

УДК 532.526

© 2006 г. ВОЛЧКОВ Э.П., МАКАРОВ М.С.

ГАЗОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕМПЕРАТУРНАЯ СТРАТИФИКАЦИЯ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ*

Рассматриваются численное и аналитическое исследование задачи температурной стратификации газа в сверхзвуковом потоке. Получены решения для ламинарного и турбулентного режимов течения. Показано, что важным фактором, влияющим на величину температурной стратификации, является скорость газа в дозвуковой части течения. Получены профили распределения температуры торможения по толщине пограничного слоя. Показано, что и минимум, и максимум температуры торможения лежат в пределах сверхзвуковой части течения.

Введение. В работе [1] предложен оригинальный метод гидродинамического энергоразделения. Если разделить поток газа на сверхзвуковую и дозвуковую части (рис. 1), то при $Pt < 1$ температура поверхности со стороны сверхзвукового потока будет ниже, чем температура поверхности со стороны дозвукового потока. Можно сказать, что основным фактором, влияющим на температуру стенки со стороны сверхзвукового течения, является коэффициент восстановления температуры r_T . В предельном случае при $r_T \rightarrow 0$ температура стенки стремится к термодинамической температуре сверхзвукового набегающего потока T_{01} . В дозвуковом потоке основной фактор, влияющий на температуру стенки, – скорость u_{02} . Разделение потока на сверхзвуковую и дозвуковую части можно реализовать различными способами (торможение на прямом скачке уплотнения – лишь один из вариантов) и в предельном случае $u_{02} \rightarrow 0$. При этом температура стенки со стороны дозвукового потока будет стремиться к температуре полностью адиабатически заторможенного газа T_{00} . Образующийся перепад температур в случае теплопроводной стенки приводит к возникновению теплового потока от дозвуковой части течения к сверхзвуковой.

В работах А.И. Леонтьева [2]–[4] показано, что эта задача может быть решена в рамках теории пограничного слоя с использованием простых интегральных соотношений. В предположении, что скорость газа за прямым скачком уплотнения равна нулю, а температура равна T_{00} , были получены простые аналитические решения для случая обтекания пластины идеальным газом со свойствами $\rho\mu = \text{const}$, $c_p = \text{const}$, $Pt = \text{const}$. В этих работах показано, что основными факторами, влияющими на величину температурной стратификации, являются коэффициент восстановления температуры r_T на стенке, показатель адиабаты газа k и скорость газа в сверхзвуковой части течения. Тепловой поток, при этом уменьшается с уменьшением показателя адиабаты и увеличением коэффициента восстановления, причем, если $r_T = 1$, то тепловой поток отсутствует. Максимальный эффект температурной стратификации может быть достигнут, если в качестве газа основного потока использовать смеси с низким числом Прандтля, для которых коэффициент восстановления очень мал ($r_T \approx 0,45$, $r_T \approx 0,42$ для ге-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 05-02-16478, и президента РФ, грант НШ-816.2003.8.

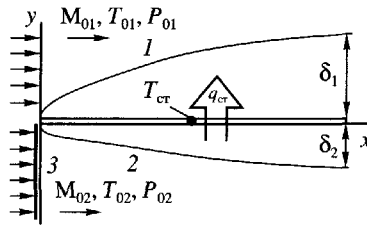


Рис. 1. Схема течения: 1 – дозвуковая часть потока, 2 – сверхзвуковая часть потока, 3 – прямой скачок уплотнения

лий-ксеноновой (5% гелия) и водород-ксеноновой (1,5% водорода) смесей соответственно).

В данной работе получены новые аналитические и численные решения задачи температурной стратификации в той же постановке (см. рис. 1). Показано, что скорость дозвукового потока имеет значительное влияние на величину температурной стратификации, особенно при небольших числах Маха набегающего потока. Показано, что максимум теплового потока при числах Маха близких к двум, на который указано в работе [4], имеет место, только в случае, если считать параметры торможения T_{00} , P_{00} постоянными при любом числе Маха набегающего потока. Если принять постоянными термодинамические параметры набегающего потока T_{01} , P_{01} , то тепловой поток с ростом числа Маха M_{01} будет постоянно расти. Полученные аналитические зависимости хорошо согласуются с данными численного эксперимента.

Аналитическое исследование

Ламинарное обтекание пластины. Оценим аналитически влияние скорости газа за прямым скачком уплотнения на тепловой поток и температуру стенки. Следуя рассуждениям [4], рассмотрим случай течения газа с $Pr < 1$. Для идеального газа со свойствами $\rho\mu = \text{const}$, $c_p = \text{const}$, $Pr = \text{const}$, как показано в [5], расчеты теплообмена для сжимаемого течения можно вести по формулам для несжимаемого, если заменить температуру основного потока на температуру восстановления теплоизолированной стенки $T_{ст}^*$ (так называемую определяющую температуру). Пренебрегая продольными перетечками тепла, плотность теплового потока от дозвуковой части к сверхзвуковой можно записать в виде:

$$q_{ст} = \alpha_1(T_{ст} - T_{ст1}^*) = \alpha_2(T_{ст2}^* - T_{ст}), \quad (1)$$

где α – коэффициент теплоотдачи; индексы 1 и 2 означают, что параметры взяты со стороны сверхзвукового и дозвукового потока соответственно.

Откуда для температуры стенки $T_{ст}$ следует:

$$T_{ст} = [T_{ст2}^* + (\alpha_1/\alpha_2)T_{ст1}^*]/[1 + (\alpha_1/\alpha_2)]. \quad (2)$$

Используя определение теплового числа Стантона, можно получить:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{St_{T1}}{St_{T2}} = \frac{\rho_{01}u_{01}c_{p01}}{\rho_{02}u_{02}c_{p02}}. \quad (3)$$

С учетом того, что число Стантона для ламинарного пограничного слоя:

$$St_T = 0,332/\sqrt{Re_x Pr}^{2/3}, \quad (4)$$

из соотношений для прямого скачка и свойств идеального газа ($\rho_{01}u_{01} = \rho_{02}u_{02}$, $c_{p01} = c_{p02} = \text{const}$, $Pr_{01} = Pr_{02} = \text{const}$, $\rho\mu = \text{const}$) получим:

$$\alpha_1/\alpha_2 = \sqrt{\mu_{01}/\mu_{02}} = \sqrt{T_{01}/T_{02}}. \quad (5)$$

Для температуры теплоизолированной стенки и температуры набегающего потока можно записать:

$$T_{ст}^* = T_0(1 + r_T(k-1)/2M_0^2) = T_{00}(1 - (1 - r_T)I_0^2); \quad (6)$$

$$T_0 = T_{00}/(1 + (k-1)/2M_0^2) = T_{00}(1 - I_0^2), \quad (7)$$

где $I_0 = u_0/u_{\max}$ – приведенная скорость потока; $u_{\max} = \sqrt{2h_{00}} = \sqrt{2c_p T_{00}}$ – максимально возможная скорость потока.

Приведенная скорость связана с числом Маха следующим образом:

$$I_0^2 = \frac{k-1}{2} M_0^2 / \left(1 + \frac{k-1}{2} M_0^2\right) \quad \text{или} \quad M_0^2 = \frac{2}{k-1} I_0^2 / (1 - I_0^2). \quad (8)$$

С учетом (3), (5)–(7) для температуры стенки получим:

$$T_{ст} = T_{00} \left(1 - \frac{(1 - r_T)(I_{02}^2 + \sqrt{(1 - I_{01}^2)/(1 - I_{02}^2)} I_{01}^2)}{1 + \sqrt{(1 - I_{01}^2)/(1 - I_{02}^2)}} \right), \quad (9)$$

где из соотношений для прямого скачка уплотнения: $I_{02} = \left(\frac{k-1}{k+1}\right) \frac{1}{I_{01}}$.

Для теплового потока через стенку, используя выражения (1), (2), (4)–(7) и определение теплового числа Стантона, получим:

$$q_{ст} = \frac{0,332 \rho_{01} u_{01} c_p}{\text{Re}_x^{0,5} \text{Pr}^{2/3}} \frac{T_{00}(1 - r_T)(I_{01}^2 - I_{02}^2)}{1 + \sqrt{(1 - I_{01}^2)/(1 - I_{02}^2)}}. \quad (10)$$

Если считать постоянными параметры торможения, то выражения для теплового потока и температуры стенки удобно представить в безразмерном виде:

$$\bar{q}_{ст} = \frac{q_{ст} x}{0,332 \text{Re}_{00}^{0,5} T_{00} \lambda_{00} \text{Pr}^{1/3}} = (1 - I_{01}^2)^{k/2(k-1)} I_{01}^{0,5} \frac{(1 - r_T)(I_{01}^2 - I_{02}^2)}{1 + \sqrt{(1 - I_{01}^2)/(1 - I_{02}^2)}}; \quad (11)$$

$$\bar{T}_{ст} = \frac{T_{ст}}{T_{00}} = 1 - \frac{(1 - r_T)(I_{02}^2 + \sqrt{(1 - I_{01}^2)/(1 - I_{02}^2)} I_{01}^2)}{1 + \sqrt{(1 - I_{01}^2)/(1 - I_{02}^2)}}, \quad (12)$$

где $\text{Re}_{00} = \rho_{00} u_{\max} x / \mu_{00}$ – число Рейнольдса, определяемое по параметрам торможения; λ_{00} – теплопроводность газа при T_{00} . Следует отметить, что авторы работы [4] в предельном случае $T_{ст2}^* = T_{02} = T_{00}$ для безразмерного теплового потока на стенке получили следующую зависимость:

$$\bar{q}_{ст} = \frac{q_{ст} x}{0,332 \text{Re}_{00}^{0,5} T_{00} \lambda_{00} \text{Pr}^{1/3}} = \frac{(1 - I_{01}^2)^{k/2(k-1)} I_{01}^{2,5} (1 - r_T)}{1 + (1 - I_{01}^2)^{0,5}}. \quad (13)$$

На рис. 2, а, приведено сравнение расчетов по формулам (11) и (13). Как видно из графика, расчет по формуле, полученной в предельном случае нулевой скорости

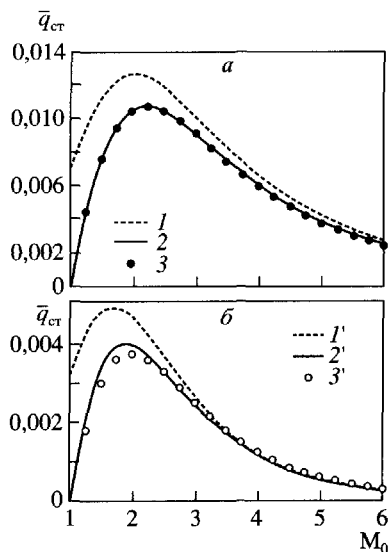


Рис. 2. Безразмерный тепловой поток на плоской пластине при температурной стратификации, $Pr = 0,7$, $k = 1,4$: *a* – ламинарный режим: 1 – расчет по (13); 2 – расчет по (11); 3 – численный расчет; *б* – турбулентный: 1' – расчет по (24); 2' – расчет по (22); 3' – численный расчет

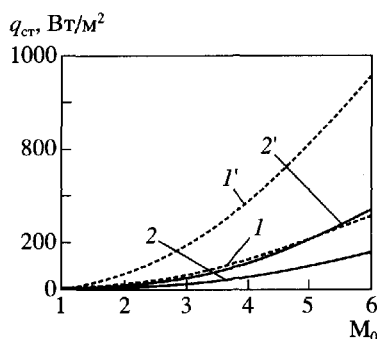


Рис. 3. Размерный тепловой поток при температурной стратификации в сверхзвуковом потоке, $x = 0,02$ м; ламинарный режим: $k = 1,4$; 1 – $Pr = 0,1$; 2 – $Pr = 0,7$; турбулентный: $k = 1,4$; 1' – $Pr = 0,1$; 2' – $Pr = 0,7$; 1, 1' – расчет по (10); 2, 2' – расчет по (21)

дозвукового потока [4], приводит к достаточно большой погрешности в определении величины теплового потока, особенно при низких числах Маха набегающего потока. При $M_{01} = 1$ из соотношений для прямого скачка следует, что $M_{02} = 1$, при этом течение по обе стороны пластины должно быть симметричным, а значит тепловой поток должен быть нулевым, расчет по формуле (11), полученной с учетом скорости дозвукового потока, удовлетворяет этому условию.

На рис. 3 даны результаты расчетов размерного теплового потока по формуле (10) при постоянной координате $x = 0,02$ м и различных числах Прандтля. Для расчета параметры набегающего потока принимались постоянными ($T_{01} = 300$ К, $P_{01} = 10^5$ Па). В этом случае размерный тепловой поток с ростом скорости набегающего потока монотонно растет. График для безразмерного теплового потока, построенный по (11) и (12), имеет максимум. Это связано с тем, что обезразмеривающие величины T_{00} и Re_{00} зависят от параметров задачи (температуры и числа Маха набегающего потока). В

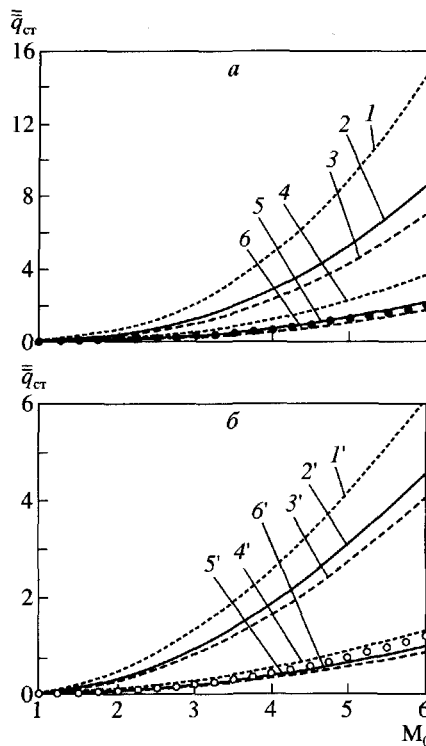


Рис. 4. Безразмерный тепловой поток на плоской пластине при температурной стратификации: *а* – ламинарный режим; кривые – расчет по (14); точки – численный расчет, $Pr = 0,7$; $k = 1,4$; 1, 2, 3 – $Pr = 0,1$; $k = 1,67$; 1,4; 1,33 соответственно; 4, 5, 6 – $Pr = 0,7$; $k = 1,67$; 1,4; 1,33 соответственно; *б* – турбулентный режим; кривые – расчет по (25); точки – численный расчет, $Pr = 0,7$; $k = 1,4$; 1', 2', 3' – $Pr = 0,1$; $k = 1,67$; 1,4; 1,33 соответственно; 4', 5', 6' – $Pr = 0,7$; $k = 1,67$; 1,4; 1,33 соответственно

этом случае более удобно, по мнению авторов, использовать в качестве обезразмеривающих величин только постоянные параметры набегающего потока, например, в виде:

$$\bar{q}_{ct} = \frac{q_{ct} x^{0,5} \mu_{01}^{0,5} R^{0,25}}{0,332 T_{01}^{0,75} \lambda_{01} k^{0,25} Pr^{1/3} P_{01}^{0,5}} = \left(\frac{2}{k-1} \right)^{0,25} \frac{I_{01}^{0,5}}{(1 - I_{01}^2)^{1,25}} \frac{(I_{01}^2 - I_{02}^2)(1 - r_T)}{1 + \sqrt{(1 - I_{01}^2)/(1 - I_{02}^2)}}; \quad (14)$$

$$\bar{T}_{ct} = \frac{T_{ct}}{T_{01}} = \frac{1}{1 - I_{01}^2} \frac{T_{ct}}{T_{00}}, \quad (15)$$

где R – универсальная газовая постоянная; P_{01} – давление газа в набегающем потоке; μ_{01} , λ_{01} , k – вязкость, теплопроводность и показатель адиабаты газа при температуре набегающего потока соответственно.

Результаты расчета по формуле (14) для ламинарного режима течения при различных значениях числа Прандтля и показателя адиабаты приведены на рис. 4,а. Как видно из рисунка, безразмерный тепловой поток монотонно растет с увеличением числа Маха.

Турбулентное обтекание пластины. Аналогично можно получить подобные зависимости для случая обтекания плоской пластины с обеих сторон турбулентным потоком. Для этого (см. [4]) достаточно учесть поправку на сжимаемость газа при определении теплового числа Стантона следующим образом:

$$\Psi_c = \left(\frac{St_T}{St_{T0}} \right)_{Re_x = \text{const}} = \left(\frac{\arctg(M_0 \sqrt{r_T(k-1)/2})}{M_0 \sqrt{r_T(k-1)/2}} \right)^{1.6} \quad (16)$$

или ее аппроксимационную формулу:

$$\Psi_c = (1 - I_0^2)^{0.5} / (1 - (1 - r_T)I_0^2)^{0.5}. \quad (17)$$

Таким образом, для числа Стантона запишем:

$$St_T = \frac{q_{ст}}{\rho_0 u_0 c_p (T_{ст} - T_{ст}^*)} = \Psi_c \frac{0,0296}{Re_x^{0.2} Pr^{0.6}}. \quad (18)$$

Аналогично (5), с учетом того, что $\Psi_{c2} = 1$ со стороны дозвукового потока, получим:

$$\alpha_1/\alpha_2 = \Psi_{c1} (T_{01}/T_{02})^{0.2}. \quad (19)$$

Из выражения (4), (6), (7) и (19) получаем зависимость для температуры стенки в виде:

$$T_{ст} = T_{00} \left(1 - \frac{(1 - r_T)(I_{02}^2 + \Psi_{c1}[(1 - I_{01}^2)/(1 - I_{02}^2)]^{0.2} I_{01}^2)}{1 + \Psi_{c1}[(1 - I_{01}^2)/(1 - I_{02}^2)]^{0.2}} \right). \quad (20)$$

Для теплового потока через стенку в турбулентном режиме течения, используя (1), (2), (6), (7), (18) и (19), запишем следующее выражение:

$$q_{ст} = \frac{0,0296 \cdot \rho_{01} u_{01} c_p}{Re_x^{0.2} Pr^{0.6}} \frac{T_{00}(1 - r_T)(I_{01}^2 - I_{02}^2)}{(1/\Psi_{c1}) + [(1 - I_{01}^2)/(1 - I_{02}^2)]^{0.2}}. \quad (21)$$

Подобно тому, как было сделано для ламинарного режима течения, при постоянных параметрах торможения выражения (20) и (21) удобно представить в безразмерном виде следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{q}_{ст} &= \frac{q_{ст} x}{0,0296 Re_{00}^{0.8} T_{00} \lambda_{00} Pr^{0.4}} = \\ &= (1 - I_{01}^2)^{(k+3)/5(k-1)} \frac{I_{01}^{0.8} (I_{01}^2 - I_{02}^2)(1 - r_T)}{(1/\Psi_{c1}) + [(1 - I_{01}^2)/(1 - I_{02}^2)]^{0.2}}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\bar{T}_{ст} = \frac{T_{ст}}{T_{00}} = 1 - \frac{(1 - r_T)(I_{02}^2 + \Psi_{c1}[(1 - I_{01}^2)/(1 - I_{02}^2)]^{0.2} I_{01}^2)}{1 + \Psi_{c1}[(1 - I_{01}^2)/(1 - I_{02}^2)]^{0.2}}. \quad (23)$$

На рис. 2,б, дано сравнение расчетов по формуле (22) с зависимостью работы [4]:

$$\bar{q}_{ст} = \frac{q_{ст} x}{0,028 Re_{00}^{0.8} T_{00} \lambda_{00} Pr^{1/4}} = \frac{(1 - I_{01}^2)^{7k/10(k-1)} I_{01}^{2.8} (1 - r_T)}{(1 - (1 - r_T)I_{01}^2)^{0.5} + (1 - I_{01}^2)^{0.7}}. \quad (24)$$

Из рис. 2,б видно, что расчет по формуле, полученной в предельном случае нулевой скорости дозвукового потока [4], и в ламинарном, и в турбулентном режимах течения приводит к погрешности в определении величины теплового потока при числах Маха, близких к единице.

Как и в случае ламинарного режима течения, в турбулентном режиме при заданных параметрах набегающего потока удобно использовать независящий от этих параметров безразмерный комплекс в виде:

$$q_{\text{ст}} = \frac{q_{\text{ст}} x^{0,2} \mu_{01}^{0,8} R^{0,4}}{0,0296 T_{01}^{0,6} \lambda_{01} k^{0,4} \text{Pr}^{0,4} P_{01}^{0,8}} = \left(\frac{2}{k-1} \right)^{0,4} \frac{I_{01}^{0,8}}{(1 - I_{01}^2)^{1,4}} \frac{(I_{01}^2 - I_{02}^2)(1 - r_T)}{(1/\Psi_{c1}) + [(1 - I_{01}^2)/(1 - I_{02}^2)]^{0,2}}. \quad (25)$$

Результаты расчета по формуле (25) для различных чисел Прандтля и показателя адиабаты приведены на рис. 4,б. Следует отметить, что и в ламинарном, и в турбулентном случае (рис. 4,а, и 4,б, соответственно) тепловой поток растет с увеличением показателя адиабаты газа и снижением числа Прандтля.

На рис. 3 проказаны результаты расчета теплового потока по (10) и (21) в размерном виде для ламинарного и турбулентного режимов течения, так как в безразмерном виде их сравнение невозможно. Видно, что тепловой поток от дозвуковой части течения к сверхзвуковой в турбулентном случае примерно в два раза больше, чем в ламинарном, независимо от скорости (числа Маха) набегающего потока. Расчеты проведены при тех же параметрах набегающего потока и той же координате $x = 0,02$ м.

Численное исследование

Основные уравнения. В качестве исходных используются уравнения стационарного двумерного сжимаемого пограничного слоя на непроницаемой плоской пластине. Эффектами, связанными с диссоциацией газа, пренебрегаем, что допустимо для чисел $M < 6$. Давление на внешней границе пограничного слоя принимается постоянным. Решаемая система состоит из трех дифференциальных уравнений в частных производных:

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0; \quad (26)$$

уравнение движения

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left((\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad (27)$$

уравнение энергии

$$\rho u c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left((\lambda + \lambda_t) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + (\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (28)$$

и уравнения состояния идеального газа

$$P = \rho R T. \quad (29)$$

Граничные условия (см. рис. 1):

на внешней границе пограничного слоя в сверхзвуковом потоке $y = \delta_1$:

$$u(\delta_1) = u_{01}, \quad T(\delta_1) = T_{01}, \quad P(\delta_1) = P_{01};$$

$$\text{на стенке } y = 0: u(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad q(0) = - \left((\lambda_1 + \lambda_{t1}) \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{\text{ст}} = - \left((\lambda_2 + \lambda_{t2}) \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{\text{ст}}$$

и на внешней границе пограничного слоя в дозвуковом потоке $y = -\delta_2$:

$$u(-\delta_2) = u_{02}, \quad T(-\delta_2) = T_{02}, \quad P(-\delta_2) = P_{02}.$$

В расчете коэффициента восстановления на плоской теплоизолированной поверхности скорости, температуры и давления принимались, соответственно, равными: $u_{02} = u_{01}$; $T_{02} = T_{01}$; $P_{02} = P_{01}$. Для задачи температурной стратификации связь параметров потока по обе стороны скачка уплотнения определялась из соотношений [6]:

$$u_{02} = u_{01} \frac{2 + (k-1)M_{01}^2}{(k+1)M_{01}^2}; \quad T_{02} = T_{01} \left(\frac{2(k-1)(M_{01}^2 - 1)(1+k)M_{01}^2}{(1+k)^2 M_{01}^2} + 1 \right);$$

$$P_{02} = P_{01} \frac{2kM_{01}^2 - (k-1)}{k+1}.$$

Турбулентные характеристики μ_t и $\lambda_t = \mu_t c_p / Pr_t$ рассчитывались по алгебраической модели турбулентности Прандтля [7]:

$$\mu_t = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|, \quad (30)$$

где l_m – длина пути смешения, принималась равной $l_m^{\text{внеш}} = C_1 \delta$ для внешней части слоя и $l_m^{\text{внутр}} = C_k y (1 - \exp(-y^+/A^+))$ – для ламинарного подслоя. Константы модели: $C_T = 0,089$, $C_k = 0,41$ – постоянная Кармана, $A^+ = 26$. Турбулентное число Прандтля определялось по формуле, предложенной в [8]:

$$Pr_t = \left(\frac{1}{2Pr_{t0}} + cPe_t \sqrt{\frac{1}{Pr_{t0}}} - (cPe_t)^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{cPe_t \sqrt{Pr_{t0}}}\right) \right] \right)^{-1} \quad (31)$$

с параметрами: $Pr_{t0} = 0,82$, $c = 0,3$, $Pe_t = Pr_t \mu / \mu$.

Метод решения. Для получения численного решения данной задачи использовался известный метод интегрирования уравнений пограничного слоя с x - ω^2 преобразованием координат (см. [9], [10]).

Дискретизация уравнений проводилась с использованием метода неопределенных коэффициентов по неявной схеме со вторым порядком точности в направлении поперек пограничного слоя и первым порядком в продольном направлении. Полученная система линейных уравнений решалась методом прогонки.

Нелинейность дифференциальных уравнений устранялась методом простых итераций на каждом шаге интегрирования. Точность определения переменных составляла $10^{-6}\%$. Для увеличения точности расчетов вблизи стенки использовалось сжатие сетки по оси y и по оси ω с коэффициентом $y_{j+1}/y_j = 1,05$ и $\omega_{j+1}/\omega_j = 1,05$ соответственно. Количество узлов расчетной сетки по оси $y(\omega)$ менялось от 50 до 200 с целью получения наименьшей погрешности вычислений, однако большинство расчетов выполнено на 100-узловой сетке. Шаг по оси x изменялся в зависимости от текущей толщины динамического пограничного слоя со сверхзвуковой стороны потока по закону $\Delta x = \delta_1/100$.

Результаты численного исследования

Анализ коэффициента восстановления температуры. Основным фактором, влияющими на величину температурной стратификации, является коэффициент восстановления температуры. В связи с этим необходимо было исследовать справедливость предложенных ранее закономерностей для r_T в условиях данной задачи.

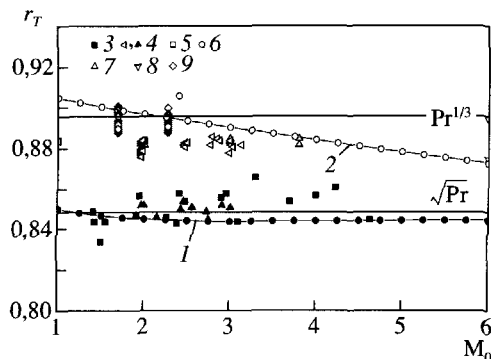


Рис. 5. Коэффициент восстановления температуры, $Pr = 0,72$; $k = 1,4$: 1, 2 – численный расчет; 3 – [12]; 4 – [13]; 5–8 – [17]; 9 – [18]

Известно [11]–[13], что при ламинарном режиме течения газа со свойствами $\rho\mu = \text{const}$, $c_p = \text{const}$, $Pr = \text{const}$ для коэффициента восстановления температуры выполняется соотношение:

$$r_T = \sqrt{Pr}. \quad (32)$$

Для турбулентного режима нет однозначного мнения о факторах, влияющих на r_T , тем не менее, имеющиеся эксперименты для воздуха и гелия показывают, что с достаточной для расчета точностью можно считать:

$$r_T = Pr^{1/3}. \quad (33)$$

Однако следует отметить, что большинство исследований проводилось в аэродинамических трубах [12], [13], а для таких экспериментов характерны небольшие перепады температур по толщине пограничного слоя (в пределах 300 К) даже при больших сверхзвуковых скоростях набегающего потока. Другими словами, свойства газа в данном случае можно считать не зависящими от температуры. В реальных полетных условиях, где перепад температур может достигать нескольких тысяч градусов, эти соотношения могут нарушаться [14], [15].

Для определения справедливости соотношений был проведен ряд численных экспериментов по адиабатическому обтеканию плоской пластины сверхзвуковым потоком идеального газа ($\rho\mu = \text{const}$, $c_p = \text{const}$, $Pr = \text{const}$) со свойствами, близкими к свойствам воздуха в нормальных условиях ($c_p = 1007 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{град)}$, $Pr = 0,72$). Для всего диапазона скоростей ($M_{01} = 1\text{--}6$) данные фиксировались при одних и тех же значениях продольной координаты $x = 0,01 \text{ м}$ и $x = 0,02 \text{ м}$ для ламинарного и турбулентного режимов течения соответственно.

На рис. 5 приведены результаты расчета и их сравнение с экспериментальными данными, приведенными в [12], [13], [17], [18], и известными аналитическими зависимостями. В случае ламинарного течения численный расчет лежит в пределах разброса экспериментальных данных и отличается от зависимости (32) не более, чем на 1%. Для данного случая r_T зависит только от Pr и не зависит от числа Re , как и предсказано в литературе.

При расчете турбулентного режима течения возникает необходимость каким-либо образом учитывать турбулентный перенос энергии, что выражается в использовании модели турбулентного числа Прандтля. Многие литературные источники утверждают, что Pr_t практически можно считать постоянным и равным 0,9, однако, численные расчеты с использованием описанной выше аналитической модели турбулентности Прандтля (30) показали, что в этом случае коэффициент восстановления температуры с ростом числа Рейнольдса постоянно увеличивается, что не согласуется с экспери-

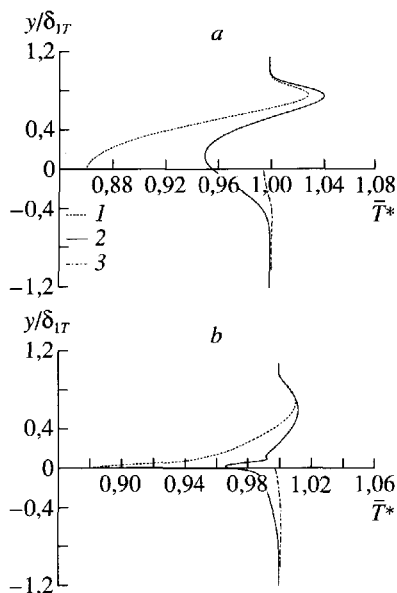


Рис. 6. Сравнение профилей относительной температуры торможения при температурной стратификации с адиабатическим течением, $\bar{T}^* = [T + (u^2/2c_p)]/T_{00}$: а – ламинарный режим, $Pr = 0,7$; $k = 1,4$; б – турбулентный режим, $Pr = 0,7$; $k = 1,4$: 1 – адиабатическое течение $M_{01} = 5,00$; 2 – температурная статификация, $M_{01} = 5,00$, $M_{02} = 0,41$; 3 – адиабатическое течение, $M_{02} = 0,41$

ментальными исследованиями. В данной работе для моделирования турбулентного числа Прандтля используется зависимость (31), предложенная в [8] и модифицированная в [16]. Как видно из рис. 5, полученное численное решение лежит в пределах разброса экспериментальных данных и отличается от расчетов по (30) не более, чем на 3%. Как и в экспериментах отмечается небольшое падение коэффициента восстановления температуры с ростом числа Рейнольдса.

Температурная стратификация в сверхзвуковом потоке газа. Оценка справедливости полученных в данной работе закономерностей для теплового потока и температуры стенки проведена с помощью численного расчета задачи температурной стратификации в сверхзвуковом потоке идеального газа ($\rho = \text{const}$, $c_p = \text{const}$, $Pr = \text{const}$) со свойствами, близкими к воздуху ($c_p = 1007$ Дж/(кг · град), $Pr = 0,7$).

На рис. 2 дано сравнение полученных результатов численного эксперимента с аналитическими расчетами по формулам (11), (13) и (22), (24) для ламинарного и турбулентного режимов течения соответственно. Как видно из графиков, формулы, полученные в данной работе, хорошо согласуются с численными данными. Из графиков видно, что и формулы (11), (13) и (22), (24) дают экстремальное значение безразмерного теплового потока при числе Маха в сверхзвуковой части $M_{01} \approx 2,0$. Однако, при постоянных параметрах набегающего потока T_{01} , P_{01} , как показал численный расчет и расчет по приведенным формулам, в размерном виде тепловой поток с ростом M_{01} постоянно растет. На рис. 4 приводятся результаты численного расчета в сравнении с формулами (15), (25). В этом случае так же получено хорошее соответствие. Отмеченный рост теплового потока с ростом показателя адиабаты и снижением молекулярного числа Прандтля приводит к выводу об эффективности использования смесей с низким числом Прандтля (He-Xe, H_2 -Xe).

Одно из достоинств численных методов – возможность получать поля значений важных переменных и рассмотреть протекающие в потоке процессы изнутри. Приведем полученные для случая идеального газа ($\rho = \text{const}$, $c_p = \text{const}$, $Pr = \text{const}$) со свойствами, близкими к свойствам воздуха, профили температуры торможения рис. 6, 7. Рас-

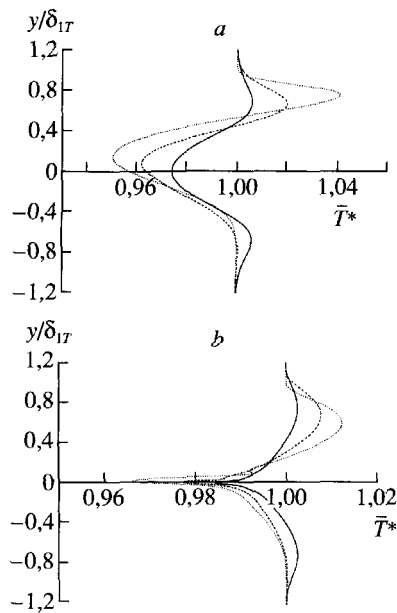


Рис. 7. Профиль относительной температуры торможения по толщине пограничного слоя, $\bar{T}^* = [T + (u^2/2c_p)]/T_{00}$: а – ламинарный режим, $Pr = 0,7$, $k = 1,4$; б – турбулентный режим, $Pr = 0,7$, $k = 1,4$: 1 – $M_{01} = 1,00$; $M_{02} = 1,00$; 2 – $M_{01} = 2,00$; $M_{02} = 0,57$; 3 – $M_{01} = 5,00$; $M_{02} = 0,41$

чет дан в относительных величинах. Все графики профилей построены при одинаковой координате x , в случае ламинарного течения, равной 0,01 м, в случае турбулентного – 0,02 м. Температура набегающего потока принималась постоянной и равной 298 К. На рис. 6,а и 6,б, представлены профили относительной температуры торможения в адиабатическом случае и при наличии теплообмена для ламинарного и турбулентного режима течения соответственно. Скорость потока в сверхзвуковой части течения соответствовала $M = 5$, в дозвуковой части течения $M = 0,41$ (из соотношений для прямого скачка уплотнения). Температура в дозвуковой части принималась равной температуре потока за прямым скачком уплотнения. Видно, что температура стенки со стороны сверхзвукового потока в адиабатическом случае значительно ниже температуры стенки со стороны дозвукового потока. При большой скорости течения ($M_{01} = 5,0$) в сверхзвуковой части температура стенки со стороны дозвукового течения практически равна температуре адиабатического торможения T_{00} . Наличие этого перепада температур (при $M_{01} = 5,0$ в ламинарном режиме $T_{ст2}^* - T_{ст1}^* \approx 240$ К, в турбулентном режиме $T_{ст2}^* - T_{ст1}^* \approx 205$ К) и приводит к возникновению теплового потока. Следует отметить, что в турбулентном случае (см. рис. 3,б) температура стенки со стороны сверхзвукового течения несколько выше, чем в ламинарном (что обусловлено большим коэффициентом восстановления), а значит перепад температур поперек пластины меньше. Тем не менее, тепловой поток в турбулентном режиме значительно выше из-за значительно большего коэффициента теплоотдачи по сравнению с ламинарным режимом течения.

На рис. 7 приведены профили относительной температуры торможения при различных скоростях набегающего потока. При $M_{01} = 1,0$ градиент температуры на стенке равен нулю. Наличие теплообмена между дозвуковой и сверхзвуковой частями течения при увеличении скорости набегающего потока приводит к значительному перераспределению температуры торможения по толщине пограничного слоя. В частнос-

ти, и в ламинарном, и в турбулентном случае минимум температуры торможения находится в сверхзвуковой части потока и с ростом скорости смещается вверх поперек течения. В сверхзвуковом потоке энергия перекачивается к внешней части пограничного слоя, где профиль температуры имеет выраженный максимум, растущий с увеличением скорости набегающего потока. Такое распределение характерно для данной задачи и сохраняется при любых значениях числа Прандтля и показателя адиабаты газа.

Выводы. Для случая идеального газа коэффициент восстановления практически не зависит от чисел Маха и Рейнольдса и может быть рассчитан по известным формулам для ламинарного и турбулентного режимов течения.

Показано, что принимаемое в работе [4] предельное условие нулевой скорости дозвукового потока приводит к достаточно большой погрешности в определении теплового потока, особенно при числах Маха, близких к единице.

Получены новые аналитические зависимости для температуры стенки и теплового потока с учетом влияния скорости в дозвуковой части течения. Расчет по данным зависимостям хорошо согласуется с результатами численного эксперимента.

Показано, что если принимать постоянными параметры торможения набегающего потока, то в распределении теплового потока в зависимости от числа Маха имеется максимум. Однако, если принять постоянными параметры набегающего потока, то тепловой поток с ростом числа Маха монотонно растет.

Впервые проведено численное исследование задачи и получены профили распределения скорости и температуры по толщине пограничного слоя.

Показано, что в случае теплоизолированной стенки имеет место перепад температур между "дозвуковой" и "сверхзвуковой" сторонами, который на теплопроводной стенке приводит к возникновению температурной стратификации в сверхзвуковом потоке.

Минимум и максимум температуры торможения лежат в пределах сверхзвуковой части течения, причем с ростом скорости набегающего потока смещаются вверх поперек пограничного слоя.

Обозначения: $\frac{c_f}{2} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{\text{ст}} / \rho_0 u_0^2$ – коэффициент трения; c_p – теплоемкость газа, Дж/(кг · град); k – показатель адиабаты газа; P_t и P_{t_t} – молекулярное и турбулентное числа Прандтля; $Re_x = \rho_0 u_0 x / \mu_0$ – число Рейнольдса, определяемое по параметрам на внешней границе пограничного слоя; $r_T = (T_{\text{ст}} - T_0) / [u_0^2 / (2c_{p0})]$ – коэффициент восстановления температуры; $St = \alpha / \rho_0 u_0 c_p$ – число Стантона; x, y – продольная и поперечная координата соответственно, м; u, v – продольная и поперечная скорости в пограничном слое, м/с; $u_{\text{max}} = \sqrt{2c_p T_{00}}$ – максимально возможная скорость потока, м/с; $y^+ = v^+ u_r / \mu$ – безразмерное расстояние от стенки в модели турбулентности; $v^+ = u_0 \sqrt{c_f / 2}$ – динамическая скорость (скорость трения), м/с; δ – толщина пограничного слоя ($u/u_0 = 0,995$), м; λ – коэффициент теплопроводности газа, Вт/(м · град); μ – коэффициент динамической вязкости газа, Па · с; ρ – плотность газа, кг/м³; $\rho_{00} = P_{00} / RT_{00}$ – плотность газа, определяемая по параметрам торможения, кг/м³

Индексы: * – условия адиабатического торможения; + – параметры модели турбулентности;

00 – условия при полном адиабатическом торможении газа;

0 – условия на внешней границе пограничного слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонтьев А.И. Газодинамический метод разделения газовых потоков // ТВТ. 1997. Т. 35. № 1. С. 157–159.
2. Леонтьев А.И. Температурная стратификация сверхзвукового газового потока // Доклады АН. 1997. Т. 354. № 4. С. 475–477.
3. Леонтьев А.И. Температурная стратификация в сверхзвуковом потоке // Литовская АН. Энергетика. 1998. № 2. с. 35–42.
4. Леонтьев А.И., Бурцев С.А. Температурная стратификация в сверхзвуковом потоке газа // Изв. РАН. Энергетика. 2000. № 5. С. 101–113.
5. Дородницын А.А. Пограничный слой в сжимаемом газе // ПММ. 1942. Т. 6. № 6. С. 449–486.
6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 804 с.
7. Андерсон Д., Теннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 1. М.: Наука, 1980. 584 с.
8. Kays W.M., Crawford M.E. Convective heat and mass transfer. New York: McGraw-Hill, 1993.
9. Патанкар С.В., Сполдинг Д.Б. Тепло- и массообмен в пограничных слоях. М.: Энергия, 1971. 128 с.
10. Denny V.E., Mills A.F. Nonsimilar solution for laminar film condensation on a vertical surface // Int. J. Heat Mass Transfer. 1969. V. 12. № 11. P. 965–979.
11. Crocco L. Boundary layer of gases along a flat plate // Rend. Math. Univ. 1941. № 12.
12. Eber G.R. Recent investigation of the temperature recovery and heat transmission on cones and cylinders in axial flow // JAS. 1952. V. 19. № 1. P. 1–6.
13. Shoulberg R.H., Hill J.A., Rivas M.A. An experimental determination of flat plate recovery factors for Mach numbers between 1.9 and 3.14 // JAS. 1954. V. 21. № 11. P. 763–771.
14. Макаров М.С. Влияние реальных свойств газа на коэффициент восстановления и коэффициент трения в сверхзвуковом пограничном слое // Труды третьей российской национальной конференции по теплообмену. М.: Изд-во МЭИ, 2002. Т. 8. С. 32–35.
15. Van Oudheusden B.W. Compressibility effects on the extended Crocco relation and the thermal recovery factor in laminar boundary layer flow // Trans. of ASME: J. of Fluids Engin. 2004. V. 126. P. 32–41.
16. Weigand B., Ferguson J.R., Crawford M.E. An extended Kays and Crawford turbulent Prandtl number model // Int. J. Heat Mass Transf. 1997. V. 40 (17). P. 4191–4196.
17. Латин Ю.В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. М.: Наука, 1970. 344 с.
18. Pappas C.C. Measurement of heat transfer in the turbulent boundary layer on a flat plate in supersonic flow and comparison with skin friction results // NASA TN. 1954. № 3222.

Новосибирск

Поступила в редакцию
5.V.2005