



РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ  
ИМ. С.А. ХРИСТИАНОВИЧА

# ПРОБЛЕМЫ И ДОСТИЖЕНИЯ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

---

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Институт теоретической и прикладной механики  
им. С.А. Христиановича

**Проблемы и достижения  
прикладной математики и механики**

Сборник научных трудов

К 70-летию академика  
ВАСИЛИЯ МИХАЙЛОВИЧА ФОМИНА

Новосибирск  
2010

УДК 51+53

ББК 22я4

П 781

Редакционная коллегия:

Волчков Э.П., Крайко А.Н., Куропатенко В.Ф., Левин В.А.,  
Липанов А.М., Майларт Ж., Морозов Н.Ф., Нигматулин Р.И., Пармон В.Н.,  
Ребров А.К., Федоров А.В. (отв. редактор), Фортон В.Е., Шокин Ю.И.

Рецензенты:

д. ф.-м. н. Маслов А.А., д. ф.-м. н. Терехов В.И.

*Утверждено к печати Ученым советом  
Института теоретической и прикладной механики  
им. С.А. Христиановича СО РАН*

*Рекомендовано к изданию  
Объединенным ученым советом по механике СО РАН*

**П 781 Проблемы и достижения прикладной математики и механики: к 70-летию академика В.М. Фомина: сб. науч. тр. – Новосибирск: Параллель, 2010 – 650 с., 497 ил., 29 табл.**

**ISBN 978-5-98901-080-6**

В сборнике представлены оригинальные научные статьи, посвященные различным задачам современной механики сплошных и гетерогенных сред, аэрогазодинамики до-, сверх- и гиперзвуковых скоростей, физико-химической газодинамики и их приложениям в технике. Публикации подготовлены известными специалистами в соответствующих направлениях механики, отражают ее современное состояние и перспективы развития.

Книга предназначена для научных работников, аспирантов, студентов, специализирующихся в области механики сплошных и гетерогенных сред, аэродинамики и физико-химической газодинамики.

# ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ С АСИМПТОТИЧЕСКИМ ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ ДАВЛЕНИЯ

Э.П. Волчков, М.С. Макаров, А.Ю. Сахнов

*Институт теплофизики  
им. С.С. Кутателадзе СО РАН  
630090, Новосибирск  
e-mail: volchkov@itp.nsc.ru*

**Введение.** Широко известно, что отсос через пористую поверхность оказывает стабилизирующее действие на пограничный слой, затягивая ламинарно-турбулентный переход [1]. И хотя отсос пограничного слоя приводит к увеличению коэффициента трения по сравнению с течением на непроницаемой поверхности, сохранение ламинарной формы течения позволяет получить суммарный выигрыш в сопротивлении трения. Показано также [2, 3], что отсос вызывает ламинаризацию (подавление турбулентности) в турбулентном пограничном слое, а при асимптотическом отсосе течение становится ламинарным.

Аналогично действует и отрицательный градиент давления (ускорение потока) [4]. Он также приводит к увеличению критического числа Рейнольдса  $Re_{x_{cr}}$  ламинарно-турбулентного перехода. А в работах W.M. Kays, R.J. Moffat [5, 6] экспериментально было показано, что ускорение потока вызывает реламинаризацию турбулентного пограничного слоя. В этих работах был введен параметр Кейса

$$K = (\nu/U_e^2) dU_e/dx, \quad (1)$$

характеризующий интенсивность ускорения (или величину отрицательного градиента давления). В работе [6] на основе достаточно простого анализа интегрального соотношения импульсов для турбулентного пограничного слоя получено минимальное значение параметра  $K \geq 3.5 \times 10^{-6}$ , при котором происходит реламинаризация турбулентного пограничного слоя (обратный турбулентно-ламинарный переход).

При безградиентном обтекании непроницаемой пластины поперечная скорость на внешней границе пограничного слоя  $V_\delta$  положительна и  $(\partial V/\partial y)_{y=\delta} = 0$ . В ускоренном же потоке из уравнения неразрывности при  $\rho = \text{const}$  следует, что

$$(dU_e/dx)_{y \geq \delta} = -(\partial V/\partial y)_{y \leq \delta} \quad (2)$$

градиент поперечной скорости отрицателен, т. е. при некоторых значениях отрицательного градиента давления можно получить в пограничном слое поперечный поток, направленный от внешней границы слоя к стенке. Можно ожидать, что его воздействие на пограничный слой будет подобно воздействию отсоса.

В работе, для простоты, рассматривается течение в плоском сужающемся канале (рис. 1), когда параметр ускорения Кейса сохраняет постоянное значение по длине. Можно показать, что его значение при этом определяется соотношением

$$K = \tan \alpha / Re_0, \quad Re_0 = U_0 h_0 / \nu. \quad (3)$$

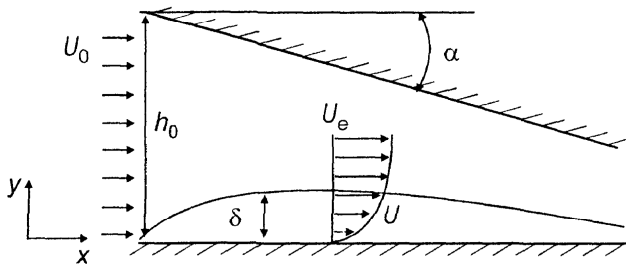


Рис. 1. Схема течения.

где  $U_0$  – начальная скорость в канале,  $h_0$  – начальная высота канала,  $Re_0$  – число Рейнольдса, построенное по параметрам на входе в канал.

**Численное моделирование течения с отрицательным градиентом давления.** Использовались уравнения пограничного слоя. Плотность газа принималась

постоянной. Такое приближение допустимо, поскольку при заданном перепаде давлений  $\Delta P \approx 10$  кПа и начальном атмосферном давлении плотность изменялась не более чем на 6 %. Система уравнений имела следующий вид:

Уравнение движения

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_{eff} \frac{\partial U}{\partial y} \right), \quad \nu_{eff} = \nu + \frac{\mu_t}{\rho}. \quad (4)$$

Уравнение неразрывности:

$$(\partial U / \partial x) + (\partial V / \partial y) = 0. \quad (5)$$

На стенке выполняется условие прилипания:

$$y = 0: \quad U = 0, \quad V = 0. \quad (6)$$

Во внешнем течении граничное условие выглядит следующим образом:

$$y \geq \delta: \quad U = U_e. \quad (7)$$

Скорость на внешней границе пограничного слоя  $U_e$  определялась из (1) с учетом геометрии течения.

Уравнения пограничного слоя (4), (5) дополнены двухпараметрической  $q - \omega$ -моделью турбулентности Т.Д. Соаклея [7]. На этапе тестирования численной модели применялась также двухпараметрическая  $k - \varepsilon$ -модель К. Чиена [8]. Обе модели турбулентности давали идентичные результаты, однако, процесс расчета с  $q - \omega$ -моделью проходил более устойчиво, что важно при градиентном течении.

Турбулентность принималась изотропной:

$$Tu = \sqrt{2/3 k_t / U_e}. \quad (8)$$

Интенсивность турбулентности основного потока равнялась  $Tu_e = 1\%$ . При этом критические числа Рейнольдса перехода при безградиентном течении соответствовали данным [9], полученным для различной степени интенсивности турбулентности.

**Результаты.** На рис. 2, а представлены зависимости коэффициента трения от числа Рейнольдса при разных значениях параметра Кейса. Отрицательный градиент давления приводит к затягиванию ламинарно-турбулентного перехода. При  $K = 0,8 \times 10^{-6}$  критическое число Рейнольдса перехода  $Re_{x_{cr}}$  увеличивается почти на порядок по сравнению с безградиентным течением. При  $K \geq 0,85 \times 10^{-6}$  переход отсутствует, течение остается ламинарным и при больших числах Рейнольдса

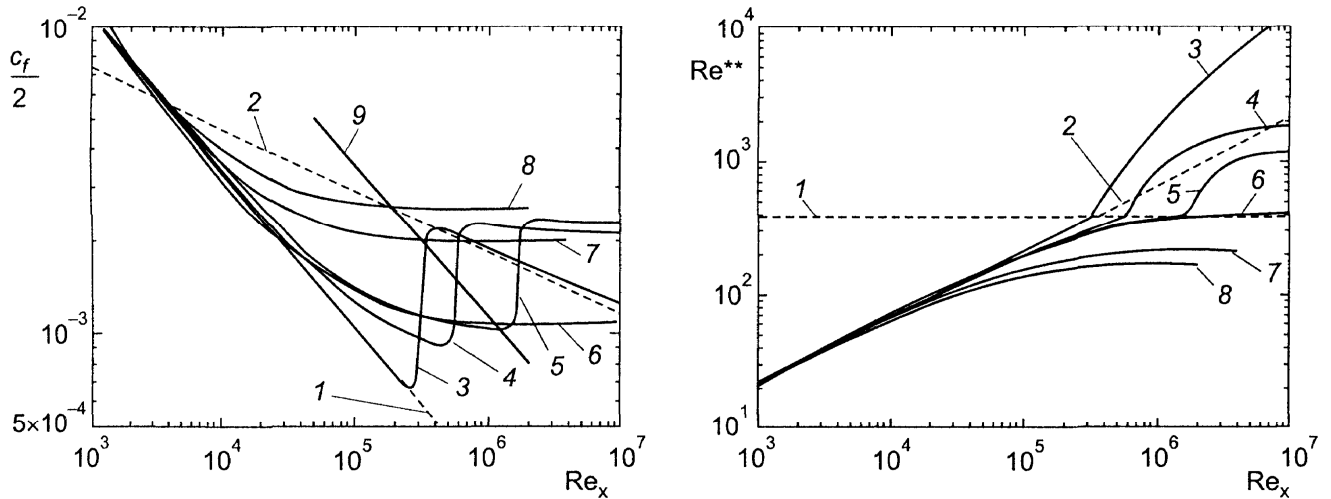


Рис. 2. Коэффициент сопротивления трения (а,  $1 - c_f/2 = 0,332 Re_x^{-0,5}$ ;  $2 - c_f/2 = 0,0296 Re_x^{-0,2}$ ; 9 – граница асимптотического течения по соотношению (15)) и числа Рейнольдса, рассчитанные по толщине потери импульса (б,  $1 - Re_{cr}^{**} = 360$ ;  $2 - Re^{**} = \sqrt{0,44 Re_x}$ ). 3–8 – результаты численного моделирования для значений параметра Кейса  $K \times 10^6 = 0, 0,5, 0,8, 0,85, 3,0, 5,0$  соответственно.

$Re_x$  принимает асимптотический характер. При этом коэффициент трения постоянен относительно числа Рейнольдса  $Re_x$  и зависит только от величины градиента давления.

При значении параметра ускорения Кейса  $K = 0,85 \times 10^{-6}$  трение несколько выше, чем в ламинарном безградиентном течении, но ниже, чем в турбулентном. Это позволяет получить существенное снижение общего сопротивления. Аналогично этому «наивыгоднейший отсос» газа через проницаемую поверхность приводит к увеличению коэффициента трения относительно ламинарного течения на непроницаемой поверхности, но меньшему трению, чем при турбулентном течении [1].

На рис. 2, б приведены зависимости числа Рейнольдса, рассчитанного по толщине потери импульса  $\delta^{**}$ , от числа Рейнольдса, рассчитанного по длине пластины. При малых числах Рейнольдса  $Re_x \leq 2 \times 10^4$  влияние отрицательного градиента давления практически отсутствует. При умеренных и больших числах Рейнольдса с увеличением значения отрицательного градиента давления число Рейнольдса  $Re^{**}$  уменьшается как в ламинарном, так и в турбулентном режиме течения. В ламинарном режиме течения при больших числах Рейнольдса  $Re_x$  числа Рейнольдса  $Re^{**}$  асимптотически выходят на постоянные значения. Зависимости числа Рейнольдса  $Re^{**}$  от  $Re_x$  изменяются аналогичным образом.

Критическое число Рейнольдса перехода, рассчитанное по толщине потери импульса, практически не зависит от значения отрицательного градиента давления и равно  $Re_{cr}^{**} \approx 360$  для указанной интенсивности турбулентности.

Как упоминалось во введении, Кейс [5] на основе анализа интегрального соотношения импульсов пограничного слоя определил значение параметра ускорения  $K \geq 3,5 \times 10^{-6}$ , при котором произойдет реламинаризация течения. При этом было принято несколько допущений. Критическое число Рейнольдса перехода принималось

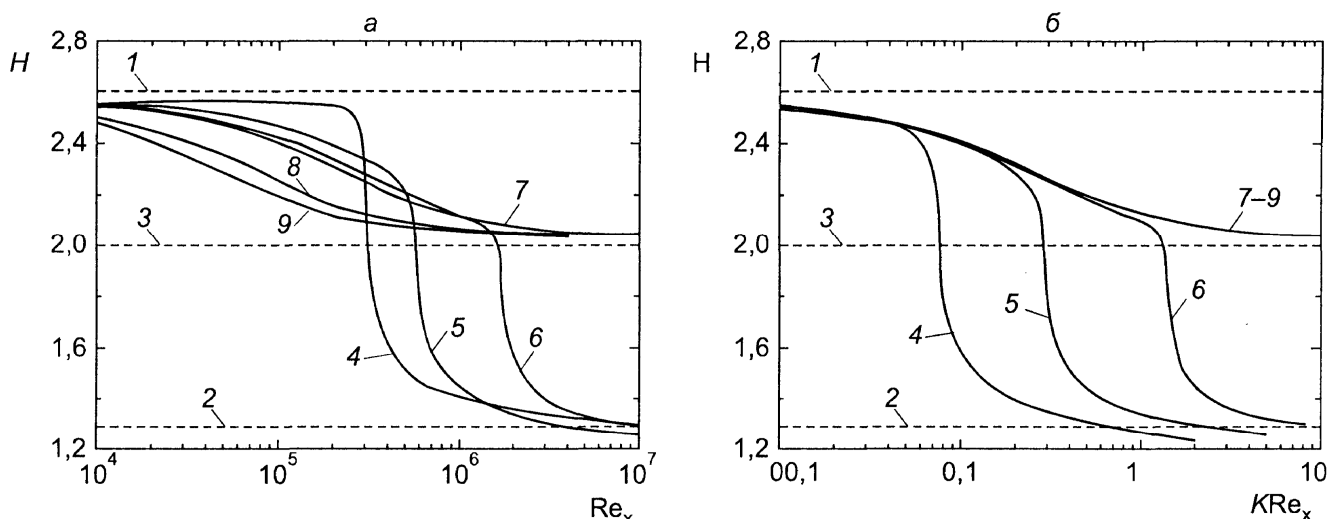


Рис. 3. Влияние ускорения основного потока на формпараметр пограничного слоя. *а*: 1 – ламинарное безградиентное течение,  $H = 2,6$ ; 2 – турбулентное безградиентное течение  $H = 1,29$ ; 3 – асимптотический отсос,  $H = 2$ ; 4–9 – результаты численного моделирования для  $K \times 10^6 = 0, 0,5, 0,8, 0,85, 3,0, 5,0$  соответственно; *б* – 4 –  $K \times 10^6 = 0,2$

таким же, как и при прямом ламинарно-турбулентном переходе  $Re_{cr}^{**} = 360$ . Тогда число  $Re^{**}$ , имеющее в турбулентном пограничном слое более высокие значения, должно уменьшаться, т. е.  $dRe^{**}/dx < 0$ . Коэффициент трения и формпараметр принимались такими же, как и в безградиентном турбулентном пограничном слое. Несмотря на довольно грубые принятые допущения, полученное значение параметра Кейса достаточно хорошо подтверждается экспериментальными данными.

Воспользуемся таким же подходом, но со стороны ламинарного пограничного слоя, для определения минимального значения параметра Кейса, при котором возможен прямой ламинарно-турбулентный переход. Как видно из рис. 2, течение не переходит к турбулентному, когда  $Re^{**} \rightarrow \text{const}$ , т. е.  $dRe^{**}/dx \rightarrow 0$ . Тогда интегральное соотношение импульсов

$$\nu/U_e (dRe^{**}/dx) + K(1+H)Re^{**} = c_f/2 \quad (9)$$

можно привести к виду

$$K Re^{**} (1+H) = c_f/2. \quad (10)$$

Положим, подобно Кейсу, что коэффициент трения и формпараметр  $H$  остаются такими же, как в ламинарном пограничном слое при безградиентном течении:

$$c_f/2 = 0,22/Re^{**}, \quad H = 2,6. \quad (11)$$

Принимая значение критического числа Рейнольдса  $Re_{cr}^{**} \approx 360$ , с учетом (10) и (11) получим следующее значение параметра Кейса, при котором отсутствует ламинарно-турбулентный переход:

$$K \geq 0,5 \times 10^{-6}. \quad (12)$$

Таким образом, для прямого и обратного переходов наблюдается некоторый гистерезис по параметру Кейса.

Как будет показано ниже, при асимптотическом градиенте давления значения формпараметра и коэффициента трения следующие:

$$H = 2,0, \quad c_f/2 = 1,14\sqrt{K}. \quad (13)$$

Проведя вывод (9) – (12) с использованием (13), получим, что

$$K \approx 1 \times 10^{-6}. \quad (14)$$

Как следует из результатов численного моделирования (см. рис. 2), минимальный параметр Кейса, при котором не происходит ламинарно-турбулентного перехода, равен  $K = 0,85 \times 10^{-6}$ .

На рис. 3, а показаны зависимости формпараметра  $H = \delta^*/\delta^{**}$  от числа Рейнольдса  $Re_x$  при различных значениях параметра ускорения  $K$ . При  $K \leq 0,8 \times 10^{-6}$  формпараметр изменяется от значения, характерного для ламинарного безградиентного потока, до значения, характерного для турбулентного течения. При  $K > 0,8 \times 10^{-6}$  и  $Re_x \geq 10^6$  формпараметр принимает значение, характерное для случая асимптотического отсоса  $H \approx 2$ .

На рис. 3, б эти же данные представлены в виде зависимости от комплекса  $K \cdot Re_x$ . Видно, что использование этого комплекса позволяет обобщить данные при  $K \geq 0,85 \times 10^{-6}$ . Кроме того, можно принять значение комплекса

$$K Re_x \approx 1 \quad (15)$$

условной границей, определяющей начало асимптотического течения. С использованием соотношения (15) на рис. 2, а проведена линия 9, показывающая условную границу перехода по числам Рейнольдса  $Re_x$  к асимптотическим условиям.

На рис. 4 приведены профили безразмерной кинетической энергии турбулентности по толщине пограничного слоя. При этом

$$k_t^+ = k_t/U_\tau^2; \quad y^+ = U_\tau y/\nu, \quad (16)$$

где  $U_\tau \equiv \sqrt{\tau_w/\rho}$  – динамическая скорость.

Видно, что с увеличением ускорения кинетическая энергия турбулентности снижается. При  $K > 0,85 \times 10^{-6}$  кинетическая энергия турбулентности близка к нулю по

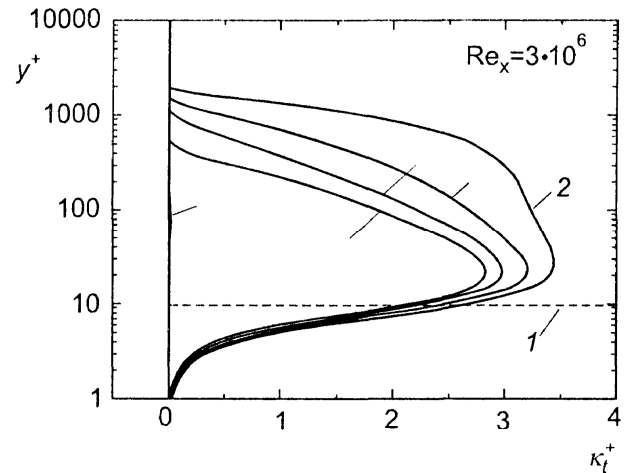


Рис. 4. Профили кинетической энергии турбулентности. 1 – граница ламинарного подслоя; 2–5 – результаты численного моделирования для  $K \times 10^6 = 0, 0,2, 0,5, 0,8$  соответственно; 6 –  $0,85 \times 10^{-6} \leq K \leq 5 \times 10^{-6}$ .

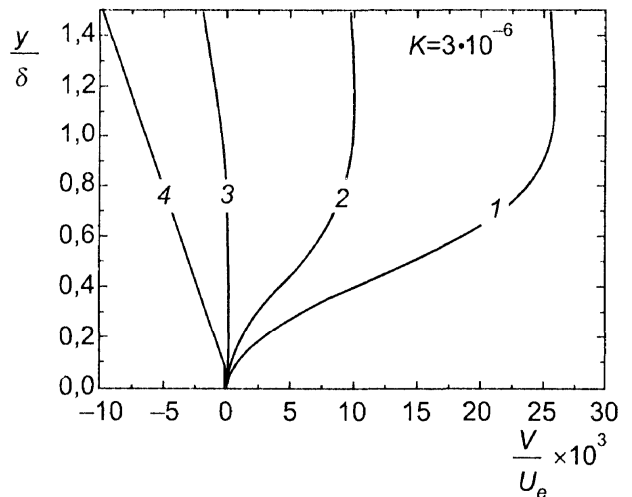


Рис. 5. Профили безразмерной поперечной скорости на плоской стенке сужающегося канала. 1–4 – результаты численного моделирования для значений числа Рейнольдса  $Re_x = 1 \times 10^3, 5 \times 10^3, 4 \times 10^4, 3 \times 10^6$  соответственно.

всей толщине пограничного слоя, т. е. отрицательный градиент давления подавляет турбулентность, и пограничный слой не переходит в турбулентный режим течения аналогично случаю асимптотического отсоса [2].

На рис. 5 представлены профили поперечной скорости в разных сечениях пограничного слоя при параметре ускорения  $K = 3 \times 10^{-6}$ . Как видно, профили поперечной скорости коренным образом видоизменяются при отрицательном градиенте давления. При малых числах Рейнольдса  $Re_x$  (линии 1, 2) профили близки к профилям при безградиентном течении. При умеренных числах Рейнольдса  $Re_x$  (линия 3) по всей толщине пограничного слоя поперечная скорость практически равна нулю.

При больших числах Рейнольдса  $Re_x$  (линия 4), соответствующих асимптотическим условиям, поперечная скорость становится отрицательной, т. е. поперечный поток газа направлен от внешнего течения к стенке.

При этом ее относительная величина на внешней границе пограничного слоя того же порядка  $V_\delta/U_e \sim 10^{-3}$ , что и при асимптотическом отсосе, но в отличие от последнего на стенке она равна нулю.

Как показывают результаты численного моделирования в асимптотической области течения при  $K \cdot Re \geq 1$  поперечная скорость изменяется по сечению пограничного слоя по линейному закону практически до стенки, а ее градиент  $\partial V/\partial y$  сохраняет постоянное значение, равное значению вне пограничного слоя:

$$(\partial V/\partial y)_{y < \delta} = (\partial V_e/\partial y)_{y \geq \delta} = -dU_e/dx. \quad (17)$$

Второе равенство в (17) следует из уравнения неразрывности (5) с учетом того, что продольная скорость является только функцией координаты  $x$ .

Тогда соотношение (17) с учетом выражения для параметра ускорения можно представить в виде

$$\partial V/\partial y = -dU_e/dx = -K \cdot U_e^2/\nu, \quad (18)$$

решением которого с учетом будет

$$V = -K \cdot U_e^2 y/\nu. \quad (19)$$

Из (19) можно получить соотношение, определяющее профиль поперечной скорости в безразмерном виде:

$$V/U_e = -K Re_y, \quad Re_y = U_e y/\nu. \quad (20)$$

Как следует из (20), при увеличении ускорения поперечная скорость растет по абсолютному значению.

**Аналитическое решение.** Рассмотрим уравнение движения в случае ламинарного несжимаемого течения:

$$U(\partial U/\partial x) + V(\partial U/\partial y) = (-1/\rho)(dP/dx) + \nu(\partial^2 U/\partial y^2). \quad (21)$$

Из уравнения Бернулли [1] и соотношения (21) следует, что

$$(-1/\rho)(dP/dx) = U_e(dU_e/dx) = (1/\nu)U_e^3 K. \quad (22)$$

Если принять градиент поперечной скорости постоянным по сечению (см. соотношение (17)), то ускорение будет постоянно по сечению пограничного слоя и области внешнего течения, непосредственно прилегающей к слою:

$$\partial U / \partial x = dU_e / dx. \quad (23)$$

Подставляя (19), (22) и (23) в уравнение движения (21), получим:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + K \frac{U_e^2}{v^2} y \frac{\partial U}{\partial y} + K \frac{U_e^2}{v^2} (U_e - U) = 0. \quad (24)$$

Уравнение (24) с учетом граничных условий (6) и (7) имеет следующее аналитическое решение:

$$U/U_e = 1 - e^{-K/2 \cdot \text{Re}_y^2} + \text{Re}_y \sqrt{\pi K/2} [1 - \text{erf}(\sqrt{K/2} \text{Re}_y)]. \quad (25)$$

Из профиля продольной скорости (25) следует, что коэффициент трения на плоской стенке сужающегося канала определяется следующим образом:

$$c_f/2 = \sqrt{K\pi/2} \cong 1,25\sqrt{K}. \quad (26)$$

На рис. 6 дается сравнение профилей продольной скорости в пограничном слое на непроницаемой пластине при безградиентном течении 1 и при асимптотическом градиенте давления 2, 3, 4. Здесь же приведен профиль скорости для случая асимптотического отсоса [1]. Видно, что в случае отрицательного градиента давления профили скорости более заполнены, чем при безградиентном течении. Аналитический профиль скорости несколько отличается от точного численного расчета.

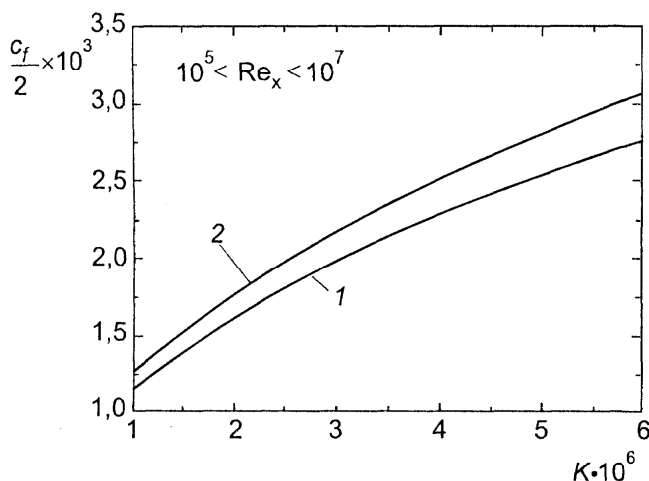


Рис. 7. Коэффициент трения в зависимости от параметра Кейса. 1 – результаты численного моделирования; 2 – формула (26).

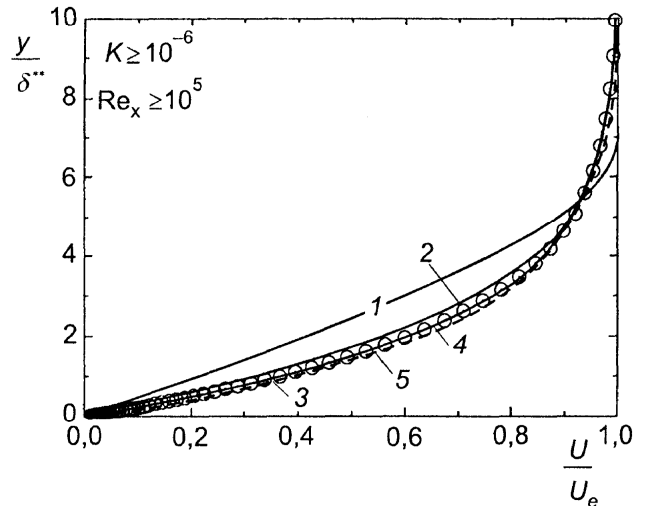


Рис. 6. Профили продольной скорости. 1 – профиль Блазиуса. Отрицательный градиент давления: 2 – формула (25), 3 (кружки) – численное моделирование, 4 – формула Польгаузена для сужающегося канала [1]; 5 (пунктир) – асимптотический отсос.

В [1] приводится автомодельное решение Польгаузена для случая течения в суживающемся канале, но при этом не определены границы справедливости условия автомодельности. Из рис. 6 видно, что формула Польгаузена совпадает с приведенными расчетами в асимптотической области течения.

В безразмерных координатах  $U/U_e(y/\delta^{**})$  профили, рассчитанные на основе численной модели и формулы Польгаузена, совпадают с профилем для случая асимптотического отсоса.

На рис. 7 представлена зависимость коэффициента трения от параметра уско-

рения Кейса. Как видно, формула (26) дает завышенные на 10 % значения коэффициента трения по сравнению с результатами численного моделирования. По-видимому, это связано с принятым ранее допущением о том, что ускорение по всей толщине пограничного слоя такое же, как и во внешнем потоке (23), которое следует из линейности профиля поперечной скорости. Непосредственно вблизи стенки это допущение не выполняется.

Формула (26) совпадает с результатами численного расчета, если в ней скорректировать коэффициент:

$$c_f/2 = 1,14\sqrt{K}. \quad (27)$$

На рис. 8 сделана попытка обобщить результаты численного моделирования, приведенные на рис. 2, а, в широком диапазоне чисел Рейнольдса  $10^3 \leq Re_x \leq 10^7$  и параметра Кейса  $0 < K \leq 5 \times 10^{-6}$ , как в асимптотической области, так и в области, предшествующей ей.

Линии 1, 2, 3 соответствуют режимам при  $K < 0,85 \times 10^{-6}$ , когда наблюдается ламинарно-турбулентный переход. Следует отметить, что и в турбулентном пограничном слое коэффициент трения асимптотически выходит на некоторые постоянные значения.

Линия 4 обобщает результаты численного моделирования во всем диапазоне чисел Рейнольдса  $Re_x$  при  $K \geq 0,85 \times 10^{-6}$ . Как уже указывалось, соотношение  $K Re_x \geq 1$  является условной границей асимптотической области. Видно, что коэффициент трения в этой области хорошо описывается формулой (27).

В области низких чисел Рейнольдса (при  $K Re_x \leq 0,01$ ) справедлив закон Блазиуса:

$$c_f/(2\sqrt{K}) = 0,332(K Re_x)^{-0,5}. \quad (28)$$

Для инженерных расчетов в области  $K Re_x \leq 0,1$  можно использовать следующую аппроксимацию:

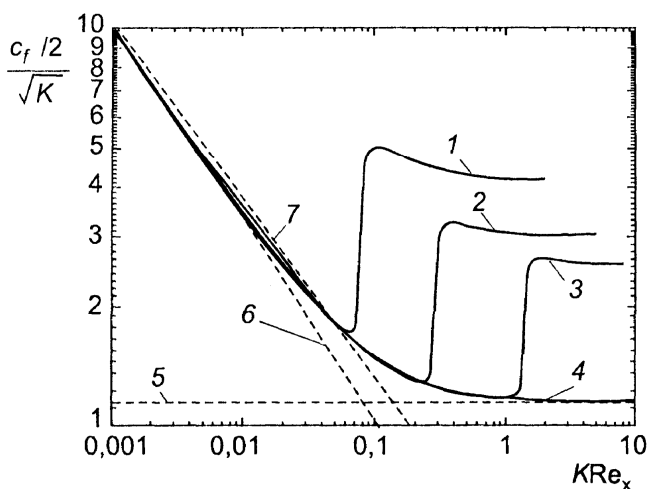


Рис. 8. Относительный коэффициент трения. 1, 2, 3 — результаты численного моделирования для  $K \times 10^6 = 0,2, 0,5, 0,8$  соответственно, 4 —  $0,85 \times 10^{-6} \leq K \leq 5 \times 10^{-6}$ ; 5 — формула (27); 6 — формула (28); 7 — формула (29).

$$c_f/(2\sqrt{K}) = 0,47(K Re_x)^{-0,45}. \quad (29)$$

**Заключение.** Прослеживается некоторая аналогия между воздействием на пограничный слой отрицательного градиента давления и отсоса, что связано с наличием в обоих случаях поперечного потока, направленного от внешней границы слоя к стенке.

Показано, что асимптотические условия течения наступают при значении параметра  $K \cdot Re_x \geq 1$ . При этом:

— коэффициент трения, числа Рейнольдса  $Re^*$ ,  $Re^{**}$  не зависят от числа Рейнольдса, рассчитанного по длине  $Re_x$ ;

### Список обозначений

|                                                                                 |                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| $c_f/2$ – коэффициент сопротивления трения;                                     | $x, y$ – продольная и поперечная координаты, м;                     |
| $H = \delta^*/\delta^{**}$ – формпараметр;                                      | $\alpha$ – угол наклона верхней крышки сужающегося канала, градусы; |
| $h$ – высота на входе в канал, м;                                               | $\delta$ – толщина пограничного слоя, м;                            |
| $K$ – параметр ускорения потока (параметр Кейса);                               | $\delta^*$ – толщина вытеснения, м;                                 |
| $k_t$ – кинетическая энергия турбулентности;                                    | $\delta^{**}$ – толщина потери импульса, м;                         |
| $P$ – давление, Па;                                                             | $\nu$ – кинематическая вязкость газа, м <sup>2</sup> /с;            |
| Числа Рейнольдса:                                                               | $\rho$ – плотность газа, кг/м <sup>3</sup> ;                        |
| $Re_x$ – по продольной координате;                                              | Индексы:                                                            |
| $Re_y$ – по поперечной координате;                                              | 0 – параметры потока в начальном сечении;                           |
| $Re^*$ – по толщине вытеснения;                                                 | $cr$ – критические параметры ламинарно-турбулентного перехода;      |
| $Re^{**}$ – по толщине потери импульса;                                         | $e$ – параметры внешнего течения;                                   |
| $Tu$ – интенсивность турбулентности, %;                                         | $t$ – турбулентный;                                                 |
| $U, V$ – компоненты вектора скорости по координатам $x, y$ соответственно, м/с; | $\delta$ – внешняя граница пограничного слоя.                       |

– профили продольной скорости становятся автомодельными и совпадают с профилями при асимптотическом отсосе, а значение формпараметра  $H = 2$ ;

– поперечная скорость направлена к стенке и ее распределение по толщине пограничного слоя близко к линейному. Относительный поперечный поток на внешней границе пограничного слоя  $V_\delta/U_e \sim 10^{-3}$  имеет такой же порядок, как и при асимптотическом отсосе, а его величина определяется только значением параметра ускорения  $K$ .

Показано, что при значении параметра ускорения  $K \geq 1 \times 10^{-6}$  пограничный слой остается ламинарным. Обратный же переход, реламинаризация турбулентного пограничного слоя, по Кейсу происходит при  $K \geq 3,5 \times 10^{-6}$ . То есть наблюдается некоторый гистерезис.

Приведено аналитическое решение уравнения движения с использованием линейной зависимости для поперечной скорости. Полученные соотношения позволяют достаточно просто оценивать интегральные характеристики пограничного слоя в асимптотических условиях.

### Список литературы

1. Schlichting H. Boundary Layer Theory. Ed. Mc Graw-Hill, 1967.
2. Leontiev A.I., Luschik V.G., Yakubenko A.E. A heat-insulated permeable wall with suction in a compressible gas flow // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2009. V. 52. P. 4001–4007.
3. Leontiev A.I., Pavlyuchenko A.M. Investigation of laminar-turbulent transition in supersonic boundary layers in an axisymmetric aerophysical flight complex and in a model in a wind

tunnel in the presence of heat transfer and suction of air // High Temperature. 2008. V. 46. N 4. P. 542–565.

4. **Lushchik V.G., Pavel'ev A.A., Yakubenko A.E.** Transition to turbulence in the boundary layer on a plate in the presence of a negative free-stream pressure gradient // Fluid Dynamics. 2004. V. 39, N 2. P. 250–259.

5. **Moffat R.J., Kays W.M.** A Review of turbulent boundary layer heat transfer research at stanford 1958 –1983 // Advances in Heat Transfer. 1984. V. 16. Inc., P. 242–365.

6. **Kays W.M.** Convective Heat and Mass Transfer. New York: McGraw-Hill, 1966.

7. **Gerlinger P., Bruggemann D.** An implicit multigrid scheme for the compressible Navier-Stokes equations with low-Reynolds-number turbulence closure // Transactions of the ASME: Journal of Fluids Engineering. 1998. P. 257–262.

8. **Kral L.D.** Recent experience with different turbulence models applied to the calculation of flow over aircraft components // Progress in Aerospace Sciences. 1998. V. 34. P. 481–541.

9. **Abu-Ghannam B.J., Shaw R.** Natural transition of boundary layers – the effects of turbulence, pressure gradient, and flow history // J. Mech. Eng. Sci. 1980. V. 22, N 5. P. 213–228.