambda_i$, $r_0 = 1$ мкм, для различных значений внешнего электростатического поля $\tilde{E}$.

На Рисунке 4.2.6. изображены срезы самосогласованных пространственных распределений плотности объёмного заряда $n(\rho, z)$ и потенциала $-U(\rho, z)$ по направлению внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, для координаты $\rho=0$, для случая, когда $D = 4 \lambda_i$, при $l_i = 5 \lambda_i$, $r_0 = 1$ мкм. Для удобства представления, срезы пространственных распределений представлены для трех соседних частиц пыли. Из Рисунка 4.2.6. видно, что, в случае присутствия в вычислительной области внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, условия периодичности пространственных распределений всё также выполняются. Как и в случае изолированной пылевой частицы, с появлением и дальнейшим усилением внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, пространственные распределение объёмного

заряда $n(\rho, z)$ возрастает позади пылевой частицы и уменьшается перед ней. Увеличение плотности объёмного заряда – признак ионной фокусировки и в случае изолированной пылевой частицей, на расстояниях $\sim 4-6 \lambda_i$ за пылевой частицей образовывался бы вейк. Однако в рассмотренной цепочке пылевых частиц, соседняя пылевая частица располагается на месте первого локального максимума потенциала.

Из Рисунка 4.2.6. б) видно, что, при увеличении напряженности внешнего электрического поля $\tilde{E}$, между пылевыми частицами образуется локальный максимум в потенциале, величина которого растет с ростом $\tilde{E}$. Кроме того, с увеличением напряженности внешнего электрического поля $\tilde{E}$ пространственное распределение потенциала $U(\rho=0, z)$ становится все более симметричным относительно центра координатной оси, где расположена пылевая частица.

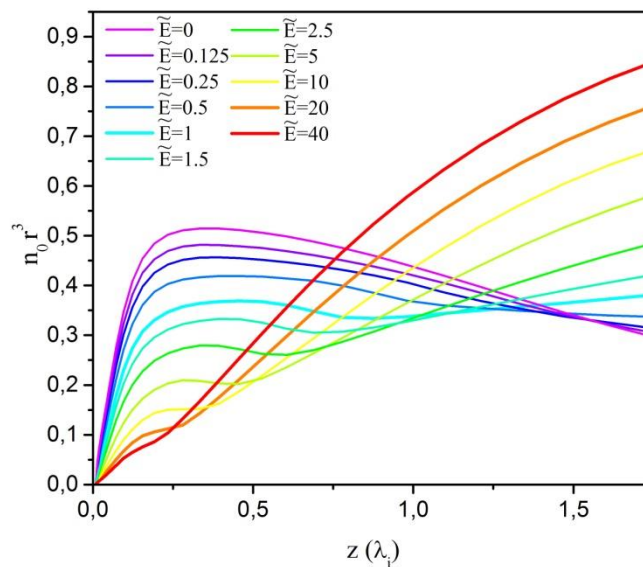


Рисунок 4.2.7. Функции $n_0(r)r^2$, рассчитанные для различных напряжённостей внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, при $l_i = 5 \lambda_i$, $r_0 = 1$ мкм.

Как и в случае изолированной пылевой частицы, в пятой модификации производится анализ пространственного распределения плотности объёмного

заряда $n(\rho, z)$ с помощью разложения этого распределения на гармоники $n_k(r)$. На Рисунке 4.2.7. продемонстрированы радиальные распределения $n_0(r)r^2$, измеренные для различных напряженностей внешнего электростатического поля $\tilde{E}$. Из Рисунка 4.2.7. видно, что на границе области, где выполняется разложение $n(\rho, z)$ по гармоникам $n_k(r)$ ($r < D$), значение функции $n_0(r)r^2$ увеличивается с ростом $\tilde{E}$. Это связано с ионной фокусировкой в пространственном распределении объёмного заряда: из Рисунка 4.2.6. а), видно, что при больших значениях $\tilde{E}$, в распределении $n(\rho, z)$ возникает область повышенных значений, которая занимает всю область полиномиального разложения.

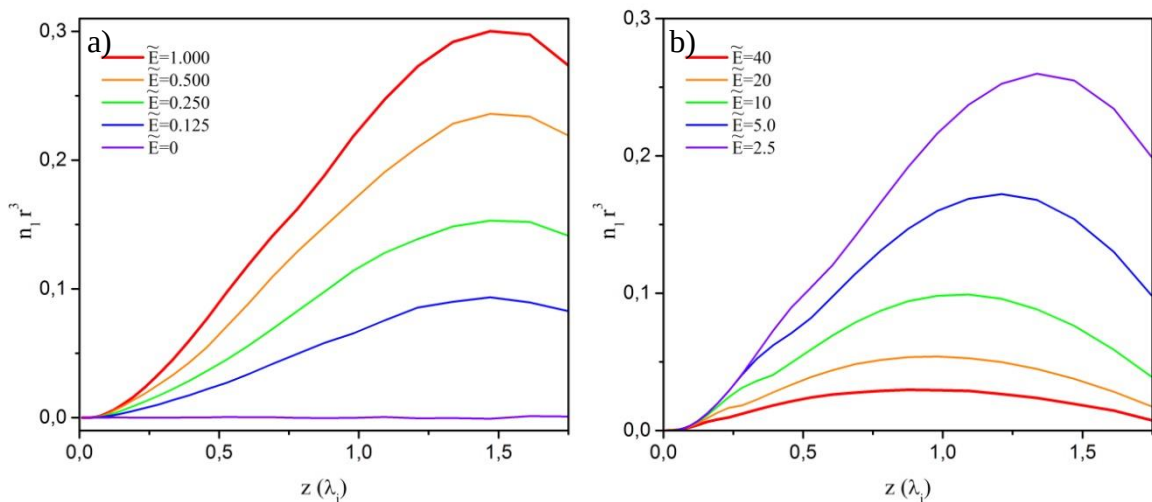


Рисунок 4.2.8. Функции $n_1(r)r^3$, рассчитанные для различных напряжённостей внешнего электростатического поля а) $\tilde{E}=0 - 1$; б) $\tilde{E}=2.5 - 40$, при $l_i = 5 \lambda_i$, $r_0 = 1$ мкм.

На Рисунке 4.2.8. продемонстрированы радиальные распределения $n_1(r)r^3$, измеренные для различных напряженностей внешнего электростатического поля $\tilde{E}$. Разделение представления данных по двум диапазонам значений осуществлено для достижения ясности в представлении результатов. Результаты, представленные на Рисунке 4.2.8., противоречат полученным ранее данным о распределении $n_1(r)r^3$, рассчитанном вблизи

изолированных пылевых частиц, которое в аналогичном интервале значений $\tilde{E}$ заметно возрастало. Из Рисунка 4.2.6. а) видно, что, с увеличением напряженности внешнего электростатического поля, область повышенных значений $n(\rho, z)$ уширяется и упирается в другую пылевую частицу. Чем больше $\tilde{E}$, тем более пологим становится срез пространственного распределения объемного заряда $n(\rho=0, z)$ в направлении внешнего электростатического поля и тем меньше становится $n_1(r)r^3$.

Все результаты, представленные ранее, которые касались бы анизотропии, индуцированной в вычислительной области внешним электростатическим полем, могут быть охарактеризованы единой зависимостью, представленной на Рисунке 4.2.9.

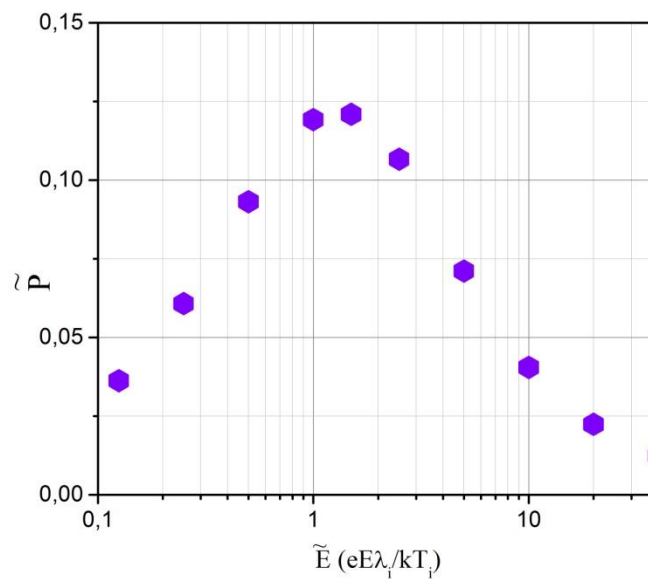


Рисунок 4.2.9. Зависимость дипольного момента ионного облака $\tilde{P}$, сформированного вблизи отдельно взятой пылевой частицы, от напряжённости внешнего электростатического поля $\tilde{E}$, при $l_i = 5 \lambda_i$, $r_0 = 1$ мкм.

На Рисунке 4.2.8. показана зависимость дипольного момента ионного облака, сформированного вблизи отдельно взятой пылевой частицы в

цепочке, от напряженности внешнего электростатического поля $\tilde{E}$. Эта зависимость показывает, что, когда напряженность внешнего электростатического поля мала, $\tilde{P}(\tilde{E})$ растет линейно, однако скорость роста $\tilde{P}(\tilde{E})$ начинает снижаться с увеличением $\tilde{E}$. Когда функция $\tilde{P}(\tilde{E})$ достигает своего максимума при $\tilde{E} \approx 2$, она начинает уменьшаться с дальнейшим ростом $\tilde{E}$. Другими словами, с увеличением напряженности внешнего электростатического поля, анизотропия, вызванная действием этого электростатического поля на цепочку пылевых частиц, уменьшается.

4.3. Заключение по главе 4.

1. Создана новая численная модель, которая позволяет рассчитывать самосогласованные пространственные распределения плотности ионов и потенциала вблизи бесконечной цепочки сферических пылевых частиц, находящихся под воздействием внешнего электростатического поля.
2. Представлена зависимость самосогласованных пространственных распределений объёмного заряда и потенциала вблизи сферических пылевых частиц от напряжённости внешнего электростатического поля, от расстояния между пылевыми частицами.
3. Получена зависимость величины заряда, индуцированного потоками ионов и электронов на сферические пылевые частицы, состоящие в бесконечной цепочке, от расстояния между пылевыми частицами в цепочке.
4. Исследован критерий того, когда пылевую частицу можно считать изолированной.
5. Представлена зависимость дипольного момента ионного облака, сформированного вблизи отдельно взятой пылевой частицы, от напряжённости внешнего электростатического поля.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная диссертационная работа посвящена численному исследованию самосогласованных пространственных распределений потенциала и плотности объёмного заряда вблизи частиц пыли различной формы для широкого спектра параметров пылевой плазмы. В результате проделанной работы получены следующие результаты:

1. Разработана новая численная модель, которая позволяет итерационно рассчитывать самосогласованные пространственные распределения плотности ионов и потенциала плазмы вблизи микронных пылевых частиц различной формы, а также вблизи бесконечных цепочек пылевых частиц, которые находятся во внешнем электростатическом поле.

2. С помощью численного моделирования впервые получены эмпирические аппроксимации для зависимостей характеристик вейка и дипольного момента системы «пылевая частица — облако ионов» от напряжённости внешнего электростатического поля.

3. Впервые, показано, что полученная в расчетах зависимость заряда пылевой частицы эллипсоидальной и дискообразной формы от средней длины свободного пробега процесса ион-нейтральной перезарядки повторяет вид аналогичной зависимости для сферической частицы, когда средняя длина свободного пробега оказывается большей ионной длины Дебая. В эту зависимость, в качестве геометрических параметров, входит емкость частицы.

4. Впервые, с помощью численного моделирования, показано, что, характеристики вейка, формирующегося вблизи изолированной пылевой частицы, не зависят от формы пылевой частицы, а определяются электрической ёмкостью этой пылевой частицы, когда её форма представляет собой эллипсоид вращения.

5. С помощью численного моделирования впервые показано, что дипольный момент ионного облака, сформированного вокруг отдельно

взятой пылевой частицы в цепочке, уменьшается с увеличением напряжённости внешнего электростатического поля, что приводит к тому, что самосогласованное пространственное распределение потенциала вокруг пылевых частиц в цепочке стремится к симметричному виду с ростом напряжённости внешнего электростатического поля.

Список литературы

1. Фортов В.Е., Морфилл Г. О. Комплексная и пылевая плазма: из лаборатории в космос // Физматлит. - 2012.
2. Попель С. И. Лекции по физике пылевой плазмы // МФТИ. - 2012.
3. Ishihara O. Complex plasma: dusts in plasma // Journal of Physics D: Applied Physics. - 2007. – Т. 40. - №. 3. – С. 121-147.
4. Bonitz M., Henning C., Block D. Complex plasmas: a laboratory for strong correlations // Reports on Progress in Physics. – 2010. – Т. 73. - №. 6. – С. 066501.
5. Ludwig P., Thomsen H., Balzer K., Filinov A., Bonitz M., Tuning correlations in multi-component plasmas // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2010. – Т. 52. - №. 12. – С. 124013.
6. Langmuir I., Fong C.G., Dittmer A.F A new type of electric discharge: the streamer discharge // Science. – 1924. – Т. 60. - №. 1557. – С. 392-396.
7. Spitzer L. Physical Processes in the Interstellar Medium // Willey. - 1978.
8. Hannes O. G. A. On the Origin of the Solar System // Clarendon Press. - 1954.
9. Morfill G. E., Goertz C. K. Plasma clouds in Saturn's rings // ICARUS. – 1983. – Т. 55. - №. 1. – С. 111-123.
10. Spears K. G., Robinson T. J.; Roth R. M. Particle Distributions and Laser-Particle Interactions in an RF Discharge of Silane // IEEE Transactions on Plasma Science. – 1986. – Т. 14. - №. 2. – С. 179-197.
11. Selwyn G. S., Singh J. and Bennett R. S. In situ laser diagnostic studies of plasma-generated particulate contamination // Journal of Vacuum Science & Technology A. – 1989. – Т. 7. - №. 4. – С. 2758-2765.
12. Ikezi H. Coulomb solid of small particles in plasmas // Physics of Fluids. – 1986. – Т. 29. - №. 6. – С. 1764-1766.
13. Selwyn G. S. Optical characterization of particle traps // Plasma Sources Science and Technology. – 1994. – Т. 3. - №. 3. – С. 340-347.

14. Chu J. H., I L. Direct observation of Coulomb crystals and liquids in strongly coupled rf dusty plasmas // *Physical Review Letters*. – 1994. – T. 72. - №. 25. – C. 4009 -4012.
15. Thomas H., Morfill G. E., Demmel V., Goree J., Feuerbacher B., Möhlmann D., Plasma Crystal: Coulomb Crystallization in a Dusty Plasma // *Physical Review Letters*. – 1994. – T. 73. - №. 5. – C. 652 -655.
16. Hayashi Y., Tachibana K. Observation of Coulomb-Crystal Formation from Carbon Particles Grown in a Methane Plasma // *Japanese Journal of Applied Physics*. – 1994. – T. 33. - №. 6A. – C. 804-806.
17. Melzer A., Trottenberg T., Piel A. Experimental determination of the charge on dust particles forming Coulomb lattice // *Physics Letters A*. – 1994. – T. 191. - №. 3-4. – C. 301-308.
18. Ivlev A.V., Morfill G., Anisotropic dust lattice modes // *Physical Review E*. – 2000. – T. 63. - №. 1. – C. 016409.
19. Merlino R. L., Goree J. A. Dusty Plasmas in the Laboratory, Industry, and Space // *Physics Today*. – 2004. – T. 57. - №. 7. – C. 32.
20. Fortov V. E., Ivlev A. V., Khrapak S. A., Khrapak A. G., Morfill G. E. Complex (dusty) plasmas: Current status, open issues, perspectives // *Physics Reports*. – 2005. – T. 421. - №. 1-2. – C. 1-103.
21. Shukla P. K., Eliasson B. Colloquium: Fundamentals of dust-plasma interactions // *Reviews of Modern Physics*. – 2009. – T. 81. - №. 25. – C. 25-44.
22. Morfill G. E., Ivlev A. V. Complex plasmas: an interdisciplinary research field // *Reviews of Modern Physics*. – 2009. – T. 81. - №. 4. – C. 1353-1404.
23. Chaudhuri M., Ivlev A. V., Khrapak S. A., Thomas H. M., G. E. Morfill Complex plasma—the plasma state of soft matter // *Soft Matter*. – 2011. – T. 7. - №. 4. – C. 1287.
24. Райзер Ю. П. Физика газового разряда // М.: Наука. - 1992.
25. Чен Ф. Введение в физику плазмы // М.: Мир. - 1987.

26. Polyakov D. N., Shumova V. V., Vasilyak L. M. Phase transitions and transformation of dust structures in neon dc discharge at cryogenic temperature // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – T. 1058. - №. 1. – C. 012029.
27. Syrovatka R., Medvedev Yu., Filinov V., Vasilyak L., Deputatova L., Vladimirov V., Pecherkin V. Solitary waves in a long structure of charged particles confined in the linear Paul trap // Physics Letters A. – 2019. – T. 383. - №. 4. – C. 338-344.
28. Polyakov D., Shumova V., Vasilyak L. Coulomb Dust Spheres in a Glow Discharge in Neon at Cryogenic Temperatures // Plasma Physics Reports. – 2019. – T. 45. - №. 4. – C. 414-419.
29. Shukla P. K., Mamun A. A. Introduction to Dusty Plasmas // Institute of Physics Publishing. - 2002.
30. Sukhinin G. I., Fedoseev A. V. Formation of a Trapped-Ion Cloud Around a Dust Particle in Low-Density Plasma // IEEE Transactions on Plasma Science. – 2010. – T. 38. - №. 4. – C. 2345 – 2352.
31. Melzer A., Schweigert V. A., Piel A., Transition from Attractive to Repulsive Forces between Dust Molecules in a Plasma Sheath // Physical Review Letters. – 1999. – T. 83. - №. 16. – C. 3194 – 3197.
32. Hebner G. A., Riley M. E., Measurement of attractive interactions produced by the ion wakefield in dusty plasmas using a constrained collision geometry // Physical Review E. – 2003. – T. 68. - №. 4. – C. 046401.
33. Carstensen J., Greiner F., Block D., Schablinski J., Miloch W. J., Piel A. Charging and coupling of a vertically aligned particle pair in the plasma sheath // Physics of Plasmas. – 2012. – T. 19. - №. 3. – C. 033702. **19**, (2012).
34. Saitou Y., Nakamura Y., Kamimura T., Ishihara O. Bow Shock Formation in a Complex Plasma // Physical Review Letters. – 2012. – T. 108. - №. 6. – C. 065004.

35. Hutchinson I. H. Ion collection by a sphere in a flowing plasma: 3. Floating potential and drag force // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. – 2005. – T. 47. - №. 1. – C. 71-87.
36. Hutchinson I. H. Ion collection by a sphere in a flowing plasma: 2. non-zero Debye length // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. – 2003. – T. 45. - №. 8. – C. 1477 -1500.
37. Lapenta G. Linear theory of plasma wakes // *Physical Review E*. – 2000. – T. 62. - №. 1. – C. 1175-1181.
38. Ivlev A. V., Morfill G., Fortov V. E. Potential of a dielectric particle in a flow of a collisionless plasma // *Physics of Plasmas*. – 1999. – T. 6. - №. 5. – C. 1415 - 1420.
39. Manweiler J. W., Armstrong T. P., Cravens T. E. Complex charge distributions of dielectric dust grains due to plasma flow // *Journal of Plasma Physics*. – 2000. – T. 63. - №. 3. – C. 269-283.
40. Svencs K. R., Trøim J. Laboratory simulation of vehicle-plasma interaction in low Earth orbit // *Planetary and Space Science*. – 1994. – T. 42. - №. 1. – C. 81-94.
41. Vladimirov S. V. and Nambu M. Attraction of charged particulates in plasmas with finite flows // *Physical Review E*. – 1995. – T. 52. - №. 3. – C. 2172 - 2174.
42. Melandsø F., Goree J. Polarized supersonic plasma flow simulation for charged bodies such as dust particles and spacecraft // *Physical Review E*. – 1995. – T. 52. - №. 5. – C. 5312 - 5326.
43. Schweigert V. A., Schweigert I. V., Melzer A., Homann A., Piel A. Alignment and instability of dust crystals in plasmas // *Physical Review E*. – 1996. – T. 54. - №. 4. – C. 4155 - 4166.
44. Ishihara O., Vladimirov S. V. Wake potential of a dust grain in a plasma with ion flow // *Physics of Plasmas*. – 1997. – T. 4. - №. 1. – C. 69 - 74.
45. Lapenta G. Simulation of charging and shielding of dust particles in drifting plasmas // *Physics of Plasmas*. – 1999. – T. 6. - №. 5. – C. 1442 - 1447.

46. Lemons D. S., Murillo M. S., Daughton W., Winske D. Two-dimensional wake potentials in sub- and supersonic dusty plasmas // *Physics of Plasmas*. – 2000. – T. 7. - №. 6. – C. 2306 - 2313.
47. Winske D., Daughton W., Lemons D.S., Murillo M. S. Ion kinetic effects on the wake potential behind a dust grain in a flowing plasma // *Physics of Plasmas*. – 2000. – T. 7. - №. 6. – C. 2320 - 2328.
48. Lampe M., Joyce G., Ganguli G., Gavrishchaka V. Interactions between dust grains in a dusty plasma // *Physics of Plasmas*. – 2000. – T. 7. - №. 10. – C. 3851 - 3861.
49. Ivlev A. V., Khrapak S. A., Zhdanov S. K., Morfill G. E., Joyce G. Force on a Charged Test Particle in a Collisional Flowing Plasma // *Physical Review Letters*. – 2004. – T. 92. - №. 20. – C. 205007.
50. Schweigert I. V., Schweigert V. A., Peeters F. M. Perturbation of collisional plasma flow around a charged dust particle: Kinetic analysis // *Physics of Plasmas*. – 2005. – T. 12. - №. 11. – C. 113501.
51. Hutchinson I. H. Collisionless ion drag force on a spherical grain // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. – 2006. – T. 48. - №. 2. – C. 185 -202.
52. Miloch W. J., P'ecseli H. L., Trulsen J. Numerical simulations of the charging of dust particles by contact with hot plasmas // *Nonlinear Processes in Geophysics*. – 2007. – T. 14. – C. 575-586.
53. Kompaneets R., Vladimirov S. V., Ivlev A. V., Morfill G. Reciprocal interparticle attraction in complex plasmas with cold ion flows // *New Journal of Physics*. – 2008. – T. 10. - №. 6. – C. 063018.
54. Rovagnati B., Lapenta G., Mashayek F. Dynamic nature of the ion wake in dusty plasmas // *Physics Letters A*. – 2008. – T. 372. - №. 38. – C. 5991-5994.
55. Guio P., Miloch W. J., P'ecseli H. L., Trulsen J. Patterns of sound radiation behind pointlike charged obstacles in plasma flows // *Physical Review E*. – 2008. – T. 78. - №. 1. – C. 016401.

56. Miloch W. J. Wake effects and Mach cones behind objects // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2010. – T. 52. - №. 12. – C. 124004.
57. Hutchinson I. H., Nonlinear collisionless plasma wakes of small particles// Physics of Plasmas. – 2011. – T. 18. - №. 3. – C. 032111.
58. Nambu M., Vladimirov S. V., Shukla P. K. Attractive forces between charged particulates in plasmas // Physics Letters A. – 1995. – T. 203. - №. 1. – C. 40-42.
59. Kroll M., Schablinski J., Block D., Piel A. On the influence of wakefields on three-dimensional particle arrangements // Physics of Plasmas. – 2010. – T. 17. - №. 1. – C. 013702.
60. Schella A., Miksch T., Melzer A., Schablinski J., Block D., Piel A., Thomsen T., Ludwig P., Bonitz M. Melting scenarios for three-dimensional dusty plasma clusters // Physical Review E. – 2011. – T. 84. - №. 5. – C. 056402.
61. Killer C., Schella A., Miksch T., Melzer A. Vertically elongated three-dimensional Yukawa clusters in dusty plasmas // Physical Review B. – 2011. – T. 84. - №. 5. – C. 054104.
62. Joyce G., Lampe M., G. Ganguli, Particle simulation of dust structures in plasmas // IEEE Transactions on Plasma Science. – 2001. – T. 29. - №. 2. – C. 238-246.
63. Hammerberg J. E., Lemons D. S., Murillo M. S., Winske D. Molecular dynamics simulations of plasma crystal formation including wake effects // IEEE Transactions on Plasma Science. – 2001. – T. 29. - №. 2. – C. 247-255.
64. Lampe M., Joyce G., Ganguli G. Structure and dynamics of dust in streaming plasma: dust molecules, strings, and Crystals // IEEE Transactions on Plasma Science. – 2005. – T. 33. - №. 1. – C. 57-69
65. Miloch W. J., Trulsen H. L., P'ecseli J. Numerical studies of ion focusing behind macroscopic obstacles in a supersonic plasma flow // Physical Review E. – 2008. – T. 77. - №. 5. – C. 056408.

66. Miloch W. J., Kroll M., Block D., Charging and dynamics of a dust grain in the wake of another grain in flowing plasmas // *Physics of Plasmas*. – 2010. – T. 18. - №. 10. – C. 103703.
67. Ludwig P., Kahlert H., Bonitz M., Ion-streaming induced order transition in three-dimensional dust clusters // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. – 2012. – T. 54. - №. 4. – C. 045011.
68. Takahashi K., Oishi T., Shimomai K., Hayashi Y., Nishino S. Analyses of attractive forces between particles in Coulomb crystal of dusty plasmas by optical manipulations // *Physical Review E*. – 1998. – T. 58. - №. 6. – C. 7805-7811.
69. Melzer A., Schweigert V. A., Schweigert I. V., Homann A., Peters S., Piel A. Structure and stability of the plasma crystal // *Physical Review E*. – 1996. – T. 54. - №. 1. – C. 46-49.
70. Hebner G. A. and Riley M. E. Structure of the ion wakefield in dusty plasmas // *Physical Review E*. – 2004. – T. 69. - №. 2. – C. 026405.
71. Maierov S. A., Vladimirov S. V., Cramer N. F. Plasma kinetics around a dust grain in an ion flow // *Physical Review E*. – 2000. – T. 63. - №. 1. – C. 017401.
72. Horányi M. Charged dust dynamics in the Solar System // *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. – 1996. – T. 43. - №. 1. – C. 383-418.
73. Timirkhanov R.A., Vasilieva E.V. Gavrikov A.V., Petrov O.F. Experimental study of dusty plasma with rod-like macroparticles // *IPCP RAS*. – 2009. – T. 1. - №. 1. – C. 226-227.
74. Molotkov V. I., Nefedov A. P., Pustyl'nik M. Yu., Torchinsky V. M., Fortov V. E., Khrapak A. G., Yoshino K. Liquid plasma crystal: Coulomb crystallization of cylindrical macroscopic grains in a gas-discharge plasma // *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*. – 2000. – T. 71. - №. 1. – C. 102-105.
75. Annaratone B. M., Khrapak A. G., Ivlev A. V., Söllner G., Bryant P., Sütterlin R., Konopka U., Levitation of cylindrical particles in the sheath of an rf plasma // *Physical Review E*. – 2001. – T. 63. - №. 3. – C. 036406.

76. Annaratone B.M., Ivlev A.V.; Fortov V.E.; Khrapak A.G Complex Plasmas With Rodlike Particles // IEEE Transactions on Plasma Science. – 2011. – Т. 39. - №. 11. – С. 2732-2733.
77. Ivlev A. V., Khrapak A. G., Khrapak S. A., Annaratone B. M., Morfill G. Rodlike particles in gas discharge plasmas: Theoretical model // Physical Review E. – 2003. – Т. 68. - №. 2. – С. 026403.
78. Miloch W. J., Block D. Dust grain charging in a wake of other grains // AIP Conference Proceedings. – 2008. – Т. 1061. - №. 2. – С. 142-151.
79. Harlow F.H., Dickman D.O., Harris D.E., Martin R.E. Two dimensional hydrodynamic calculations // Los Alamos Scientific. – 1959. – Laboratory Report № NLA-2301.
80. Григорьев Ю.Н., Вшивков В.А., Федорук М.П. Численное моделирование методами частиц-в-ячейках. // М.: Издательство СО РАН. – 2004.
81. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике // М.: Наука. - 1982.
82. Christiansen J.P. Vortex. Two-dimensional hydrodynamics simulation code // Culham. – 1970 – Laboratory Report № CLM-106. – HMSO.
84. Олдер Б., Фернбах С., Ротенберг М. Вычислительные методы в физике плазмы // М.: Мир. - 1974.
84. Харлоу Ф. Х. Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики // М.: Мир. - 1967.
85. Henning C., Baumgartner H., Piel A., Ludwig P., Golubnychiy V., Bonitz M., Block D. Ground state of a confined Yukawa plasma // Physical Review E. – 2006. – Т. 74. - №. 5. – С. 056403.
86. Matyash K., Schneider R., Ikkurthi R., Lewerentz L., Melzer A. P3M simulations of dusty plasmas // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2010. – Т. 52. - №. 12. – С. 124016.

87. Bonitz M., Block D., Arp O., Golubnychiy V., Baumgartner H., Ludwig P., Piel A., Filinov A., Structural Properties of Screened Coulomb Balls // *Physical Review Letters*. – 2006. – T. 96. - №. 6. – C. 075001.
88. Donk`o Z., Kalman G. J., Hartmann P. Dynamical correlations and collective excitations of Yukawa liquids // *Journal of Physics: Condensed Matter*. – 2008. – T. 20. - №. 41. – C. 413101.
89. Henning C., Fujioka K., Ludwig P., Piel A., Melzer A., Bonitz M. Existence and Vanishing of the Breathing Mode in Strongly Correlated Finite Systems // *Physical Review Letters*. – 2008. – T. 101. - №. 4. – C. 045002.
90. Ott T., Bonitz M. Is Diffusion Anomalous in Two-Dimensional Yukawa Liquids? // *Physical Review Letters*. – 2009. – T. 103. - №. 19. – C. 195001.
91. Kahlert H., Bonitz M. How Spherical Plasma Crystals Form // *Physical Review Letters*. – 2010. – T. 104. - №. 1. – C. 015001.
92. Bonitz M., Donk`o Z., Ott T., Kahlert H., Hartmann P. Nonlinear Magnetoplasmons in Strongly Coupled Yukawa // *Plasmas Physical Review Letters*. – 2010. – T. 105. - №. 5. – C. 055002.
93. Kahlert H. and Bonitz M. Collective excitations of a spherically confined Yukawa plasma // *Physical Review E*. – 2011. – T. 83. - №. 5. – C. 056401.
94. Ogawa T., Totsuji H., Totsuji C., Tsuruta K. Two-Step Melting of Spherical Yukawa and Coulomb Clusters // *Journal of the Physical Society of Japan*. – 2006. – T. 75. - №. 13. – C. 123501.
95. Apolinario S. W. S. and Peeters F. M. Melting transitions in isotropically confined three-dimensional small Coulomb clusters // *Physical Review E*. – 2007. – T. 76. - №. 3. – C. 031107.
96. Cartwright K. L., Verbocoeur J. P., Birdsall C. K. Nonlinear hybrid Boltzmann–particle-in-cell acceleration algorithm // *Physics of Plasmas*. – 2000. – T. 7. - №. 8. – C. 3252-3264.

97. Miloch W. J., Vladimirov S. V., Pecseli H. L., Trulsen J. Charging of insulating and conducting dust grains by flowing plasma and photoemission // *New Journal of Physics*. – 2009. – T. 11. - №. 4. – C. 043005.
98. Spitkovsky A. On the Structure of Relativistic Collisionless Shocks in Electron-Ion Plasmas // *The Astrophysical Journal Letters*. – 2008. – T. 637. - №. 1. – C. 39-42.
99. Birdsall C. K., Langdon A. B. *Plasma Physics via Computer Simulation* // Bristol: Adam Hilger. - 1991.
100. Patrick L., Miloch J. W., Hanno K., Bonitz M. On the wake structure in streaming complex plasmas // *New Journal of Physics*. – 2012. – T. 14. - №. 5. – C. 053016.
101. Alexandrov A. F., Bogdankevich L. S., Rukhadze A. A. *Principles of Plasma Electrodynamics* // Berlin: Springer. - 1984.
102. Lampe M., Goswami R., Sternovsky Z., Robertson S., Gavrishchaka V., Ganguli G., Joyce G., Trapped ion effect on shielding, current flow, and charging of a small object in a plasma // *Physics of Plasmas*. – 2003. – T. 10. - №. 5. – C. 1500–1513.
103. Bonitz M., Horing N., Ludwig P. *Introduction to Complex Plasmas* // Berlin: Springer. - 2010.
104. Melzer A., Buttenschon B., Miksch T., Passvogel M., Block D., Arp O., Piel A. Finite dust clusters in dusty plasmas // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. – 2010. – T. 52. - №. 12. – C. 124028.
105. Фортвов В.Е., Храпак А.Г., Храпак С.А., Молотков В.И., Петров О.Ф. Пылевая плазма // *Успехи физических наук*. – 2004. – Т. 174. - №. 5. – С. 495–544.
106. Zobnin A. V., Usachev A. D., Petrov O. F., and Fortov V. E. Ion current on a small spherical attractive probe in a weakly ionized plasma with ion-neutral collisions (kinetic approach) // *Physics of Plasmas*. – 2008. – T. 15. - №. 4. – C. 043705.

107. Корн. Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров, теоремы, формулы // М.: Наука. - 1983.
108. Smirnov B. M., Tables for Cross Sections of the Resonant Charge Exchange Process // Physica Scripta. – 2000. – Т. 61. - №. 5. – С. 595-602.
109. Maiorov S. A., Ion drift in a gas in an external electric field // Plasma Physics Reports. – 2009. – Т. 35. - С. 802.
110. McDaniel W., Mason E. The mobility and diffusion of ions in gases // Wiley. - 1973.
111. Sukhinin G. I., Salnikov M. V., Fedoseev A. V., The effect of the type of ion–neutral collisions on ion cloud formation // AIP Conference Proceedings. – 2018. – Т. 1925. – С. 020029.
112. Dharuman G., Stanton L. G., Murillo M. S. Controllable non-ideal plasmas from photoionized compressed gases // New Journal of Physics. – 2018. – Т. 20. - №. 10. – С. 103010.
113. Ishihara O. Complex plasma: dusts in plasma // Journal of Physics D: Applied Physics. - 2007. – Т. 40. - №. 3. – С. 121-147.
114. Morfill G. E., Thomas H. M., Zuzic M. in Advances in Dusty Plasma Physics // World Scientific - 1997.
115. Hutchinson I. H., Computation of the effect of neutral collisions on ion current to a floating sphere in a stationary plasma // Physics of Plasmas. - 2007. – Т. 14. - №. 1. – С. 013505.
116. Allen J. E., Probe theory - the orbital motion approach // Physica Scripta. - 1992. – Т. 45. - №. 5. – С. 497 -503.
117. Khrapak S., Morfill G. Basic Processes in Complex (Dusty) Plasmas: Charging, Interactions, and Ion Drag Force // Contributions to Plasma Physics. - 2009. – Т. 49. - №. 3. – С. 148 -168.
118. Sukhinin G. I., Fedoseev A. V., Salnikov M. V., Rostom A., Vasiliev M. M., and Petrov O. F., Plasma anisotropy around a dust particle placed in an external electric field // Physical Review E. – 2017. – Т. 95. – С. 063207.

119. Сухинин Г.И., Сальников М.В., Федосеев А.В. Вейки в пылевой плазме. сравнение численных методов // Прикладная механика и техническая физика. – 2018. – Т. 59. - № 5 (351). – С. 59-69.
120. Sukhinin G. I., Fedoseev A. V., Salnikov M. V., Effect of ion mean free path length on plasma polarization behind a dust particle in an external electric field // Contributions to Plasma Physics. – 2019. – Т. 59. - № 4-5. – С. e201800152.
121. Sukhinin G. I., Fedoseev A. V., Salnikov M. V., Polarization of a Dust Particle and Surrounded Plasma in an External Electric Field // Contrib. Plasma Phys. -2016. – Т. 56. - №. 5. – С. 397–402.
122. Sukhinin G. I., Fedoseev A. V., Salnikov M. V., Rostom A., Plasma polarization and wake formation behind a dust particle in an external electric field // IEEE Transactions on Plasma Science. – 2018. – Т. 46. - №. 4. – С. 749-754.
123. Sukhinin G. I., Fedoseev A. V. Formation of a Trapped-Ion Cloud Around a Dust Particle in Low-Density Plasma // IEEE Transactions on Plasma Science. – 2010. – Т. 38. - №. 4. – С. 2345 – 2352.
124. Sukhinin G. I., Fedoseev A. V., Antipov S. N., Petrov O. F., Fortov V. E. Effect of trapped ions and nonequilibrium electron-energy distribution function on dust-particle charging in gas discharge // Physical Review E. – 2009. – Т. 79. - №. 3. – С. 036404.
125. Lampe M., Goswami R., Sternovsky Z., Robertson S., Gavrishchaka V., Ganguli G., Joyce G. Trapped ion effect on shielding, current flow, and charging of a small object in a plasma // Physics of Plasmas. – 2003. – Т. 10. - №. 5. – С. 1500-1513.
126. Aussems D. U. B., Khrapak S. A., Doğan İ., Sanden M. C. M., Morgan T. W., An analytical force balance model for dust particles with size up to several Debye lengths // Physics of Plasmas. – 2017. – Т. 24. - №. 1. – С. 113702.
127. Ishihara O., Vladimirov S. V., Cramer. N. F., Effect of a dipole moment on the wake potential of a dust grain in a flowing plasma // Physical Review E. – 2000. – Т. 61. - №. 6. – С. 7246—7248.

128. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Электродинамика сплошных сред // М.: Наука. – 1982.
129. Golyatina R.I., Maiorov S.A., Charging of a rodlike grain in plasma flow // Physical Sciences and Technology. – 2017. – Т. 4. - №. 2. – С. 4-14.
130. Annaratone B. M., Khrapak A. G., Morfill G. E. Peculiar Properties of Rodlike Particles Levitating in the Sheath of an RF // IEEE Transactions on Plasma Science. – 2009. – Т. 37. - №. 6. – С. 1110-1115.
131. Sukhinin G. I., Fedoseev A. V., Salnikov M. V., The influence of dust particle geometry on its charge and plasma potential // Contributions to Plasma Physics. – 2019. – Т. 59. - № 4-5. – С. e201800153 .
132. Коткин Г.Л., Сербо В.С. Сборник задач по классической механике // Москва. - 1969.
133. Hertzberg M. P., Vladimirov S. V. Cramer N. F. Rotational modes of oscillation of rodlike dust grains in a plasma // Physical Review E. – 2003. – Т. 68. - №. 2. – С. 026402.
134. Sukhinin G. I., Fedoseev A. V. Influence of dust-particle concentration on gas-discharge plasma // Physical review E. – 2010. – Т. 81. - №. 1. – С. 016402.
135. Goertz I., Greiner F., Piel A. Effects of charge depletion in dusty plasmas // Physics of Plasmas. – 2011. – Т. 18. - №. 1. – С. 013703.
136. Picard R., Girshick S. L. The effect of single-particle charge limits on charge distributions in dusty plasmas // Journal of Physics D: Applied Physics. – 2016. – Т. 49. - №. 9. – С. 095201.
137. Salnikov M. V., Fedoseev A. V., Sukhinin G. I., Plasma potential distribution around an infinite one-dimensional chain of dust particles // Journal of Physics Conference Series – 2019. – Т.1393 - № 1 - С. 012022
138. Hutchinson I. H., Haakonsen C., Collisional effects on nonlinear ion drag force for small grains // Physics of Plasmas. – 2013. – Т. 20. - №. 8. – С. 083701.

139. Salnikov M. V., Fedoseev A. V., Sukhinin G. I., Plasma potential around a single-dimensional dust particle chain placed in an external electric field // Journal of Physics Conference Series – 2019. – T. 1382 - № 1 - C. 012169.
140. Yaroshenko V. V., Thomas H. M., Morfill G. E. Role Of The Ion Wake Effect In Stability Of Plasma Crystals // 13th International Congress on Plasma Physics. - 22 – 26 may (2006).
141. Bhattacharjee S., Das N. Ion wake formation with dust charge fluctuation in complex plasma // Physics of Plasmas. – 2014. – T. 21. - №. 11. – C. 119901.
142. Lapenta G., Ion Flow Induced Attractive Force in Complex Plasma Crystals // Physica Scripta. – 2001. – T. 64. - №. 6. – C. 599-604.
143. Lapenta G., Nature of the force field in plasma wake // Physical Review E. – 2002. – T. 66. - №. 2. – C. 026409.