## ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕРМОДИНАМИКА

**Лекция №18**

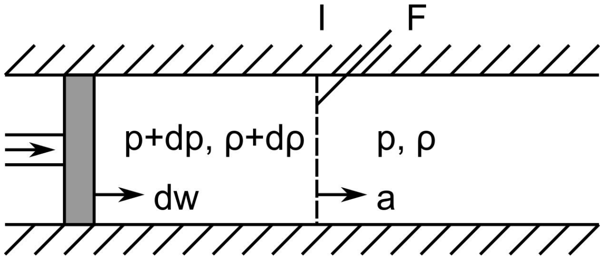
**План лекции:**

1. Термодинамика потока. Скорость звука.
2. Истечение из суживающихся сопл
3. Вопросы для дистанционного освоения лекции

### 1. ТЕРМОДИНАМИКА ПОТОКА. СКОРОСТЬ ЗВУКА.

Как известно, **скоростью звука называют скорость распространения в среде малых возмущений.** **Малыми возмущениями** называют такие возмущения среды, в которых местное изменение давления среды в точке возмущения пренебрежимо мало по сравнению с общим давлением.

Определим, как связана скорость звука с термодинамическими параметрами среды.




Рассмотрим **процесс распространения слабого возмущения в сжимаемой среде**. Пусть в трубу, в которой находится неподвижная **сжимаемая** среда (газ или жидкость, имеющие давление $p$ и плотность $\rho$) вводится поршень. В некоторый момент времени этот поршень начинает двигаться со скоростью $dw$. Поскольку рассматриваемый газ сжимаем, он не будет сразу же перемещаться по трубе со скоростью поршня. Слой газа, непосредственно прилегающего к поршню, сжимается, и давление газа в этом слое несколько повышается до величины $p+dp$, затем сжимается слой газа, прилегающего к первому слою, и т. д. Иными словами, в газе распространяется так называемая слабая волна сжатия, которую можно представить себе в виде перемещающегося вдоль газа сечения I. Скорость перемещения этого сечения вдоль газа, т. е. скорость распространения рассматриваемого нами слабого возмущения, обозначим $a$. За время $d\tau$ сечение I, отделяющее невозмущенную область от возмущенной, переместится на расстояние $ad\tau$.

Масса невозмущенного газа $dm$, которая будет захвачена этим сечением за время $d\tau$, будет равна:

$$dm = \rho F \cdot ad\tau, \tag{1}$$

где $F$ - площадь поперечного сечения трубы. Очевидно, что ровно такую же массу газа сечение возмущения должно оставить за собой за это же время (закон сохранения массы):

$$dm = \left(\rho + d\rho\right) F \cdot \left(a - dw\right) d\tau. \tag{2}$$

Поскольку возмущённый газ стремится отстаёт от убегающего сечения возмущения, его скорость определена как $a - dw$. Из уравнений (1) и (2) можно получить:

$$\begin{gathered} \cancel{\rho \cdot ad\tau} = a\cancel{\rho \cdot d\tau} + a \cdot d\rho \cancel{d\tau} - \rho \cdot dw \cancel{d\tau} \cancel{-dwd\rho d\tau} \\ \boxed{a \cdot d\rho = \rho \cdot dw} \end{gathered} \tag{3}$$

Как известно, помимо массы волна возмущения переносит и импульс. Согласно закону сохранения импульса изменение количества движения тела массой $dm$ равно импульсу, полученному этим телом под действием силы $dp \cdot F$ за время действия силы $d\tau$. Таким образом, для сечения I можно записать:

$$\begin{gathered} F \cdot dp \cdot d\tau = \underbrace{\rho F \cdot a d\tau}_{dm} \cdot dw \\ \boxed{dp = \rho a \cdot dw} \end{gathered} \quad . \tag{4}$$

Решая совместно уравнения (3) и (4) можно получить формулу для скорости распространения малых возмущений в зависимости от термодинамических параметров среды:

$$\begin{cases} a \cdot d\rho = \rho \cdot dw \\ dp = \rho a \cdot dw \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}} \tag{5}$$

Для расчета скорости звука в газах это уравнение впервые было применено Ньютоном в 1687 году. Ньютон считал, что процесс распространения звука в газе происходит **в изотермических условиях**. Из уравнения состояния идеального газа следует, что в изотермических условиях:

$$\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_T = \left(RT\frac{d\rho}{d\rho}\right)_T = RT = \frac{p}{\rho},$$

скорость звука при этом зависит только от температуры и определяется как $a = \sqrt{RT}$. Если рассчитать скорость звука в нормальных условиях для воздуха (20 ºС), то можно получить $a = \sqrt{287 \cdot 298} = 292$ м/с. Это значение скорости ниже экспериментально полученного – 343 м/с. Причина этих расхождений была установлена Лапласом, который отметил, что поскольку звуковые колебания в среде распространяются очень быстро, сколько-нибудь заметного теплообмена между зонами разрежения и сжатия звуковой волны и окружающей средой не успевает произойти, поэтому колебания среды при распространении звуковой волны можно считать адиабатными. Поэтому производную, стоящую в уравнении (5), следует брать при условии $s = \text{const}$:

$$a = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s} = \sqrt{-v^2\left(\frac{dp}{dv}\right)_s} \tag{6}$$

Уравнение (6) носит название **уравнения Лапласа**.

Заметим, что **уравнение Лапласа справедливо для любых сжимаемых однородных сред**, в том числе и для твердых тел, имеющих малую по сравнению с газами и жидкостями, но тем не менее вполне конечную сжимаемость.

Для водяного пара при температуре $100^0C$ и атмосферном давлении скорость звука равна 471 м/с, для воды при температуре $20^0C$ и том же давлении 1505 м/с, для железа при $20^0C$ 5130 м/с. **В абсолютно несжимаемой среде $\left(dv/dp\right)_s = 0$, а скорость звука равна бесконечности.**

Скорость звука вычисленная по уравнению Лапласа, иногда называют **термодинамической скоростью звука, или скоростью звука нулевой частоты**. Дело в том, что при распространении в газе или жидкости звуковых колебаний достаточно высоких частот перестает быть справедливым предположение об изоэнтропном характере звуковых колебаний. При этих частотах скорость звука уже зависит от частоты колебаний.

Однако для широкого интервала частот, представляющих практический интерес, уравнение Лапласа дает значения $a$, совпадающие с экспериментально измеренными в пределах сотых долей процента.

Объединённые уравнения первого и второго начала термодинамики для изоэнтропного процесса могут быть записаны так:

$$\begin{aligned} Tds &= du + pdv \Rightarrow du = -pdv \\ Tds &= dh - vdp \Rightarrow dh = vdp \end{aligned},$$

откуда можно получить:

$$\boxed{\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)_s = -\frac{v}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s = k}. \qquad (7)$$

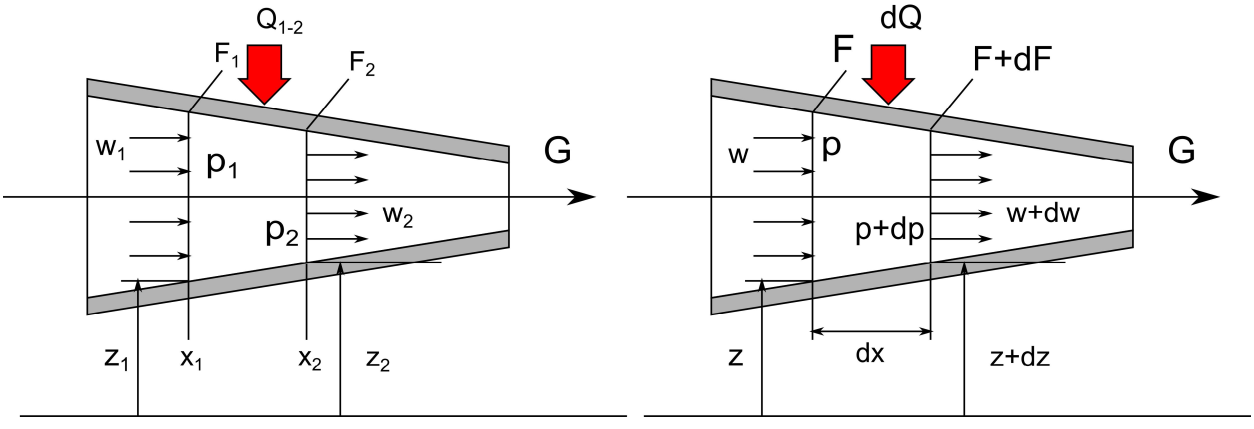
Уравнение (7) представляет собой дифференциальное уравнение изоэнтропного процесса, а величина $k$ - носит название **коэффициента изоэнтропы**. Можно легко показать, что для идеального газа показатель изоэнтропы соответствует известному нам показателю адиабаты $k = c_p / c_v$. Используя соотношения (6) и (7) можно получить:

$$\boxed{a = \sqrt{kpv}}, \qquad (8)$$

для идеального газа $pv = RT$, а скорость звука может быть определена по формуле $a = \sqrt{kRT} = \sqrt{k\Re T/\mu}$. Очевидно, что для газа скорость звука растёт с увеличением его температуры и с уменьшением его молекулярной массы. Так скорость звука при нормальных условиях (20 ºС) для водорода составляет 1305 м/с, для воздуха 343 м/с, для фреона 152 м/с.

## 2. ИСТЕЧЕНИЕ ИЗ СУЖИВАЮЩИХСЯ СОПЛ

Как было установлено нами ранее, при течении газа через канал без совершения технической работы в отсутствии внешних силовых полей законы сохранения массы и энергии (первое начало термодинамики) могут быть записаны следующим образом:




$$\boxed{\begin{aligned} &dG = 0 \\ &wdw + vdp = 0 \end{aligned}}, \qquad (9)$$

где $G = wF/v$ - секундный массовый расход газа $[кг/с]$; $F$ - площадь поперечного сечения канала $[м^2]$; $w$ среднерасходная скорость в соответствующем поперечном сечении $[м/с]$; $v$, $p$ - средний по сечению удельный объём $[м^3/кг]$ и давление $[Па]$

газа в том же поперечном сечении. Воспользуемся уравнениями (9) для определения скорости потока на выходе из сужающегося канала. Обозначим параметры на входе в канал индексом 1, а на выходе индексом 2, тогда интегрируя второе уравнение из (9) получим:

$$w_2 = \sqrt{2\int_{p_2}^{p_1} v dp + w_1^2} \qquad (10)$$

Для идеального сжимаемого газа интеграл можно взять в явном виде. При адиабатных условиях истечения давление и удельный объём связаны соотношением: $pv^k = p_1 v_1^k = p_2 v_2^k = const$, тогда скорость потока на выходе из сопла будет определяться соотношением:

$$\boxed{w_2 = \sqrt{2\frac{k}{k-1} p_1 v_1 \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right) + w_1^2}}\,. \qquad (11)$$

При истечении газа из резервуара скоростью потока на входе в канал можно пренебречь.

Расход газа через сопло может быть определён следующим образом:

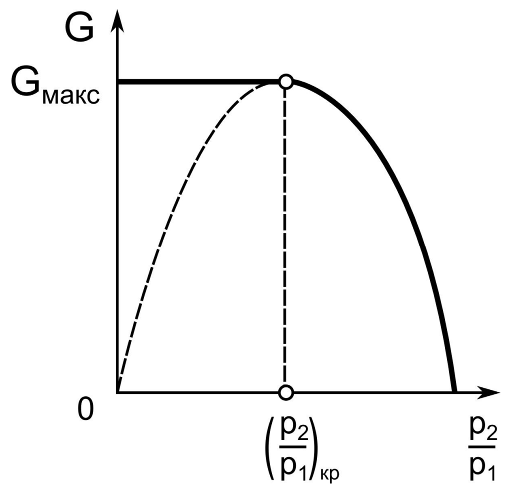
$$G = Fw/v = F \cdot \sqrt{2\frac{k}{k-1} p_1 v_1 \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right) + w_1^2} \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}} \frac{1}{v_1}\,, \qquad (12)$$

или при $w_1 = 0$:

$$\boxed{G = F \cdot \sqrt{2\frac{k}{k-1} \frac{p_1}{v_1} \left(\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k+1}{k}}\right)}} \qquad (13)$$

Как видно из уравнений (11) и (13), скорость **истечения и расход газа из сопла тем больше, чем меньше отношение давлений** $p_2/p_1$.

Анализ характера зависимости расхода $G$ от отношения давления газа на выходе из сопла к давлению на входе показывает, что эта зависимость имеет максимум при некотором значении параметра $p_2/p_1$.



Сравнение описанной зависимости с экспериментальными данными по истечению газов из сопл обнаружило любопытную картину. В интервале значений $p_2/p_1$ от единицы до значения, соответствующего максимальному расходу, результаты расчета по уравнению (13) хорошо совпадают с экспериментальными данными. Для области значений $p_2/p_1$ между значением, соответствующим максимальному расходу, и нулем был обнаружен удивительный результат - уменьшение давления среды за соплом никак не влияло на расход газа через сопло; расход $G$ оставался постоянным для всего этого интервала изменений $p_2/p_1$ (вплоть до $p_2 = 0$).

Для того чтобы объяснить это расхождение теории с экспериментом, в 1839 году Сен-Венаном была выдвинута гипотеза о том, что при расширении газа в суживающемся сопле невозможно получить давление газа ниже некоторого критического давления истечения $p_{кр}$, соответствующего максимальному расходу газа через сопло.

Выясним, что же происходит в сопле при снижении давления среды до $p_{кр}$. Исследуем уравнение (13) на максимум, т.е. найдём решение уравнения $dG/dp_2 = 0$. В итоге получим:

$$\boxed{\begin{aligned} p_{кр} &= p_1\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \\ w_{макс} &= \sqrt{2\frac{k}{k+1}p_1 v_1} \\ G_{макс} &= F\sqrt{2\frac{k}{k+1}\frac{p_1}{v_1}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{2}{k-1}}} \end{aligned}} \qquad (14)$$

Запишем уравнение для максимальной скорости истечения через давление и удельный объём при критических параметрах истечения. Для этого воспользуемся свойством адиабаты: $p_1 v_1^k = p_{кр} v_{кр}^k$. Тогда максимальная скорость истечения равна:

$$\boxed{w_{макс} = \sqrt{k \cdot p_{кр} v_{кр}}}. \qquad (15)$$

Как видно из сравнения полученного выражения (15) с уравнением (8), величина $w_{макс}$ равна местной скорости звука в выходном сечении сопла.

Именно этим объясняются отмеченные выше расхождения с экспериментом. В самом деле, как указано при выводе уравнения Лапласа для скорости звука, любое слабое возмущение, в том числе и изменение давления, распространяется в сжимаемой среде со звуковой скоростью. Если в некоторый момент времени давление газа за соплом $p_2$ несколько уменьшить, то волна разрежения распространится вдоль потока в направлении, противоположном направлению истечения потока; вдоль сопла установится новое распределение давлений при том же, что и раньше, значении давления газа перед соплом и скорость истечения возрастет. Следует отметить, что волна разрежения будет распространяться вдоль сопла с относительной скоростью $a - w$.

Рассмотрим теперь случай, когда давление среды, в которую истекает газ, $p_2$ равно $p_{кр}$ и скорость истечения соответственно равна местной скорости звука; при дальнейшем снижении давления среды ниже $p_{кр}$ волна разрежения не сможет распространиться вдоль сопла, так как ее относительная скорость $a - w$ будет равна нулю. Никакого перераспределения давления вдоль сопла не произойдет, и несмотря на то, что давление среды за соплом снизилось, скорость истечения останется прежней, равной местной скорости звука на выходе из сопла. По образному выражению Рейнольдса, в этом случае поток в сопле «не знает» о том, что давление за соплом снизилось. Поэтому при $0 < p_2/p_1 < p_{кр}/p_1$ расход газа через сопло сохраняется постоянным и равным $G_{макс}$.

При рассмотрении течения газа через сопло, естественно, возникает вопрос — из каких соображений и как выбирается форма сопла, т.е. площади входного и выходного сечений, длина, профиль? Давления на входе в сопло $p_1$ и в среде за соплом $p_2$ обычно бывают заданы заранее. Если расход газа через сопло задается, то площади входного и выходного сечений подсчитывают с помощью соотношения:

$$G = Fw/v \tag{16}$$

Скорость газа на выходе из сопла подсчитывают по уравнению (11). Из изложенного выше следует, что длина сопла никак не фигурирует в термодинамических соотношениях, определяющих закономерности обратимого адиабатного течения через сопло. Отсюда следует, что при обратимом адиабатном течении безразлично, какова будет длина сопла, т.е. на каком расстоянии друг от друга будут расположены строго рассчитанные входное и выходное сечения сопла, соединенные между собой плавным каналом. Однако сопло, предназначенное для реального процесса истечения, имеет длину, обусловленную входным и выходным сечениями и углом конусности; последний выбирается из условий минимальных потерь на трение.

## 3. ВОПРОСЫ ДЛЯ ДИСТАНЦИОННОГО ОСВОЕНИЯ ЛЕКЦИИ

| |
|---|
| 1. Запишите дифференциальное уравнение, определяющее скорость звука. |
| Ответ: |
| 2. Запишите уравнение, определяющее скорость звука в идеальном газе. |
| Ответ: |
| 3. Изобразите график изменения расхода сжимаемого газа, протекающего через суживающееся сопло при понижении давления на выходе из сопла. |
| Ответ: |
| 4. Дайте определение критического давления. |
| Ответ: |
| Фамилия Имя Отчество: |
| |
| Группа: |
| |
| Подпись: |
| |
| Дата: |
| |