

У Ч Е Б Н И К И Н Г Т У

Э.П. ВОЛЧКОВ, В.П. ЛЕВЕДЕВ

ТЕПЛОМАССООБМЕН
В ПРИСТЕННЫХ
ТЕЧЕНИЯХ

НОВОСИБИРСК

Ответственные редакторы серии:

А.С. Востриков
Н.В. Пустовой

Редакционная коллегия:

Ю.А. Афанасьев
А.Г. Вострецов
В.В. Губарев
В.А. Гридчин
В.И. Денисов
К.Т. Джурабаев
В.И. Игнатьев
К.П. Кадомская
В.В. Крюков
Г.Е. Невская
В.В. Покасов
Х.М. Рахимьянов
Ю.Г. Соловейчик
А.А. Спектор
А.И. Шалин
А.Ф. Шевченко
Г.М. Шумский

Э.П. ВОЛЧКОВ, В.П. ЛЕБЕДЕВ

ТЕПЛОМАССООБМЕН В ПРИСТЕННЫХ ТЕЧЕНИЯХ

Допущено Учебно-методическим объединением высших учебных заведений Российской Федерации по образованию в области авиации, ракетостроения и космоса в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлению подготовки бакалавров 551000 – Авиа- и ракетостроение и магистров по программам 551001 – Аэродинамика, гидродинамика и процессы теплообмена летательных аппаратов, 551004 – Аэродинамика, гидродинамика и процессы теплообмена двигателей летательных аппаратов, 551013 – Авиационная и ракетно-космическая теплотехника, 551014 – Физическое и вычислительное моделирование теплоаэродинамических и теплогидравлических процессов.



НОВОСИБИРСК

2 0 0 3

УДК 532.526 (075.8)
В 689

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. *А.М. Харитонов*;
кафедра Э-3 МГТУ им. *Н.Э. Баумана*
(проф. *М.И. Осипов*)

Волчков Э.П., Лебедев В.П.

В 689 Тепломассообмен в пристенных течениях: Учебник. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003. – 244 с. – (Серия «Учебники НГТУ»).

ISBN № 5-7782-0316-0

В книге рассмотрены основы теории переноса импульса, теплоты и вещества в пристенных течениях. Проанализированы основные уравнения механики жидкости и газа для ламинарного и турбулентного течений.

Изложены теория пограничного слоя, современные методы расчета трения и теплообмена. Основное внимание уделено интегральным методам расчета пограничного слоя, нашедшим широкое распространение в инженерной практике.

Рассмотрена асимптотическая теория турбулентного пограничного слоя, учитывающая влияние неизотермичности, сжимаемости, вдува газа через стенку, химических реакций на процессы теплообмена.

Книга рассчитана на студентов, аспирантов и специалистов в области конвективного теплообмена, авиа- и двигателестроения.

УДК 532.526 (075.8)

ISBN № 5-7782-0316-0

© Новосибирский государственный
технический университет, 2003 г.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- a – коэффициент диффузии теплоты (температуропроводность), $\text{м}^2/\text{с}$;
 a^* – скорость звука, $\text{м}/\text{с}$;
 $b = j_{\text{ст}} / (\rho_0 U_0 \text{St}_0)$, $b = j_{\text{ст}} / [\rho_0 U_0 (c_{f0} / 2)]$ – параметр проницаемости поверхности, рассчитанный по числу Стентона или по коэффициенту трения в стандартных условиях;
 $b_1 = j_{\text{ст}} / (\rho_0 U_0 \text{St})$, $b_1 = j_{\text{ст}} / [\rho_0 U_0 (c_f / 2)]$ – параметр проницаемости поверхности, рассчитанный по числу Стентона или коэффициенту трения в рассматриваемых условиях;
 C – массовая концентрация, $\text{кг}/\text{м}^3$ или $\text{кг}/\text{кг}$;
 c – удельная теплоемкость, $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$: c_p – при постоянном давлении; c_v – при постоянном объеме;
 $c_f = 2\tau_{\text{ст}} / \rho_0 u_0^2$ – коэффициент сопротивления трения;
 d – диаметр, м ;
 D – коэффициент диффузии вещества, $\text{м}^2/\text{с}$;
 S – площадь, м^2 ;
 F – сила, Н ;
 F_V – объемная сила, $\text{Н}/\text{м}^3$;
 G – массовый расход, $\text{кг}/\text{с}$;
 g – ускорение (в частности, ускорение свободного падения), $\text{м}/\text{с}^2$;
 h – энтальпия, $\text{Дж}/\text{кг}$;
 h^* – энтальпия торможения, $\text{Дж}/\text{кг}$;
 $j_{\text{ст}} = \rho_{\text{ст}} v_{\text{ст}}$ – поперечный поток вещества на проницаемой поверхности (массовая скорость), $\text{кг}/\text{м}^2 \cdot \text{с}$;
 k – кинетическая энергия турбулентности, $\text{м}^2/\text{с}^2$;
 $k = c_p / c_v$ – показатель адиабаты;
 L – характерный линейный размер, м ;
 l – длина, м ;
 $\langle l \rangle$, l – длина свободного пробега, пути смещения, м ;

m – масса, кг;
 M – относительная молекулярная масса;
 Ma – число Маха;
 p – давление, Па;
 Q^* – количество теплоты, Дж;
 Q – тепловой поток, Вт;
 q – плотность теплового потока, Вт/м²;
 R – газовая постоянная, Дж/(моль·К);
 R_0 – удельная газовая постоянная, Дж/(кг·К);
 r – коэффициент восстановления температуры;
 T, Θ – температура, К;
 T^* – температура торможения, К;
 $T_{ст}^*$ – температура адиабатической стенки, К;
 t – время, с;
 U_0 – характерная скорость течения, м/с;
 U, V, W – компоненты вектора скорости течения по координатам x, y, z , м/с;
 u, v, w – пульсационные компоненты скорости течения, м/с;
 V – объем, м³;
 v^* – динамическая скорость (скорость касательного напряжения), м/с;
 x, y, z – координаты, м;
 α – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²·К);
 β – коэффициент объемного расширения, 1/К;
 δ – толщина (пленки, пограничного слоя и др.), м;
 δ_t, δ_d – толщина температурного и диффузионного пограничных слоев, м;
 δ^* – толщина вытеснения, м;
 δ_t^{**} – толщина потери энергии, м;
 ϵ – диссипация энергии турбулентности, м⁶/с³;
 η' – плотность потока объемного излучения, Вт/м²;
 $\eta = v_{ст}^* y / \nu$ – безразмерное расстояние от стенки в теории турбулентного пограничного слоя;
 Λ_r – пространственный макромасштаб турбулентности, м;
 λ', λ_t – пространственный и временной микромасштабы турбулентности, м; с;
 λ – теплопроводность, Вт/(м·К);
 λ' – коэффициент гидравлического трения;
 μ – динамическая вязкость, Па·с;
 ν – кинематическая вязкость, м²/с;

$\xi = y/\delta$ – относительное расстояние от стенки;
 Θ – параметр эффективности газовой завесы;
 ρ – плотность среды, кг/м³;
 σ_0 – постоянная Стефана – Больцмана, Вт/(м²·К⁴);
 τ – касательное напряжение, Па;
 $\Psi = St/St_0, c_f/c_{f0}$ – относительная функция теплообмена и трения;
 $\psi = T_{ст}/T_0$ – температурный фактор;
 $\omega = U/U_0$ – безразмерная скорость.

Критерии:

$Le = \rho D c_p / \lambda$ – число Льюиса;
 $Nu = \alpha x / \lambda$ – число Нуссельта;
 $Pr = \nu / a$ – число Прандтля;
 Re_x, Re_d – числа Рейнольдса, рассчитанные по продольной координате и диаметру канала;
 $Re^{**}, Re_t^{**}, Re_d^{**}$ – числа Рейнольдса, рассчитанные по толщине потери импульса, энергии или массы;
 $Sc = \mu / (\rho D_i)$ – число Шмидта;
 $St = q_{ст} / [\rho c_p U_0 (T_0 - T_{ст})]$ – число Стентона.

Индексы:

д – диффузионный;
 т – тепловой
 t – турбулентный;
 ст – на стенке;
 0 – вне пограничного слоя.



ПРЕДИСЛОВИЕ

В основе данной книги лежит курс лекций, читаемых студентам факультета летательных аппаратов Новосибирского государственного технического университета. В ней рассмотрена важная для практики проблема переноса теплоты, импульса и вещества в пристенных течениях. Даны первоначальные сведения о пограничном слое. Книга по сути является переработанным и дополненным изданием учебного пособия «Основы теории пограничного слоя», опубликованного в 1994 году. Прежнее издание расширено за счет материалов по турбулентному тепломассообмену и дополнено разделами о переходе ламинарного течения в турбулентное, об асимптотической теории турбулентного пограничного слоя С.С. Кутателадзе – А.И. Леонтьева, о газовых завесах и турбулентном пограничном слое с химическими реакциями. Эти материалы базируются на результатах исследований, проводимых в Институте теплофизики Сибирского отделения РАН, в которых непосредственное участие принимали авторы. Выполнена также некоторая структурная переработка предшествующего издания.

В работе использован материал некоторых учебников и монографий, список которых приведен в конце книги.

В **главе 1** приведены основополагающие законы и уравнения механики жидкости и газа. Рассмотрены ламинарное и турбулентное течения. Вводится понятие пристенного пограничного слоя. Приведены дифференциальные уравнения (уравнения Прандтля) и интегральные соотношения пограничного слоя.

В **главе 2** подробно описаны процессы переноса в ламинарном пограничном слое. Дано точное решение для коэффициентов трения и теплообмена и его сопоставление с результатом расчета по интегральному методу. Рассмотрено изменение течения в случае проницаемости поверхности при вдуве и отсосе газа в пограничном слое.

Глава 3 посвящена турбулентному пограничному слою. Вначале кратко излагается переход от ламинарного течения к турбулентному. Приведены критические значения критериев Рейнольдса, при которых происходит изменение режима течения. Отмечено изменение характеристик пограничного слоя, коэффициентов теплоотдачи и трения в переходной области.

Описаны дифференциальные уравнения турбулентного пограничного слоя. Рассмотрены особенности распределения скоростей и температур в пограничном слое, установлены законы трения и теплообмена. Приведены полуэмпирические гипотезы для расчета турбулентных течений.

В **главе 4** рассмотрена асимптотическая теория турбулентного пограничного слоя С.С. Кутателадзе и А.И. Леонтьева. Изложены основы теории относительных законов трения и теплообмена, которые были разработаны С.С. Кутателадзе и А.И. Леонтьевым. Приведен расчет турбулентного пограничного слоя с учетом различных возмущающих факторов, в частности, таких, как сжимаемость и неизотермичность газового потока, поперечный поток вещества и др.

В **главе 5** описаны гидродинамические методы тепловой защиты поверхностей от воздействия высокотемпературных и химически активных потоков (газовые завесы). Рассмотрены разные способы организации газовых завес. Приведены методы расчета эффективности тепловой защиты как адиабатических стенок, так и поверхностей, через которые осуществляется теплообмен. Описано воздействие на качество охлаждения различных возмущающих факторов: неизотермичности, сжимаемости, вдува инородного газа и др.

В **главе 6** рассмотрен турбулентный пограничный слой с химическими реакциями. Описаны гетерогенные и гомогенные реакции. Дан метод расчета теплообмена в пограничном слое с химическими реакциями, приведено сопоставление с экспериментом. Рассмотрен теплообмен при вдуве инертного газа через пористую реагирующую поверхность и при наличии газовой завесы.

Глава 7 посвящена краткому анализу некоторых дифференциальных моделей турбулентности, или моделей турбулентности второго приближения. Рассмотрен принцип замыкания осредненных уравнений турбулентного движения путем введения дополнительных дифференциальных уравнений переноса турбулентных характеристик: кинетической энергии турбулентности k , диссипации энергии ϵ и др. Отмечены возможности и ограничения некоторых дифференциальных моделей турбулентности.

Настоящее издание может быть полезно аспирантам и научным сотрудникам, занимающимся вопросами конвективного теплообмена в авиационной и аэрокосмической технике.

Авторы признательны своим коллегам по Институту теплофизики СО РАН, принимавшим участие в проведении научных исследований и внесшим творческий вклад в полученные результаты.

Авторы выражают благодарность В.В. Лукашову и В.В. Терехову за участие в подготовке разделов 6.2, 6.3 и 7 рукописи.



ВВЕДЕНИЕ

В связи с бурным развитием новой техники все большее значение в инженерных разработках приобретают вопросы тепло- и массообмена. Инженера в таких случаях в первую очередь интересуют сопротивление движению тела, потоки теплоты и вещества, распределение скоростей, температур и концентраций.

В настоящее время в термогидродинамике исследования ведутся и теоретически, и экспериментально. Такое разделение зачастую условно, так как полученные результаты дополняют друг друга. В то же время в области механики жидкости и газа теория и эксперимент не всегда дополняли друг друга. В конце прошлого столетия связь между ними была нарушена и учение о механике жидкости развивалось в двух направлениях, почти не связанных между собой.

Теоретическая гидроаэродинамика этого периода рассматривала течения невязкой (так называемой идеальной) жидкости, которые описывались уравнениями Эйлера. Уравнения течения вязкой жидкости (уравнения Навье–Стокса) не поддавались решению в силу больших математических трудностей (за исключением некоторых простых частных задач). Многие результаты классической гидроаэродинамики противоречили опыту, особенно в задачах, связанных с определением сопротивления движению тел. В этом случае, например, теория идеальной жидкости показывает, что тело, равномерно движущееся в неограниченной жидкости, не испытывает никакого сопротивления (парадокс Даламбера). В связи с этим классическая гидроаэродинамика не имела для практики большого значения, что побудило инженеров создать для решения важных проблем, выдвигавшихся быстро развивающейся техникой, свою собственную науку о движении жидкости, так называемую гидравлику. Эта наука носила ярко выраженный эмпирический характер и отличалась от теоретической гидродинамики своими методами.

В 1904 году Л. Прандтль нашел путь, позволивший объединить далеко отошедшие друг от друга ветви науки о движении жидкости, сблизить теорию и эксперимент. Кроме того, связав теорию с практикой, Прандтль положил начало новому направлению в гидрогазо-

динамике, развитие которого привело к неожиданным успехам. Это направление получило название *теория пограничного слоя*.

Прандтль показал, что течение в окрестности тела можно разделить на две области:

1) область очень тонкого слоя вблизи тела – пограничный (пристенный) слой, где трение играет существенную роль и необходимо использовать уравнения динамики вязкой жидкости

2) область течения вне этого слоя, где трением можно пренебречь и справедливы уравнения идеальной жидкости.

Эта гипотеза, с одной стороны, позволила получить физически наглядное объяснение важной роли вязкости в проблеме сопротивления, а с другой стороны, дала возможность преодолеть математические трудности при исследовании течений жидкости с трением.

На практике за толщину *динамического пограничного слоя* δ принимается расстояние от стенки y , при котором скорость жидкости U достигает значения $0,99 U_0$. Температура меняется так же быстро по y вблизи поверхности – от температуры стенки $T_{ст}$ (индекс ст относится к значению на стенке) до температуры внешнего потока T_0 , которую, как и U_0 , часто можно считать независимой от y . Область большого температурного градиента называют *тепловым пограничным слоем* δ_T (рис. 1.1). Если жидкость имеет большую теплопроводность, то тепловой пограничный слой толще динамического, а если теплопроводность жидкости мала, то динамический пограничный слой толще теплового.

Если вблизи поверхности изменяется концентрация какого-либо химического компонента от значения $C_{ст}$ до C_0 , то говорят о *диффузионном пограничном слое*. Его толщина δ_d так же, как и толщина теплового пограничного слоя δ_T , может быть больше или меньше, чем толщина динамического пограничного слоя.

Благодаря существенному вкладу, который внес Т. Карман, предложив в 1921 году простой приближенный (интегральный) метод расчета пограничного слоя, идеи теории пограничного слоя быстро распространились в кругах инженеров и заняли заслуженное место в разнообразных практических приложениях.

Учение о теплообмене, особенно о конвективном, вначале тоже было эмпирической наукой. Бурное развитие авиационной и ракетно-космической техники привело к объединению газодинамики и теплообмена. Во многих случаях эти задачи раздельно решать просто невозможно.

В настоящее время конструктор сверхзвукового летательного аппарата должен непременно проводить не только аэродинамический расчет, но и полный тепловой расчет. При достижении скоростей полета 1...5 км/с расчет нагревания и методов тепловой защиты конструкций является решающим.

Очень серьезную задачу представляет охлаждение камер сгорания, сопел, лопаток газовых турбин в реактивных двигателях. Высокие температуры и большие тепловые потоки потребовали, с одной стороны, перехода к новым материалам и, с другой стороны, интенсивного охлаждения конструкций, что приводит к утяжелению двигателей и снижению экономичности. Все это дало толчок для разработки совершенно новых и более экономичных методов охлаждения: пористого, завесного охлаждения, применения теплозащитных конструкций.

Причина нагрева поверхностей при больших скоростях полета заключается в том, что при обтекании тела воздушным потоком частицы газа, примыкающие к стенке, тормозятся у нее, образуя пограничный слой. Процесс торможения частиц вследствие трения сопровождается выделением тепла – переходом кинетической энергии потока в тепловую, что ведет к нагреванию газа.

По аналогии с термином «звуковой барьер» в литературе встречается термин «тепловой барьер». Первый связан с резким увеличением сопротивления при числе Маха, близком к единице, второй – с возрастанием температуры стенки. Например, при числе Маха $M \approx 5$ температура поверхности может достигать порядка 1500 К. При этом даже стальные конструкции должны защищаться керамическими покрытиями. При еще больших значениях числа Маха вообще невозможно создать неохлаждаемую конструкцию.

В камерах сгорания и соплах реактивных двигателей тепловые потоки могут достигать огромных значений. Достаточно сказать, что температура продуктов сгорания в ЖРД и РДТТ составляет примерно 3500 К.

Очень серьезные проблемы, связанные с теплопередачей и массообменом, возникают в ракетной технике при скоростях полета 6...7 км/с. При входе в атмосферу поверхности ракет интенсивно нагреваются, происходит плавление и горение материала стенки. Как видно, в таких случаях задачи гидродинамики тесно переплетаются с задачами тепломассообмена.



Глава I

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

1.1. ЗАКОНЫ ПЕРЕНОСА ИМПУЛЬСА, ТЕПЛОТЫ И ВЕЩЕСТВА

Прежде чем приступить к рассмотрению явлений и законов газогидромеханики, напомним кратко основные термины и определения, которыми оперирует эта часть физики.

В механике жидкостей и газов в большинстве случаев жидкость и газ рассматривают как *сплошные среды (континуумы)*, непрерывно распределенные в занимаемом ими объеме, забывая о том, что на самом деле эти вещества состоят из отдельных молекул. Различие между жидкостями и газами с точки зрения механики сводится в основном к различию в их *сжимаемости*. Под этим термином понимают способность тела изменять объем при постоянной массе. Жидкости подвержены сжатию в небольшой степени, газы – наоборот, изменяют свой объем сравнительно легко. Сжимаемость можно характеризовать *коэффициентом объемного сжатия (расширения)*

$$\beta = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial z},$$
 представляющим собой относительное изменение объема при изменении давления ($z = p$), температуры ($z = T$) или при совместном их действии. Так, в соответствии с уравнением состояния идеального газа для изотермического сжатия ($T = \text{const}$)

$$\beta_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = 1/p, \text{ для изобарического сжатия } (p = \text{const}) \quad \beta_p = 1/T.$$

Опытным путем было замечено, что если попытаться произвести сжатие газа малым, но резким повышением давления, то возмущение давления распространяется в виде волны. Скорость распространения такого слабого возмущения – скорость звука a_* – является вполне определенной величиной, зависящей лишь от темпе-

ратуры газа; она тесно связана со сжимаемостью и характеризует упругие свойства среды:

$$a_* = (dp/d\rho)^{1/2} = (kR_0T)^{1/2}.$$

Здесь k – отношение теплоемкостей; $k = c_p/c_v$; R_0 – удельная газовая постоянная; ρ – плотность среды. Для воздуха $k = 1,41$, $R_0 = 287$ Дж/кг·К) и $a_* = 20,15 \sqrt{T}$.

С коэффициентом объемного расширения β_T скорость звука связана соотношением

$$\beta_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = -\rho \left(\frac{\partial(1/\rho)}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{1}{\rho a_*^2}. \quad (1.1)$$

Отсюда видно, что скорость звука меньше у более сжимаемых сред.

Если рассматривается несжимаемая среда ($\rho = \text{const}$, $\beta_T = 0$), к которой с некоторым приближением можно отнести капельные жидкости, то в этом случае употребляют термины *гидродинамика* или *гидромеханика*. При описании течения газов с небольшим уровнем скоростей (меньше 150 м/с) зачастую можно пренебречь сжимаемостью газа и считать плотность ρ постоянной. Поэтому *аэродинамика* малых скоростей описывается уравнениями гидродинамики. Прикладную гидродинамику называют *гидравликой*.

При решении задач, где эффектами сжимаемости нельзя пренебречь (околозвуковые и сверхзвуковые скорости), используют уравнения *газодинамики*. Большие сверхзвуковые и гиперзвуковые скорости ($M = U/a_* > 10$) привели к созданию новой дисциплины – *аэротермодинамики*.

Изучая законы переноса в потоках жидкостей и газов, рассматривают три величины: векторная – *импульс*, или *количество движения*, и две скалярные – *теплота* и *вещество*. В движущемся потоке в общем случае наблюдается неоднородность таких величин, как скорость, температура и концентрация вещества. Вследствие этой неоднородности в среде возникают явления переноса импульса, теплоты и вещества. Как и всякие другие теории, теория конвективного теплообмена базируется на ряде гипотез. Эти гипотезы были высказаны Ньютоном, Фурье и Фиком на основании **обобщения опытных фактов**. Затем они были подтверждены выводами молекулярно-кинетической теории и получили в молекулярной физике название *законов переноса*.

Для простоты будем рассматривать двумерное течение несжимаемой жидкости вдоль пластины (рис. 1.1). Представим, что на пластине имеются участки: адиабатический I, нагреваемый II и участок, где наблюдается диффузия материала стенки (например, сублимация нафталинового покрытия) III.

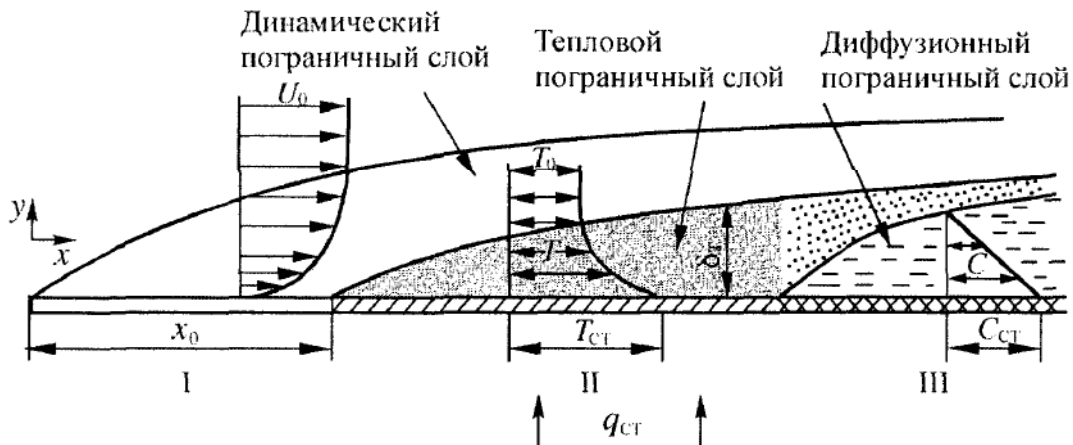


Рис. 1.1. Пограничный слой на пластине: адиабатический участок (I), нагретый участок (II), участок сублимации (III)

I. В соответствии с *законом Ньютона* напряжение трения между двумя соседними слоями жидкости пропорционально градиенту скорости, т.е., грубо говоря, зависят от разности скоростей этих слоев:

$$\tau = \mu \frac{dU}{dy}. \quad (1.2)$$

Коэффициент пропорциональности μ в этом выражении называется *динамической вязкостью* или коэффициентом внутреннего трения газа. Иногда удобно пользоваться *кинематической вязкостью* $\nu = \mu/\rho$.

Жидкости, для которых закон Ньютона не выполняется, называются *неньютоновскими*, а их течения – *реологическими*.

II. *Закон теплопроводности Фурье* гласит, что плотность теплового потока, передаваемого путем **теплопроводности**, т.е. в результате взаимодействия молекул, пропорциональна градиенту температуры:

$$q = -\lambda \frac{dT}{dy}. \quad (1.3)$$

Знак «минус» указывает на то, что энергия переносится в направлении снижения температуры. Коэффициент пропорциональности λ в этом соотношении называется *теплопроводностью*.

В этом законе часто, так же как и в законе Ньютона, пользуются другой физической величиной, а именно *температуропроводностью*, $\alpha = \lambda / \rho c_p$).

Закон Фурье представляет собой простейшую форму общего закона переноса энергии и является строгим, если рассматриваемая система однородна во всех отношениях, за исключением наличия градиента температуры. Если такая однородность не соблюдается, то на теплопроводность оказывают влияние градиенты и других параметров: концентрация, давления. Эффект, связанный с переносом энтальпии диффундирующим веществом, называется *диффузионной теплопроводностью* или *эффектом Дюфо*. В этом случае

$$q = -\lambda \frac{dT}{dy} + f \left(\frac{dC_i}{dy} \right). \quad (1.4)$$

Однако применительно к течениям в пограничных слоях роль эффектов от градиентов концентраций давления незначительна ($\approx 5\%$).

III. Процесс переноса вещества при диффузии описывается *законом Фика*

$$j_d = -D_i \frac{dC_i}{dy}, \quad (1.5)$$

где j_d – плотность диффузионного потока вещества; D_i – коэффициент диффузии; C_i – массовая концентрация i -го компонента. Знак «минус» указывает на то, что диффузионный поток вещества направлен в сторону, противоположную градиенту концентраций – в сторону уменьшения концентрации рассматриваемого компонента.

Закон Фика строго выполняется лишь для систем с одним градиентом концентрации, т.е. в этом случае не учитываются возможные эффекты термодиффузии и бародиффузии, называемые градиентами температуры и давления соответственно. Кроме того, закон Фика в виде уравнения (1.5) справедлив лишь для бинарной смеси. Он может выполняться и для многокомпонентной смеси при условии, что бинарные коэффициенты диффузии всех пар веществ одинаковы.

Законы переноса (1.2) – (1.5) были установлены опытным путем до их обоснования и вывода из молекулярно-кинетической теории, которая позволила установить, что внешнее сходство выражений этих законов обусловлено общностью для всех этих процессов молекулярного механизма перемешивания молекул в процессе их хаотического движения.

Из упрощенной молекулярно-кинетической теории газа следует, что теплота и количество движения «диффундируют» совершенно одинаковым образом, путем соударения молекул. Коэффициент такой «диффузии» определяется простой зависимостью

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} \langle l \rangle ,$$

где $\bar{v}$ – средняя скорость хаотического (теплого) движения молекул; $\langle l \rangle$ – средняя длина свободного пробега; D – коэффициент переноса.

В законе переноса импульса $D = \nu$, при переносе теплоты $D = \lambda / \rho c_p = a$. Проиллюстрируем общность законов переноса (табл. 1.1).

Т а б л и ц а 1.1

Переносимая субстанция	Коэффициент D , $\text{м}^2/\text{с}$	Определяющий градиент
τ	ν	$\rho \partial U / \partial y$
q	a	$-\rho c_p \partial T / \partial y$
j	D_i	$-\partial C / \partial y$

Как видно из табл. 1.1, коэффициенты ν , a , D_i имеют одинаковую размерность $\text{м}^2/\text{с}$, а ниже покажем, что их значения для газов близки между собой. Таким образом, коэффициенты ν и a можно условно назвать коэффициентами «диффузии скорости и температуры». Это характеризует *единство физических процессов переноса импульса, теплоты и вещества*.

Путем деления коэффициентов переноса друг на друга можно образовать три безразмерных комплекса, характеризующих собой физические свойства жидкости или газа:

$$\text{Pr} = \nu / a = \mu c_p / \lambda - \text{число Прандтля} , \quad (1.6)$$

$$\text{Sc} = \nu / D = \mu / \rho D - \text{число Шмидта} , \quad (1.7)$$

$$\text{Le} = \text{Pr} / \text{Sc} = D / a = \rho D c_p / \lambda - \text{число Льюиса} . \quad (1.8)$$

Как следует из **упрощенной** молекулярно-кинетической теории, для газов значения этих чисел равны 1. Для реальных газов они могут отличаться от единицы.

В табл. 1.2 приведены некоторые из названных выше коэффициентов и комплексов для ряда веществ. В дальнейшем мы будем обращаться к этой таблице, поэтому рекомендуем читателю заострить на ней внимание.

Таблица 1.2

Вещество (жид- кость или газ)	t , °C	ρ , кг/м ³	$\mu \cdot 10^3$, Н·с/м ²	$\nu \cdot 10^6$, м ² /с	λ , Вт/(м·°C)	$\alpha \cdot 10^7$, м ² /с	$c_p \cdot 10^{-3}$, Дж/(кг·°C)	P_r
Вода	0	1002,28	1,78	1,788	0,552	1,31	4,22	13,7
	20	1000,52	1,01	1,006	0,597	1,43	4,18	7,03
	100	960,63	0,31	0,31	0,680	1,68	4,18	1,75
Воздух	0	1,29	0,017	13,0	0,022	169,69	1,005	0,76
	20	1,21	0,018	14,9	0,026	210,60	1,006	0,71
	100	0,94	0,002	21,8	0,030	315,98	1,010	0,69
Ртуть	0	13628,2	1,69	0,124	8,20	42,99	0,140	0,029
	20	13579,0	1,55	0,114	8,69	46,06	0,139	0,024
	100	13384,6	1,24	0,093	10,51	57,16	0,137	0,016
Масло моторное	0	899,12	3848	4280	0,147	0,911	1,796	46980
	20	888,23	799,4	900	0,145	0,872	1,88	10400
	100	840,01	17,1	20,3	0,137	0,738	2,219	276
Фреон CCl ₂ F ₂	-20	1460,57	0,345	0,235	0,071	0,539	0,907	4,4
	20	1330,18	0,263	0,198	0,073	0,557	0,935	3,5
	50	1215,96	0,231	0,190	0,067	0,545	1,022	3,5

1.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ, ЭНЕРГИИ И ДИФфуЗИИ

Вывод дифференциальных уравнений движения, энергии и диффузии достаточно громоздок. Он приводится в курсах аэродинамики и теплопередачи (см., например, [1,2]). Поэтому мы выпишем эти уравнения в готовом виде и поясним лишь основные принципы их получения.

При выводе дифференциальных уравнений движения жидкости (уравнений Навье – Стокса) используется основной закон механического движения $\Sigma F = ma$ – второй закон Ньютона.

Общее уравнение движения единицы объема вязкой жидкости с постоянными физическими свойствами ($\rho = \text{const}$; $\mu = \text{const}$) можно независимо от системы координат представить в векторной форме (жирным шрифтом обозначены векторные величины):

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\mathbf{grad} p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{F}^* . \quad (1.9)$$

Здесь слева – произведение массы единичного объема ρ на ускорение $D\mathbf{V}/Dt$ ($\mathbf{V}$ – вектор скорости), справа – сумма всех внешних сил, вызываемых градиентом давления ∇p , силами вязкости $\mu \nabla^2 \mathbf{V}$ и $\mathbf{F}$ – массовыми силами (силой тяжести или силами других полей). Эти величины измеряются в ньютонах на метр кубический (Н/м^3), поскольку уравнение (1.9) записано для единицы объема.

В левой части уравнения $D\mathbf{V}/Dt$ – полная, или субстанциальная, производная от скорости, равная сумме локальной составляющей $\partial \mathbf{V}/\partial t$, учитывающей нестационарный характер течения, и конвективной (переносной) составляющей. Например, для двумерного течения полная производная от продольной составляющей скорости $U = f(t, x, y)$ имеет вид

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} , \quad (1.10)$$

так как $\partial x/\partial t = U$, $\partial y/\partial t = V$.

Для наглядности будем рассматривать двумерное стационарное движение несжимаемого газа с постоянными физическими свойствами. Для этих условий из (1.9) и (1.10) следуют два уравнения для направлений x и y :

*

В уравнении мы ввели некоторые математические сокращения, часто используемые в гидромеханике: ∇ – (набла) – *оператор Гамильтона*. Его выражение в декартовых координатах имеет вид

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} .$$

Если после оператора стоит скалярная величина, то он обозначает вектор с проекциями на оси координат $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ и называется градиентом. Например, $\nabla p = (\partial p/\partial x) \mathbf{i} + (\partial p/\partial y) \mathbf{j} + (\partial p/\partial z) \mathbf{k} = \mathbf{grad} p$. Здесь p – скалярная величина.

Если под знаком ∇ будет стоять векторная величина, например скорость $\mathbf{V}$, то она представляет собой скаляр $\nabla \mathbf{V} = \text{div } \mathbf{V} = \partial V_x/\partial x + \partial V_y/\partial y + \partial V_z/\partial z$.

$\nabla^2 = \nabla \nabla$ называется оператором Лапласа. Если он относится к скалярной величине p , то $\nabla p = \nabla^2 p = \partial^2 p/\partial x^2 + \partial^2 p/\partial y^2 + \partial^2 p/\partial z^2$ – скаляр, если он применяется к вектору $\mathbf{V}$, то будет также вектором:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{V} = \Delta V_x \mathbf{i} + \Delta V_y \mathbf{j} + \Delta V_z \mathbf{k} = & \left(\partial^2 V_x / \partial x^2 + \partial^2 V_x / \partial y^2 + \partial^2 V_x / \partial z^2 \right) \mathbf{i} + \\ & + \left(\partial^2 V_y / \partial x^2 + \partial^2 V_y / \partial y^2 + \partial^2 V_y / \partial z^2 \right) \mathbf{j} + \left(\partial^2 V_z / \partial x^2 + \partial^2 V_z / \partial y^2 + \partial^2 V_z / \partial z^2 \right) \mathbf{k} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + X, \\ \rho \left(U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + Y.\end{aligned}\quad (1.11)$$

Здесь X и Y – массовые силы, действующие в направлении x и y . Уравнения (1.11) представляют собой одну из записей уравнений Навье – Стокса. Если полагать жидкость невязкой ($\mu = 0$), то уравнения Навье – Стокса переходят в уравнения Эйлера.

Уравнение неразрывности для рассматриваемого двумерного стационарного случая имеет вид

$$\frac{\partial \rho U}{\partial x} + \frac{\partial \rho V}{\partial y} = 0, \text{ или } \operatorname{div}(\rho V) = 0. \quad (1.12)$$

Это уравнение легко получить, рассмотрев баланс массы для элемента жидкости (рис. 1.2, а). Изменение массового потока жидкости в направлении x должно быть равно его изменению в направлении y с обратным знаком, исходя из закона сохранения массы.

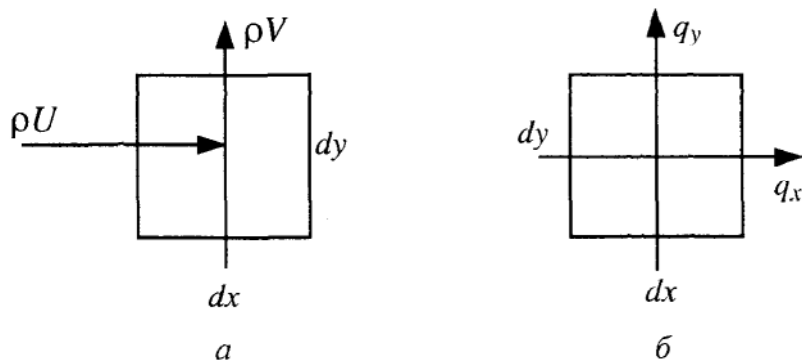


Рис. 1.2. Баланс массы (а) и температуры (б) для элемента жидкости

Вывод дифференциального уравнения энергии основан на использовании первого начала термодинамики, которое утверждает, что изменение во времени полной энергии объема жидкости равно работе внешних массовых и поверхностных сил в единицу времени плюс количество теплоты, подведенной за то же время извне. В учебниках [1, 2 и др.] приводится подробный вывод этого уравнения; здесь мы представим его в окончательной форме применительно к рассматриваемому течению:

$$\rho c_p \left(U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (1.13)$$

Аналогично выглядит для рассматриваемого случая и **дифференциальное уравнение диффузии**:

$$\rho \left(U \frac{\partial C_i}{\partial x} + V \frac{\partial C_i}{\partial y} \right) = D \left(\frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_i}{\partial y^2} \right). \quad (1.14)$$

Следует сказать, что эти уравнения записаны для случая, когда нет объемного тепловыделения d_v (в уравнении энергии) и в потоке отсутствуют химические реакции.

Поясним механизм получения этих уравнений с помощью несколько упрощенного, но физически достаточно ясного приема. Рассмотрим баланс энергии для элемента жидкости со сторонами dx и dy (рис. 1.2,б).

При движении жидкости перенос энергии и вещества происходит не только под действием градиентов температуры $(-\lambda \partial T / \partial n)$ и концентрации $(-D \partial C_i / \partial n)$, но и совместно с движущейся жидкостью. Такой перенос, как известно, получил название *конвекции*. Итак, имеем теплоту и массоперенос за счет молекулярного механизма, плюс макроскопический перенос с движущейся жидкостью. Тогда для переноса теплоты в направлениях x и y можем записать:

$$q_x = \rho U c_p T - \lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = \rho V c_p T - \lambda \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (1.15)$$

Здесь $\rho U c_p T$ – член, учитывающий конвективный перенос теплоты; $\lambda \partial T / \partial x$ – перенос теплоты теплопроводностью.

В силу закона сохранения энергии, примененного к рассматриваемому элементу, изменение потока энергии в направлении x равно таковому в направлении y с обратным знаком, т.е.

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} = -\frac{\partial q_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0. \quad (1.16)$$

Продифференцируем выражение (1.15):

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} = \rho c_p \frac{\partial (UT)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c_p U \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p T \frac{\partial U}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial y} = \rho c_p \frac{\partial (VT)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \rho c_p V \frac{\partial T}{\partial y} + \rho c_p T \frac{\partial V}{\partial y} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$$

Сложим полученные уравнения почленно, учитывая при этом уравнение неразрывности (1.12) и уравнение (1.16):

$$\rho c_p \left(U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right).$$

Как видим, получили уравнение (1.13). Используя аналогичный прием, можно получить дифференциальное уравнение диффузии (1.14). При этом нужно рассматривать поток вещества i -го компонента смеси $j_i = \rho U C_i - \rho D \partial C_i / \partial x$, который определяется также макроскопическим конвективным переносом и диффузией.

К системе дифференциальных уравнений движения (1.11), неразрывности (1.12), энергии (1.13) и диффузии (1.14) добавляется еще уравнение состояния, которое для идеального газа имеет вид

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \text{ или } p = \rho R_0 T, \quad (1.17)$$

где m – масса газа; μ – молярная масса; $R = 8,315$ Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная.

Массовыми силами (X и Y) в уравнениях движения (1.11) во многих случаях можно пренебречь или же они задаются (например, сила тяжести). Тогда при постоянных значениях c_p , μ , λ , D получаем **замкнутую** систему из шести уравнений (1.11)...(1.14) и (1.17) с шестью неизвестными U , V , T , C_i , p и ρ .

Для полной физической определенности решения полученной системы дифференциальных уравнений должны быть заданы граничные условия. Для рассматриваемой системы уравнений они обычно записываются в следующем виде:

$$\text{при } y = 0: \quad U = 0, \quad V = V_{\text{ст}}, \quad T = T_{\text{ст}}, \quad C_i = (C_i)_{\text{ст}};$$

$$\text{при } y = \infty: \quad U = U_0, \quad V = 0, \quad T = T_0, \quad C_i = (C_i)_0.$$

В случае решения нестационарных задач к граничным условиям необходимо добавить еще временные условия.

Аналитическое решение полной системы дифференциальных уравнений связано с исключительно большими математическими трудностями и возможно только для некоторых простых частных случаев, таких, как течение Куэтта (течение между двумя плоскими стенками), установившееся течение в плоском или цилиндрическом канале. Для этих случаев уравнения Навье – Стокса очень заметно упрощаются путем отбрасывания некоторых членов. Это упрощение достигается пренебрежением действия тех или иных сил. К примеру, если пренебречь действием сил вязкости, а учитывать только

инерционные члены (конвективные члены в левой части уравнения движения), то рассматривать будем тем самым движение идеальной жидкости. Если же силы вязкости велики и пренебрегают действием инерционных сил (левая часть уравнения движения отбрасывается), то рассматривают так называемые «медленные» или «ползущие» течения:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right).$$

Такое приближение справедливо при малых числах Рейнольдса $Re < 1$.

Как известно, число Re характеризует собой отношение сил инерции к силам вязкости. Поскольку этот критерий один из важнейших в гидроаэромеханике, остановимся на нем более подробно. Поясним его смысл на примере одномерного стационарного движения. Сила инерции, отнесенная к единице объема, в этом случае имеет вид

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \rho \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \rho U \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Если за масштабы скорости U и координаты x принять U_0 и l_0 , то масштаб силы инерции, действующей на объем l_0^3 ,

$$F_{\text{инер}} = \rho \frac{U_0^2}{l_0} l_0^3 = \rho U_0^2 l_0^2.$$

Напряжение вязкого трения имеет вид $\tau = \mu \partial U / \partial y$. Принимая те же масштабы для скорости и координаты и учитывая, что напряжение τ – это сила, отнесенная к единице площади поверхности, получаем масштаб вязкости сил:

$$F_{\text{вязк}} = \tau l_0^2 = \mu \frac{U_0}{l_0} l_0^2 = \mu U_0 l_0.$$

Тогда отношение сил

$$F_{\text{инер}} / F_{\text{вязк}} = \frac{\rho U_0 l_0}{\mu} = \frac{U_0 l_0}{\nu} = Re$$

представляет собой безразмерное число, названное по имени гидродинамика Осборна Рейнольдса (1883 г.) *числом Рейнольдса*. Это число **характеризует собой гидромеханическое подобие течений**.

Особый интерес для практики представляют течения жидкостей и газов с малой вязкостью ν , например воды и воздуха. Вязкость, в силу своей малости, проявляется здесь вблизи стенки. Поэтому такие течения рассматривают не как течения идеальной жидкости, а как течения с большими числами Рейнольдса.

1.3. ЛАМИНАРНОЕ И ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЯ

Как впервые показал Рейнольдс, изучая движение воды в трубах и каналах, следует различать два режима течения жидкости: ламинарный и турбулентный.

Ламинарное течение представляет собой движение слоев жидкости относительно друг друга (слоистое течение). При достаточно высоких числах Рейнольдса течение перестает быть упорядоченным. Возникает сильное перемешивание, которое легко сделать видимым, если ввести в поток окрашенную струйку жидкости. Впервые это сделал Рейнольдс. При ламинарном течении окрашенная жидкость движется в виде резко очерченной струйки. Как только течение становится *турбулентным*, эта струйка расплывается и равномерно окрашивает всю движущуюся в трубе жидкость.

Проведенный опыт показывает, что при турбулентном течении на основное течение, происходящее в направлении оси трубы, налагаются поперечные движения. Они приводят к перемешиванию жидкости, и распределение скоростей по поперечному сечению трубы становится более равномерным, чем при ламинарном течении (рис. 1.3).

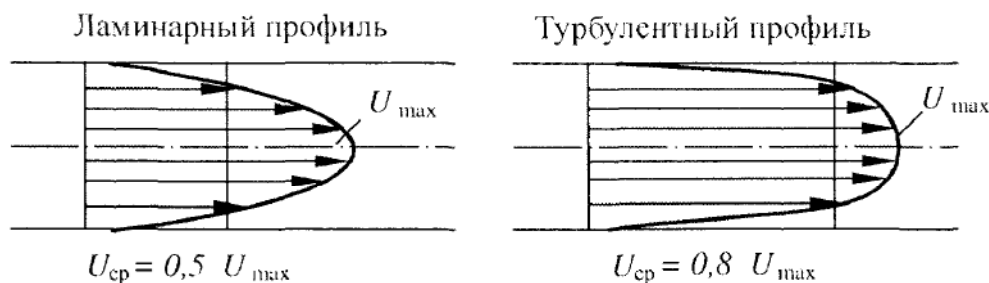


Рис. 1.3. Профили скорости в трубе

Как установил Рейнольдс, для течений в гладкой трубе со средней скоростью $U_{\text{ср}}$

$$\text{Re}_{\text{кр}} = (U_{\text{ср}} d / \nu) = 2300.$$

При $\text{Re} < \text{Re}_{\text{кр}}$ любые возмущения, возникающие в потоке, с течением времени затухают и не могут изменить общий ламинарный характер течения и наоборот, при $\text{Re} > \text{Re}_{\text{кр}}$ любые, даже весьма малые, возмущения самопроизвольно возрастают и приводят к неустойчивости течения, т.е. к *турбулизации* потока. При этом переход от одной формы течения к другой происходит не мгновенно, а на некотором переходном участке.

1.4. ПОНЯТИЕ О ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Перейдем к рассмотрению предельного случая течения жидкости очень малой вязкости, или в более общем виде случая очень больших чисел Re . Значительные успехи в исследовании движений жидкости при больших числах Re были достигнуты в 1904 г., когда Прандтль показал, как проявляет себя вязкость в этих условиях и как можно упростить дифференциальные уравнения Навье – Стокса, чтобы стало возможным получить их решения.

Прандтль установил, что при течении с большими значениями Re (малые вязкости) весь поток условно может быть разбит на две области.

1. Очень тонкий слой, непосредственно прилегающий к обтекаемому телу, где силы вязкости оказывают существенное влияние на течение, – пограничный слой.

2. Область, где влиянием вязкости можно пренебречь. Она занимает все остальное течение вне пограничного слоя и часто называется «внешним потоком».

В пограничном слое, благодаря его сравнительно малой толщине, уравнения движения могут быть упрощены и легче поддаются решению, чем общие уравнения Навье – Стокса. Во внешнем потоке жидкость можно считать невязкой и ее течение рассчитывать как потенциальное. Как правило, пограничный слой тем тоньше, чем меньше вязкость или чем больше значение Re .

Мы ограничиваемся рассмотрением двумерных течений. В этом случае все величины зависят от двух координат x и y .

Основное допущение теории пограничного слоя состоит в том, что жидкость, непосредственно прилегающая к поверхности тела, считается неподвижной относительно тела – имеет место «прилипание» жидкости. Это допущение справедливо во всех случаях, за исключением течений сильно разреженных газов. Степень разреженности характеризуется отношением длины свободного пробега молекул $\langle l \rangle$ к характерной длине тела L , которое называется числом Кнудсена, $Kn = \langle l \rangle / L$. При числе Кнудсена $Kn < 0,001$ течение газа можно рассматривать как сплошную среду.

В силу вязкости жидкости тормозящее воздействие стенки на поток сказывается и на некотором расстоянии от стенки. Таким образом, динамический пограничный слой можно определить как область, в пределах которой скорость жидкости изменяется от нуля на поверхности до скорости внешнего потенциального течения. Правда, такое определение никакой точной толщины пограничного слоя не дает. Толщиной пограничного слоя δ условно называют расстояние от стенки, на котором скорость U составляет 99 % от скорости набегающего потока, т.е. $\omega = U/U_0 = 0,99$ (см. рис. 1.1).

Для случая течения с теплообменом вводится понятие теплового, или температурного слоя δ_t . *Тепловым пограничным слоем* называется примыкающая к поверхности область течения, в которой происходит изменение температуры жидкости от ее значения на стенке $T_{ст}$ до температуры внешнего потока T_0 . При этом температура стенки и температура жидкости у стенки принимаются равными $(T_{ж})_{ст} = T_{ст}$. Толщины динамического и теплового пограничных слоев в общем случае могут и не совпадать друг с другом. Их отношение зависит от значения числа Прандтля $Pr = \nu/\alpha$, т.е. от соотношения вязкости и температуропроводности: $\delta/\delta_t = f(Pr)$.

При наличии диффузии вводится понятие *диффузионного пограничного слоя*, в котором концентрация примеси изменяется от значения, соответствующего концентрации на стенке, до ее значения в невозмущенном потоке. Соотношение толщин диффузионного и динамического слоев зависит от числа Шмидта, $Sc = \nu/D$, т.е. определяется отношением вязкости и коэффициента диффузии.

Поскольку для газов значения чисел Pr и Sc близки к единице, толщины динамического, теплового и диффузионного слоев близки между собой.

Следует заметить, что методами теории пограничного слоя можно пользоваться не только в случаях внешнего обтекания твердых тел, которые рассматривались на заре возникновения теории и послужили причиной возникновения терминов «внешний поток» и «пограничный слой». Течение жидкости в каналах также представляет собой одну из задач теории пограничного слоя.

На входе в трубу (рис. 1.4) на ее стенке образуется пограничный слой, нарастающий вниз по потоку. Радиус трубы есть верхний предел толщины пограничного слоя. Внутри трубы, вне пограничного слоя, существует внешний поток, который исчезнет, когда пограничные слои сомкнутся. Вниз по потоку за этим сечением не будет внешнего потока, там будет установившееся течение. При этом, как легко видеть, по мере нарастания пограничного слоя на начальном участке должно изменяться и движение во внешнем потоке. Таким образом, начальный участок дает нам пример существенного взаимного влияния пограничного слоя и внешнего потока.

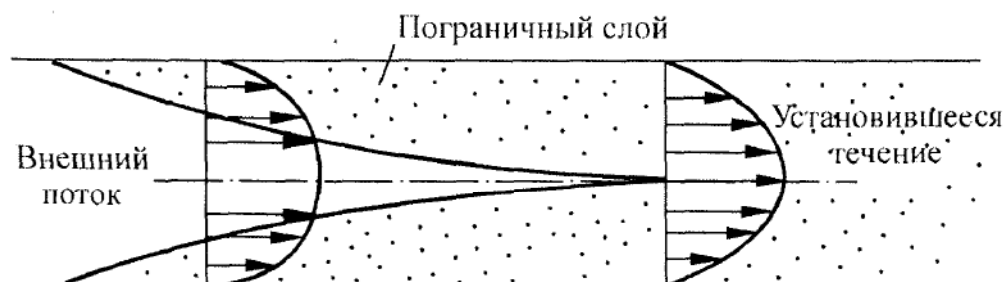


Рис. 1.4. Пограничный слой на входе в трубу

Струя жидкости, вытекающей в пространство, заполненное другой жидкостью, также является примером пограничного слоя (рис. 1.5). Процесс смешения в этом случае также происходит в вязком пограничном слое.

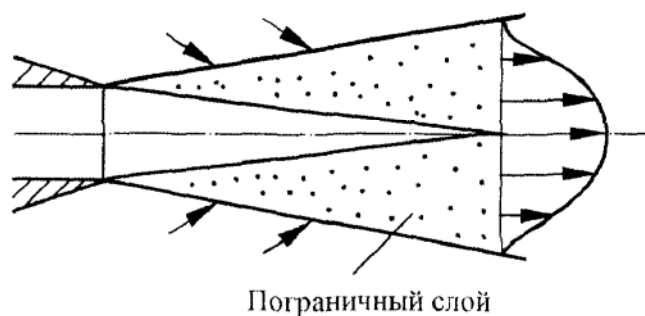


Рис. 1.5. Истечение струи в пространство (затопленная струя)

Как известно, течение в канале или в пограничном слое может быть ламинарным или турбулентным. В технических устройствах преобладающая часть движений происходит при весьма больших числах Re и эти движения являются турбулентными. Поэтому в нашем курсе основное внимание будет уделено анализу турбулентных течений. Кроме того, следует иметь в виду, что для ламинарного пограничного слоя может быть выписана замкнутая система дифференциальных уравнений. Для турбулентного же пограничного слоя эта система не замкнута. Поэтому задачи ламинарного пограничного слоя могут быть решены теоретически, и если получение их решений ограничено, то только математическими трудностями. Для замыкания же системы уравнений турбулентного пограничного слоя приходится строить те или иные физико-математические модели.

Ниже мы рассмотрим некоторые методы решения задач ламинарного пограничного слоя, а пока перейдем к упрощению дифференциальных уравнений движения Навье – Стокса.

1.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ (УРАВНЕНИЯ ПРАНДТЛЯ)

Как уже указывалось, впервые способ упрощения уравнений Навье – Стокса при больших значениях числа Re был предложен Прандтлем в 1904 г. Получаемые при этом дифференциальные уравнения пограничного слоя иногда называют *уравнениями Прандтля*. При упрощениях уравнений Навье – Стокса принимают, что толщина пограничного слоя намного меньше характерного размера тела, $\delta \ll L$.

Произведем упрощение уравнений Навье – Стокса для случая двумерного несжимаемого потока, обтекающего плоскую пластину (см. рис. 1.1):

$$\rho \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right), \quad (1.18)$$

$$\rho \left(U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right). \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0. \quad (1.20)$$

Входящие в эти уравнения параметры U , V , p представляют собой мгновенные (полные) значения скорости и давления. Если течение ламинарно, то мгновенные значения суть средние. Упрощение системы уравнений Навье – Стокса производится на основании оценки порядка величин отдельных членов, входящих в уравнения, и отбрасывания малых. Но количественное сравнение различных величин возможно только в том случае, если они представлены в безразмерной форме.

Перепишем уравнения (1.18)...(1.20) в безразмерной форме, для чего все скорости отнесем к скорости набегающего потока U_0 , а все длины – к характерному размеру тела L , который выберем так, чтобы **порядок безразмерной величины $\partial U'/\partial x'$ не превышал единицы**. Давление p сделаем безразмерным, разделив его на динамический напор ρU_0^2 .

Безразмерные величины примут вид

$$U' = \frac{U}{U_0}; \quad V' = \frac{V}{U_0}; \quad p' = \frac{p}{\rho U_0^2};$$

$$x' = \frac{x}{L}; \quad y' = \frac{y}{L}; \quad \delta' = \frac{\delta}{L}; \quad \text{Re} = \frac{\rho U_0 L}{\mu}.$$

Здесь штрих обозначает безразмерную величину. Подставим в уравнения (2.18)...(1.20) безразмерные величины и получим

$$U' \frac{\partial U'}{\partial x'} + V' \frac{\partial U'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 U'}{(\partial x')^2} + \frac{\partial^2 U'}{(\partial y')^2} \right]; \quad (1.21)$$

$$1 \quad 1 \quad \delta'(1/\delta') \quad 1 \quad (\delta')^2 \quad 1 \quad 1/(\delta')^2$$

$$U' \frac{\partial V'}{\partial x'} + V' \frac{\partial U'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 V'}{(\partial x')^2} + \frac{\partial^2 U'}{(\partial y')^2} \right]; \quad (1.22)$$

$$1 \quad \delta' \quad \delta' \quad 1 \quad (\delta')^2 \quad \delta' \quad 1/\delta'$$

$$\frac{\partial U'}{\partial x'} + \frac{\partial V'}{\partial y'} = 0. \quad (1.23)$$

$$1 \quad 1$$

Оценка порядка величин. Для выяснения сущности оценки рассмотрим простой пример. Если какая-то величина z изменяется от 0 до z_0 , то говорят, что z порядка z_0 .

Поскольку в нашем случае продольная скорость изменяется от $U = 0$ на стенке до $U = U_0$ на внешней границе пограничного слоя, а продольная координата x от нуля до L , их безразмерные величины U' и x' будут порядка 1.

Поперечная же координата y изменяется от 0 до δ , следовательно, ее безразмерное значение y' порядка δ' , но

$$\delta' = \frac{\delta}{L} \ll 1$$

в силу принятого допущения о малости толщины слоя по сравнению с характерным размером тела.

Произведем оценку членов сначала в уравнении неразрывности (1.23). Поскольку величина $\partial U' / \partial x'$ имеет порядок единицы, из уравнения (1.23) следует, что такой же порядок имеет и величина $\partial V' / \partial y'$. Но так как y' порядка δ' , то и поперечная скорость V' имеет порядок δ' :

$$V' \sim \delta' \quad \text{или} \quad \left[\frac{V}{U_0} \sim \frac{\delta}{L} \right], \text{ т.е. } V \ll U_0. \quad (1.24)$$

Отсюда получаем важный вывод, что в пограничном слое поперечная составляющая скорости мала по сравнению с продольной.

Подпишем теперь в уравнениях (1.21) и (1.22) под соответствующими членами оценку порядка их величин. В уравнении (1.21)

$$U' \sim 1; \quad \frac{\partial U'}{\partial x'} \sim 1; \quad V' \sim \delta'; \quad \frac{\partial U'}{\partial y'} \sim \frac{1}{\delta'};$$

$$\frac{\partial^2 U'}{(\partial x')^2} \sim 1; \quad \frac{\partial^2 U'}{(\partial y')^2} \sim \frac{1}{(\delta')^2}.$$

Для того чтобы определить порядок величины $\partial p' / \partial x'$, вспомним, что вне пограничного слоя справедливо уравнение Бернулли, следующее из уравнения (1.21) при $\mu = 0$:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 U_0 \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2}. \quad (1.25)$$

1 1/1

Из этого уравнения видно, что градиент давления $\partial p' / \partial x' \sim 1$. Оценим члены уравнения (1.21), стоящие в скобках:

$$\frac{\partial^2 U'}{(\partial x')^2} \sim 1; \quad \frac{\partial^2 U'}{(\partial y')^2} \sim \frac{1}{(\delta')^2}.$$

Так как $\delta' \ll 1$, то величину $\partial^2 U' / (\partial x')^2$ можно отбросить как малую по сравнению с $\partial^2 U' / (\partial y')^2$. Это очень важное обстоятельство, поскольку, отбросив вторую производную по одной переменной, мы изменяем характер дифференциального уравнения в частных производных. Теперь мы видим, что оставшиеся в правой части силы вязкости будут одного порядка с силами инерции (левая часть) при очень больших числах Re. Оставшийся член в скобках $(1/\text{Re}) \cdot \partial^2 U' / (\partial y')^2$ будут иметь один порядок с инерционными членами, т.е. порядок единицы, при условии

$$\frac{1}{\text{Re}} \sim (\delta')^2. \quad (1.26)$$

Условие (1.26) выполняется, когда число Рейнольдса велико. Таким образом, решения уравнений пограничного слоя представляют собой по существу асимптотические решения для очень больших чисел Рейнольдса. Отметим, что для таких решений из условий (1.26) можно найти порядок толщины динамического пограничного слоя:

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}. \quad (1.27)$$

С учетом (1.24)

$$\frac{V}{U_0} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}.$$

Перейдем к рассмотрению второго уравнения движения (1.22) по направлению y . Порядок величин левой части не требует разъяснения. Порядок градиента давления $\partial p' / \partial y'$ пока не известен. В скобках в правой части можно пренебречь первым членом по сравнению со вторым. Все его оставшиеся члены имеют порядок δ' , в то время как **все остальные после упрощения члены левой части уравнения (1.21) имеют порядок 1**. Поэтому второе уравнение значительно упрощается и из него следует, что $\partial p' / \partial y' \sim \delta'$. Учитывая, что $\delta' \ll 1$, можно принять

$$\frac{\partial p'}{\partial y'} = 0 \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{dp}{dy} = 0}, \quad (1.28)$$

т.е. давление в жидкости поперек пограничного слоя остается постоянным и равным давлению на внешней границе пограничного слоя, которое определяется здесь течением без трения.

Итак, в результате упрощения системы уравнений Навье – Стокса (1.18)...(1.20) можно записать:

$$\rho U \frac{\partial U}{\partial x} + \rho V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}; \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0; \quad (1.30)$$

$$\frac{dp}{dy} = 0. \quad (1.31)$$

Видно, что первое уравнение существенно упростилось, и теперь мы имеем систему из двух уравнений, а не из трех.

Впервые система уравнений пограничного слоя (1.29)...(1.31) была решена Блазиусом для продольного обтекания пластины при $dp/dx = 0$. Он нашел распределение скорости поперек пограничного слоя и касательные напряжения на стенке. Однако даже для этого простого случая решение оказывается сложным и громоздким. Мы его рассмотрим несколько позже.

Все сделанные нами выводы справедливы и в случае течения газа с тепломассообменом. Однако при этом к системе уравнений движения (1.29) и (1.31) должны быть добавлены уравнения энергии и диффузии пограничного слоя. Произведя аналогичные операции по оценке членов, получим

$$\rho c_p U \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial q}{\partial y}; \quad (1.32)$$

$$\rho U \frac{\partial C_i}{\partial x} + \rho V \frac{\partial C_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D \frac{\partial C_i}{\partial y} \right). \quad (1.33)$$

В правой части отброшены вторые производные по продольной координате:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 C_i}{\partial y^2}.$$

Здесь следует обратить внимание на то, что при упрощениях полных дифференциальных уравнений энергии и диффузии можно оценить порядок толщины теплового и диффузионного слоев. Поясним это на примере уравнения энергии. После приведения к безразмерному виду имеем:

$$U' \frac{\partial \Theta}{\partial x'} + V' \frac{\partial \Theta}{\partial y'} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \Theta}{(\partial x')^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{(\partial y')^2} \right]. \quad (1.34)$$

Здесь $\Theta = (T - T_0)/(T_{\text{ст}} - T_0)$ – безразмерная температура.

В этом случае в правой части появляется новый безразмерный критерий, называемый числом Пекле,

$$\frac{1}{\text{Pe}} = \frac{\lambda}{\rho c_p U_0 L} = \frac{a}{U_0 L} = \frac{a}{v} \frac{v}{U_0 L} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}}, \quad \left(a = \frac{\lambda}{\rho c_p} \right)$$

и равный произведению $\text{Pe} = \text{RePr} = U_0 L/a$. **Число Пекле представляет собой некоторый тепловой аналог числа Рейнольдса, характеризующий соотношение конвективного переноса теплоты и переноса теплоты теплопроводностью.**

Если теперь произвести оценку порядка членов в уравнении энергии (1.34), как это делалось с уравнениями движения, то увидим, что перенос теплоты вследствие теплопроводности (в правой части) будет одного порядка с переносом теплоты конвекцией (слева), если

$$\frac{1}{\text{Pe}} = \frac{1}{\text{RePr}} \sim (\delta_r)^2; \quad \frac{\delta_r}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{RePr}}}. \quad (1.35)$$

Сравнив (1.35) с соотношением (1.27) для толщины динамического слоя, получим

$$\frac{\delta_T}{\delta} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Pr}}}. \quad (1.36)$$

Это выражение дает наглядное толкование влияния числа Прандтля. Оно показывает, что в газах толщина теплового пограничного слоя близка к толщине динамического, так как для газов число Pr близко к единице, в жидкостях же ($\text{Pr} = 10 \dots 1000$, см. табл. 1.2) тепловой слой тоньше динамического.

Аналогичное соотношение можно получить и для толщины диффузионного слоя:

$$\frac{\delta_d}{\delta} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Sc}}}. \quad (1.37)$$

Выше приведены рассуждения для **стационарных течений**. Почти все потоки, встречающиеся в технике, с достаточной степенью точности можно считать стационарными.

Для нестационарного течения уравнение движения имеет вид

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} + \rho U \frac{\partial U}{\partial x} + \rho V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial y} \right). \quad (1.38)$$

Количественная оценка квазистационарности течения в пограничном слое может быть сделана путем сравнения первого члена этого уравнения со вторым. Скорость U имеет порядок U_0 , градиент скорости

$$\frac{\partial U}{\partial x} \sim \frac{U_0}{L}, \quad \text{а} \quad \frac{\partial U}{\partial t} \sim \frac{U}{t}.$$

Первым членом в уравнении (1.38) можно пренебречь, если

$$\frac{\partial U}{\partial t} \ll U \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \frac{U_0}{t} \ll \frac{U_0^2}{L} \quad \text{или} \quad \boxed{t \gg \frac{L}{U_0}}. \quad (1.39)$$

Для тела размером $L = 0,3$ м, обтекаемого потоком со скоростью $U_0 = 30$ м/с, течение можно рассматривать как квазистационарное, когда изменения в нем имеют место за период времени, больший, чем $L/U_0 = 0,01$ с. Если же изменения происходят за меньший промежуток времени, то течение рассматривают как нестационарное. Изменения течений за такое короткое время встречаются редко. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать стационарные течения.

1.6. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Полученные дифференциальные уравнения пограничного слоя проще соответствующих полных дифференциальных уравнений движения, энергии и диффузии вязкой жидкости. Тем не менее точное решение системы дифференциальных уравнений пограничного слоя возможно лишь для ограниченного круга задач с достаточно простыми граничными условиями, когда дифференциальные уравнения пограничного слоя в частных производных могут быть сведены к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Примером может служить рассмотренное выше решение Блазиуса для плоской стенки.

Для решения более общих задач применяют численные методы. Однако процесс расчета зачастую становится громоздким и трудоемким. В этой связи большое значение приобретают приближенные методы решения указанных уравнений, основанные на применении так называемых *интегральных соотношений импульсов, энергии и массы*. Интегральные соотношения получают в результате интегрирования дифференциальных уравнений движения, энергии и диффузии по толщине пограничного слоя. Интегральные уравнения пограничного слоя являются балансовыми для рассматриваемого сечения пограничного слоя и по структуре точными, по крайней мере, в рамках теории пограничного слоя. Приближенный характер решения этих уравнений обусловлен способом их замыкания.

Метод интегральных соотношений отличается большой простотой, и во всех случаях разумного применения он дает удовлетворительные результаты.

1.6.1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ СООТНОШЕНИЕ ИМПУЛЬСОВ

Интегральное уравнение количества движения (импульсов) получают из дифференциальных уравнений движения и неразрывности

$$\rho U \frac{\partial U}{\partial x} + \rho V \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial y} \right), \quad (1.40)$$

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial y} = 0 \quad (1.41)$$

с помощью интегрирования по толщине пограничного слоя. Это уравнение выражает закон сохранения импульса жидкости, протекающей через данное сечение пограничного слоя.

Уравнение движения (1.40) с учетом уравнения неразрывности (1.41) и уравнения Бернулли для градиента давления $-\partial p / \partial x = \rho_0 U_0 \partial U_0 / \partial x$ можно представить в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho U^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho UV) = \rho_0 U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y}. \quad (1.42)$$

Умножив все члены уравнения неразрывности (1.41) на значения скорости на внешней границе пограничного слоя U_0 , получим

$$\frac{\partial(\rho U U_0)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V U_0)}{\partial y} = \rho U \frac{\partial U_0}{\partial x}, \quad (1.43)$$

при этом учтено, что

$$U_0 \left[\frac{\partial(\rho U)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial y} \right] = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial U_0}{\partial y} = 0.$$

Вычитая почленно из уравнения (1.43) выражение (1.42), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho U (U_0 - U) + \frac{\partial}{\partial y} \rho V (U_0 - U) + (\rho_0 U_0 - \rho U) \frac{\partial U_0}{\partial x} = -\frac{\partial \tau}{\partial y}. \quad (1.44)$$

Проинтегрируем теперь каждый член преобразованного уравнения движения (1.44) поперек пограничного слоя:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} [\rho U (U_0 - U)] dy + \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y} [\rho V (U_0 - U)] dy + \\ & + \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} [(\rho_0 U_0 - \rho U)] dy = \int_0^\infty \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right) dy. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Допуская возможность замены порядка дифференцирования и интегрирования при бесконечном верхнем пределе, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \int_0^\infty \rho U (U_0 - U) dy + [\rho V (U_0 - U)] \Big|_{y=0}^{y=\infty} + \\ & + \frac{dU_0}{dx} \int_0^\infty (\rho_0 U_0 - \rho U) dy = \int_0^\infty (-d\tau). \end{aligned} \quad (1.46)$$

Будем здесь рассматривать общий случай обтекания проницаемой стенки, когда значение поперечной скорости на ней отлично от нуля (рис. 1.6).

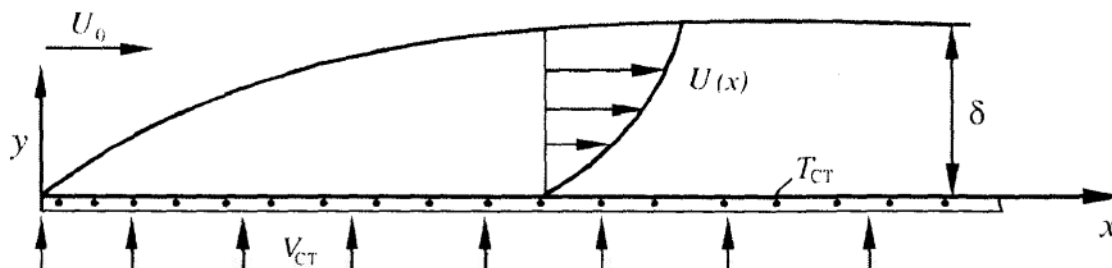


Рис. 1.6. Пограничный слой на проницаемой пластине

Стенка является проницаемой. Такая постановка задачи имеет место при пористом охлаждении поверхности, при испарении или конденсации на стенке, на выгорающей поверхности. Во всех этих примерах на стенке существует поперечный поток вещества, т.е. $(\rho V)_{ст} \neq 0$. При этом граничные условия принимают вид:

$$\begin{aligned} \text{при } y = 0: \quad U = 0, \quad V = V_{ст}, \quad \rho = \rho_{ст}, \quad \tau = \tau_{ст}; \\ \text{при } y = 0: \quad U = U_0, \quad \rho = \rho_0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \tau = 0. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Тогда отдельные члены уравнения (1.46) можно представить в виде

$$\left[\rho V (U_0 - U) \right] \Big|_{y=0}^{y=\infty} = -\rho_{ст} V_{ст} U_0; \quad \int_0^{\infty} -\partial \tau = \tau_{ст}; \quad (1.48)$$

$$\int_0^{\infty} \rho U (U_0 - U) dy = \rho_0 U_0^2 \int_0^{\infty} \frac{\rho U}{\rho_0 U_0} \left(1 - \frac{U}{U_0} \right) dy = \rho_0 U_0^2 \delta^{**}; \quad (1.49)$$

$$\int_0^{\infty} (\rho_0 U_0 - \rho U) dy = \rho_0 U_0 \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\rho U}{\rho_0 U_0} \right) dy = \rho_0 U_0 \delta^*. \quad (1.50)$$

Верхний предел интегрирования в выражениях (1.49) и (1.50) может быть заменен толщиной пограничного слоя (так как выше нее интегралы равны нулю), тогда выражения для толщины вытеснения и толщины потери импульса принимают вид

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho U}{\rho_0 U_0}\right) dy; \quad \delta^{**} = \int_0^\delta \frac{\rho U}{\rho_0 U_0} \left(1 - \frac{U}{U_0}\right) dy. \quad (1.51)$$

(Ниже мы вернемся к этим важным параметрам и дадим их физическое толкование.)

Подставляя полученные выражения (1.48)...(1.50) в уравнение (1.46), получаем интегральное соотношение импульсов пограничного слоя (его иногда называют *уравнением Кармана*, впервые получившим его):

$$\frac{d}{dx}(\rho_0 U_0^2 \delta^{**}) + \rho_0 U_0 \delta^* \frac{dU_0}{dx} - \rho_{\text{ст}} V_{\text{ст}} U_0 = \tau_{\text{ст}}. \quad (1.52)$$

При обтекании несжимаемой жидкости $\rho_0 = \text{const}$ после раскрытия производной уравнение импульсов принимает вид

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + (2\delta^{**} + \delta) \frac{1}{U_0} \frac{dU_0}{dx} - \frac{\rho_{\text{ст}} V_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0} = \frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0^2}. \quad (1.53)$$

Уравнению импульсов иногда придают другие формы записи, как, например:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + f(2 + H) - \frac{j_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0} = \frac{c_f}{2}. \quad (1.54)$$

Здесь $c_f/2 = \tau_{\text{ст}}/\rho_0 U_0^2$; $H = \delta^*/\delta^{**}$ – формпараметр пограничного слоя; $f = (\delta^{**}/U_0)/(dU_0/dx)$ – формпараметр, характеризующий аэродинамическую кривизну обтекаемого тела.

Толщина вытеснения δ^* и толщина потери импульса δ^{**} являются важными расчетными характеристиками пограничного слоя. Интегральные характеристики типа δ^* и δ^{**} обладают тем замечательным свойством, что увеличение верхнего предела интегрирования $y > \delta$ практически не изменяет их значения. При экспериментальном определении с достаточно аккуратными измерениями такие характеристики пограничного слоя практически не чувствительны к дальнейшему увеличению точности приборов, в то время как значение толщины пограничного слоя прямо связано с выбором значения $\varepsilon = (U - U_0)/U_0$.

Иначе говоря, для пограничного слоя можно записать

$$\int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\rho U}{\rho_0 U_0} \right) dy = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\rho U}{\rho_0 U_0} \right) dy.$$

Из равенства

$$\rho_0 U_0 \delta^* = \int_0^{\delta, \infty} (\rho_0 U_0 - \rho U) dy$$

следует, что толщину вытеснения можно определить как некоторую часть толщины пограничного слоя (рис. 1.7, а), через которую секундный массовый расход идеальной жидкости равен потере расхода через пограничный слой за счет тормозящего действия сил трения. Как видно из рисунка, толщина вытеснения δ^* , в отличие от толщины пограничного слоя δ , — величина вполне определенная.

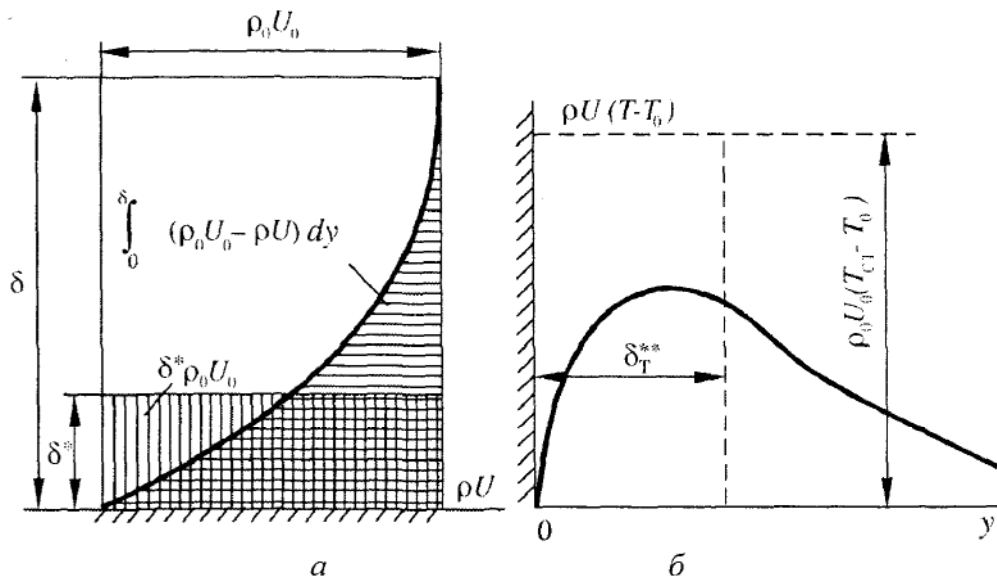


Рис. 1.7. К определению толщины вытеснения (а) и толщины потери энергии (б)

Перепишем выражение для толщины потери импульса δ^{**} :

$$\rho_0 U_0^2 \delta^{**} = \int_0^{\delta, \infty} \rho U (U_0 - U) dy.$$

Можно по аналогии с толщиной вытеснения определить толщину потери импульса δ^{**} как толщину, через которую при течении идеальной жидкости проходило бы количество движения, равное потере количества движения в сечении пограничного слоя за счет тормозящего действия сил трения.

В случае обтекания осесимметричных тел вращения при $\delta \ll R_x$ интегральное уравнение импульсов имеет вид

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{\delta^*}{U_0} \frac{dU_0}{dx} (2 + H) + \delta^{**} \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dx} + \frac{1}{R_x} \frac{dR_x}{dx} \right) - \frac{j_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0} = \frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0^2}, \quad (1.55)$$

$$\text{где } \delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho U}{\rho_0 U_0} \right) \left(1 \pm \frac{y}{R_x} \cos \beta \right) dy; \quad \delta^{**} = \int_0^\delta \frac{\rho U}{\rho_0 U_0} \left(1 - \frac{U}{U_0} \right) \left(1 \pm \frac{y}{R_x} \cos \beta \right) dy;$$

R_x – радиус поперечного сечения тела; β – угол между касательной к меридиану и осью; x и y – оси координат, направленные соответственно: вдоль меридианального сечения a и по нормали к профилю. Знак (+) берется при внешнем обтекании, (–) – при внутреннем (рис. 1.8).

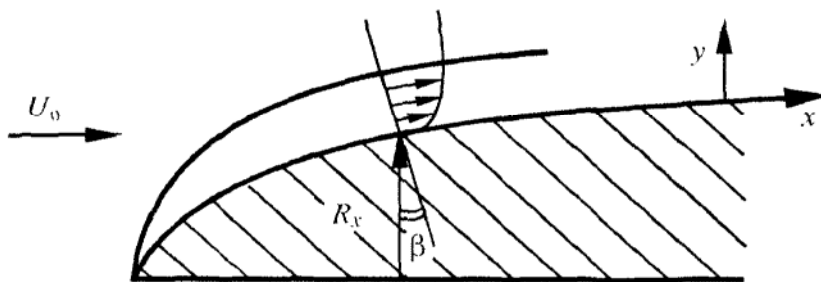


Рис. 1.8. Пограничный слой на теле вращения

1.6.2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ СООТНОШЕНИЕ ЭНЕРГИИ

Интегральные уравнения энергии (и диффузии) пограничного слоя выводятся аналогичным образом. Для этого дифференциальное уравнение энергии

$$\rho c_p U \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) = - \frac{\partial q}{\partial y} \quad (1.56)$$

преобразуем с помощью уравнения неразрывности

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial y} = 0 \quad (1.57)$$

к следующему виду:

$$c_p \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho U T + \frac{\partial}{\partial y} \rho V T \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (1.58)$$

Умножим уравнение неразрывности на температуру газа вне пограничного слоя T_0 , которая является постоянной величиной:

$$c_p \frac{\partial}{\partial x}(\rho U T_0) + c_p \frac{\partial}{\partial y}(\rho V T_0) = 0. \quad (1.59)$$

В случае течения сжимаемого газа используется температура торможения основного потока. Здесь же для простоты мы рассмотрим течение несжимаемого газа с постоянными физическими свойствами $\rho, c_p, \lambda = \text{const}$.

Вычтем почленно из уравнения неразрывности уравнение энергии и проинтегрируем поперек пограничного слоя от $y = 0$ до $y = \infty$:

$$\begin{aligned} c_p \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} [\rho U (T_0 - T)] dy + c_p \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} [\rho V (T_0 - T)] dy = \\ = - \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy = - \int_0^{\infty} \frac{\partial q}{\partial y} dy. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Используя граничные условия:

$$\text{при } y = 0: U = 0, \quad V = V_{\text{ст}}, \quad \rho = \rho_{\text{ст}}, \quad T = T_{\text{ст}};$$

$$\text{при } y = \infty: U = U_0, \quad T = T_0,$$

преобразуем интегралы полученного уравнения (1.60):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} [\rho V (T_0 - T)] dy = [\rho V (T_0 - T)] \Big|_0^{\infty} = \rho_{\text{ст}} V_{\text{ст}} (T - T_{\text{ст}}), \\ - \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy = - \int_0^{\infty} dq = q_{\text{ст}}. \end{aligned}$$

Вводя понятие толщины потери энергии

$$\delta_T^{**} = \int_0^{\infty} \frac{\rho U (T_0 - T)}{\rho_0 U_0 (T_0 - T_{\text{ст}})} dy = \int_0^{\infty} \frac{\rho U}{\rho_0 U_0} \left(1 - \frac{T - T_{\text{ст}}}{T_0 - T_{\text{ст}}} \right) dy, \quad (1.61)$$

физический смысл которой ясен из рис. 1.7,б, перепишем интеграл в левой части уравнения (1.60) в следующем виде:

$$\int_0^{\infty} \rho U (T_0 - T) dy = \delta_T^{**} \rho_0 U_0 (T_0 - T_{\text{ст}}). \quad (1.62)$$

Как и при выводе интегрального уравнения импульсов, считаем, что операции дифференцирования и интегрирования можно поменять местами. Подставляя полученные значения интегралов в исходное уравнение (1.60), получаем

$$\frac{d}{dx}(\delta_{\tau}^{**} \rho_0 U_0 \Delta T) = \rho_{\text{ст}} V_{\text{ст}} \Delta T = \frac{q_{\text{ст}}}{c_p} \quad (1.63)$$

или

$$\rho_0 U_0 \Delta T \frac{d\delta_{\tau}^{**}}{dx} + \delta_{\tau}^{**} \left[\frac{d(\rho_0 U_0)}{dx} \Delta T + \rho_0 U_0 \frac{d\Delta T}{dx} \right] - j_{\text{ст}} \Delta T = \frac{q_{\text{ст}}}{c_p}.$$

Введя число Стентона

$$\text{St} = \frac{q_{\text{ст}}}{c_{p_0} \rho_0 U_0 \Delta T} = \frac{\alpha}{c_{p_0} \rho_0 U_0}, \quad (1.64)$$

преобразуем уравнение энергии к окончательному виду:

$$\frac{d\delta_{\tau}^{**}}{dx} + \delta_{\tau}^{**} \left[\frac{1}{\rho_0 U_0} \frac{d(\rho_0 U_0)}{dx} + \frac{1}{\Delta T} \frac{d\Delta T}{dx} \right] - \frac{j_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0} = \text{St}. \quad (1.65)$$

Если использовать сразу дифференциальное уравнение энергии, записанное через энтальпии, то и интегральное уравнение получим в аналогичной форме, где вместо значений температур будут стоять соответствующие значения энтальпий.

Следует отметить, что интегральное соотношение энергии впервые было получено Г.Н. Кружилиным.

В случае обтекания осесимметричных тел в интегральное соотношение энергии дополнительно войдет, как и в уравнение импульсов, радиус R_x :

$$\frac{d\delta_{\tau}^{**}}{dx} + \delta_{\tau}^{**} \left[\frac{1}{\rho_0 U_0} \frac{d(\rho_0 U_0)}{dx} + \frac{1}{\Delta T} \frac{d\Delta T}{dx} + \frac{1}{R_x} \frac{dR_x}{dx} \right] - \frac{j_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0} = \text{St}, \quad (1.66)$$

где толщина потери энергии с учетом кривизны поверхности

$$\delta_{\tau}^{**} = \int_0^{\infty} \frac{\rho U}{\rho_0 U_0} \left(1 - \frac{T - T_{\text{ст}}}{T_0 - T_{\text{ст}}} \right) \left(1 \pm \frac{y}{R_x} \cos \beta \right) dy.$$

1.6.3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ

Интегрируя уравнение диффузии i -го компонента по сечению пограничного слоя

$$\rho U \frac{\partial C_i}{\partial y} + \rho V \frac{\partial C_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \rho D \frac{\partial C_i}{\partial y}$$

и учитывая уравнение неразрывности, получаем совершенно аналогичное (1.65) интегральное соотношение диффузии пограничного слоя:

$$\frac{d\delta_d^{**}}{dx} + \delta_d^{**} \left[\frac{1}{\rho_0 U_0} \frac{d(\rho_0 U_0)}{dx} + \frac{1}{\Delta C_i} \frac{d\Delta C_i}{dx} \right] - \frac{j_{ст}}{\rho_0 U_0} = St_d. \quad (1.67)$$

Здесь $\Delta C_i = (C_i)_0 - (C_i)_{ст}$ – разность массовых концентраций i -го компонента в основном потоке и на стенке: $(C_i)_0 = \rho_{i0} / \rho_0$, $(C_i)_{ст} = \rho_{ист} / \rho_0$;

$$\delta_d^{**} = \int_0^\infty \frac{\rho U}{\rho_0 U_0} \left(1 - \frac{C_i - (C_i)_{ст}}{(C_i)_0 - (C_i)_{ст}} \right) dy \quad (1.68)$$

– толщина потери вещества;

$$St_d = \frac{j_{стд}}{\rho_0 U_0 \Delta C_i} = \frac{-\rho D (\partial C_i / \partial y)_{ст}}{\rho_0 U_0 \Delta C_i} \quad (1.69)$$

– диффузионное число Стентона.

1.6.4. ПОЛУЧЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БАЛАНСОВЫМ МЕТОДОМ

Интегральные соотношения можно также получить, рассматривая баланс количества движения, энергии и вещества для объема жидкости, выделенного двумя сечениями в пограничном слое. Поскольку при этом не закладывается никаких гипотез о механизме течения (ламинарного или турбулентного), сами интегральные уравнения импульсов, энергии и диффузии справедливы как для ламинарного, так и для турбулентного течения в пограничном слое.

Составление интегральных соотношений балансовым методом является очень наглядным. Рассмотрим это на примере уравнения энергии для простейшего течения газа с постоянными физическими свойствами вдоль плоской стенки в случае подвода теплоты к стенке по закону $q_{ст} = \text{const} \neq f(x)$ (рис. 1.9).

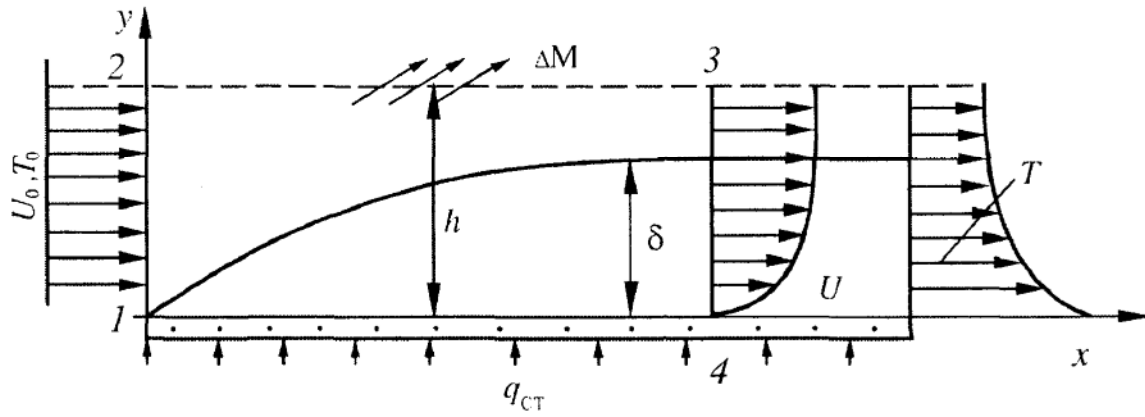


Рис. 1.9. К выводу уравнения энергии балансовым методом

Выделим контрольный объем жидкости сечениями 1-2 и 3-4, кроме того, проведем контрольную поверхность, параллельную стенке, на высоте $h > \delta \sim \delta_t$, большей толщины пограничного слоя. Составим баланс тепловой энергии для рассматриваемого объема. Ширина этого объема в плоскости, перпендикулярной рисунку, равна единице. ΔM – масса жидкости, вытекающей из контура за счет того, что расход через сечение 3-4 меньше расхода через сечение 1-2.

Приравняем количество теплоты, поступающей в контур, к количеству уносимой теплоты:

$$\int_0^h \rho_0 c_{p_0} T_0 U_0 dy + q_{ст} x = \int_0^h \rho U c_p T dy + \Delta V c_{p_0} T_0. \quad (1.70)$$

Масса жидкости, вытекающей из контура за счет подтормаживания силами трения:

$$\Delta M = \int_0^h \rho_0 U_0 dy - \int_0^h \rho U dy. \quad (1.71)$$

Соответственно имеем

$$\begin{aligned} \int_0^h \rho_0 U_0 c_{p_0} T_0 dy + q_{ст} x &= \int_0^h \rho U c_p T dy + \\ &+ \int_0^h \rho_0 U_0 c_{p_0} T_0 dy - \int_0^h \rho U c_{p_0} T_0 dy; \\ \int_0^h \rho_0 U_0 c_{p_0} (T - T_0) dy &= q_{ст} x \end{aligned} \quad (1.72)$$

или

$$\rho_0 U_0 c_{p_0} \Delta T \int_0^h \frac{\rho U}{\rho_0 U_0} \frac{T - T_0}{T_{\text{ст}} - T_0} dy = q_{\text{ст}} x; \quad (1.73)$$

при этом $\rho_0 U_0 c_p = \text{const}$, $\Delta T = f(x)$. Тогда, дифференцируя выражение (1.73), имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\Delta T \delta_{\tau}^{**}) &= \frac{q_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0 c_{p_0}}, \\ \frac{d\delta_{\tau}^{**}}{dx} + \frac{\delta_{\tau}^{**}}{\Delta T} \frac{d\Delta T}{dx} &= \frac{q_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0 c_{p_0} \Delta T} = \text{St}. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Как видим, уравнение (1.74) полностью совпадает с уравнением (1.65) для обтекания плоской непроницаемой пластины безградиентным потоком, т.е. при

$$j_{\text{ст}} = 0, \quad \frac{d(\rho_0 U_0)}{dx} = 0.$$

Аналогично, применяя к рассматриваемому участку пограничного слоя законы сохранения количества движения и сохранения массы i -го компонента, можно получить интегральные уравнения импульсов и диффузии пограничного слоя.

1.6.5. УСЛОВИЯ ЗАМЫКАНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В интегральные уравнения импульсов, энергии и диффузии входят величины δ^{**} , δ_{τ}^{**} , δ_d^{**} , представляющие собой некоторые физические масштабы пограничного слоя. Удобство использования указанных величин в качестве масштабов заключается в том, что в отличие от толщины пограничного слоя интегральные толщины – величины вполне определенные, их значения достаточно точно находятся из эксперимента. В этой связи удобно записать характерные числа Re динамического, теплового и диффузионного пограничных слоев в следующем виде:

$$\text{Re}^{**} = \rho_0 U_0 \delta^{**} / \mu_0; \text{Re}_{\tau}^{**} = \rho_0 U_0 \delta_{\tau}^{**} / \mu_0; \text{Re}_d^{**} = \rho_0 U_0 \delta_d^{**} / \mu_0.$$

Если их ввести в соответствующие интегральные соотношения, полученные выше, после несложных преобразований получим:

$$\frac{d Re^{**}}{d\bar{x}} + \frac{Re^{**}}{U_0} \frac{dU_0}{d\bar{x}} (1+H) = \left(\frac{c_f}{2} + \frac{j_{ст}}{\rho_0 U_0} \right) Re_L; \quad (1.75)$$

$$\frac{d Re_{\tau}^{**}}{d\bar{x}} + \frac{Re_{\tau}^{**}}{\Delta T} \frac{d\Delta T}{d\bar{x}} = \left(St + \frac{j_{ст}}{\rho_0 U_0} \right) Re_L; \quad (1.76)$$

$$\frac{d Re_{д}^{**}}{d\bar{x}} + \frac{Re_{д}^{**}}{\Delta C_i} \frac{d\Delta C_i}{d\bar{x}} = \left(St_{д} + \frac{j_{ст}}{\rho_0 U_0} \right) Re_L, \quad (1.77)$$

где $Re_L = \rho_0 U_0 L / \mu_0$ – число Re, построенное по характерному размеру тела: $\bar{x} = x / L$ – безразмерная координата; $H = \delta^* / \delta^{**}$.

Полученные интегральные уравнения могут быть решены, если известны так называемые законы сопротивления, теплообмена и массообмена, которые в общем случае можно представить в таком виде:

$$c_f = f_1 \left(Re^{**}, f, \frac{T_{ст}}{T_0}, M, j_{ст}, \dots \right), \quad f - \text{формпараметр,}$$

$$St = f_2 \left(Re_{\tau}^{**}, \frac{T_{ст}}{T_0}, M, \dots \right).$$

Вид этих функций прежде всего зависит от режима течения в пограничном слое. Как будет показано несколько позже, для ламинарного течения законы трения и тепломассообмена можно при определенных граничных условиях получить аналитическим путем. Для турбулентного же режима их получают на основании полуэмпирических теорий турбулентности с привлечением экспериментальных данных.

В дальнейшем будет показано, что законы трения и тепломассообмена, записанные в такой форме, консервативны к изменению граничных условий. Это связано с тем, что они построены по локальным характеристикам пограничного слоя, а не по размерам тела. Полученные для «стандартных условий», т.е. для случая безградиентного обтекания пластины потоком газа с постоянными физическими свойствами, они могут быть использованы и в более слож-

ных условиях. Влияние же разнообразных граничных условий достаточно полно учитывается при интегрировании уравнений импульсов, энергии и диффузии.

Если ввести в правую часть интегральных соотношений (1.75)...(1.77) значения коэффициента трения c_{f_0} , теплового St_0 и диффузионного St_{d_0} чисел Стентона, полученных для «стандартных условий», то они примут вид

$$\frac{d Re^{**}}{d \bar{x}} + \frac{Re^{**}}{U_0} \frac{d U_0}{d \bar{x}} (1 + H) = \frac{c_{f_0}}{2} (\Psi + b) Re_L; \quad (1.78)$$

$$\frac{d Re_T^{**}}{d \bar{x}} + \frac{Re_T^{**}}{\Delta T} \frac{d \Delta T}{d \bar{x}} = St_0 (\Psi_T + b_T) Re_L. \quad (1.79)$$

Здесь $b = 2j_{ст}/\rho_0 U_0 c_{f_0}$ – параметр проницаемости стенки, отнесенной к коэффициенту трения в стандартных условиях; $b_T = j_{ст}/\rho_0 U_0 St_0$ – тепловой параметр проницаемости, отнесенный к числу Стентона в стандартных условиях: $\Psi = (c_f/c_{f_0})_{Re^{**}}$ – относительный закон трения и $\Psi_T = (St/St_0)_{Re_T^{**}}$ – относительный закон теплообмена при соответственно одинаковых значениях Re^{**} или Re_T^{**} .

Эти относительные функции теплообмена учитывают влияние температурного фактора, проницаемости стенки, числа Маха и других возмущающих воздействий по сравнению со стандартными условиями.



Г л а в а 2

ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

2.1. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Упрощающие допущения, положенные в основу вывода уравнений пограничного слоя, привели к тому, что стало возможным принимать давление поперек пограничного слоя постоянным: $\partial p / \partial y = 0$, а давление вдоль стенки считать совпадающим с давлением внешнего течения и поэтому рассматривать его как заданную функцию. Эти обстоятельства сделали ненужным уравнение движения в направлении, перпендикулярном к стенке.

Хотя уравнения пограничного слоя значительно проще уравнений Навье – Стокса, все же в математическом отношении они остаются значительно трудными. Точные аналитические решения (с получением расчетных формул) выполнены лишь для сравнительно узкого класса задач, например для струи, см. [1].

Для решения более общих задач применяют численные методы. Если процесс вычисления становится очень трудоемким, имеет смысл попробовать решить задачу приближенными методами, например интегральными. Ниже мы рассмотрим некоторые из этих методов в приложении к задачам ламинарного пограничного слоя.

Автомодельные решения уравнений пограничного слоя. Упрощающие допущения, сделанные при выводе уравнений пограничного слоя, выполняются тем лучше, чем больше число Рейнольдса. Поэтому выясним, каким образом развитие пограничного слоя на заданном теле зависит от числа Рейнольдса. Уравнения движения пограничного слоя в безразмерном виде:

$$U' \frac{\partial U'}{\partial x'} + V' \frac{\partial U'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 U'}{(\partial y')^2}; \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial U'}{\partial x'} + \frac{\partial V'}{\partial y'} = 0. \quad (2.2)$$

При этом граничными условиями будут:

$$U' = V' = 0 \quad \text{при } y' = 0; \quad U' = U'_0(x) \quad \text{при } y = \infty.$$

Из уравнений (2.1) и (2.2) видим, что при заданной форме тела, а следовательно, при заданном потенциальном течении развитие пограничного слоя зависит от числа Re.

Путем дальнейшего преобразования уравнений (2.1) и (2.2) можно привести их к такому виду, который не содержит числа Рейнольдса. В самом деле, положив

$$V'' = V' \sqrt{\text{Re}} = \frac{V}{U_0} \sqrt{\frac{U_0 L}{\nu}},$$

$$y'' = y' \sqrt{\text{Re}} = \frac{y}{U_0} \sqrt{\frac{U_0 L}{\nu}},$$

получим вместо уравнений (2.1) и (2.2) следующие:

$$U' \frac{\partial U'}{\partial x} + V'' \frac{\partial U'}{\partial y''} = - \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\partial^2 U'}{(\partial y'')^2}; \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial U'}{\partial x'} + \frac{\partial V''}{\partial y''} = 0; \quad (2.4)$$

$$U' = V'' = 0 \quad \text{при } y'' = 0;$$

$$U' = U'_0(x) \quad \text{при } y'' = \infty.$$

В уравнениях (2.3) и (2.4) число Re отсутствует. Это означает, что решения системы уравнений (2.3) и (2.4) в координатах $U'(x', y'')$ и $V''(x', y'')$ также не зависят от числа Re. Изменение числа Рейнольдса ведет за собой только аффинное преобразование пограничного слоя, изменяющее поперечную координату и скорость в поперечном направлении в $\sqrt{\text{Re}}$ раз. Иными словами, для заданного тела безразмерные составляющие скорости

$$\frac{U}{U_0} \quad \text{и} \quad \frac{V}{U_0} \sqrt{\frac{U_0 L}{\nu}} \quad (2.5)$$

являются функциями безразмерных координат

$$\frac{x}{L} \quad \text{и} \quad \frac{y}{L} \sqrt{\frac{U_0 L}{\nu}} \sim \frac{y}{\delta},$$

так как

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{\frac{U_0 L}{\nu}}}, \quad (2.6)$$

и эти функции в такой системе координат не зависят от числа Рейнольдса, или, как говорят, автомодельны по отношению к числу Рейнольдса (рис. 2.1).

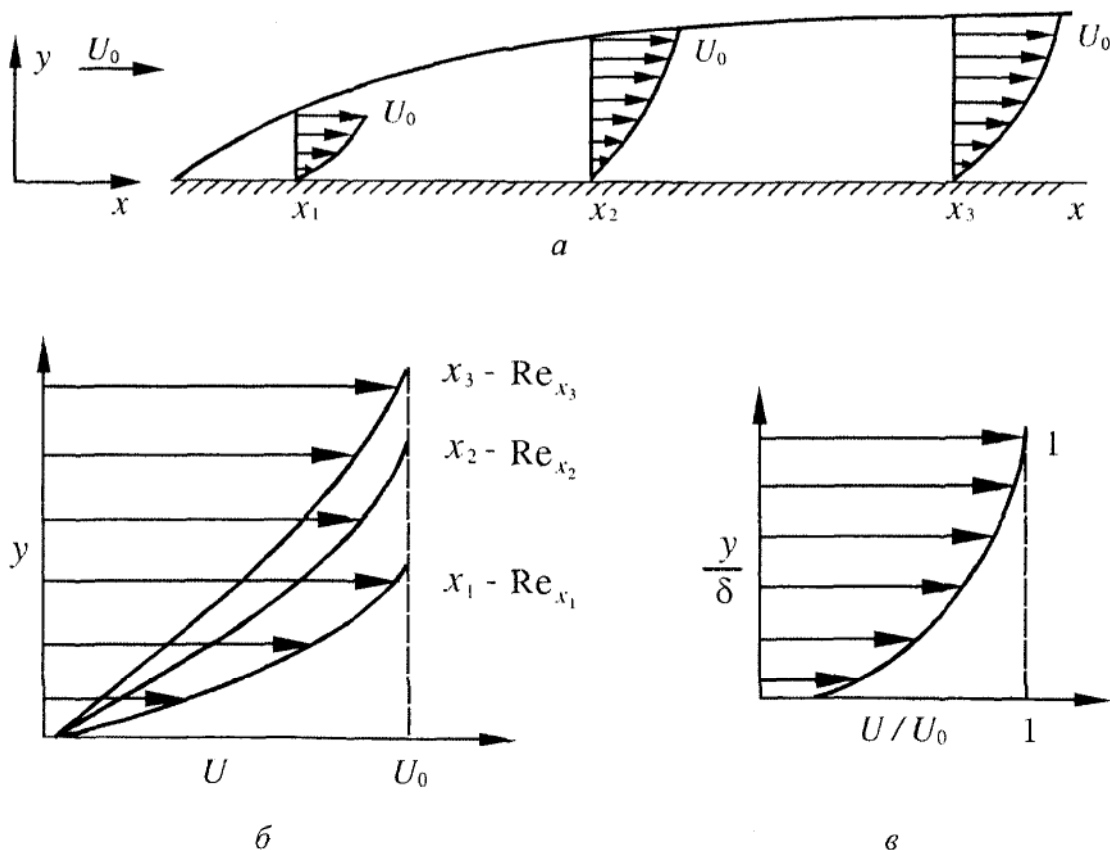


Рис. 2.1. Пограничный слой на плоской стенке: а – схема течения; б – профили скорости в сечениях x_1 , x_2 , x_3 ; в – профиль скорости в безразмерных координатах

Под автомодельными решениями уравнений пограничного слоя (в иностранной литературе часто используется термин «подобные решения») будем понимать такие, для которых продольная составляющая скорости обладает следующим свойством: профили скоростей $U(x, y)$ в двух различных поперечных сечениях x отличаются один от другого только масштабом координат U и y (см. рис. 2.1).

Следовательно, для автомодельных решений профили скоростей во всех сечениях x , перпендикулярных стенке, можно привести к совпадению, если построить их в безразмерном виде, разделив для этого координаты U и y на соответствующие масштабы. Будем называть такие профили скоростей аффинно подобными профилями.

Приведенная схема развития пограничного слоя на пластине дает наглядное представление об этом. За масштаб скорости удобно принять скорость на внешней границе пограничного слоя U_0 , тогда безразмерная скорость U/U_0 в каждом сечении будет изменяться от нуля до единицы. Масштабом для расстояния y в соответствии с соотношением (2.6) может служить некоторая величина, пропорциональная толщине пограничного слоя в рассматриваемом течении.

Вопрос об автомодельных решениях важен прежде всего с математической точки зрения. Если имеются подобные решения, то, как мы ниже увидим, дифференциальные уравнения пограничного слоя, представляющие собой систему уравнений в частных производных, могут быть сведены к одному обыкновенному дифференциальному уравнению, что в математическом отношении означает существенное упрощение.

Одним из примеров автомодельного в указанном смысле решения уравнений пограничного слоя является решение Блазиуса для плоской пластины.

2.2. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЕ. РЕШЕНИЕ БЛАЗИУСА

Простейшим применением уравнений пограничного слоя является течение вдоль плоской пластины. Такое течение было исследовано Блазиусом, что явилось первой иллюстрацией применения уравнений Прандтля.

Так как в рассматриваемом случае скорость потенциального течения постоянна, $U_0 = \text{const}$, то согласно уравнению Бернулли $\partial p / \partial x = \rho U_0 \partial U_0 / \partial x = 0$. Тогда уравнения движения и неразрывности пограничного слоя принимают вид

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}; \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (2.8)$$

причем граничными условиями будут

$$U = V = 0 \quad \text{при} \quad y = 0; \quad U = U_0 \quad \text{при} \quad y = \infty.$$

В поставленной задаче обтекания бесконечной пластины нет характерной длины, поэтому можно предположить, что при определенном образом подобранных масштабах профили продольной скорости подобны между собой на различных расстояниях от передней кромки пластины.

Как было показано выше, в качестве масштабов удобно выбрать: для скорости – скорость потенциального течения U_0 , для поперечной координаты y – толщину пограничного слоя $\delta(x)$, возрастающую с увеличением координаты x . Тогда условие подобия профилей скорости можно записать в виде

$$\frac{U}{U_0} = \varphi(\eta) = \varphi\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad (2.9)$$

причем функция $\varphi(\eta)$ должна быть одной и той же для всех расстояний x от передней кромки пластины.

Ранее [см. уравнение (1.31)], оценивая толщину пограничного слоя, мы нашли

$$\frac{\delta}{x} \sim \frac{1}{\sqrt{U_0 x / \nu}}; \quad \delta \sim \sqrt{\nu x / U_0}; \quad \frac{1}{\delta} \sim \sqrt{U_0 / \nu x}. \quad (2.10)$$

Поэтому за масштаб для y можно принять $\sqrt{\nu x / U_0}$, откуда

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu x / U_0}} \sim y \sqrt{U_0 / \nu x}. \quad (2.11)$$

Часто при интегрировании уравнений пограничного слоя вводят функцию тока $\psi(x, y)$, которая удовлетворяет уравнению неразрывности. Функция тока просто позволяет заменить две составляющие скорости U и V одной функцией. Если определить функцию тока $\psi(x, y)$ таким образом, чтобы

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2.12)$$

то можно легко убедиться, что это определение удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0. \quad (2.13)$$

Следуя Блазиусу, найдем масштаб для функции тока:

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \boxed{\psi = \int_0^y U \, dy}. \quad (2.14)$$

С учетом (2.9) и (2.11) имеем:

$$U = U_0 \varphi(\eta): \quad y = \eta / \sqrt{U_0 / \nu x} = \eta \sqrt{\nu x / U_0}.$$

Подставляя эти значения в (2.14), получим

$$\psi = \int_0^\eta U_0 \varphi(\eta) \sqrt{\nu x / U_0} \, d\eta = \sqrt{\nu x U_0} \int_0^\eta \varphi(\eta) \, d\eta. \quad (2.15)$$

Или можно переписать так:

$$\boxed{\psi = \sqrt{\nu x U_0} \, f(\eta)}, \quad (2.16)$$

где

$$f(\eta) = \int_0^\eta \varphi(\eta) \, d\eta \quad (2.17)$$

– безразмерная функция тока.

Далее с учетом (2.14) и (2.16) выражаем продольную и поперечную скорости через безразмерную функцию тока.

Для продольной скорости

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}. \quad (2.18)$$

С учетом (2.16)

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \sqrt{\nu x U_0} \, f'(\eta), \quad (2.19)$$

где штрих у буквы f обозначает дифференцирование по η :

$$f'(\eta) = \frac{\partial[f(\eta)]}{\partial\eta}.$$

С учетом (2.12)

$$\frac{\partial\eta}{\partial y} = \sqrt{U_0/(\nu x)}. \quad (2.20)$$

Подставив в (2.18) выражения (2.19) и (2.20), получим выражение для продольной составляющей скорости

$$U = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial y} = U_0 f'(\eta). \quad (2.21)$$

Для поперечной скорости имеем с учетом (2.16)

$$\begin{aligned} V &= -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\sqrt{\nu x U_0} f(\eta) \right] = \\ &= -\left[f(\eta) \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\nu x U_0} + \sqrt{\nu x U_0} \frac{\partial f(\eta)}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (2.22)$$

но $\frac{\partial f(\eta)}{\partial x} = \frac{\partial f(\eta)}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial x}$, и тогда

$$V = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\left[f(\eta) \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\nu x U_0} + \sqrt{\nu x U_0} f'(\eta) \frac{\partial\eta}{\partial x} \right]. \quad (2.23)$$

Определим производные в квадратных скобках:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\nu x U_0} &= \sqrt{\nu U_0} \frac{\partial}{\partial x} x^{1/2} = \frac{1}{2} \sqrt{\nu U_0} x^{-1/2} = \frac{1}{2} \sqrt{\nu U_0/x}; \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(y \sqrt{U_0/\nu x} \right) = y \sqrt{U_0/\nu} \frac{\partial}{\partial x} x^{-1/2} = \\ &= -\frac{1}{2} y \sqrt{U_0/\nu} x^{-3/2} = -\frac{1}{2} \frac{y}{x} \sqrt{U_0/\nu x}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Подставляя последние выражения в (2.23), получаем соотношение для поперечной скорости

$$\begin{aligned} V &= -\left[f(\eta) \frac{1}{2} \sqrt{\nu U_0/x} - \sqrt{\nu U_0 x} f'(\eta) \frac{1}{2} \frac{y}{x} \sqrt{U_0/\nu x} \right], \\ &\boxed{V = \frac{1}{2} \sqrt{\nu U_0/x} [f'(\eta)\eta - f(\eta)]} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Подставив (2.21) и (2.25) для продольной U и поперечной V скоростей в уравнение движения (2.7), найдем соотношение для определения безразмерной функции тока $f(\eta)$. Сделаем это подробно: каждый член уравнения (2.7)

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

запишем в новых координатах:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} :$$

$$U = U_0 f' ;$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U_0 \frac{\partial f'}{\partial x} = U_0 \frac{\partial f'}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} =$$

$$= U_0 f'' \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{x} y \sqrt{U_0 / \nu x} \right) = -\frac{1}{2} \frac{U_0}{x} f'' \eta ;$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = U_0 f' \left(-\frac{1}{2} \frac{U_0}{x} f'' \eta \right) = -\frac{U_0^2}{2x} f' f'' \eta .$$

$$V \frac{\partial U}{\partial y} :$$

$V \rightarrow$ см. уравнение (2.25);

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = (U_0 f'') \sqrt{U_0 / \nu x} ;$$

$$\nu \frac{\partial U}{\partial y} = \left(\frac{1}{2} \sqrt{U_0 \nu / x} (f' \eta - f) \right) (U_0 f'' \sqrt{U_0 / \nu x}) = \frac{U_0^2}{2x} f'' (f' \eta - f) ;$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial (U')}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} (U_0 f'' \sqrt{U_0 / \nu x}) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) =$$

$$= U_0 f''' \sqrt{U_0 / \nu x} \sqrt{U_0 / \nu x} = \frac{U_0^2}{\nu x} f''' .$$

После подстановки полученных соотношений в уравнение движения запишем

$$-\frac{U_0^2}{2x} f f' \eta + \frac{U_0^2}{2x} f'' (f' \eta - f) = \nu \frac{U_0^2}{vx} f''', \quad (2.26)$$

или после упрощения

$$2f''' + ff'' = 0. \quad (2.27)$$

Итак, мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение. Граничными условиями на основании равенств (2.9), (2.21), (2.25) будут:

$$\begin{aligned} \text{при } \eta = 0; \quad U = 0, \quad V = 0 &\Rightarrow f' = 0; \quad f = 0; \\ \text{при } \eta = \infty \text{ из (2.21) } U/U_0 = 1 &\Rightarrow f' = 1. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Применив аффинное преобразование (преобразование подобия), определяемое формулами (2.12) для η и (2.16) для функции тока ψ , мы заменили два уравнения в частных производных (2.7) и (2.8) одним обыкновенным дифференциальным уравнением для функции тока. Полученное уравнение – нелинейное, третьего порядка, следовательно, трех граничных условий (2.28) достаточно для полной определенности решения.

Уравнение (2.27) может быть решено либо путем разложения в ряд функции $f(\eta)$, как это сделал Блазиус, либо численными методами. В табл. 2.1 приведены вычисленные Хоуартом значения функции $f(\eta)$ и ее производных в зависимости от поперечной координаты η . Здесь в качестве примера приведены результаты расчета только для некоторых значений η . На самом деле расчеты выполнены в более широком диапазоне η .

Таблица 2.1

$\eta = y \sqrt{U_0 / \nu x}$	$f(\eta)$	$f'(\eta) = U/U_0$	$f''(\eta)$
0	0	0	0,33206
0,2	0,00664	0,06641	0,33199
1,0	0,16557	0,32979	0,32301
2,0	0,65003	0,62977	0,26675
3,0	1,39682	0,84605	0,16136
4,0	2,30576	0,95552	0,06424
5,0	3,28329	0,99155	0,01591
6,0	4,27964	0,99898	0,00240

Результаты решения позволяют вычислить все необходимые характеристики динамического пограничного слоя.

Распределение продольной скорости в соответствии с формулой (2.21) определяется первой производной от безразмерной функции тока

$$\frac{U}{U_0} = f'(\eta). \quad (2.29)$$

На рис. 2.2 расчетная кривая сравнивается с результатами опытов Никурадзе. Опытные точки получены на разных расстояниях от передней кромки пластины ($Re_x = (1 \dots 7,3) \cdot 10^5$).

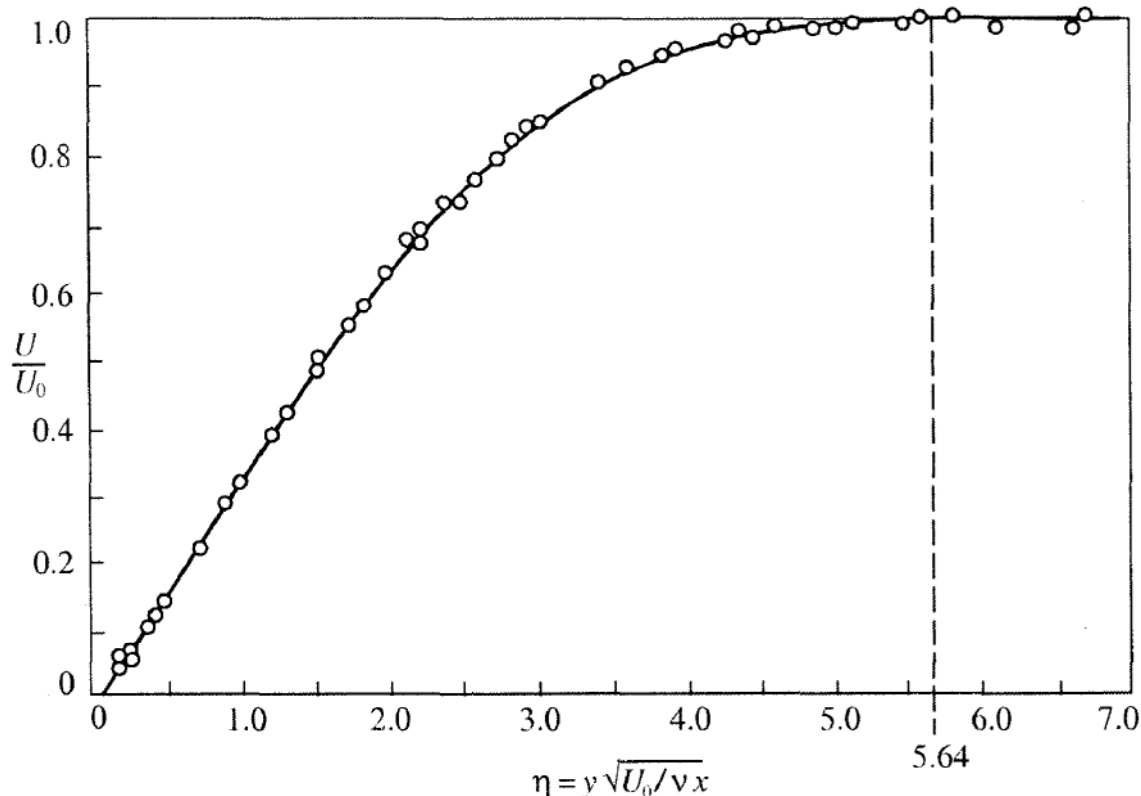


Рис. 2.2. Распределение скоростей в ламинарном пограничном слое на пластине: (o) – по измерениям Никурадзе; (—) – расчет по Блазиусу

Видно, что измерения хорошо подтверждают предсказанное теоретически подобие профилей скоростей на различных расстояниях x от передней кромки пластины.

Распределение поперечной скорости V , определяемое формулой (2.25)

$$V = \frac{1}{2} \sqrt{\nu U_0 / x} [f'(\eta) \cdot \eta - f(\eta)],$$

показано на рис. 2.3.

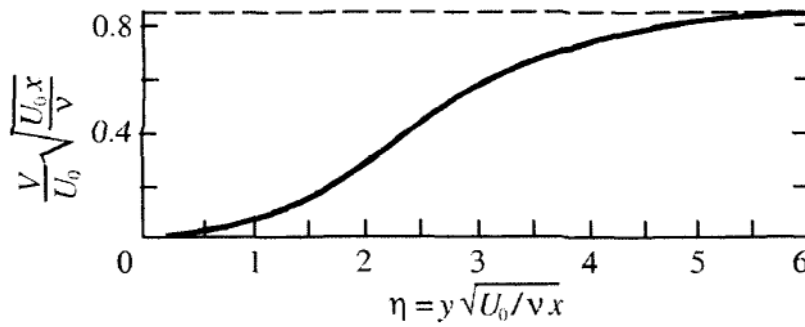


Рис. 2.3. Поперечная скорость в пограничном слое на плоской пластине

Примечательно, что на внешней границе пограничного слоя, т.е. при $\eta \rightarrow \infty$, поперечная скорость не равна нулю. Вычисления дают для нее значение

$$V_0 \approx 0,86U_0 / \sqrt{\text{Re}}. \quad (2.30)$$

Можно посчитать, что при $\text{Re} < 10^5$ ее значение составляет проценты или доли процента от скорости потока U_0 . Следовательно, на внешней границе пограничного слоя имеется составляющая скорости, направленная перпендикулярно к плоскости пластины. Это результат того, что часть жидкости вытесняется из пристенного слоя вследствие торможения о стенку. Если провести контрольную поверхность при $y = \delta$ (рис. 2.4), то увидим, что расход в сечении x_1 будет меньше расхода через такое же сечение на переднем торце, т.е. происходит вытеснение жидкости из пристенного слоя, и появляется поперечная составляющая скорости.

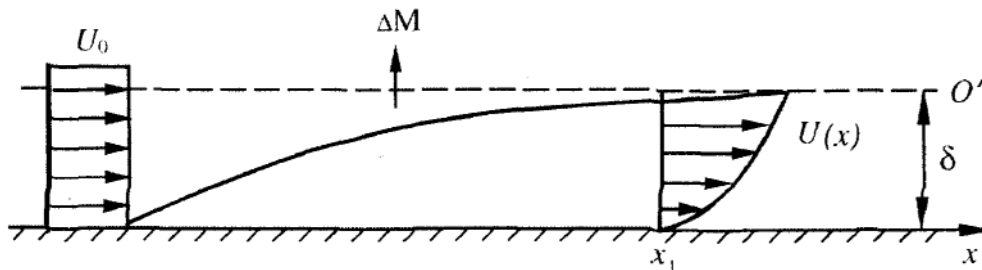


Рис. 2.4. Образование поперечной составляющей скорости в пограничном слое

Полученное решение позволяет легко вычислить сопротивление трения. Полная сила трения на одной стороне пластины

$$F_{\text{тр}} = b \int_{x=0}^L \tau_{\text{ст}} dx, \quad (2.31)$$

где b – ширина пластины; $\tau_{\text{ст}}$ – касательное напряжение на стенке.

Обычно в расчетах принято использовать понятие *коэффициента трения*, представляющего собой безразмерное касательное напряжение

$$c_f = \frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0^2 / 2}, \quad \text{или} \quad \frac{c_f}{2} = \frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0^2}. \quad (2.32)$$

Местное касательное напряжение на стенке

$$\tau_{\text{ст}} = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\mu U_0}{\sqrt{\nu x / U_0}} \left(\frac{\partial(U / U_0)}{\partial \eta} \right)_{\text{ст}} = \frac{\mu U_0}{\sqrt{\nu x / U_0}} \left(\frac{\partial(f(\eta))}{\partial \eta} \right)_{\text{ст}}, \quad (2.33)$$

или

$$\tau_{\text{ст}} = \frac{\mu U_0}{\sqrt{\nu x / U_0}} f''(\eta_{\text{ст}}) = \frac{\mu U_0}{\sqrt{\nu x / U_0}} f''(0). \quad (2.34)$$

В соответствии с результатами расчетов (см. табл. 2.1) $f''(0) = 0,332$, тогда коэффициент трения

$$\frac{c_f}{2} = \frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0^2} = 0,332 / \sqrt{\text{Re}_x}. \quad (2.35)$$

На рис. 2.5 приведено сопоставление расчета по формуле (2.35) с опытными данными по трению на пластине (в логарифмических координатах) [2].

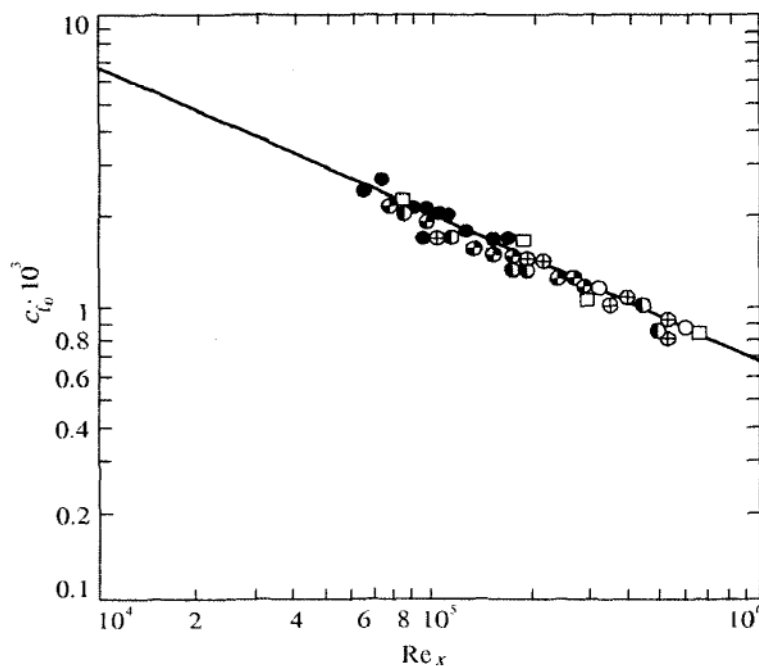


Рис. 2.5. Коэффициент трения c_{f_0} на плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении.
(—) — расчет по формуле (2.35)

Толщина пограничного слоя не может быть определена точно, поскольку влияние стенки с увеличением поперечной координаты уменьшается асимптотически, и значение продольной составляющей скорости асимптотически переходит в скорость потенциального течения. Если за толщину пограничного слоя принять расстояние от стенки, на котором скорость $U = 0,99U_0$, то из таблицы найдем, что $\eta \approx 5$. Следовательно, толщина ламинарного пограничного слоя $\eta = \delta \sqrt{U_0 / \nu x} \approx 5$, откуда $\delta \approx 5 \sqrt{\nu x / U_0}$, или

$$\frac{\delta}{x} = 5 / \sqrt{\text{Re}_x}. \quad (2.36)$$

Можно рассчитать (зная U/U_0) и другие интегральные характеристики пограничного слоя – толщину вытеснения и толщину потери импульса δ^* и δ^{**} . С этими понятиями мы познакомимся несколько позже.

2.3. СВЯЗЬ МЕЖДУ ТРЕНИЕМ, ТЕПЛООТДАЧЕЙ И ДИФФУЗИЕЙ. ТРОЙНАЯ АНАЛОГИЯ

При вынужденном конвективном движении существует примечательная связь между сопротивлением трения, теплоотдачей и диффузией в пограничном слое, на которую в ее простейшей форме указал еще Рейнольдс. Эту связь иногда называют «аналогией Рейнольдса» – аналогией между теплообменом и трением в пограничном слое.

Ниже мы рассмотрим этот вопрос в более общем виде применительно и к процессу массообмена, другими словами, тройную аналогию. Как было показано ранее (см., например, выражения (2.1) и (1.38)), уравнения движения, энергии и диффузии можно привести к безразмерной форме:

$$U' \frac{\partial U'}{\partial x'} + V' \frac{\partial U'}{\partial y'} = \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 U'}{(\partial y')^2}; \quad (2.37)$$

$$U' \frac{\partial \Theta'}{\partial x'} + V' \frac{\partial \Theta'}{\partial y'} = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \frac{\partial^2 \Theta'}{(\partial y')^2}; \quad (2.38)$$

$$U' \frac{\partial C'}{\partial x'} + V' \frac{\partial C'}{\partial y'} = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Sc}} \frac{\partial^2 C'}{(\partial y')^2}. \quad (2.39)$$

Здесь $U' = \frac{U}{U_0}$; $V' = \frac{V}{U_0}$; $p' = \frac{p}{\rho U_0^2}$; $x' = \frac{x}{L}$; $y' = \frac{y}{L}$; $\Theta' = \frac{T - T_{\text{ст}}}{T_0 - T_{\text{ст}}}$;

$C' = \frac{C - C_{\text{ст}}}{C_0 - C_{\text{ст}}}$ – безразмерные температура и концентрация;

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a}; \quad \text{Sc} = \frac{\nu}{D}; \quad \text{Re} = \frac{UL}{\nu}.$$

Следует иметь в виду, что уравнения энергии и диффузии в таком виде справедливы при $T_{\text{ст}} = \text{const}$ и $C_{\text{ст}} = \text{const}$, т.е. T и C на стенке не зависят от продольной координаты, и поэтому они внесены под знак дифференциала при приведении уравнений к безразмерному виду.

Как видно, **уравнения движения, энергии и диффузии (2.37)...(2.39) становятся тождественными при условии $\text{Pr} = \text{Sc} = 1$ и $\partial p / \partial x = 0$** . Следовательно, должны быть тождественны и их решения, т.е. подобны поля (безразмерные профили) скоростей, температур и концентраций: $U' = \Theta' = C'$, или

$$\frac{U}{U_0} = \frac{T - T_{\text{ст}}}{T_0 - T_{\text{ст}}} = \frac{C - C_{\text{ст}}}{C_0 - C_{\text{ст}}}. \quad (2.40)$$

Продифференцировав по y и положив $y = 0$, имеем

$$\frac{1}{U_0} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{\text{ст}} = \frac{1}{T_0 - T_{\text{ст}}} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{\text{ст}} = \frac{1}{C_0 - C_{\text{ст}}} \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)_{\text{ст}}. \quad (2.41)$$

Так как

$$\tau_{\text{ст}} = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{\text{ст}}; \quad q_{\text{ст}} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{\text{ст}}; \quad j_{\text{стд}} = -\rho D \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)_{\text{ст}}, \quad (2.42)$$

то из уравнения (2.41) для рассматриваемых условий ($\lambda = \mu c_p = \rho D c_p$) следует:

$$\frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0^2} = \frac{q_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0 c_p \Delta T} = \frac{j_{\text{стд}}}{\rho_0 U_0 \Delta C}. \quad (2.43)$$

Здесь $\Delta T = T_{\text{ст}} - T_0$; $\Delta C = C_{\text{ст}} - C_0$, и поэтому в (2.43) в двух последних членах изменился знак. (Размерность концентрации – [кг/кг].)

Первый член в этом соотношении, мы уже знаем, представляет безразмерный коэффициент трения $\tau_{ст} / \rho_0 U_0^2 = c_f / 2$. Второй член принято называть числом Стентона (тепловым)*

$$St = St_T = \frac{q_{ст}}{\rho_0 U_0 c_p \Delta T} = \frac{\alpha}{\rho_0 U_0 c_p}, \quad (2.44)$$

где $\alpha = \frac{q_{ст}}{T_{ст} - T_0}$ – коэффициент теплоотдачи.

Последний член в уравнении (2.43) по аналогии с тепловым называют диффузионным членом Стентона

$$St_d = \frac{j_{ст_d}}{\rho_0 U_0 \Delta C} = \frac{-\rho D (\partial C / \partial y)_{ст}}{\rho_0 U_0 \Delta C}. \quad (2.45)$$

Тогда окончательно в безразмерной форме связь между трением, теплоотдачей и диффузией имеет вид

$$\frac{c_f}{2} = St_T = St_d. \quad (2.46)$$

Полученное уравнение выражает гидродинамическую аналогию между трением, теплоотдачей и диффузией при $Pr = Sc = 1$.

Соотношение (2.46) широко применяют в инженерных расчетах процессов тепломассообмена и трения. Видно, что достаточно решить одну из задач, например динамическую, чтобы можно было найти коэффициенты тепломассообмена. Иногда в практических расчетах тепломассообмена используется не число Стентона, а число Нуссельта**

$Nu = \frac{\alpha L}{\lambda} = \frac{q_{ст}}{\Delta T} \frac{L}{\lambda} = q_{ст} / q_\lambda$ (L – характерный размер тела). Тогда имеем соотношение

$$Nu = St_T Re Pr, \quad \text{или} \quad St = \frac{Nu}{Re Pr}. \quad (2.47)$$

* По своему физическому смыслу число Стентона представляет собой отношение теплового потока в стенку к тому конвективному потоку, который может быть перенесен потоком жидкости при уменьшении ее температуры от $T_{ст}$ до T_0 .

** Число Нуссельта характеризует соотношение между конвективным переносом теплоты от жидкости к поверхности тела $q_{ст}$ и переносом теплоты теплопроводностью q_λ через слой жидкости толщиной L .

Предыдущие рассуждения мы привели для ламинарного пограничного слоя. Однако существенно то, что аналогия Рейнольдса находит применение также и при турбулентном течении и играет важную роль при расчете процессов переноса.

В общем случае для $Pr \neq 1$ можно получить формулу вида

$$St = \frac{c_f}{2} f(Pr). \quad (2.48)$$

Функция $f(Pr)$ при ламинарном течении приближенно равна $Pr^{-2/3}$, а при турбулентном $f(Pr) = Pr^{-0.6}$.

2.4. ТРЕНИЕ И ТЕПЛООБМЕН ПРИ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ НА ПЛОСКОЙ СТЕНКЕ. МЕТОД КАРМАНА – ПОЛЬГАУЗЕНА

2.4.1. ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

Интегральное соотношение импульсов, как мы уже установили, при безградиентном ($dU_0/dx = 0$) обтекании плоской стенки потоком газа с постоянными физическими свойствами имеет вид

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_{ст}}{\rho_0 U_0^2} = \frac{c_f}{2}, \quad \text{или} \quad \frac{dRe^{**}}{dx} = \frac{c_f}{2} Re_L. \quad (2.49)$$

В этом уравнении одна независимая переменная x и две неизвестные функции $\tau_{ст}(x)$ и $\delta^{**}(x)$. Для решения уравнения необходимо установить дополнительную связь между $\tau_{ст}(x)$ и $\delta^{**}(x)$ или, что то же самое, между c_f и Re^{**} . Зависимость $c_f = f(Re^{**})$ и будем называть законом трения.

Сущность приближенного метода Кармана – Польгаузена состоит в выборе подходящего выражения для профиля скоростей, которое должно удовлетворять физическим условиям задачи. При этом используем свойство аффинности профилей скорости в пограничном слое, представив их в виде функции

$$\frac{U}{U_0} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) = f(\eta).$$

В таком представлении функция $f(\eta)$ не зависит от x . Результаты расчета будут тем точнее, чем ближе выбранные профили совпадут

с истинными. Выберем вид функции $f(\eta)$ таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям:

$$\text{при } y = 0: \quad U = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0,$$

$$\text{при } y \rightarrow \infty(\delta): \quad U = U_0; \quad \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=\delta} = 0.$$

Условие того, что точка перегиба профиля скорости при безградиентном обтекании плоской непроницаемой поверхности лежит на стенке, следует из дифференциального уравнения движения при $y \rightarrow 0$:

$$\rho U \frac{\partial U}{\partial x} + \rho V \frac{\partial U}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Производная $(\partial U / \partial y)_{y=\delta}$ выражает собой условие плавности сопряжения профиля скорости с ее значением вне пограничного слоя (рис. 2.6). Будем искать функцию для профиля скорости $f(\eta)$ в виде полинома третьей степени:

$$\frac{U}{U_0} = \omega = a + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3. \quad (2.50)$$

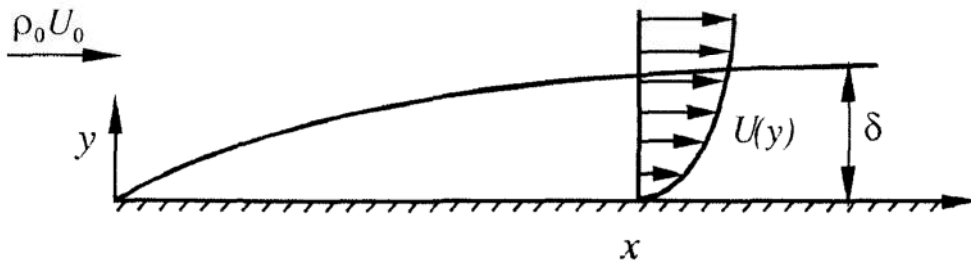


Рис. 2.6. Сопряжение профиля скорости пограничного слоя с внешним течением

Коэффициенты в этой аппроксимации определяем с учетом граничных условий (2.49), записанных в безразмерном виде:

$$\text{при } y = 0: \quad \eta = 0, \quad \omega = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \right)_{\eta=0} = 0; \quad (2.51)$$

$$\text{при } y = \delta: \quad \eta = 1, \quad \omega = 1, \quad \left(\frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right)_{\eta=1} = 0.$$

Используя эти условия из уравнения (2.50), имеем:

при $y = 0$ $\eta = 0$, $\omega = 0 = a$, $a = 0$;

при $\eta = 1$ $\omega = 1 = a + b + c + d = 1$;

при $\eta = 1$ $\partial\omega/\partial\eta = 0 = b + 2c\eta + 3d\eta^2 = 0$,
 $b + 2c + 3d = 0$;

при $\eta = 0$ $\partial^2\omega/\partial\eta^2 = 0 = |2c + 6d\eta|_{\eta=0} = 2c = 0$, $c = 0$.

Оставшиеся два неизвестных коэффициента определяются из соотношений:

$$\begin{aligned} b + d &= 1 & b &= 1 - d; \\ b + 3d &= 0 & 1 - d + 3d &= 0 \Rightarrow d = -1/2, b = 3/2. \end{aligned}$$

В результате получаем выражение для профиля скорости (2.50) в следующем виде:

$$\omega = \frac{U}{U_0} = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3. \quad (2.52)$$

Имея профиль скорости, легко найти соотношения между интегральными характеристиками пограничного слоя:

$$\delta^{**} = \int_0^\delta \frac{U}{U_0} \left(1 - \frac{U}{U_0}\right) dy = \delta \int_0^1 \frac{U}{U_0} \left(1 - \frac{U}{U_0}\right) d\eta; \quad (2.53)$$

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{U}{U_0}\right) dy = \delta \int_0^1 \left(1 - \frac{U}{U_0}\right) d\eta. \quad (2.54)$$

Из этих соотношений для толщины потери импульса и толщины вытеснения с учетом (2.52) получаем

$$\delta^{**} = \frac{39}{280}\delta \approx \frac{1}{7}\delta; \quad \delta^* = \frac{3}{8}\delta; \quad H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}} = 2,69. \quad (2.55)$$

Интересно отметить, что точное решение Блазиуса для этих условий дает значение формпараметра $H = 2,59$.

Определим теперь закон трения $c_f = f(\text{Re}^{**})$, который необходим для решения интегрального уравнения импульсов (1.78). Воспользуемся выражением касательного напряжения на стенке

$$\tau_{\text{ст}} = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{\text{ст}} = \mu \frac{U_0}{\delta} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right)_{\text{ст}}. \quad (2.56)$$

Поскольку $\left(\frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = \frac{3}{2}$, как следует из профиля скорости (2.52), учитывая соотношения (2.55) для толщины потери импульса,

из (2.56) находим

$$\tau_{\text{ст}} = \frac{3}{2} \mu \frac{U_0}{\delta}; \quad \frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0^2} = \frac{3}{2} \frac{\mu}{\rho_0 U_0 \delta^{**}} \left(\frac{\delta^{**}}{\delta} \right) = \frac{0,21}{\text{Re}^{**}},$$

т.е. получаем закон трения для ламинарного пограничного слоя в «стандартных условиях»

$$\frac{c_f}{2} = \frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0^2} = \frac{0,21}{\text{Re}^{**}}. \quad (2.57)$$

Интересно отметить, что из точного решения Блазиуса следует

$$\frac{c_f}{2} = \frac{0,22}{\text{Re}^{**}}. \quad (2.58)$$

Подставляя (2.57) в (1.78), получаем

$$\frac{d \text{Re}^{**}}{d \bar{x}} = \frac{0,21}{\text{Re}^{**}} \text{Re}_L, \quad (2.59)$$

откуда

$$\frac{\text{Re}^{**2}}{2} = 0,21 \text{Re}_x \Rightarrow \text{Re}^{**} = (2 \cdot 0,21 \text{Re}_x)^{0,5}. \quad (2.60)$$

Подставив это значение в закон трения, найдем изменение коэффициента трения по длине пластины

$$\frac{c_f}{2} = \frac{0,323}{\sqrt{\text{Re}_x}}. \quad (2.61)$$

Как мы помним, точное решение дифференциальных уравнений дает в этом выражении коэффициент 0,332.

Из выражения (2.60) имеем следующее соотношение для толщины потери импульса:

$$\frac{\delta^{**}}{x} = \frac{\text{Re}^{**}}{\text{Re}_x} = \frac{0,65}{\sqrt{\text{Re}_x}}, \quad (2.62)$$

а с учетом (2.55)

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4,65}{\sqrt{\text{Re}_x}}. \quad (2.63)$$

Пример. Найдем толщину пограничного слоя на расстоянии 100 мм от переднего края пластины при движении воздуха вдоль ее поверхности. Скорость воздуха 10 м/с, температура – 20 °С и давление атмосферное. Значение кинематической вязкости возьмем

из табл. 1.2, $\nu \approx 15 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$. Число Рейнольдса, определяемое по текущей координате x ,

$$\text{Re}_x = \frac{U_0 x}{\nu} = \frac{10 \cdot 0,1}{15 \cdot 10^{-6}} \approx 6,7 \cdot 10^4,$$

тогда $\frac{\delta}{x} = \frac{4,65}{\sqrt{\text{Re}_x}} \approx 0,0018$, откуда толщина пограничного слоя на

расстоянии 100 мм от переднего края $\delta \approx 1,8 \text{ мм}$.

Динамическая вязкость воды значительно больше, чем для воздуха (см. табл. 1.2), $\mu_{\text{H}_2\text{O}}/\mu_{\text{возд}} \approx 50$. Казалось бы, будет больше трение и толще пограничный слой. Но число Re_x обусловлено кинематической вязкостью $\text{Re}_x = U_0 x/\nu$, а она для воды за счет высокой плотности ниже, чем для воздуха: $\nu_{\text{H}_2\text{O}}/\nu_{\text{возд}} = 1/15$. Поэтому при одинаковых значениях скорости течения число Рейнольдса для воды Re_x будет больше, а толщина пограничного слоя – меньше. Значение коэффициента трения будет также ниже для воды $c_f \approx 1/\sqrt{\text{Re}}$, а общее сопротивление трения выше, $\tau_{\text{ст}} = (c_f/2)\rho_0 U_0^2$.

Из приведенного примера видно, что при обычных условиях обтекания толщина пограничного слоя небольшая – порядка нескольких миллиметров. Поэтому к измерениям в пограничном слое, в частности к датчикам, предъявляются высокие требования.

2.4.2. ТЕПЛОВОЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

Выше мы рассмотрели динамический пограничный слой и определили его характеристики – толщины δ , δ^* , δ^{**} и коэффициент трения. Используя аналогию Рейнольдса, мы можем теперь найти коэффициенты теплообмена

$$\frac{c_f}{2} = \text{St}_T = \text{St}_d. \quad (2.64)$$

Но эта тройная аналогия справедлива *только при безградиентном* ($\partial p/\partial x = 0$) *обтекании поверхности и при* $T_{\text{ст}} = \text{const}$. При этом толщины динамического, теплового и диффузионного слоев совпадают:

$$\delta = \delta_T = \delta_d.$$

Ниже рассмотрим более общие случаи течения, когда $\text{Pr} \neq 1$, $\text{Sc} \neq 1$ и $\delta \neq \delta_T$, $\delta \neq \delta_d$. Выкладки сделаем применительно к тепловому пограничному слою, но все эти результаты справедливы и для диффузионного слоя с заменой теплового числа Прандтля Pr на число Шмидта Sc , которое иногда называют диффузионным числом Прандтля.

ТЕПЛООБМЕН НА ПЛАСТИНЕ С НАЧАЛЬНЫМ АДИАБАТИЧЕСКИМ УЧАСТКОМ $\delta > \delta_T$

Вернемся к рис. 1.1. Гидродинамический пограничный слой начинается у переднего края пластины, а тепловой несколько позже – у границы нагреваемой части. На начальном участке x_0 стенка имеет температуру $T_{ст} = T_0$, а при $x > x_0$ ее температура постоянна, $T_{ст} = \text{const}$ и определяется условиями теплообмена. Необходимо рассчитать теплоотдачу в этих условиях. Для решения задачи используем интегральное соотношение энергии пограничного слоя, которое имеет вид

$$\frac{d \text{Re}_T^{**}}{d \bar{x}} = \text{St Re}_L, \quad \text{или} \quad \frac{d \delta_T^{**}}{dx} = \text{St} = \frac{q_{ст}}{\rho_0 U_0 c_{p_0} \Delta T}. \quad (2.65)$$

Профиль температуры аппроксимируем полиномом третьей степени

$$\vartheta = \frac{T - T_{ст}}{T_0 - T_{ст}} = a + b\eta_T + c\eta_T^2 + d\eta_T^3, \quad (2.66)$$

коэффициенты которого должны удовлетворять граничным условиям:

$$\begin{aligned} \text{при } y = 0: \quad T = T_{ст}, \quad \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_{y=0} &= 0; \\ \text{при } y = \delta_T: \quad T = T_0, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=\delta_T} &= 0. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Условие $(\partial^2 T / \partial y^2)_{y=0} = 0$ следует из дифференциального уравнения энергии, записанного для непроницаемой стенки, а $(\partial T / \partial y)_{y=\delta_T} = 0$ характеризует собой плавность сопряжения значений температуры на внешней границе пограничного слоя. В соответствии с этим определяем коэффициенты полинома (2.66) и получаем профиль температуры в виде

$$\vartheta = \frac{T - T_{ст}}{T_0 - T_{ст}} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_T} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_T} \right)^3. \quad (2.68)$$

Используя полученный ранее профиль скорости (2.52), можем найти толщину потери энергии

$$\delta_T^{**} = \int_0^{\delta_T} \frac{U}{U_0} \left(1 - \frac{T - T_{\text{ст}}}{T_0 - T_{\text{ст}}} \right) dy = \int_0^{\delta_T} \left[\frac{3}{2} \frac{y}{\delta_T} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_T} \right)^3 \right] \times \left[1 - \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_T} + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_T} \right)^3 \right] dy.$$

После интегрирования этого выражения, вводя обозначение $r = \delta_T/\delta$, получаем

$$\delta_T^{**} = \delta \left(\frac{3}{20} r^2 - \frac{3}{280} r^4 \right). \quad (2.69)$$

Так как в нашем случае $\delta_T < \delta$, следовательно, $r < 1$, то второй член в правой части равенства будет весьма мал по сравнению с первым и им можно пренебречь:

$$\delta_T^{**} \approx \delta \frac{3}{20} r^2. \quad (2.70)$$

Запишем выражения для напряжения трения на стенке и для теплового потока с учетом профиля скорости (2.52) и профиля температуры (2.68):

$$\tau_{\text{ст}} = \mu \left(\frac{dU}{dy} \right)_{y=0} = \frac{3}{2} \mu \frac{U_0}{\delta} \left(\frac{d\omega}{d\eta} \right)_{\eta=0}; \quad (2.71)$$

$$q_{\text{ст}} = \lambda \left(\frac{dT}{dy} \right)_{\text{ст}} = \lambda \frac{\Delta T}{\delta_T} \left(\frac{d\vartheta}{d\eta_T} \right)_{\eta_T=0} = \frac{3}{2} \lambda \frac{\Delta T}{r\delta}. \quad (2.72)$$

Подставим эти выражения в интегральные уравнения импульсов и энергии:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0} = \frac{3}{2} \mu \frac{U_0}{\delta} \frac{1}{\rho_0 U_0^2} = \frac{3}{2} \frac{\mu}{\rho_0 U_0 \delta}; \quad (2.73)$$

$$\frac{d\delta_T^{**}}{dx} = \frac{q_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0 c_p \Delta T} = \frac{3}{2} \lambda \frac{\Delta T}{r\delta} \frac{1}{\rho_0 U_0 c_p \Delta T} = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{c_p} \frac{1}{r \rho_0 U_0 \delta}. \quad (2.74)$$

Используя полученное ранее соотношение для толщины потери импульса, уравнение (2.73) можно привести к виду

$$\frac{39}{280} \delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{3}{2} \frac{\mu}{\rho_0 U_0}, \quad \text{или} \quad \delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{140}{13} \frac{\mu}{\rho_0 U_0}. \quad (2.75)$$

Выражение же для толщины потери энергии (2.73) подставим в (2.74):

$$\frac{3}{20} \frac{d}{dx} (\delta r^2) = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{\mu c_p} \frac{1}{r} \frac{\mu}{\rho_0 U_0 \delta}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{10} \frac{d}{dx} (\delta r^2) = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{r} \frac{\mu}{\rho_0 U_0 \delta}.$$

Продифференцируем левую часть:

$$\frac{1}{10} \left[\delta \frac{dr^2}{dx} + r^2 \frac{d\delta}{dx} \right] = \frac{1}{r} \frac{1}{\delta} \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\mu}{\rho_0 U_0}$$

и перенесем r и δ из правой части в левую:

$$r^3 \delta \frac{d\delta}{dx} + \delta^2 r \frac{dr^2}{dx} = r^3 \delta \frac{d\delta}{dx} + \delta^2 2r^2 \frac{dr}{dx} = \frac{10}{\text{Pr}} \frac{\mu}{\rho_0 U_0}.$$

С учетом того, что $r^2 \frac{dr}{dx} = \frac{1}{3} \frac{dr^3}{dx}$, имеем

$$r^3 \delta \frac{d\delta}{dx} + \delta^2 \frac{2}{3} \frac{dr^3}{dx} = \frac{10}{\text{Pr}} \frac{\mu}{\rho_0 U_0}. \quad (2.76)$$

Подстановка $\delta \frac{d\delta}{dx}$ из уравнения (2.75) и значения δ^2 из (2.63)

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4,65}{\sqrt{\text{Re}_x}} \Rightarrow \delta^2 = (4,65)^2 \frac{\mu}{\rho_0 U_0} x,$$

в уравнение (2.76) дает:

$$r^3 \frac{140}{13} \frac{\mu}{\rho_0 U_0} + (4,65)^2 \frac{\mu}{\rho_0 U_0} x \frac{2}{3} \frac{dr^3}{dx} = \frac{1}{10} \frac{\mu}{\rho_0 U_0}, \quad (2.77)$$

$$\frac{14}{13} r^3 + \frac{4,325}{3} x \frac{dr^3}{dx} = \frac{1}{\text{Pr}}$$

или

$$r^3 + \frac{4}{3} x \frac{dr^3}{dx} = \frac{13}{14} \frac{1}{\text{Pr}}.$$

Делая подстановку $r^3 = y$, получаем

$$y + \frac{4}{3} x \frac{dy}{dx} = \frac{13}{14} \frac{1}{\text{Pr}}$$

или

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3}{4} \frac{1}{x} y = \frac{3}{4} \frac{1}{x} \frac{13}{14} \frac{1}{Pr} \quad (2.78)$$

– линейное неоднородное дифференциальное уравнение*.

* Для решения линейного неоднородного дифференциального уравнения используется метод Лагранжа – метод вариации постоянной. Запишем уравнение (2.78) в общем виде:

$$y' + P(x)y = f(x). \quad (1)$$

Сначала решается однородное уравнение: $y' + P(x)y = 0$. В нашем случае оно имеет вид, см. (2.78)

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3}{4} \frac{1}{x} y = 0, \quad \text{или} \quad \frac{dy}{y} + \frac{3}{4} \frac{dx}{x} = 0.$$

Проинтегрировав его, получим

$$\ln y + \frac{3}{4} \ln x = \ln c_1$$

или

$$\ln y = -\frac{3}{4} \ln x + \ln c_1 \rightarrow y = c_1 x^{-3/4}. \quad (2)$$

Далее принимается, что постоянная c_1 есть неизвестная функция от x , которую нужно определить,

$$c_1 = \varphi(x). \quad (3)$$

Тогда

$$y = \varphi(x) x^{-3/4}. \quad (4)$$

Продифференцируем (4) по x :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi}{dx} x^{-3/4} + \varphi \frac{d}{dx} (x^{-3/4}) = \frac{d\varphi}{dx} x^{-3/4} - \varphi \frac{3}{4} x^{-7/4}. \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в уравнение (2.78), находим значение, которое удовлетворяет этому уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} x^{-3/4} - \frac{3}{4} x^{-7/4} \varphi + \frac{3}{4} \frac{1}{x} \varphi x^{-3/4} &= \frac{3}{4} \frac{1}{x} \frac{13}{14} \frac{1}{Pr}, \\ \frac{d\varphi}{dx} &= \frac{3}{4} \frac{13}{14} \frac{1}{Pr} \frac{1}{x \cdot x^{-3/4}} = \frac{3}{4} \frac{13}{14} \frac{1}{Pr} \frac{1}{x^{1/4}}, \\ \varphi &= \frac{3}{4} \frac{13}{14} \frac{1}{Pr} \int \frac{dx}{x^{1/4}} = \frac{3}{4} \frac{13}{14} \frac{1}{Pr} \int x^{-1/4} dx + c, \\ \varphi &= \frac{13}{14} \frac{1}{Pr} x^{3/4} = \frac{13}{14} \frac{1}{Pr} x^{3/4} + c. \end{aligned}$$

Затем подставляем $\varphi(x)$ в уравнение (4) и определяем y .

Решение уравнения (2.78) имеет вид

$$y = \frac{13}{14} \frac{1}{Pr} + cx^{-3/4}, \quad \text{или} \quad r^3 = \frac{13}{14} \frac{1}{Pr} + cx^{-3/4}. \quad (2.79)$$

Из граничных условий для $x = x_0$, $r = \delta_\tau / \delta = 0$ следует

$$0 = \frac{13}{14} \frac{1}{Pr} + cx_0^{-3/4}; \quad c = -\frac{13}{14} \frac{1}{Pr} x_0^{3/4}.$$

Подставляя последнее в (2.79), имеем

$$r^3 = \frac{13}{14} \frac{1}{Pr} - \frac{13}{14} \frac{1}{Pr} \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3/4}, \quad \text{или} \quad r = \frac{0.975}{Pr^{1/3}} \cdot \sqrt[3]{1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3/4}}. \quad (2.80)$$

Тепловой поток в соответствии с формулой (2.72) можно определить так:

$$q_{ст} = \alpha \Delta T = \frac{3}{2} \lambda \frac{\Delta T}{r \delta}, \quad \text{или} \quad \alpha = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{r \delta}, \quad (2.81)$$

т.е. коэффициент теплообмена обратно пропорционален толщине теплового пограничного слоя.

Подставляя в выражение для коэффициента теплообмена значения r (2.80) и толщины динамического пограничного слоя $\delta = 4,65x\sqrt{Re_x}$, получаем

$$\alpha = 0,332\lambda \frac{\sqrt[3]{Pr}}{\sqrt[3]{1 - (x_0/x)^{3/4}}} \frac{\sqrt{Re_x}}{x}$$

или, переходя к числу Стентона,

$$St = \frac{\alpha}{\rho_0 U_0 c_{p0}} = 0,332 Re_x^{-0,5} Pr^{-2/3} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{4/3} \right]^{-1/3}. \quad (2.82)$$

Для плоской стенки, нагреваемой по всей длине $x_0 \rightarrow 0$,

$$St = 0,332 Re_x^{-0,5} Pr^{-2/3}. \quad (2.83)$$

По уравнению (2.83) можно вычислить распределение плотности теплового потока по длине пластины. Однако чаще интересуются

полным тепловым потоком, передаваемым от пластины конечной толщины. Из приведенного решения (2.83) следует, что

$$\alpha_x = \text{const } x^{-1/2} = cx^{-1/2}.$$

Для определения полного теплового потока необходимо вычислить средний по x коэффициент теплоотдачи:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^x \alpha_x dx = \frac{c}{x-x_0} \int_{x_0}^x x^{-1/2} dx = 2\alpha_x.$$

Тогда уравнение для среднего числа Стентона имеет вид

$$\bar{St} = 0,664 Re_x^{-0,5} Pr^{-2/3},$$

Решая совместно с этим выражением интегральное соотношение энергии

$$\frac{d Re_T^{**}}{d Re_x} = 0,332 Re_x^{-0,5} Pr^{-2/3},$$

получим соотношение между числами Рейнольдса, построенными по толщине потери энергии δ_T^{**} и длине пластины x ,

$$Re_T^{**} = 0,664 Re_x^{0,5} Pr^{-2/3}. \quad (2.84)$$

Подставив это соотношение в (2.83), найдем закон теплообмена для стандартных условий

$$St = \frac{0,22}{Re_T^{**} Pr^{4/3}}. \quad (2.85)$$

Если пластина нагревается по всей длине ($x_0 = 0$), то соотношение между толщинами теплового и динамического слоев будет постоянно и определится только значением числа Pr :

$$r = \frac{\delta_T}{\delta} = \text{const} = 1/\sqrt{Pr}. \quad (2.86)$$

Вязкие масла имеют критерий Прандтля $Pr \approx 1000$ и больше. Для этих жидкостей толщина теплового пограничного слоя составляет только примерно 1/10 толщины гидродинамического пограничного слоя, т.е. при $v > a$ возмущения, обусловленные молекулярным трением, распространяются на большую область, чем возмущения, обусловленные молекулярной теплопроводностью.

При $Pr \rightarrow \infty$ точное решение, полученное в работах [1, 2], дает

$$Nu_x = 0,339 \sqrt{Re_x} Pr^{1/3},$$

что практически совпадает с формулой (2.83). Газы имеют $Pr < 1$, для этого случая $r > 1$, и поэтому допущение, сделанное в приведенных расчетах (о том, что $r < 1$), строго говоря, не справедливо. Но так как минимальные значения для газов $Pr \approx 0,6$, то $r \approx 1,16$ и погрешность, обусловленная упомянутым допущением, очень мала.

Единственными веществами, которые характеризуются очень низкими значениями числа Прандтля ($Pr < 10^{-2}$), являются жидкие металлы. Для них формулы (2.83)...(2.86) непригодны.

ТЕПЛООБМЕН ПРИ $Pr \ll 1$ (ЖИДКИЕ МЕТАЛЛЫ)

При очень низких значениях Прандтля тепловой пограничный слой развивается значительно интенсивнее динамического ($a \gg \nu$) и его толщина значительно больше толщины гидродинамического слоя, $\delta_T \gg \delta$. Поэтому мы не допустим большой ошибки, если будем считать скорость по всей толщине теплового пограничного слоя постоянной и равной скорости внешнего потока, $U_x = U_0$.

Тогда выражение для толщины потери импульса можно представить в виде

$$\delta_T^{**} = \int_0^{\delta_T} \frac{U}{U_0} \left(1 - \frac{T - T_{ст}}{T_0 - T_{ст}} \right) dy = \int_0^{\delta_T} \omega(1 - \vartheta) dy.$$

С учетом выражения (2.68) для профиля температуры получим

$$\delta_T^{**} = \frac{3}{8} \delta_T, \quad (2.87)$$

а для теплового потока на стенке –

$$q_{ст} = \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{ст} = \lambda \frac{\Delta T}{\delta_T} \left(\frac{\partial V}{\partial \eta} \right)_{ст} = \frac{3}{2} \lambda \frac{\Delta T}{\delta_T}. \quad (2.88)$$

Подставляя (2.87) в (2.88), имеем

$$q_{ст} = \frac{9}{16} \lambda \frac{\Delta T}{\delta_T^{**}}.$$

Приведя это выражение к безразмерному виду, получим закон теплообмена

$$St = \frac{9}{16} \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re_T^{**}} = \frac{9}{16} \frac{1}{Pe^{**}}. \quad (2.89)$$

Решая интегральное уравнение энергии (2.65) совместно с законом теплообмена (2.89)

$$\frac{d Re_T^{**}}{d Re_x} = St = \frac{9}{16} \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re_T^{**}},$$

находим выражение для числа Рейнольдса, рассчитанного по толщине потери энергии

$$Re_T^{**} = \left[\frac{9}{8} \frac{1}{Pr} Re_x \right]^{0,5}. \quad (2.90)$$

Подставив это выражение в (2.89), получим распределение коэффициента теплообмена по длине пластины

$$St = 0,53 / \sqrt{Re_x Pr} = 0,53 / \sqrt{Pe_x}. \quad (2.91)$$

Точное решение, приведенное в учебнике [2], дает

$$St = 0,56 / \sqrt{Re_x Pr}.$$

ТЕПЛОВОЙ ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

ПРИ $U_0 = cx^m$ И $\Delta T = ax^y$

До сих пор мы изучали ламинарный пограничный слой при постоянной скорости на его внешней границе ($U_0 = \text{const}$) и при постоянной температуре стенки ($T_{\text{ст}} = \text{const}$), что справедливо только для обтекания пластины. Рассмотрим теперь более общий случай, когда эти величины могут изменяться по степенному закону. Для таких условий существуют точные автомодельные решения динамической и тепловой задач. Но, как было показано выше, более простым является интегральный метод решений, дающий в результате аналитические формулы, удобные для анализа. Поэтому интересно сопоставить результаты расчета теплообмена по приближительному интегральному методу с точными автомодельными решениями.

Прежде чем анализировать эти решения, покажем, какие физические задачи характеризуются таким распределением скорости. Отметим, в частности, плоские потенциальные течения, характерные для обтекания клиновидных тел.

На рис. 2.7 показаны некоторые случаи плоских течений, удовлетворяющих зависимости $U_0 = cx^m$. При этом изменение скорости вдоль поверхности рассчитывается с помощью теории потенциальных течений

$$U_0 = cx^m, \quad (2.92)$$

где $m = \frac{\beta/\pi}{2 - \beta/\pi}$.

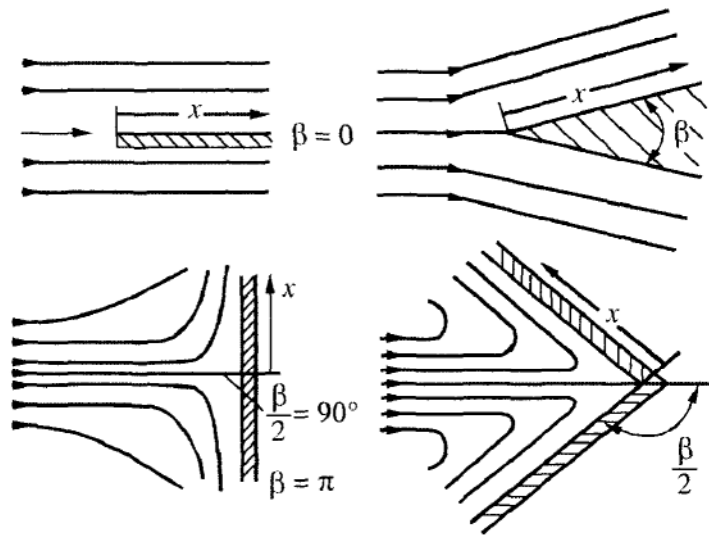


Рис. 2.7. Обтекание плоских и клиновидных тел

Частным их случаем является течение около плоской пластины при постоянной скорости внешнего потока ($\beta = 0$). К этому же семейству относится и плоское течение вблизи критической точки ($\beta = \pi$). Потoki со степенным изменением скорости на внешней границе пограничного слоя можно создать и в профилированном канале. Градиент давления на внешней границе пограничного слоя с учетом уравнения Бернулли представляет собой следующую функцию:

$$\frac{dp}{dx} = -\rho_0 U_0 \frac{dU_0}{dx} = -\rho_0 c x^m m c x^{m-1} = -\rho_0 U_0^2 \frac{m}{x}. \quad (2.93)$$

Градиент давления прямо входит в дифференциальное уравнение движения пограничного слоя и может оказывать сильное влияние на профили скорости и сопротивление трения. В частности, при положительном градиенте давления ($\partial p / \partial x > 0$ – замедленные течения) может наступить даже отрыв пограничного слоя. В точке отрыва пограничного слоя $(\partial u / \partial y)_{y=0} = 0$, а следовательно, равен нулю и коэффициент трения.

На теплообмен же градиент давления влияет слабо. Это, в первую очередь, объясняется тем, что в дифференциальном уравнении энергии пограничного слоя отсутствует член, непосредственно связанный с градиентом давления. Его влияние в данном случае будет вторичным и выражается через деформацию профилей скоростей. Как показывают расчеты [1, 3], продольный градиент давления сравнительно слабо влияет на относительный закон теплообмена

$$\Psi = (St/St_0)_{Re_T^{**}} \approx 1, \quad (2.94)$$

и поэтому в инженерных расчетах им можно пренебречь:

$$St_0 = 0,22 / (Re_T^{**} Pr^{4/3}). \quad (2.95)$$

В случае произвольного распределения скорости на внешней границе пограничного слоя значения коэффициента теплообмена могут быть приближенно определены с помощью интегрального метода.

Интегральные соотношения энергии пограничного слоя несжимаемой жидкости при обтекании непроницаемой поверхности:

– для плоского течения

$$\frac{d Re_T^{**}}{d \bar{x}} + \frac{Re_T^{**}}{\Delta T} \frac{d \Delta T}{d \bar{x}} = St Re_L = \Psi St_0 Re_L, \quad (2.96)$$

– для осесимметричного течения

$$\frac{d Re_T^{**}}{d \bar{x}} + Re_T^{**} \left(\frac{1}{\Delta T} \frac{d \Delta T}{d \bar{x}} + \frac{1}{R_x} \frac{d R_x}{d \bar{x}} \right) = \Psi St_0 Re_L. \quad (2.97)$$

Решая задачи тепломассообмена интегральным методом, принимаем гипотезу о консервативности законов $St_T = f(Re_T^{**})$ и $St_d = f(Re_d^{**})$ в форме (2.95) при изменении граничных условий. Это означает, что используются законы для простейшего случая обтекания плоской пластины с постоянными температурой стенки ($T_{ст} = \text{const}$) и концентрацией диффундирующего компонента по длине пластины, и предполагается, что они слабо зависят от граничных условий и могут быть распространены на более сложные условия течения. К примеру, на течения с переменной скоростью на внешней границе пограничного слоя, переменной температурой или концентрацией на стенке. Тогда, принимая $\Psi = 1$ и подставляя

(2.95) в уравнения (2.96) и (2.97), получаем линейные дифференциальные уравнения относительно Re_T^{**} :

$$\frac{d Re_T^{**}}{d \bar{x}} + \frac{Re_T^{**}}{\Delta T} \frac{d \Delta T}{d \bar{x}} = St Re_L = \frac{0,22}{Re_T^{**} Pr^{4/3}} Re_L;$$

для осесимметричного случая

$$\frac{d Re_T^{**}}{d \bar{x}} + Re_T^{**} \left[\frac{1}{\Delta T} \frac{d \Delta T}{d \bar{x}} + \frac{1}{R_x} \frac{d R_x}{d \bar{x}} \right] = \frac{0,22}{Re_T^{**} Pr^{4/3}} Re_L.$$

Здесь в общем случае ΔT , R_x , Re_L являются заданными функциями x . Интеграл этого дифференциального уравнения при граничных условиях $x = 0$, $Re_T^{**} = 0$ имеет вид:

– для плоского течения

$$Re_T^{**} = \frac{1}{\Delta T} \left[\frac{0,44}{Pr^{4/3}} \int_0^{\bar{x}} Re_L \Delta T d\bar{x} \right]^{1/2}; \quad (2.98)$$

– для осесимметричного случая

$$Re_T^{**} = \frac{1}{\Delta T R_x} \left[\frac{0,44}{Pr^{4/3}} \int_0^{\bar{x}} Re_L (\Delta T R_x)^2 d\bar{x} \right]^{1/2}. \quad (2.99)$$

Здесь следует иметь в виду, что число Рейнольдса $Re_L = U_0 L / \nu$ рассчитывается по локальной скорости на внешней границе слоя, зависящей от x : $U_0 = cx^m$, а $\Delta T = T_{ст} - T_0 = ax^\gamma$ (γ – параметр).

С учетом этих зависимостей из (2.99) получаем

$$\begin{aligned} Re_T^{**} &= \left[\frac{1}{\Delta T R_x} \frac{0,44}{Pr^{4/3}} \int_0^{\bar{x}} \Delta T^2 Re_L d\bar{x} \right]^{1/2} = \\ &= \left[\frac{0,44}{Pr^{4/3}} \frac{1}{\Delta T^2} \frac{1}{\nu} \int_0^{\bar{x}} \Delta T^2 U_0 d\bar{x} \right]^{1/2} = \\ &= \left[\frac{0,44}{Pr^{4/3}} \frac{1}{\nu} \frac{1}{a^2 x^2} \frac{a^2 c x^{2\gamma+m+1}}{(2\gamma+m+1)} \right]^{1/2} = \left[\frac{0,44}{Pr^{4/3}} \frac{1}{\nu} \frac{c x^{m+1}}{(2\gamma+m+1)} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

После подстановки

$$U_0 = cx^m; \quad \text{Re}_x = \frac{U_0 x}{\nu} = \frac{cx^{m+1}}{\nu}$$

имеем соотношение для числа Рейнольдса

$$\text{Re}_T^{**} = \left[\frac{0,44}{\text{Pr}^{4/3}} \frac{\text{Re}_x}{2\gamma + m + 1} \right]^{1/2} = \left[\frac{0,44cx^{m+1}}{\text{Pr}^{4/3} \nu(2\gamma + m + 1)} \right]^{1/2}. \quad (2.100)$$

А выражение для числа Стентона при плоском сечении имеет вид

$$\text{St} = \frac{0,22}{\text{Re}_T^{**} \text{Pr}^{4/3}} = 0,322 \text{Re}_x^{-0,5} \text{Pr}^{-2/3} (2\gamma + m + 1)^{1/2} \quad (2.101)$$

и для числа Нуссельта –

$$\text{Nu}_x = \text{St Re Pr} = 0,322 \text{Re}_L^{1/2} \text{Pr}^{1/3} (2\gamma + m + 1)^{1/2}. \quad (2.102)$$

Для относительного коэффициента теплоотдачи при плоском течении получим простую формулу

$$\alpha / \alpha_0 = (2\gamma + m + 1)^{1/2}, \quad (2.103)$$

где α_0 – значение коэффициента теплоотдачи в «стандартных» условиях (при постоянных температуре стенки и скорости основного потока, равной скорости в рассматриваемом сечении, т.е. $\gamma = 0, m = 0$)

$$\alpha_0 = \frac{A}{x} 0,322 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3}, \quad (2.104)$$

а $\text{Re}_x = U_0 x / \nu$ определяется по локальной скорости основного потока ($U_0 = cx^m$).

Для случая обтекания осесимметричного тела при $R_x = x^n$, $U_0 = cx^m$, $\Delta T = ax^\gamma$

$$\text{Re}_T^{**} = \left[\frac{0,44cx^{m+1}}{\text{Pr}^{4/3} \nu(2\gamma + 2n + m + 1)} \right]^{1/2} \quad (2.105)$$

и

$$\alpha / \alpha_0 = (2\gamma + 2n + m + 1). \quad (2.106)$$

Проанализируем изменение коэффициента теплообмена по длине в указанных условиях. Как следует из уравнений (2.103), (2.104) и (2.106),

$$\alpha = \text{const} \frac{1}{x} \left(\frac{U_0 x}{\nu} \right)^{1/2}, \quad U_0 = cx^m;$$

$$\alpha = \text{const} \frac{1}{\sqrt{\nu}} x^{(m+1)/2-1}; \quad \alpha = \text{const} \frac{1}{\sqrt{\nu}} x^{(m-1)/2}; \quad (2.107)$$

$$\alpha \approx x^{(m-1)/2}.$$

Заметим, что при $m = 1$ ($\beta = \pi$) в окрестности критической точки местный коэффициент теплоотдачи постоянен, $\alpha_x = \text{const}$, т.е. пограничный слой имеет постоянную толщину. При $m < 1$ коэффициент теплоотдачи при $x = 0$ равен бесконечности и падает по длине пластины в направлении течения (в том числе и при $m = 0$ – обтекание плоской пластины). При $m > 1$ α возрастает по x , начиная с нуля.

В учебнике [2] проведено сравнение приближенного метода расчета по формуле (2.102) с точным автомодельным методом решения в широкой области изменения параметров m и γ (рис. 2.8).

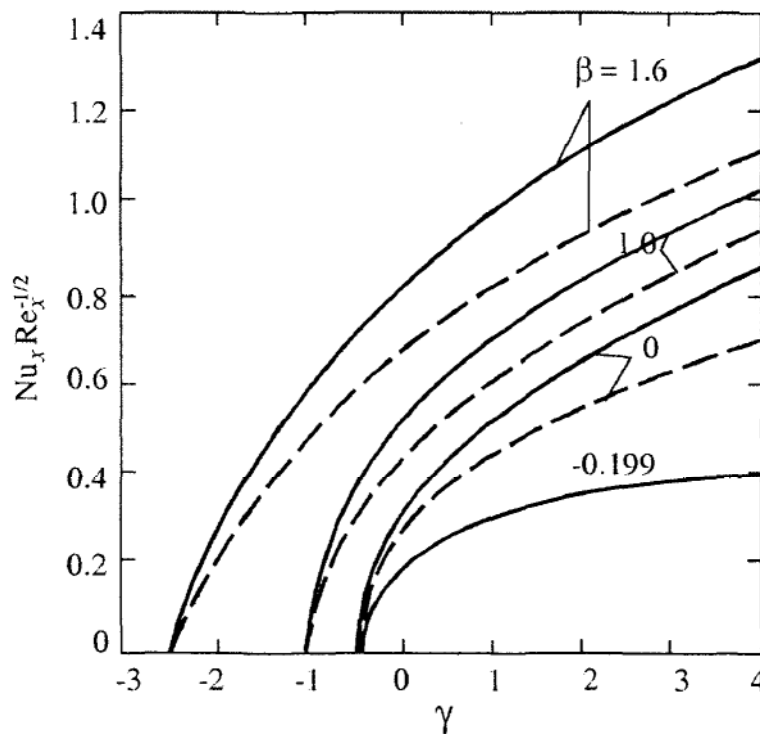


Рис. 2.8. Зависимость теплоотдачи от параметров β и γ при $Pr = 0,7$: (—) — точное решение; (---) — расчет по формуле (2.102)

Отмечено удовлетворительное соответствие этих методов расчета (для самых крайних случаев расхождение не превышает 20 %). В частности, из уравнения (2.101) следует, что для плоского течения коэффициент теплоотдачи равен нулю при условии

$$2\lambda + m + 1 = 0, \quad \text{или} \quad \gamma = -\frac{m+1}{2}, \quad (2.108)$$

что совпадает с точным решением.

На основании проведенного анализа можно прийти к выводу, что закон теплообмена, по крайней мере для степенного изменения скорости основного потока и температуры стенки, остается достаточно консервативным к изменению граничных условий. Это объясняется тем, что законы трения и теплообмена в такой форме были получены для локальных случаев, когда профили скорости и температуры удовлетворяли условиям на стенке и внешней границе слоя. А изменение граничных условий по длине поверхности учитывается при решении интегральных соотношений.

На этом основании рассмотренный метод расчета можно рекомендовать как первое приближение для произвольных граничных условий. Подставляя заданные законы изменения $U_0 = f_1(x)$ и $\Delta T = f_2(x)$ в уравнения (2.98), (2.99) и (2.95), получаем расчетные формулы для локальных значений числа Стентона.

ТЕПЛООБМЕН ПРИ ЗАДАННОЙ ТЕПЛОВОЙ НАГРУЗКЕ $q_{\text{ст}} = q_{\text{ст}}(x)$ (ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ II РОДА)

В рассмотренных выше задачах мы задавались температурой стенки (граничные условия I рода) и при заданных гидродинамических условиях находили коэффициенты теплообмена. После этого не составляет труда определить тепловой поток, который необходимо снять (или подвести), чтобы обеспечить заданную температуру стенки:

$$\text{St} = \frac{q_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0 c_{p_0} \Delta T}; \quad q_{\text{ст}} = \rho_0 U_0 c_{p_0} \Delta T \text{St}.$$

Зависимость числа Стентона от числа Рейнольдса и других параметров течения при заданной температуре стенки была получена нами ранее.

Часто в инженерной практике встречаются задачи, когда при заданной тепловой нагрузке $q_{\text{ст}}(x)$ требуется определить температуру стенки. Такие граничные условия называют граничными условиями II рода.

Уравнение энергии для непроницаемой стенки

$$\frac{d Re_T^{**}}{d \bar{x}} + \frac{Re_T^{**}}{\Delta T} \frac{d \Delta T}{d \bar{x}} = St Re_L$$

можно переписать

$$\frac{d(Re_T^{**} \Delta T)}{\Delta T d \bar{x}} = \frac{q_{ст}}{\rho_0 U_0 c_{p0} \Delta T} \frac{\rho_0 U_0 L}{\mu},$$

или

$$\frac{d(Re_T^{**} \Delta T)}{d x} = \frac{q_{ст}}{\mu c_{p0}}.$$

После интегрирования имеем

$$\Delta T Re_T^{**} = \frac{1}{\mu c_{p0}} \int_0^{\bar{x}} q_{ст} d \bar{x}. \quad (2.109)$$

Выразим число Re_T^{**} через число St с помощью закона теплообмена:

$$St = \frac{0,22}{Re_T^{**} Pr^{4/3}} \Rightarrow Re_T^{**} = \frac{0,22}{St Pr^{4/3}} = \frac{0,22 \rho_0 U_0 c_{p0} \Delta T}{q_{ст} Pr^{4/3}} \quad (2.110)$$

и подставим (2.110) в (2.109):

$$\Delta T = \left(\frac{q_{ст} Pr^{4/3}}{0,22 \rho_0 U_0 c_{p0} \mu c_p} \int_0^{\bar{x}} q_{ст} d \bar{x} \right)^{1/2},$$

или с учетом того, что $Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}$, получим

$$\Delta T = \left(\frac{q_{ст} \bar{x}}{0,22 Re_x Pr^{2/3}} \int_0^{\bar{x}} \frac{q_{ст} d \bar{x}}{\lambda^2} \right)^{1/2}. \quad (2.111)$$

Таким образом, при заданной тепловой нагрузке можно найти распределение температур по длине поверхности. Далее определяем и значение коэффициента теплоотдачи $\alpha_x = q_{ст}(x)/\Delta T$.

Для случая постоянной тепловой нагрузки ($q_{ст} = \text{const}$) коэффициент теплообмена определяется довольно просто. Интересно сравнить его со значением, полученным при граничных условиях

I рода ($T_{ст} = \text{const}$). Как следует из уравнения (2.109), при $q_{ст} = \text{const}$ справедливо равенство

$$\Delta T \text{Re}_T^{**} = \frac{q_{ст} x}{\mu c_p}, \quad (2.112)$$

или

$$\text{Re}_T^{**} = \frac{q_{ст}}{\Delta T \rho_0 U_0 c_p} \frac{\rho_0 U_0 x}{\mu} = \text{St Re}_x, \quad (2.113)$$

$$\text{Re}_T^{**} = \text{St Re}_x.$$

Подставляя это значение в закон теплообмена, получаем

$$\text{St} = \frac{0,22}{\text{Re}_T^{**} \text{Pr}^{4/3}} = \frac{0,22}{\text{St Re}_x \text{Pr}^{4/3}},$$

откуда имеем

$$\text{St} = \sqrt{\frac{0,22}{\text{Re}_x \text{Pr}^{4/3}}} = 0,47 \text{Re}_x^{-1/2} \text{Pr}^{-2/3} \quad (2.114)$$

или

$$\frac{\text{St}_{q_{ст}=\text{const}}}{\text{St}_{T_{ст}=\text{const}}} = 1,42, \quad (2.115)$$

т.е. коэффициент теплообмена при постоянном тепловом потоке выше примерно в полтора раза, чем при $T_{ст} = \text{const}$ (для одинаковых гидродинамических условий).

Анализ точных решений для неизотермических условий [2, 3] течения ($\psi = T_{ст}/T_0 \neq 1$), т.е. когда температурный фактор существенно отличен от единицы, показывает, что неизотермичность и сжимаемость газа (число Маха) относительно слабо влияют на законы трения и теплообмена в ламинарном пограничном слое. В этом случае влияние изменения физических свойств (вязкости, плотности и теплопроводности) может взаимно компенсироваться.

Поэтому решения, полученные для течения с постоянными физическими свойствами, сохраняют свою силу и для течений с переменными физическими свойствами в широком диапазоне изменения температурного фактора $\psi = T_{ст}/T_0$, и в инженерных расчетах влиянием неизотермичности при малых скоростях течения $M < 1$ обычно пренебрегают.

По рекомендациям многих исследователей, влияние неизотермичности и сжимаемости при сверхзвуковом течении газа можно учесть по формуле

$$\Psi = (St/St_0)_{Re_T^{**}} = (c_f/c_{f_0})_{Re_T^{**}} = \Psi^{-0,16} \Psi^{*-0,08}, \quad (2.116)$$

где $\Psi = T_{ст}/T_0$ – температурный фактор; $\Psi^* = T_{ст}^*/T_0 = \left(1 + r \frac{k-1}{2} M^2\right)$ – кинетический температурный фактор; $T_{ст}^*$ – равновесная температура теплоизолируемой стенки; r – коэффициент восстановления; $k = \dot{c}_p/\dot{c}_v$ – показатель адиабаты; M – число Маха.

2.5. ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Термин «проницаемая поверхность» предполагает, что через поверхность тела возможно просачивание газа или жидкости. При этом в пограничный слой подается (вдувается) некоторая масса газа или, наоборот, некоторая масса газа отводится (отсасывается) через стенку из пограничного слоя. Таким образом, течение на проницаемой поверхности характерно тем, что поперечная составляющая скорости на стенке не равна нулю $V_{ст} \neq 0$, а имеет положительное значение $V_{ст} > 0$ при вдуве, и $V_{ст} < 0$ – при отсосе (см. рис. 1.6).

Поток массы газа может создаваться или возникать в самых разнообразных случаях. Так, например, для тепловой защиты элементов летательных аппаратов и двигателей используют пористое охлаждение, при котором через специальную пористую или перфорированную поверхность в пограничный слой подается некоторая масса охлаждающего газа или жидкости. Охлаждение вдувом более эффективно, чем регеративное охлаждение.

Вдув (подача массы) в пограничный слой имеет место также при испарении или сублимации специальных теплозащитных покрытий, при разложении вещества, из которого сделана поверхность, при горении поверхности и т.д.

Дополнительная масса может не только подаваться в пограничный слой, но также и отсасываться из него через пористую или перфорированную поверхность. Иногда отсос пограничного слоя организуется принудительно с целью ламинаризации пограничного слоя или предотвращения его отрыва, поскольку отрыв уменьшает подъемную силу крыла и увеличивает его лобовое сопротивление.

По сути дела, с явлением отсоса ($V_{\text{ст}} < 0$) мы сталкиваемся при конденсации на поверхности, при протекании химических реакций на поверхности с образованием жидких или твердых веществ. Просачивание газа через поверхность происходит при обтекании парашюта, изготовленного из проницаемой ткани.

Из приведенного далеко не полного перечня практических примеров видно, насколько важны вопросы тепломассообмена и трения на проницаемой поверхности.

ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ С ОТСОСОМ ($V_{\text{ст}} < 0$)

Для простоты рассмотрим случай так называемого асимптотического отсоса. При этом имеется автомодельное решение, для которого распределение скоростей не зависит от продольной координаты x .

При $\partial U / \partial x = 0$ из уравнения неразрывности следует

$$V = V_{\text{ст}} = \text{const} < 0, \quad (2.117)$$

и уравнение движения принимает вид

$$V_{\text{ст}} \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}. \quad (2.118)$$

Граничные условия при этом:

$$\begin{aligned} U &= 0, \quad V = V_{\text{ст}} < 0 && \text{при } y = 0; \\ U &= U_0 && \text{при } y = \infty. \end{aligned}$$

Решением уравнения (2.118) при $V_{\text{ст}} < 0$ будет

$$U(y) = U_0 \left(1 - e^{V_{\text{ст}} y / \nu} \right). \quad (2.119)$$

Отметим, что это простое решение является точным решением полных уравнений Навье – Стокса.

Для толщины вытеснения и толщины потери импульса получим следующие значения:

$$\delta^* = -\frac{\nu}{V_{\text{ст}}}; \quad \delta^{**} = -\frac{\nu}{2V_{\text{ст}}}. \quad (2.120)$$

Касательное напряжение на стенке и коэффициент трения:

$$\tau_{\text{ст}} = \mu (dU / dy)_{y=0} = -\rho V_{\text{ст}} U_0; \quad (2.121)$$

$$\frac{c_f}{2} = \frac{\tau_{ст}}{\rho_0 U_0^2} = -\frac{V_{ст}}{U_0}. \quad (2.122)$$

Как видно из этих формул, касательное напряжение и коэффициент трения в рассматриваемых условиях (в случае асимптотического отсоса) не зависят от вязкости жидкости.

Для течений на проницаемых поверхностях интенсивность поперечного потока вещества принято характеризовать безразмерным параметром

$$b_1 = \frac{j_{ст}}{\rho_0 U_0} \frac{2}{c_f}.$$

При асимптотическом отсосе с учетом формулы (2.122) его значение будет

$$b_1 = -1.$$

На рис. 2.9 сопоставляются профили скорости на проницаемой пластине с асимптотическим отсосом и на непроницаемой стенке – профиль Блазиуса. Как видно из графика, профиль скоростей при отсасывании более заполненный, чем без отсоса.

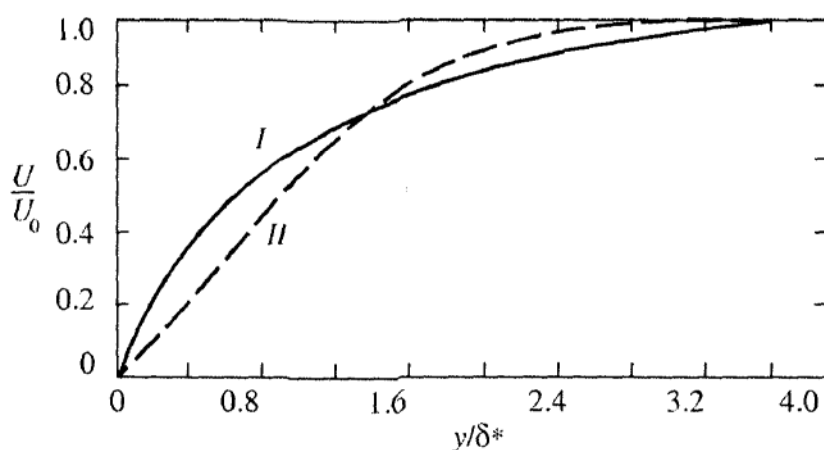


Рис. 2.9. Распределение скоростей в пограничном слое на плоской пластине: I – асимптотический профиль скоростей при равномерном отсасывании; II – профиль скоростей без отсоса

Найденное решение применимо для продольного обтекания плоской пластины даже в том случае, когда отсос начинается непосредственно с передней кромки. В самом деле, здесь толщина пограничного слоя на передней кромке равна нулю. Вниз по течению она начинает расти и достигает своего значения, определяемого формулами (2.120). Распределение скоростей имеет простой вид

(2.119) только после того, как течением будет пройден вдоль пластины некоторый начальный участок. Как было показано при исследовании течения на начальном участке [1], автомодельное (асимптотическое) распределение скоростей (2.119) устанавливается со значений продольной координаты x :

$$\left(-\frac{V_{\text{ст}}}{U_0}\right)^2 \frac{U_0 x}{\nu} = j_{\text{ст}}^2 \text{Re}_x = 4. \quad (2.123)$$

Аналогичным образом можно получить автомодельное решение уравнения энергии. А можно, воспользовавшись аналогией Рейнольдса, сразу записать выражение для коэффициента теплообмена

$$\text{St} = c_f / 2 = -V_{\text{ст}} / U_0 = -j_{\text{ст}}. \quad (2.124)$$

ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ С ВДУВОМ

Для многих прикладных задач представляет интерес случай вдува через поверхность теплообмена (пористое охлаждение, испарение, сублимация, химически реагирующая поверхность и т.д.). Анализ точных решений уравнений пограничного слоя на проницаемой поверхности [1, 2] показывает, что автомодельные решения существуют, когда вдув газа по длине изменяется в соответствии с соотношением

$$V_{\text{ст}} \approx x^{(m-1)/2} \quad (2.125)$$

при $U_0 = cx^m$. В частности, в окрестности лобовой точки ($m = 1$) $V_{\text{ст}} = \text{const}$. При обтекании плоской пластины ($m = 0$) $V_{\text{ст}} \approx x^{-1/2}$ или $V_{\text{ст}} \approx 1/\sqrt{x}$. Из результатов расчетов следует, что вдув газа в пограничный слой приводит к резкому снижению коэффициентов трения и тепломассообмена. При этом профили скоростей, температур и концентраций в пограничном слое деформируются таким образом, что градиенты этих величин у стенки резко уменьшаются.

В качестве примера на рис. 2.10 показано изменение профиля скорости в зависимости от интенсивности вдува. Профили температур и концентраций при $\text{Pr} = \text{Sc} = 1$ совпадают с профилем скорости, а при $\text{Pr} \neq 1$ несколько отличаются. Анализ рассчитанных профилей скорости, температур и концентраций обнаруживает, что

с ростом параметра вдува пограничный слой утолщается, а при достижении значений скорости вдува $V_{\text{ст}}$:

$$\sqrt{\text{Re}_x} V_{\text{ст}} / U_0 = 0,619 \quad (2.126)$$

происходит оттеснение пограничного слоя от поверхности, что характеризуется равенством нулю касательного напряжения на поверхности (или коэффициента трения), теплового и диффузионного потоков (или коэффициентов тепло-массообмена).

Так как коэффициент трения на непроницаемой пластине обусловлен известным соотношением

$$\frac{c_{f0x}}{2} = \frac{0,332}{\sqrt{\text{Re}_x}} \approx 1/3 \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_x}},$$

то можно ввести еще параметр вдува, вычисляемый по коэффициенту трения на непроницаемой пластине:

$$b_x = \frac{j_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0} \frac{2}{c_{f0x}} \approx 3 \frac{j_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0} \sqrt{\text{Re}_x}. \quad (2.127)$$

Здесь везде индекс x указывает на то, что значения этих параметров определяются по текущей длине x или по Re_x . Тогда в соответствии с соотношением (2.126) ламинарный пограничный слой оттесняется от стенки, и коэффициенты тепло-массообмена и трения становятся равными нулю при

$$b_1 = b_{x_{\text{кр}}} = 3 j_{\text{ст}} / \rho_0 U_0 \sqrt{\text{Re}_x} = 3 \cdot 0,619 = 1,86. \quad (2.128)$$

При анализе ламинарного пограничного слоя на проницаемой стенке можно воспользоваться и методом Кармана – Польгаузена, когда профиль скорости аппроксимируется степенным полиномом с учетом граничных условий. Однако, как показано некоторыми исследователями, в режимах сильного вдува имеется значительное расхождение с результатами точного решения, и этот метод не дает конечного значения критического параметра вдува, а $\Psi = \tau_{\text{ст}} / \tau_0 = c_f / c_{f0} \rightarrow 0$ при $b_{\text{кр}} \rightarrow \infty$.

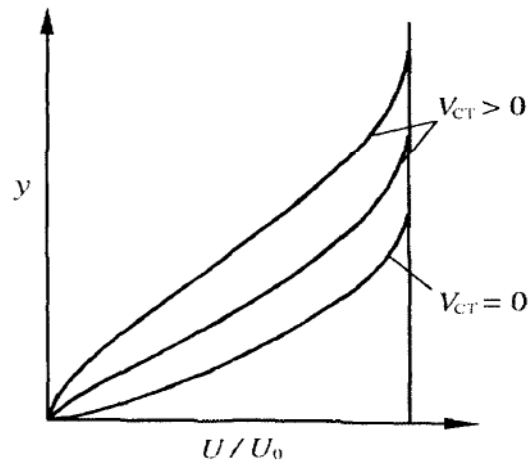


Рис. 2.10. Влияние подачи газа через поверхность на форму профиля скорости

ПЛЕНОЧНАЯ ТЕОРИЯ

Довольно широкое распространение получили работы, основанные на использовании пленочной модели течения на проницаемой поверхности. В пленочной теории принимается допущение о том, что можно пренебречь изменением параметров в направлении течения по сравнению с изменением в поперечном направлении: $\partial/\partial x \ll \partial/\partial y$. Физически это означает, что действительный двумерный пограничный слой заменяется одномерным течением Куэтта. В соответствии с принятым допущением запишем уравнения сохранения:

– массы

$$\frac{d(\rho V)}{dy} = 0, \quad \rho V = \text{const} = j_{\text{ст}}; \quad (2.129)$$

– количества движения

$$\rho V \frac{dU}{dy} = j_{\text{ст}} \frac{dU}{dy} = \mu \frac{d^2 U}{dy^2}; \quad (2.130)$$

– энергии

$$\rho V c_p \frac{dT}{dy} = \lambda \frac{d^2 T}{dy^2}. \quad (2.131)$$

Граничные условия:

– при $y = 0$: $U = 0$, $T = T_{\text{ст}}$;

– при $y = \delta$: $U = U_0$, $T = T_0$. (2.132)

Поскольку из (2.129), следует, что $\rho V = \text{const} = j_{\text{ст}}$, решения уравнений (2.130) и (2.131) с учетом граничных условий (2.132) дают профили скорости и температуры в следующем виде*:

$$\omega = \frac{U}{U_0} = \frac{e^{\text{Re}_{\text{ст}} \eta} - 1}{e^{\text{Re}_{\text{ст}}} - 1} = \frac{\exp[(j_{\text{ст}} \delta / \mu)(y / \delta)] - 1}{\exp(j_{\text{ст}} \delta / \mu) - 1}; \quad (2.133)$$

$$\vartheta = \frac{T - T_{\text{ст}}}{T_0 - T_{\text{ст}}} = \frac{e^{\text{Re}_{\text{ст}} \text{Pr} \eta} - 1}{e^{\text{Re}_{\text{ст}} \text{Pr}} - 1} = \frac{\exp[(j_{\text{ст}} \delta / \mu) \text{Pr}(y / \delta)] - 1}{\exp[(j_{\text{ст}} \delta / \mu) \text{Pr}] - 1}. \quad (2.134)$$

* Вывод уравнения (2.133) предлагается сделать самостоятельно.

Здесь $\eta = y/\delta$. Касательное напряжение на стенке $\tau_{\text{ст}}$ может быть определено так:

$$\tau_{\text{ст}} = \mu(dU/dy)_{\text{ст}} = \mu(U_0/\delta)(d\omega/d\eta)_{\eta=0}.$$

Из (2.133) следует, что

$$\left. \frac{d\omega}{d\eta} \right|_{\eta=0} = \frac{\text{Re}_{\text{ст}}}{e^{\text{Re}_{\text{ст}}} - 1}.$$

Тогда

$$\tau_{\text{ст}} = \mu(U_0/\delta) \left[\text{Re}_{\text{ст}} / (e^{\text{Re}_{\text{ст}}} - 1) \right]. \quad (2.135)$$

С другой стороны, исходя из пленочной модели течения при отсутствии вдува, можно получить

$$\tau_{\text{ст}0} = \mu U_0 / \delta. \quad (2.136)$$

Таким образом, при одинаковых значениях δ или $\text{Re}_{\delta} = \rho_0 U_0 \delta / \mu$ из уравнений (2.135) и (2.136) получаем относительный закон трения

$$(\tau/\tau_{\text{ст}0})_{\delta} = (c_f/c_{f0})_{\text{Re}_{\delta}} = \text{Re}_{\text{ст}} / (e^{\text{Re}_{\text{ст}}} - 1), \quad (2.137)$$

где

$$\text{Re}_{\text{ст}} = \frac{j_{\text{ст}} \delta}{\mu} = \frac{j_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0} \frac{\rho_0 U_0 \delta}{\mu} = \frac{j_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0} \frac{\rho_0 U_0^2 \delta}{U_0 \mu}.$$

С учетом (2.136)

$$\begin{aligned} \rho_0 U_0^2 \frac{\delta}{U_0 \mu} &= \frac{\rho_0 U_0^2}{\tau_{\text{ст}0}} = \frac{2}{c_{f0}}, \\ \text{Re}_{\text{ст}} &= \frac{j_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0} \frac{2}{c_{f0}} = b. \end{aligned} \quad (2.138)$$

Здесь b – параметр проницаемости, рассчитанный по коэффициенту трения в стандартных условиях c_{f0} .

С учетом этого относительный закон трения (2.138) можно переписать:

$$\Psi = (c_f/c_{f0})_{\text{Re}_{\delta}} = b/(e^b - 1). \quad (2.139)$$

Иногда используют параметр проницаемости, рассчитанный по коэффициенту трения на проницаемой пластине (в рассматриваемых условиях):

$$b_1 = \frac{j_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0 c_f} \frac{2}{\Psi} = \frac{b}{\Psi}; \quad b = b_1 \Psi. \quad (2.140)$$

В этом случае выражение (2.139) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} b/\Psi &= e^b - 1, \quad b_1 = e^b - 1 = e^{b_1 \Psi} - 1; \\ e^{b_1 \Psi} &= 1 + b_1 \Rightarrow b_1 \Psi = \ln(1 + b_1); \\ \Psi &= \left(\frac{c_f}{c_{f0}} \right)_{\text{Re}_\delta} = \frac{\ln(1 + b_1)}{b_1}. \end{aligned} \quad (2.141)$$

В первом приближении можно принять, что

$$(c_f / c_{f0})_{\text{Re}_\delta} = (c_f / c_{f0})_{\text{Re}_\tau^{**}}.$$

Проведя аналогичное решение уравнения энергии на проницаемой и непроницаемой стенках, получим, что

$$\left(\frac{\text{St}}{\text{St}_0} \right)_{\text{Re}_\tau^{**}} = \left(\frac{c_f}{c_{f0}} \right)_{\text{Re}^{**}} = \frac{b_T}{e^{b_T} - 1} = \frac{\ln(1 + b_{T1})}{b_{T1}}, \quad (2.142)$$

$$\text{где } b_T = \frac{j_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0 \text{St}_0} \frac{1}{\Psi}; \quad b_{T1} = \frac{j_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0 \text{St}} \frac{1}{\Psi}.$$

Пленочная теория дает приемлемые результаты при малых и умеренных вдувах. При интенсивных вдувах, как было показано выше, точное автомодельное решение ламинарного пограничного слоя, учитывающее в уравнениях движения и энергии продольные градиенты $\partial U / \partial x$ и $\partial T / \partial x$, предсказывает полное оттеснение пограничного слоя от стенки (при $b_x = 1,86$, $\Psi = 0$).

Пленочная теория, см. уравнения (2.140) и (2.142), дает асимптотическое уменьшение коэффициентов трения и теплообмена до нуля при $b \rightarrow \infty$. Здесь следует отметить, что пленочная теория используется для анализа влияния вдува как в ламинарном, так и в турбулентном пограничном слое [3]. Исследователями показано, что полученные зависимости хорошо описывают уменьшение переноса теплоты при вдуве в ламинарном пограничном слое при $\text{Pr} \sim 1$.

НЕКОТОРЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ

В известных научных статьях и монографиях, например в работе [3], обобщаются результаты численных решений уравнений ламинарного пограничного слоя на проницаемой пластине и предлагается следующая формула для расчета локального теплообмена:

$$q_{ст} / q_{ст0} = 1 - 1,82\varepsilon^{1/3} \frac{j_{ст}}{\rho_0 U_0} \sqrt{Re_x}. \quad (2.143)$$

Здесь $\varepsilon = M_0 / M'$ – отношение молекулярной массы основного потока и вдуваемого газа; $q_{ст0}$ – тепловой поток на непроницаемой пластине при $Re_x = idem$ и том же значении ΔT .

Физические параметры, входящие в Re_x , рассчитываются при определяющей температуре

$$T_{опр} = T_0 + 0,5(T_{ст} - T_0) + 0,22(T_{ст}^* - T_0).$$

Эта формула справедлива как для дозвукового, так и для сверхзвукового обтекания. Однако, как указано в работе [5] С.С. Кутателадзе, она дает удовлетворительные результаты при умеренных вдувах, $b/b_{кр} < 0,6$.

Наиболее простая линейная аппроксимация с достаточной степенью точности предложена А.И. Леонтьевым [2]:

$$\Psi = (c_f / c_{f0})_{Re^{**}} = (St/St_0)_{Re^{**}} = 1 - b/b_{кр}, \quad (2.144)$$

где

$$b_{кр} = 3,4/\varepsilon^{2/3}, \quad \varepsilon = M_0 / M'. \quad (2.145)$$

Как видно из графиков (рис. 2.11), для практических расчетов ламинарного пограничного слоя со вдувом можно использовать линейную аппроксимацию (2.144).

При анализе пограничного слоя на проницаемой стенке применяют два вида параметра вдува

$$b_x = \frac{j_{ст}}{\rho_0 U_0} \frac{1}{St_{0x}} \quad \text{и} \quad b = \frac{j_{ст}}{\rho_0 U_0} \frac{1}{St_0}. \quad (2.146)$$

Они отличаются определением чисел Стентона (или коэффициента трения):

$$St_{0x} = \frac{0,332}{\sqrt{Re_x} Pr^{2/3}}; \quad St_0 = \frac{0,22}{Re_T^{**} Pr^{4/3}}. \quad (2.147)$$

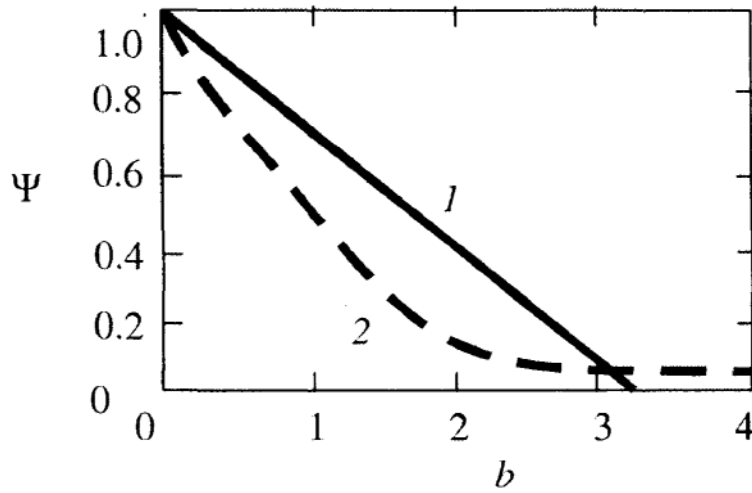


Рис. 2.11. Сопоставление расчета по формуле (2.144) с пленочной теорией (2.142): 1 – линейная аппроксимация; 2 – пленочная теория (2.142)

Найдем соотношение между параметрами вдува, St_0/St_{0x} . Воспользуемся для этого решением интегрального уравнения энергии, которое для плоской стенки при $T_{ст} = \text{const}$ имеет вид

$$\frac{d Re_T^{**}}{d Re_x} = St + j_{ст} = St_0(\Psi + b). \quad (2.148)$$

После интегрирования при $\Psi = \text{const}$ и $b = \text{const}$ получаем

$$Re_T^{**} = \left[\frac{0,44}{Pr^{4/3}} Re_x (\Psi + b) \right]^{1/2}. \quad (2.149)$$

Следовательно, в соответствии с формулами (2.147) и (2.149) имеем

$$\frac{St_0}{St_{0x}} = \frac{0,22}{Re_T^{**} Pr^{4/3}} \frac{\sqrt{Re_x} Pr^{2/3}}{0,332} = \frac{1}{(\Psi + b)^{1/2}}, \quad (2.150)$$

и так как

$$b_x = b \frac{St_0}{St_{0x}}, \quad (2.151)$$

то

$$b_x = \frac{b}{(\Psi + b)^{1/2}}. \quad (2.152)$$

Тогда при $\Psi = 0$, $b = b_{кр}$, $b_x = b_{хкр}$

$$b_{хкр} = (b_{кр.})^{1/2}. \quad (2.153)$$

Отсюда видно, что выражение (2.145)

$$b_{кр} = 3,4/\varepsilon^{2/3},$$

соответствует полученному из точного решения при $\varepsilon = 1$ [см. (2.128)]

$$b_{хкр} = \sqrt{3,4} \sim 1,86.$$

ПОРЯДОК РАСЧЕТА ТЕПЛОМАССООБМЕНА НА ПОРИСТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Интегральное соотношение энергии пограничного слоя на пористой поверхности в общем случае ($T_{ст} = f(x)$, $U_0 = f(x)$) имеет вид

$$\frac{d Re_T^{**}}{d\bar{x}} + \frac{Re_T^{**}}{\Delta T} \frac{d(\Delta T)}{d\bar{x}} = St_0 (\Psi + b_T) Re_L. \quad (2.154)$$

Для ламинарного пограничного слоя закон теплообмена в стандартных условиях

$$St_0 = 0,22 / Re_T^{**} Pr^{4/3}. \quad (2.155)$$

Относительный закон теплообмена можно принять либо по пленочной теории (2.139), либо по более простой линейной зависимости (2.144):

$$\Psi = (St/St_0)_{Re_T^{**}} = 1 - \frac{b_T}{b_{Tкр}}. \quad (2.156)$$

Как видно из этих уравнений, для проведения расчета тепломассообмена необходимо предварительно найти значение параметра проницаемости b_T . Он определяется в зависимости от граничных условий конкретной задачи. При пористом охлаждении охлаждающий газ подается через пористую стенку в пограничный слой.

Рассмотрим баланс теплоты на поверхности теплообмена при вдуве однородного газа (рис. 2.12). В стационарных условиях вся теплота, поступающая в пористую стенку, аккумулируется охлаждающим газом, а так как внутренняя поверхность пористого материала достаточно велика, можно полагать, что температура охлаж-

дающего газа на выходе из пористой стенки равна температуре стенки. Тогда

$$q_{\text{ст}} = j_{\text{ст}} c_p (T_{\text{ст}} - T'). \quad (2.157)$$

Приведя это уравнение к безразмерному виду, получим

$$\Psi = b_T K, \quad b_{T_1} = 1/K,$$

где

$$K = \frac{T_{\text{ст}} - T'}{T_0 - T_{\text{ст}}}. \quad (2.158)$$

Если заданы температуры T_0 , T' и $T_{\text{ст}}$, то уравнение (2.158) по существу определяет параметр проницаемости b_{T_1} в случае пористого охлаждения.

Так как

$$b_T = b_{T_1} \Psi = \Psi/K, \quad (2.159)$$

то, подставляя сюда значение Ψ из (2.156), получаем

$$b_T = \frac{b_{T_{\text{кр}}}}{1 + Kb_{T_{\text{кр}}}}. \quad (2.160)$$

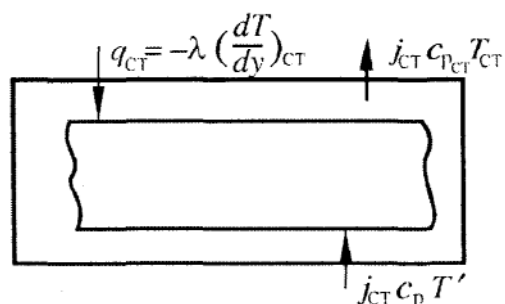


Рис. 2.12. Баланс теплоты на поверхности при пористом охлаждении

Обычно при расчетах пористого охлаждения требуется найти расход вдуваемого газа, необходимого для обеспечения заданной температуры поверхности тела. При известном законе изменения температур стенки и вдуваемого газа из уравнения (2.160) получают локальные значения параметра проницаемости b_T .

В частности, условие $T_{\text{ст}} = \text{const}$ соответствует условию $b_T = \text{const}$ ($K = \text{const}$; $b = \text{const}$; $\Psi = \text{const}$). С учетом выражения для b_T , см. (2.142), имеем

$$j_{\text{ст}} = \rho_0 U_0 b_T \text{St}_0. \quad (2.161)$$

Значение числа Стентона St_0 определяется из решения интегрального соотношения энергии (2.154) совместно с (2.155).

В общем виде имеем

$$\text{Re}_T^{**} = \frac{1}{\Delta T} \left[\frac{0,44}{\text{Pr}^{4/3}} \text{Re}_L \int_0^{\bar{x}} \bar{U}_0 (\Psi + b_T) \Delta T d\bar{x} \right]^{1/2}. \quad (2.162)$$

Здесь $\bar{U}_0 = U_0 / U_{01} = f_1(x)$; $\Delta T = f_2(x)$; $\text{Re}_L = \frac{\rho_0 U_0 L}{\mu}$.

Для случая $T_{\text{ст}} = \text{const}$, $T' = \text{const}$ ($K = \text{const}$; $b = \text{const}$; $\Psi = \text{const}$) и $U_0 = \text{const}$, что может быть, например, на плоской стенке, выражение (2.162) упрощается:

$$\text{Re}_T^{**} = \left[\frac{0,44}{\text{Pr}^{4/3}} \text{Re}_x (\Psi + b_T) \right]^{1/2}. \quad (2.163)$$

Тогда расчетная формула для расхода охлаждающего газа (2.161) с учетом (2.155) и (2.163) примет вид

$$\bar{j}_{\text{ст}} = \frac{0,332}{\text{Re}_x^{0,5} \text{Pr}^{2/3}} \frac{b_T}{(\Psi + b_T)^{0,5}}, \quad (2.164)$$

где b_T определится по (2.160), а Ψ – по (2.156). Или с учетом того, что $b_T = b_{T_1} \Psi$, выражение (2.164) можно записать иначе:

$$\bar{j}_{\text{ст}} = \frac{0,332}{\text{Re}_x^{0,5} \text{Pr}^{2/3}} \frac{b_{T_1} \Psi^{0,5}}{(1 + b_{T_1})^{0,5}}. \quad (2.165)$$

В этом случае значение параметра b_{T_1} определяется в соответствии (2.158), $b_{T_1} = 1/K$, а относительная функция Ψ находится из уравнения (2.142) пленочной теории

$$\Psi = \frac{\ln(1 + b_{T_1})}{b_{T_1}}.$$

Таким образом, для поддержания постоянной температуры стенки расход вдуваемого газа должен изменяться по закону $\bar{j}_{\text{ст}} \sim x^{-0,5}$. Если

проделать эти же выкладки для степенного закона изменения скорости основного потока $\bar{U}_0 = x^m$, то получим, что в окрестности лобовой точки (когда $m = 1$) $j_{\text{ст}} = \text{const}$.

В случае, например, испарения или сублимации с поверхности определению подлежит количество отводимого от поверхности пара. Расход пара находим из уравнения теплового баланса на поверхности

$$q_{\text{ст}} = j_{\text{ст}} r,$$

где r – скрытая теплота фазового перехода (испарения).

После нескольких преобразований получим $b_T = \Psi/K$, $K = r/c_p \Delta T$ – критерий Кутателадзе (критерий фазового перехода). Далее расчет можно вести по тем же формулам, что и для пористой стенки.



Глава 3

ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

В предыдущих разделах мы рассмотрели ламинарное течение в пограничном слое, при котором перенос количества движения, тепла и вещества происходит в результате молекулярных процессов вязкости, теплопроводности и диффузии. При этом значения напряжения трения и теплового потока являются известными функциями распределения скорости и температуры. Для ламинарного течения записана полная система уравнений, и в настоящее время существуют математические методы их решения. Экспериментальные уточнения требуются лишь из-за необходимой схематизации явлений в сложных случаях течений, однако вводимые поправки невелики.

Течения при очень высоких числах Re обладают новым особым свойством – турбулентностью. Законы таких течений значительно отличаются от законов ламинарных течений и не описываются стационарными уравнениями Навье–Стокса для вязкой жидкости. Поскольку турбулентное течение чрезвычайно сложно и рациональные теории турбулентности отсутствуют, строгое решение задачи в настоящее время невозможно. При решении отдельных задач вводятся различные предположения и допущения, поэтому в методах расчета турбулентного теплообмена большое значение имеет эксперимент. При этом следует заметить, что использование точных численных методов расчета турбулентного пограничного слоя не всегда оправдана, так как при замыкании системы дифференциальных уравнений приходится принимать допущения, которые могут свести на нет их преимущества. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением приближенных методов расчета турбулентного пограничного слоя, но которые достаточно просты и дают необходимую точность при проведении инженерно-технических расчетов.

3.1. ПЕРЕХОД ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОЕ

Как уже было отмечено, при ламинарном течении в прямых трубах и каналах с постоянным поперечным сечением и с гладкими стенками каждая частица жидкости движется при небольших числах Рейнольдса с постоянной скоростью по прямолинейной траектории. Вследствие вязкости частицы жидкости, близкие к стенкам, текут медленнее, чем частицы, более удаленные от стенок. Течение происходит упорядоченным образом в виде движущихся один относительно другого слоев (слоистое течение). При более высоких числах Рейнольдса течение перестает быть упорядоченным, на главное течение жидкости в направлении оси трубы налагаются поперечные движения, т. е. движения, происходящие в направлении, перпендикулярном к оси трубы. Эти поперечные движения и приводят к перемешиванию движущейся жидкости, течение становится турбулентным. В результате такого перемешивающего движения происходит обмен импульсами в поперечном направлении, в то время как в продольном направлении каждая частица в основном сохраняет свой импульс.

При турбулентном течении усиливается обмен импульсом и энергией в поперечном направлении, в связи с чем возрастает трение, теплообмен и массообмен.

Значение числа Рейнольдса Re , при котором нарушается устойчивость ламинарного течения жидкости, называется критическим $Re_{кр}$.

Как установил Рейнольдс, для течения в гладкой трубе

$$Re_{кр} = \left(\frac{U_{ср} d}{\nu} \right)_{кр} \approx 2300.$$

При $Re < Re_{кр}$ любые возмущения, возникающие в потоке, с течением времени затухают и не могут изменить общий ламинарный характер течения. Наоборот, при $Re > Re_{кр}$, любые, даже весьма малые, возмущения самопроизвольно возрастают и приводят к неустойчивости течения, т. е. к турбулизации потока. При этом переход от одной формы течения к другой происходит не мгновенно, а на каком-то переходном участке.

Явление перехода наблюдается также в пристенном пограничном слое при внешнем обтекании тел. При этом на достаточно длинном теле могут существовать все три области течения. Схематически такая ситуация показана на рис. 3.1.

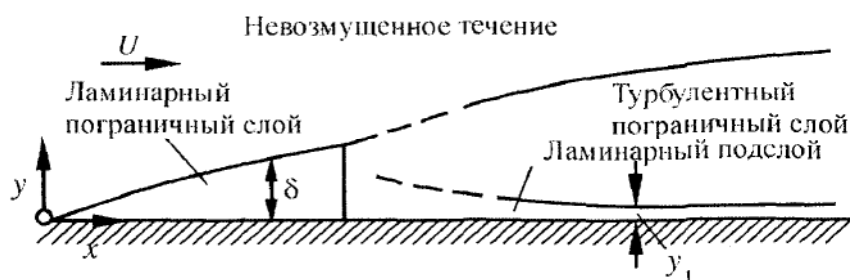


Рис. 3.1. Схема перехода ламинарного течения в турбулентное

Наиболее просто переход наблюдать на плоской пластине. С увеличением расстояния x от передней кромки растет число Рейнольдса $Re_x = U_0 x / \nu$. При достижении критического значения ($Re_x = Re_{кр}$) наблюдается изменение режима течения, сопровождающееся резким утолщением пограничного слоя и деформацией профилей скоростей и температуры. Одновременно возрастают коэффициенты теплоотдачи и трения и изменяется характер их зависимости от x . На рис. 3.2, заимствованном у Шлихтинга [1], показано изменение безразмерной толщины пограничного слоя по длине пластины.

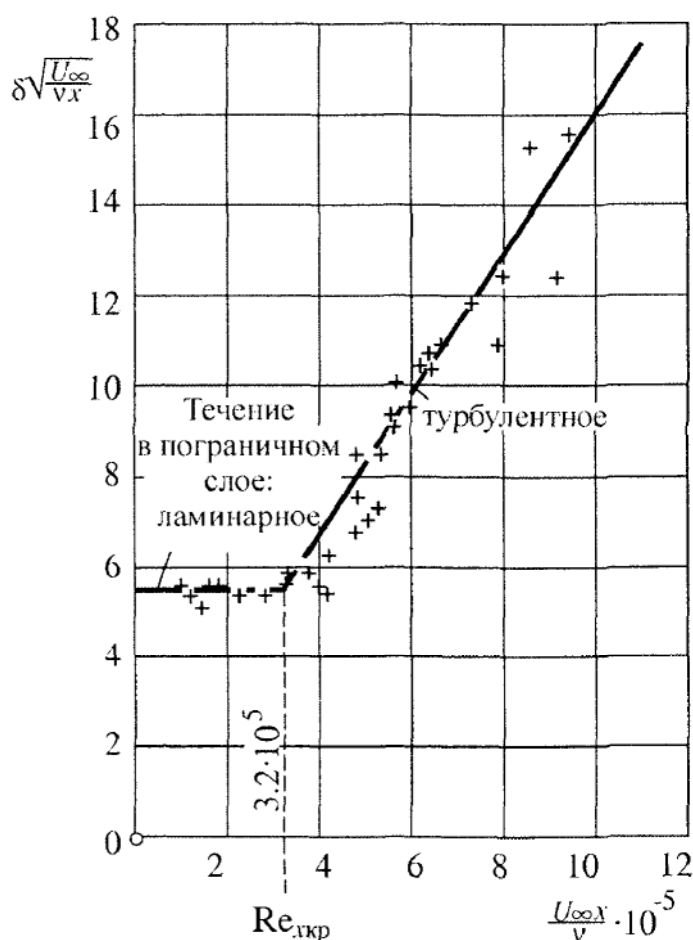


Рис. 3.2. Изменение безразмерной толщины пограничного слоя при разных режимах течения

Как известно, для ламинарного пограничного слоя $\delta/x = 5/\sqrt{Re_x}$ или $\delta\sqrt{U_0/\nu x} = \text{const} = 5$, т. е. пока течение ламинарно, величина $\delta\sqrt{U_0/\nu x}$ должна оставаться постоянной. При $Re_x = Re_{кр}$ толщина пограничного слоя начинает возрастать.

При переходе ламинарного течения в турбулентное изменяется и распределение скоростей. С этим изменением связано уменьшение формпараметра:

$$H = \delta^* / \delta^{**},$$

$$\text{где } \delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho U}{\rho_0 U_0}\right) dy, \quad \delta^{**} = \int_0^\delta \frac{\rho U}{\rho_0 U_0} \left(1 - \frac{U}{U_0}\right) dy.$$

В пограничном слое на пластине формпараметр уменьшается от $H_n \approx 2,6$ в ламинарной области до значения $H_t \approx 1,4$ в турбулентной (рис. 3.3).

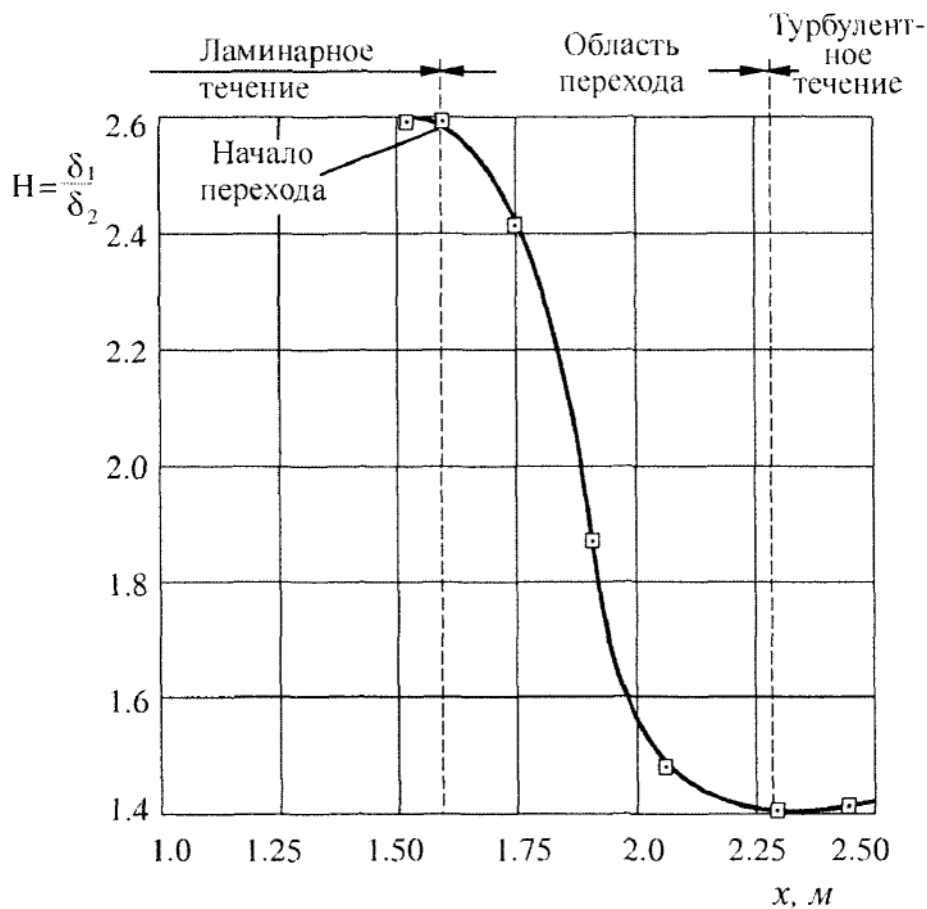


Рис. 3.3. Изменение формпараметра при переходе ламинарного течения в турбулентное

В инженерных расчетах обычно принимают, что переход от ламинарного пограничного слоя к турбулентному на пластине происходит в диапазоне $(Re_x)_{кр} = (2...5) \cdot 10^5$. Эти данные относятся к обтеканию гладких поверхностей с достаточно высокой турбулентностью внешнего течения.

Число Re_x не очень удобно использовать в качестве критерия перехода от ламинарного пограничного слоя к турбулентному, поскольку в него входит постоянная скорость внешнего течения U_0 . Если U_0 существенно изменяется по x , то использование Re_x лишено физического смысла.

Предпочтительнее иметь местный параметр перехода, например число Рейнольдса, в которое входят локальные характеристики пограничного слоя. Линейным размером может служить условная толщина слоя, однако она не всегда может быть найдена из-за нечеткого ее определения. Поэтому за линейный размер можно принять интегральные величины: толщину вытеснения δ^* или толщину потери импульса δ^{**} .

Для ламинарного течения на пластине из интегрального соотношения импульсов следует, что

$$Re^{**} = U_0 \delta^{**} / \nu = (0,44 Re_x)^{0,5}. \quad (3.1)$$

Если принять, что при обтекании плоской пластины

$$(Re_x)_{кр} = (U_0 x / \nu)_{кр} = 3 \cdot 10^5,$$

то с учетом (3.1) получаем

$$(Re^{**})_{кр} = (U_0 \delta^{**} / \nu)_{кр} = 360. \quad (3.2)$$

Соотношение (3.2) является местным критерием перехода от ламинарного пограничного слоя к турбулентному независимо от предистории течения.

Вычислим для ламинарного течения в трубе критическое значение числа Рейнольдса Re^{**} , рассчитанное по скорости на оси трубы (при $y = \delta$) и по толщине потери импульса.

$$Re_{Dкр} = U_{кр} d / \nu = 0,5 U_{max} \cdot 2\delta / \nu = (U_{max} \delta / \nu)_{кр} = 2300,$$

где $U_{кр} = 0,5 U_{max}$, $d = 2\delta$.

Для ламинарного слоя $\delta^{**} / \delta = 39 / 280 \approx 1/7$, тогда для трубы

$$(Re^{**})_{кр} \approx 330. \quad (3.3)$$

Интересно отметить, что критические значения такого числа Рейнольдса близки для пластины и трубы. Таким образом, предложенный критерий удовлетворителен, по крайней мере, с этой точки зрения.

Значение $Re_{кр}$ в общем случае зависит от большого числа факторов. Ограничиваясь учетом наиболее важных, можно записать

$$Re_{кр} = f \left(\frac{dP}{dx}, \frac{h}{\delta^{**}}, \frac{\sqrt{u'^2}}{U}, \frac{T_{ст}}{T_0}, M, \dots \right).$$

Это выражение показывает зависимость $Re_{кр}$ от величины продольного градиента давления, относительной шероховатости h/δ^{**} , степени турбулентности потока, температурного фактора и числа Маха. Более детальную информацию о влиянии этих факторов на $Re_{кр}$ можно найти в книге Шлихтинга.

3.2. ОСРЕДНЕННОЕ И ПУЛЬСАЦИОННОЕ ДВИЖЕНИЯ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ (УРАВНЕНИЯ РЕЙНОЛЬДСА)

Исследования турбулентного потока показывают, что в каждой фиксированной точке потока скорость, давление и температура не остаются постоянными во времени, а очень часто и неравномерно изменяются (рис. 3.4). Такие изменения называют *пульсациями*, и они являются наиболее характерным свойством турбулентного течения.

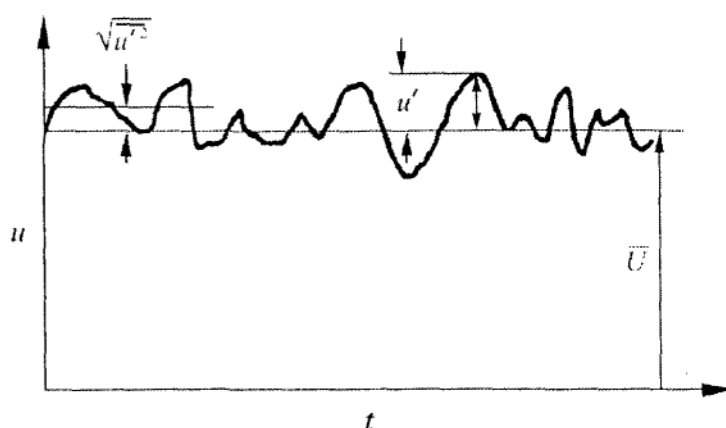


Рис. 3.4. Изменение скорости турбулентного течения по времени. $\bar{U}$ — средняя составляющая скорости; u' — пульсационная составляющая скорости (относительно среднего значения)

Чтобы получить уравнения сохранения для турбулентного потока, заменим мгновенные значения параметров, входящих в уравнения движения и энергии, суммой средней и пульсационной составляющих этих параметров. Например, скорость и плотность записываются следующим образом:

$$u = \bar{U} + u', \quad \rho = \bar{\rho} + \rho',$$

где u и ρ – полные, или *мгновенные*, значения скорости и плотности; u' и ρ' – наложенные пульсационные составляющие, а $\bar{U}$ и $\bar{\rho}$ – осредненные по времени значения скорости и плотности.

Осредненное по времени значение переменного параметра $f(t)$ определяется соотношением

$$\bar{f} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} f(t) dt.$$

Чтобы осреднение не зависело от времени, необходимо правильно выбрать интервал времени Δt , который должен быть достаточно большим по сравнению с периодом пульсаций, но и достаточно малым по сравнению с каким-либо характерным для осредненного движения интервалом времени, чтобы не учитывать возможных изменений средних параметров потока во времени.

Понятно, что средние значения пульсационных величин равны нулю:

$$\bar{u}' = 0, \quad \bar{v}' = 0, \quad \bar{p}' = 0.$$

Точно так же равны нулю средние произведения типа

$$\overline{f f'} = 0.$$

В связи с этим для оценки величины турбулентных пульсаций используют их среднеквадратичные значения $(\overline{f'^2})^{1/2}$. При этом относительная величина пульсаций, характеризующая степень турбулентности потока, определяется как $\sqrt{\overline{f'^2}} / \bar{f}$. Применительно к трехмерному течению степень турбулентности можно найти следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{1/3(\bar{u}'^2 + \bar{v}'^2 + \bar{w}'^2)}}{U_\Sigma}. \quad (3.4)$$

Средние значения скорости, давления и температуры представляют собой величины, измеряемые при помощи инерционных датчиков. Среднее значение пульсационных величин f' , как уже было сказано, равно нулю ($\overline{f'} = 0$), и инерционные датчики их не регистрируют. Однако следует обратить внимание на то, что средние значения произведений пульсационных составляющих могут быть не равны нулю:

$$\overline{u'v'} \neq 0, \quad \overline{u'^2} \neq 0, \quad \overline{u'v'T'} \neq 0.$$

В таком случае говорят, что между пульсациями существует *корреляция*. Появление в турбулентном потоке дополнительного механизма передачи импульса и энергии связано с существованием корреляций между пульсациями.

В дальнейшем для простоты будем опускать черту над осредненными по времени основными параметрами, обозначая их большими буквами U, V, P, T или Θ , а малыми буквами u, v, p и t или ϑ со штрихом или без него будем обозначать пульсации этих параметров.

На рис. 3.5 приведено распределение турбулентных пульсаций скорости в пограничном слое на пластине. Как видно, продольные пульсации примерно в два раза больше поперечных. При приближении к стенке и к внешней границе пограничного слоя их значения уменьшаются.

При турбулентном течении в потоке возникают пульсации скорости; отдельные объемы жидкости начинают двигаться поперек потока, причем эти объемы существенно больше тех, к которым можно применять понятие дифференциального объема сплошной среды. Дифференциальный объем сплошной среды – это, с одной стороны, бесконечно малая (в математическом смысле) величина, но с другой – достаточный объем (большое число молекул), чтобы можно было считать жидкость или газ сплошной средой. Следовательно, жидкость по-прежнему есть континуум, и к ней применимы общие уравнения гидродинамики.

Тогда, если в уравнение Навье – Стокса подставить истинные (мгновенные) значения скоростей в виде суммы средних и пульсационных значений и применить рассмотренные выше правила осреднения, то получим **уравнения движения для осредненного течения**. Это впервые сделал Рейнольдс, поэтому дифференциальные уравнения для турбулентного движения называют **уравнениями Рейнольдса**.

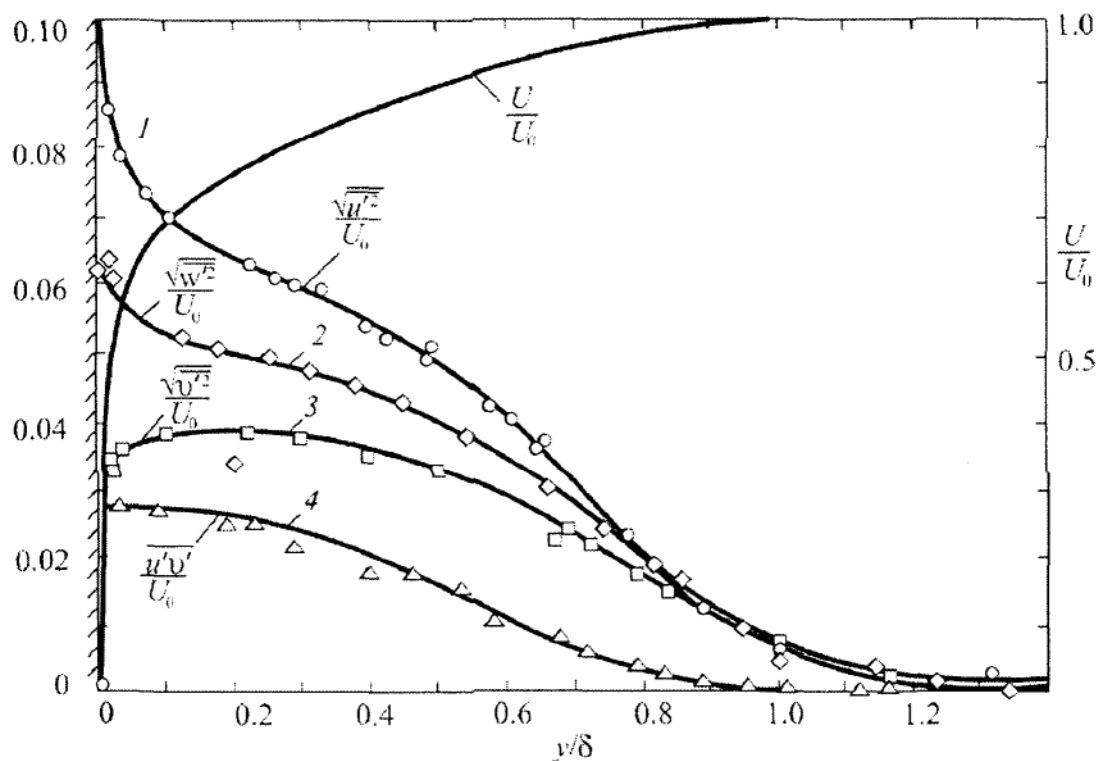


Рис. 3.5. Распределение турбулентных пульсаций скорости в пограничном слое на продольно обтекаемой плоской пластине.

$\bar{u}$ – осредненная скорость, 1 – продольные пульсации $\sqrt{u'^2}$;

2 – поперечные пульсации $\sqrt{w'^2}$, параллельные стенке;

3 – поперечные пульсации $\sqrt{v'^2}$, перпендикулярные стенке;

4 – турбулентное касательное напряжение $\overline{u'v'} = -\tau/\rho$

Для осредненного двумерного течения несжимаемой жидкости уравнения Рейнольдса имеют вид

$$\begin{aligned}
 U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \right); \\
 U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} \right); \\
 \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0.
 \end{aligned} \quad (3.5)$$

В этих уравнениях, в отличие от уравнений для ламинарного течения (Навье – Стокса), число неизвестных ($U, V, P, \overline{u'u'}, \overline{u'v'}, \overline{v'v'}$) больше числа уравнений (появились новые неизвестные – корреляции $\overline{v'v'}, \overline{u'u'}, \overline{u'v'}$). Для замыкания системы необходимо принять

какие-то гипотезы, связывающие пульсационные составляющие скорости с их средними значениями.

Аналогично можно записать уравнения для осредненных значений температуры и концентраций, получаемые из (1.13) и (1.14) путем подстановки вместо мгновенных значений параметров T и C суммы их средних и пульсационных составляющих $T = \bar{\Theta} + \vartheta'$; $C = \bar{C} + c'$ и последующего осреднения уравнений:

$$U \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x} + V \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial y^2} \right) - \left(\overline{\frac{\partial u' \vartheta'}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial \vartheta' v'}{\partial y}} \right); \quad (3.6)$$

$$U \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + V \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} = D \left(\frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial y^2} \right) - \left(\overline{\frac{\partial u' c'}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial v' c'}{\partial y}} \right). \quad (3.7)$$

Уравнение (3.6) описывает *распространение теплоты в турбулентном движении*, а (3.7) представляет собой уравнение *турбулентной диффузии вещества*.

Как видно, по сравнению с исходными уравнениями (1.13) и (1.14), в них также появились дополнительные неизвестные. Это корреляции типа $\overline{u' \vartheta'}$ и $\overline{v' c'}$, которые представляют собой составляющие *турбулентного потока теплоты и вещества*.

3.3. ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ВЯЗКОСТЬ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ДВИЖЕНИИ

Действие пульсационного движения на осредненное проявляется как бы в увеличении вязкости осредненного течения. Можно провести качественную аналогию между турбулентной вязкостью и молекулярной, если вспомнить, что молекулярная вязкость возникает в результате наложения хаотического теплового движения молекул на упорядоченное движение жидкости, а турбулентная есть результат наложения пульсационного движения на осредненное.

Дадим наглядное качественное пояснение появлению дополнительной турбулентной вязкости и теплопроводности с помощью теоремы импульсов.

Пусть в пограничном слое распределения скорости u и температуры T заданы некоторыми функциями от y : $u = u(y)$, $T = T(y)$.

Рассмотрим единицу площади поверхности в плоскости $X - Z$, перпендикулярной оси y (рис. 3.6). Через эту площадку протекает газ массой $m = \rho v$. Перетеканию жидкости соответствует некоторый поток импульса, проекция которого на ось x

$$y_x = m u = \rho v u. \quad (3.8)$$

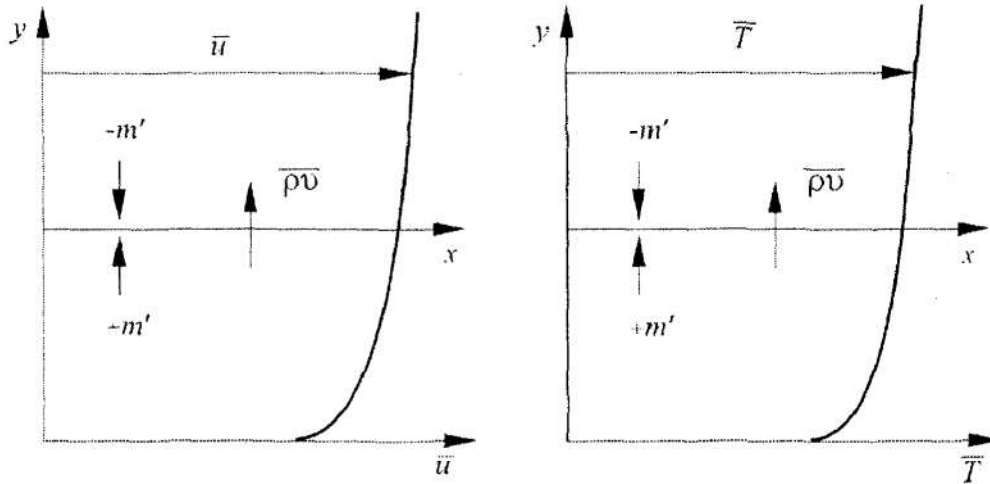


Рис. 3.6. К выводу соотношений для дополнительного турбулентного трения τ_t и теплового потока q_t

Будем рассматривать пульсацию потока массы вдоль оси y $m' = (\rho v)'$. При наличии пульсаций проекция на ось x потока импульса через ту же площадку:

$$y_x = (\bar{m} + m')(\bar{u} + u') = \bar{m}\bar{u} + \bar{m}'\bar{u} + \bar{m}\bar{u}' + m'u'. \quad (3.9)$$

После осреднения за достаточный промежуток времени получим

$$y_x = \bar{m}\bar{u} + \overline{m'u'} = \bar{\rho v}\bar{u} + \overline{(\rho v)'u'}, \quad (3.10)$$

так как 2-й и 3-й члены в выражении (3.9) после осреднения равны нулю.

Как видно из сравнения соотношений (3.8) и (3.10), при наличии пульсаций появляется дополнительный перенос импульса

$$\Delta y_x = \overline{(\rho v)'u'}.$$

При переносе импульса от слоя к слою происходит изменение импульса этих слоев (увеличение или уменьшение). Это означает, что на каждый из слоев действует сила, равная изменению импульса в единицу времени (второй закон Ньютона). Сила эта, отнесенная к единице площади поверхности, есть не что иное, как сила трения

между слоями газа. Или, другими словами, можно сказать, что поток количества движения, передаваемый в соседний слой жидкости через площадку, эквивалентен противоположно направленной силе, с которой этот слой действует на площадку.

Следовательно, при наличии турбулентности (пульсаций скорости) возникает дополнительное напряжение трения между слоями жидкости

$$\tau_t = -\overline{(\rho v)'u'}. \quad (3.11)$$

Аналогично можно показать, что при существующих пульсациях температуры поток теплоты через единичную площадку равен

$$q = \overline{(-\rho v)c_p T'} + \overline{(\rho v)'c_p T'} \quad (3.12)$$

и что при этом возникает дополнительный турбулентный перенос энергии

$$q_t = \overline{(\rho v)'c_p T'}. \quad (3.13)$$

Легко убедиться в том, что значения τ_t и q_t не равны нулю. Если жидкости, попадающие вследствие поперечного движения в слой y снизу $[(\rho v)' > 0]$, движутся из области с меньшей средней скоростью $\bar{u}$, то в слое y они вызывают отрицательную пульсацию $(-u')$, таким образом, $(\rho v)' < 0$. Точно таким же рассуждением можно показать, что и для частиц, проникающих в слой y сверху, $(\rho u')v' < 0$. Следовательно, и среднее значение не равно нулю и имеет отрицательный знак $\overline{(\rho u')v'} < 0$. Это означает, что турбулентное касательное напряжение положительно $\tau_t = -\overline{(\rho u')v'} > 0$ и совпадает с «ламинарным» касательным напряжением.

Используя эти результаты, можно ввести понятие турбулентной вязкости μ_t и теплопроводности λ_t . По аналогии с ламинарным течением

$$\tau_t = -\overline{(\rho v)'u'} = \mu_t \frac{dU}{dy}, \quad (3.14)$$

$$q_t = \overline{(\rho v)'c_p T'} = -\lambda_t \frac{dT}{dy}. \quad (3.15)$$

Подобно тому, как в случае ламинарного движения, связь между молекулярными процессами переноса импульса, теплоты и вещества количественно характеризуется числами Прандтля и Шмидта:

$$\text{Pr} = \mu c_p / \lambda = \nu / \alpha; \quad \text{Sc} = \mu / \rho D = \nu / D,$$

в случае турбулентного течения вводят их аналоги – турбулентные числа Прандтля и Шмидта. Например, турбулентное число Прандтля

$$Pr_t = \mu_t c_p / \lambda_t.$$

Конечно, турбулентные критерии принципиально отличаются от своих ламинарных прототипов прежде всего тем, что они обусловлены формой движения, а не только физическими постоянными среды. Более того, числа Pr_t и Sc_t мало зависят от своих молекулярных аналогов. Это объясняется заложенной в основе теории турбулентного переноса идеей о том, что одни те же жидкие объемы, или «моли» жидкости, одновременно переносят импульс, теплоту и вещество. При этом можно предположить, что коэффициенты турбулентного переноса ν_t , α_t и D_t близки между собой, т.е. турбулентные числа Прандтля и Шмидта должны не слишком отличаться от единицы. Этот вывод подтверждается измерениями различных авторов.

3.4. ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Как было показано выше, дифференциальные уравнения турбулентного пограничного слоя отличаются от соответствующих дифференциальных уравнений ламинарного пограничного слоя дополнительными членами

$$\tau_t = -\overline{\rho \nu' u'}; \quad q_t = -c_p \overline{\rho \nu' T'}; \quad j_t = -\overline{\rho \nu' C_i'},$$

которые можно трактовать как дополнительные «рейнольдсовы» напряжения, составляющие теплового потока и массы, возникающие за счет турбулентности. Поскольку эти величины неизвестны, система дифференциальных уравнений турбулентного пограничного слоя является незамкнутой. Для ее замыкания необходимо найти связь между пульсационными и осредненными параметрами течения. Теоретически найти такую связь пока не удалось.

Поэтому обычно принимаются гипотезы, связывающие турбулентное трение и тепловой поток с параметрами осредненного течения. Эти гипотезы, позволяющие решать задачи пограничного слоя, составляют основу полуэмпирической теории турбулентности.

Для турбулентного напряжения трения такая гипотеза была первоначально высказана Буссинеском, предложившим определять турбулентное трение выражением, аналогичным формуле Ньютона:

$$\tau_t = \mu_t dU / dy = -\overline{\rho u' v'}.$$

Необходимо, однако, иметь в виду, что турбулентная вязкость μ_t , в отличие от молекулярной вязкости μ , не является физической константой жидкости, а зависит от распределения скорости.

Пример изменения кинематической турбулентной вязкости приведен на рис. 3.7.

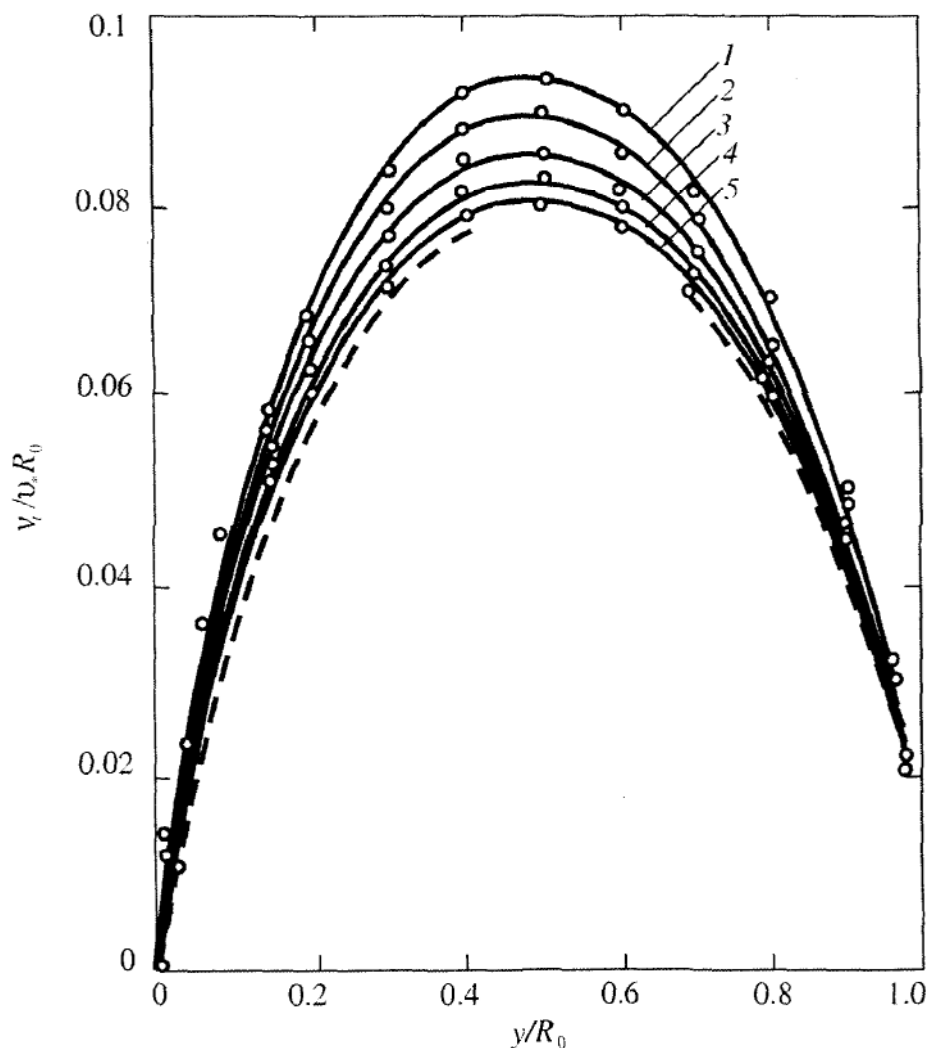


Рис. 3.7. Распределение кинематической турбулентной вязкости по радиусу трубы в изотермическом потоке несжимаемой жидкости по опытам Никурадзе [4]: 1 – $Re = 4 \cdot 10^3$; 2 – $9 \cdot 10^3$; 3 – $23 \cdot 10^3$; 4 – $43 \cdot 10^3$; 5 – $105 \cdot 10^3$

Для установления связи между пульсациями скорости и полем средней скорости Прандтлем была предложена гипотеза пути перемешивания. (Иногда ее называют теорией пути смешения.) Путь смешения, введенный Прандтлем, в известной мере аналогичен длине свободного пробега молекул в кинетической теории газа с той разницей, что здесь происходят макроскопические движения турбулентных масс.

Рассмотрим в параллельном потоке два слоя жидкости на расстоянии Δy . Скорости в этих слоях различны, и из-за пульсаций существует обмен импульсами между отдельными струйками.

Теория пути смешения основывается на предположении, что комок жидкости, перемещающейся при пульсации из одного слоя в другой, сохраняет составляющую импульса в направлении оси x на некотором расстоянии l , названном путем смешения. Если на рис. 3.8 расстояние между слоями $\Delta y = l$, то частицы, поступающие из нижнего слоя в верхний, сохраняют свою скорость. Разность между средней скоростью потока в точке y_2 и мгновенной скоростью поступающих сюда частиц из нижнего слоя дает пульсацию скорости в этом месте $u' = \Delta \bar{u} = \bar{u}_2 - \bar{u}_1$, но если l мало, то $\Delta \bar{u} = l d\bar{u} / dy$.

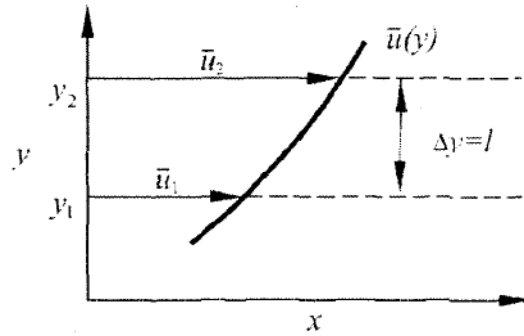


Рис. 3.8. Иллюстрация понятия «путь смешения»

Таким образом, величина пульсации

$$\bar{u}' = l(d\bar{u} / dy). \quad (3.16)$$

Пульсации в поперечном и продольном направлениях связаны между собой, $v \sim u'$. Окончательно с точностью до некоторого коэффициента пропорциональности, который можно включить в l , получим для турбулентного напряжения трения

$$\tau_t = -\rho \overline{u'v'} = \rho l^2 (d\bar{u} / dy)^2. \quad (3.17)$$

Для последнего выражения будет более правильным следующий вид:

$$\tau_t = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad (3.18)$$

так как знак касательного напряжения определяется знаком производной. Тогда турбулентную вязкость можно выразить как

$$\mu_t = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|. \quad (3.19)$$

Такие же рассуждения могут быть использованы и при переносе теплоты и вещества. В результате получим

$$q_t = -c_p \rho \overline{v'T'} = c_p \rho l_T l (dU/dy) dT/dy; \quad (3.20)$$

$$j_t = -\rho \overline{v'C_i'} = \rho l l_d (dU/dy) dC_i/dy. \quad (3.21)$$

В общем случае значения l , l_T и l_d могут быть не равны, и соответственно коэффициенты турбулентного обмена μ_t , λ_t и D_t будут отличаться.

В зависимостях (3.20) и (3.21) вместо неизвестных значений пульсаций u' и v' введена новая неизвестная l . Во многих случаях посредством введения различных гипотез удастся установить связь между l и характерной геометрией течения. Одна из таких гипотез – гипотеза Прандтля, – как будет показано ниже, оказалась весьма эффективной при расчете осредненных параметров турбулентного пограничного слоя.

3.5. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ И СТЕПЕННЫЕ ПРОФИЛИ СКОРОСТИ, ЗАКОНЫ ТРЕНИЯ И ТЕПЛОМАССООБМЕНА

3.5.1. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТЕЙ

Из формулы Прандтля (3.17) для турбулентного трения выводится универсальный логарифмический закон распределения скорости в турбулентном пограничном слое. При турбулентном режиме течения общее напряжение трения складывается из трения, вызванного молекулярной вязкостью, и турбулентного трения, вызванного пульсациями:

$$\tau = \mu dU/dy + \tau_t = (\mu + \mu_t) dU/dy. \quad (3.22)$$

На большом расстоянии от стенки значение турбулентной вязкости намного превышает молекулярную вязкость $\mu_t > \mu$. Область пограничного слоя, в которой можно пренебречь молекулярной вязкостью, называется *турбулентным ядром*. Вблизи стенки турбулентные пульсации затухают и молекулярная вязкость играет решающую роль. Эта часть пограничного слоя называется *ламинарным подслоем* (рис. 3.9). Его толщина $y_1 = \delta_d$ составляет 1–2 % от общей толщины слоя при течении несжимаемой жидкости. Между ними находится переходная область, в которой значения молекулярной и турбулентной вязкости одного порядка.

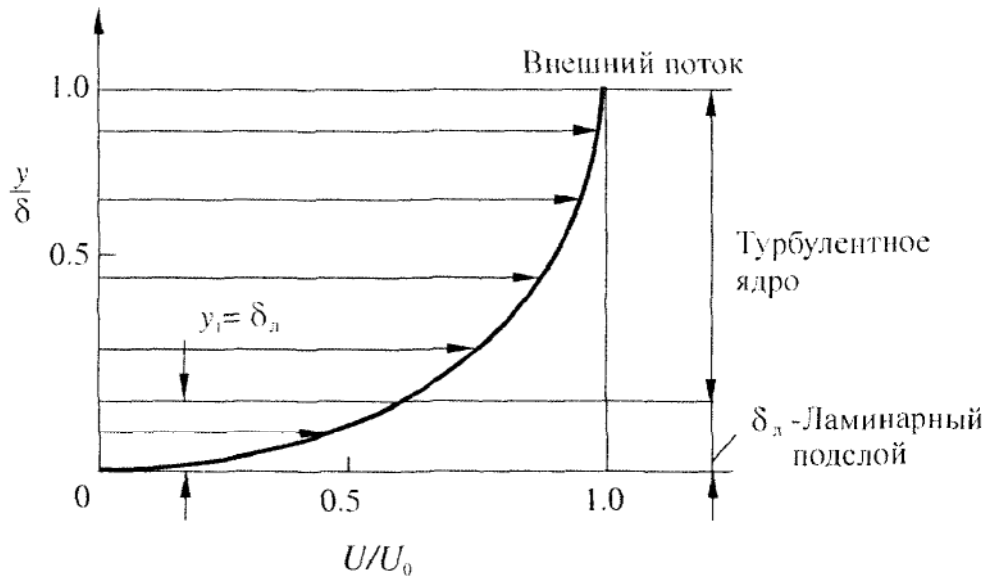


Рис. 3.9. Двухслойная модель пограничного слоя

В общем случае, если рассматривать трехслойную схему течения, для переходной области получают громоздкие и неудобные для дальнейшего анализа соотношения. Практически достаточно рассмотреть двухслойную схему турбулентного пограничного слоя, состоящую из ламинарного подслоя и турбулентного ядра.

В области вязкого подслоя при $y < y_1$, $\tau \gg \tau_t$

$$\tau = \mu \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (3.23)$$

если принять во внимание, что $y_1 \ll \delta$, то в области подслоя $\tau \rightarrow \tau_{ст}$, что соответствует линейному профилю скорости. На рис. 3.10 показано распределение касательных напряжений по толщине пограничного слоя.

Введя обозначения

$$\varphi = U / v^*, \quad \eta = v^* y / \nu, \quad v^* = \sqrt{\tau_{ст} / \rho} = U_0 \sqrt{c_f / 2}, \quad (3.24)$$

где v^* — так называемая динамическая скорость (скорость трения), представим соотношение (3.23) в безразмерной форме

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = \frac{\tau}{\tau_{ст}}$$

или с учетом того, что в вязком подслое $\tau \rightarrow \tau_{ст}$,

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = 1, \quad \varphi = \eta, \quad (3.25)$$

т.е. получим линейное распределение скорости.

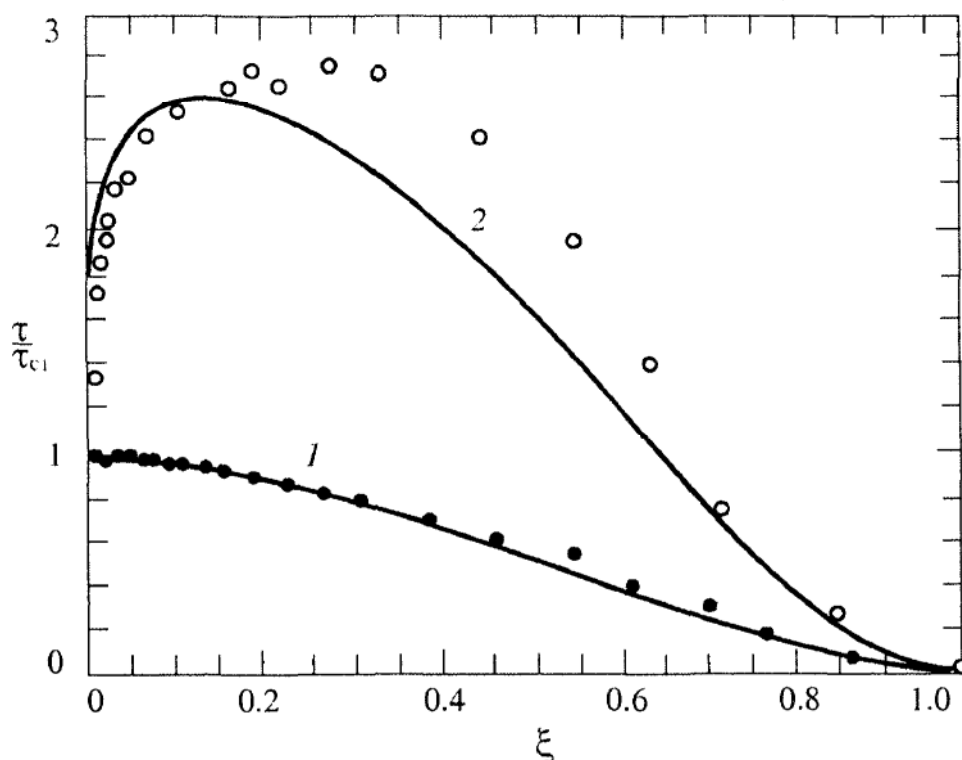


Рис. 3.10. Распределение касательного напряжения трения по сечению пограничного слоя: $1 - \tau / \tau_{ct} = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$, $(\bullet)$ – экспериментальные точки в пограничном слое без вдува, $j_{ct} = 0$; $2 - \tau / \tau_{ct} = (\tau_0 / \tau_{ct}) (1 + b_1 \omega)$, $(\circ)$ – деформация профиля при вдуве, $j_{ct} = 0,003$; $b = 1,3$; $\Psi = 0,456$

Вообще-то это условие можно было сразу принять ввиду малой толщины вязкого подслоя по сравнению с толщиной всего пограничного слоя: $y_1 \ll \delta$.

В области турбулентного ядра «ламинарное» трение τ_l незначительно по сравнению с «турбулентным» ($\tau_t \gg \tau_l$) и поэтому можно считать $\tau = \tau_t$, т.е.

$$\tau = \rho l^2 (\partial U / \partial y)^2. \quad (3.26)$$

Путь перемешивания l на стенке должен быть равен нулю, так как на ней пульсационное движение исчезает. В первом приближении его можно принять пропорциональным расстоянию от стенки

$$l = \alpha y, \quad (3.27)$$

где α – безразмерная постоянная, которая должна быть определена из опыта.

Кроме того, в области турбулентного ядра, близкой к стенке, при $y_1 \ll y \ll \delta$ также принимаем

$$\tau = \tau_t \sim \tau_{ct}. \quad (3.28)$$

Тогда уравнение (3.26) можно привести к следующему безразмерному виду:

$$\tau = \rho \varkappa^2 y^2 (dU / Dy)^2, \quad \bar{\tau} = \tau / \tau_{\text{ст}} = \varkappa^2 \eta^2 (d\varphi / d\eta)^2, \quad (3.29)$$

или с учетом того, что $\tau \approx \tau_{\text{ст}}$,

$$\frac{d\varphi}{d\eta} \eta \varkappa = 1; \quad (3.30)$$

$$d\varphi = (1/\varkappa) d\eta / \eta; \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi} d\varphi = \int_{\eta_1}^{\eta} (1/\varkappa) d\eta / \eta, \quad (3.31)$$

где индексом «1» обозначены величины, относящиеся к границе ламинарного подслоя при $y = y_1$; $\eta = \eta_1$; $\varphi = \varphi_1$. При этом на внешней границе подслоя в соответствии с (3.25) $\varphi_1 = \eta_1$. Тогда уравнение (3.31) можно переписать в виде

$$\varphi = (1/\varkappa) \ln \eta + C, \quad (3.32)$$

где $C = \eta_1 - (1/\varkappa) \ln \eta_1$.

Это и есть универсальный логарифмический профиль скорости в турбулентном пограничном слое (рис. 3.11).

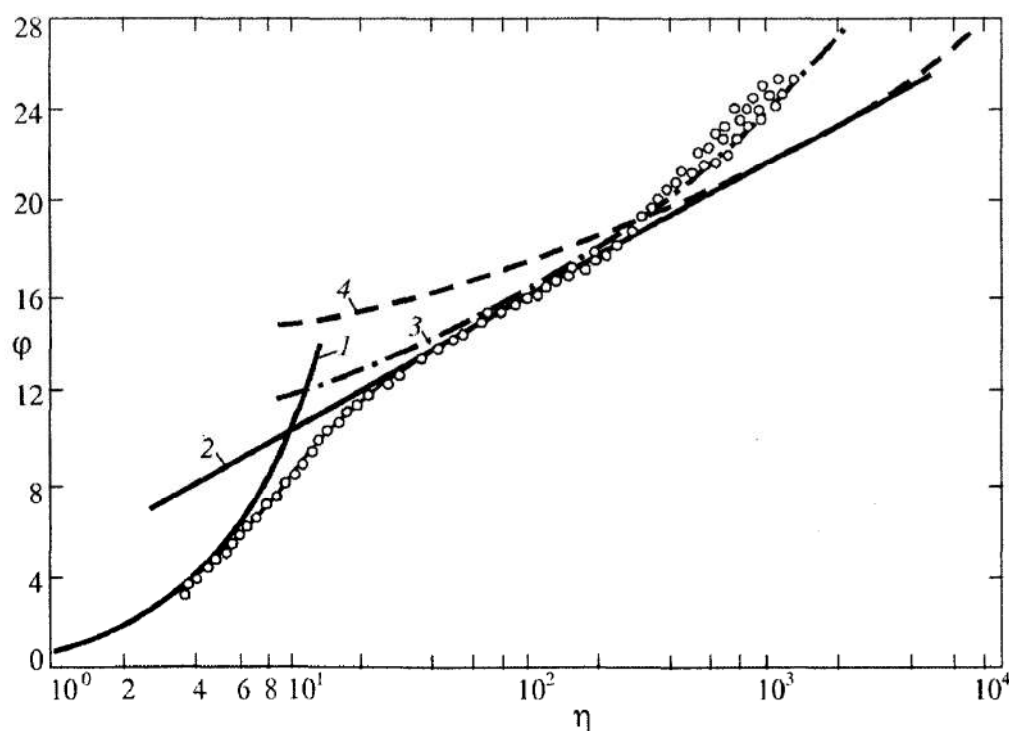


Рис. 3.11. Универсальный логарифмический закон распределения скоростей в турбулентном пограничном слое на плоской пластине: 1 — соответствует уравнению $\varphi = \eta$; 2 — уравнению (3.32); 3 и 4 — степенным законам (3.49) со значениями $n = 7$ и 10 соответственно

Из сопоставления расчетов с экспериментом определяем эмпирические константы

$$\alpha = 0,4; \eta_1 = 11,6. \quad (3.33)$$

Пересечение линий 1 и 2 (см. рис. 3.11) дает расчетную толщину вязкого подслоя в двухслойной схеме пограничного слоя. Эти значения позволяют определить значение постоянной C в формуле (3.32):

$$C = \eta_1 - (1/\alpha) \ln \eta_1 = 5,5,$$

и окончательно формулу (3.32) можно записать в виде

$$\varphi = 2,5 \ln \eta + 5,5, \quad (3.34)$$

или, переходя к десятичным логарифмам,

$$\varphi = 5,75 \lg \eta + 5,5. \quad (3.35)$$

Следует отметить универсальность логарифмического профиля скорости. Его логарифмический участок сохраняется почти во всех случаях. Используя эту универсальность, метод определения коэффициента трения по измеренным профилям средней скорости, по имени его автора, называют *методом Клаузера*.

Логарифмический профиль скоростей практически существует почти до оси симметрии при турбулентном течении в каналах и нарушается во внешней области пограничного слоя. Формула (3.34) неприменима на большом удалении от стенки также и потому, что в ней неограниченное увеличение значения y приводит к неограниченному росту скорости u , в то время как последняя величина при $y \rightarrow \infty$ равна U_0 . Таким образом, этой формулой следует пользоваться в рамках теории пограничного слоя конечной толщины. Отклонение истинного изотермического турбулентного профиля скоростей на пластине от логарифмического имеет место только в области значений $0,9 < \omega < 1$ [5].

Здесь следует отметить, что безразмерная толщина ламинарного подслоя, определенная как $\eta_1 = \frac{v^* y_1}{\nu} = 11,6$, практически не зависит от условий обтекания. Так, проведенный анализ показывает, что при увеличении числа Маха до $M = 9$ относительная толщина вязкого подслоя y_1/δ возрастает до значения $y_1/\delta \approx 0,2 \dots 0,3$ (при $M \rightarrow 0$ $y_1/\delta \approx 0,01$), но при этом значение η не изменяется, $\eta \sim 11,6 = \text{const}$.

Из условия $\eta_1 = 11,6$ сразу можно найти число Рейнольдса вязкого подслоя:

$$\text{Re}_1 = u_1 y_1 / \nu = (u_1 / \nu^*) \nu^* y_1 / \nu = \varphi_1 \eta_1,$$

но так как $\varphi_1 = \eta_1 = 11,6$, то

$$\text{Re}_1 = (\eta_1)^2 = 134 = \text{const}, \quad (3.36)$$

т.е. собственное число Рейнольдса вязкого подслоя автомодельно относительно числа Рейнольдса потока в целом.

Иногда используют *закон дефекта скорости* в турбулентном пограничном слое, который получается из логарифмического профиля

$$u / \nu^* = 2,5 \ln(\nu^* y / \nu) + 5,5. \quad (3.37)$$

Если действие этой зависимости распространить вплоть до внешней границы пограничного слоя, то при $y = \delta$, $u = U_0$

$$U_0 / \nu^* = 2,5 \ln(\nu^* \delta / \nu) + 5,5. \quad (3.38)$$

Вычитая почленно (3.37) из (3.38), получаем выражение для дефекта скорости

$$\frac{U_0 - u}{\nu^*} = 2,5 \left[\ln \frac{\nu^* \delta}{\nu} - \ln \frac{\nu^* y}{\nu} \right], \quad (3.39)$$

$$(U_0 - u) / \nu^* = -2,5 \ln(y / \delta) = -5,75(\lg(y / \delta)),$$

или с учетом того, что $\nu^* = U_0 \sqrt{c_f / 2}$,

$$u / U_0 = 1 + 2,5 \sqrt{c_f / 2} \ln(y / \delta). \quad (3.40)$$

Следует иметь в виду, что значение логарифма здесь будет отрицательно ($y / \delta < 1$).

Закон дефекта скорости (3.39) является универсальным законом, который хорошо подтверждается экспериментом (рис. 3.12).

Интересно отметить, что закон дефекта скорости в таком виде справедлив как для гладкой, так и для шероховатой поверхности, хотя распределения скорости в обычных координатах ($u / U_0 = f(y / \delta)$) при этом значительно различаются.

Логарифмический закон трения. Закон трения для турбулентного пограничного слоя будем искать, как и для ламинарного, в виде зависимости

$$c_f / 2 = f(\text{Re}^{**}).$$

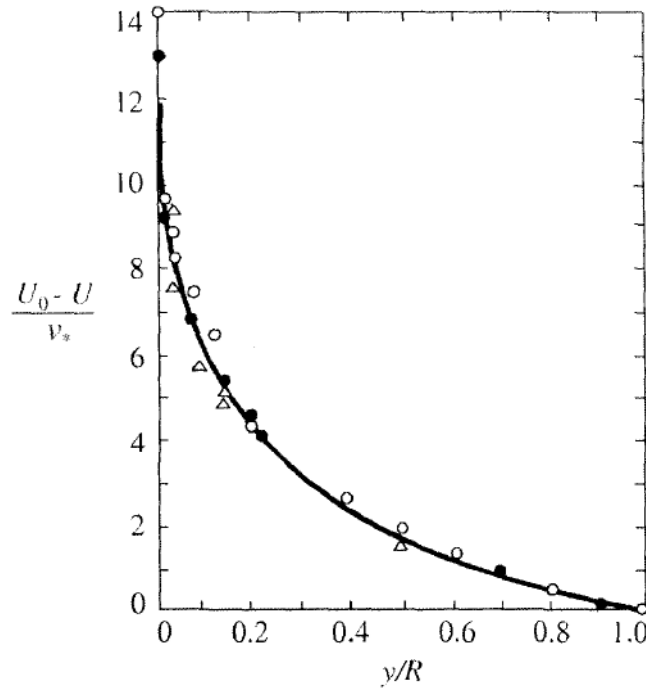


Рис. 3.12. Закон дефекта скорости в сравнении с экспериментальными данными

Он следует из логарифмического профиля скорости, который для условий на границе пограничного слоя (3.38) при $y = \delta$, $u = U_0$ примет вид

$$U_0/v_* = 2,5 \ln v_*^* \delta / \nu + 5,5.$$

С учетом того, что $v_*^* = \sqrt{\tau_{\text{ст}}/\rho} = U_0 \sqrt{c_f/2}$, получим

$$\sqrt{2/c_f} = 2,5 \ln \left[\sqrt{c_f/2} (U_0 \delta^{**} / \nu) \delta / \delta^{**} \right] + 5,5$$

или

$$\sqrt{2/c_f} = 2,5 \ln \text{Re}^{**} + C_*, \quad (3.41)$$

где

$$C_* = 5,5 + 2,5 \ln(\sqrt{c_f/2} \delta / \delta^{**}). \quad (3.42)$$

Характерные толщины пограничного слоя:

$$\begin{aligned} \delta^* / \delta &= \int_0^1 (1 - u/U_0) d\xi, \\ \delta^{**} / \delta &= \int_0^1 (u/U_0)(1 - u/U_0) d\xi, \quad \xi = y/\delta \end{aligned} \quad (3.43)$$

определим с учетом полученного выражения (3.39) для дефекта скорости:

$$(U_0 - u)/v^* = -1/\varkappa \ln \xi \quad \text{или} \quad u/U_0 = 1 + (1/\varkappa) \sqrt{c_f/2} \ln \xi;$$

$$\delta^*/\delta = \int_0^1 (1 - u/U_0) d\xi = \int_0^1 (-1/\varkappa) \sqrt{c_f/2} \ln \xi d\xi;$$

$$\begin{aligned} \delta^*/\delta &= (-1/\varkappa) \sqrt{c_f/2} \int_0^1 \ln \xi d\xi = (-1/\varkappa) \sqrt{c_f/2} [\xi \ln \xi - \xi]_0^1 = \\ &= (1/\varkappa) \sqrt{c_f/2}; \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\delta^{**}/\delta = (1/\varkappa) \sqrt{c_f/2} - c_f/\varkappa^2. \quad (3.45)$$

Подставив (3.45) в (3.42), определим C_* :

$$C_* = 5,5 + (1/\varkappa) \ln (\varkappa^2/\varkappa) - \sqrt{2c_f}.$$

При больших числах Рейнольдса $\varkappa = 0,4 \gg \sqrt{2c_f}$.

$$C_* = 5,5 + 2,5 \ln 0,4 = 3,21$$

и окончательно логарифмический закон сопротивления (3.41) примет вид

$$\frac{c_f}{2} = \frac{1}{(2,5 \ln \text{Re}^{**} + 3,21)^2}. \quad (3.46)$$

В области умеренных чисел Рейнольдса более точные результаты дает формула Кармана

$$\frac{c_f}{2} = \frac{1}{(2,5 \ln \text{Re}^{**} + 3,8)^2}. \quad (3.47)$$

3.5.2. СТЕПЕННЫЕ ПРОФИЛИ СКОРОСТИ

С расчетной точки зрения во многих случаях, особенно при решении интегральных соотношений, степенные профили скоростей и законы трения более удобны, чем логарифмические.

Логарифмический профиль скорости

$$\varphi = (1/\kappa) \ln \eta + c \quad (3.48)$$

является огибающей семейства степенных профилей

$$\varphi = C(n) \eta^n. \quad (3.49)$$

При этом зависимость (3.49) представляет собой степенную аппроксимацию универсального логарифмического профиля (3.48) в некотором интервале числа Re^{**} (см. рис. 3.11).

Коэффициент $C(n)$, зависящий от n , и показатель степени n вычисляются из условия соответствия степенного профиля логарифмическому.

Выражению (3.49) с учетом того, что

$$u/v^* = C(n)(v^* y/v)^n, \quad U_0/v^* = C(n)(v^* \delta/v)^n, \quad (3.50)$$

соответствует и более простое степенное выражение

$$u/U_0 = (y/\delta)^n \quad \text{или} \quad \omega = \xi^n, \quad (3.51)$$

откуда следует, что

$$\bar{\delta}^* = \delta^* / \delta = n/(1+n), \quad \bar{\delta}^{**} = \delta^{**} / \delta = \frac{n}{(1+n)(1+2n)}, \quad (3.52)$$

$$H = \delta^* / \delta^{**} = 1 + 2n.$$

При выводе логарифмического закона трения с использованием выражения для дефекта скорости

$$u/U_0 = 1 + (1/\kappa) \sqrt{c_f/2} \ln \xi$$

мы получили [см. (3.44)], что

$$\bar{\delta}^* = (1/\kappa) \sqrt{c_f/2}, \quad (3.53)$$

тогда из (3.53) и (3.52) имеем

$$n/(1+n) = (1/\kappa) \sqrt{c_f/2}, \quad n = \frac{2,5 \sqrt{c_f/2}}{1 - 2,5 \sqrt{c_f/2}}. \quad (3.54)$$

Как видно из формулы (3.54), показатель степени n должен уменьшаться с ростом числа Re , поскольку коэффициент трения уменьшается. Но если c_f зависит от числа Рейнольдса достаточно слабо, показатель n остается почти постоянным в практическом диапазоне чисел Рейнольдса. Степенной профиль скорости $\omega = \xi^{1/7}$ для турбулентного пограничного слоя сначала был получен экспериментально. Причем эта зависимость описывает экспериментальные профили в очень широком диапазоне чисел Рейнольдса до $Re^{**} < 10^4$. Это подтверждает вывод из формулы (3.54) о слабой зависимости $n(Re)$. Поэтому для турбулентного пограничного слоя закон «одной седьмой» получил очень широкое распространение. На рис. 3.13 сравниваются профили скорости в турбулентном и ламинарном пограничном слоях. При экспериментальном определении показателя степени n следует пользоваться не формулой (3.51), а интегральными характеристиками δ^* и δ^{**} (3.52), учитывая, что $H = 1 + 2n$; погрешность, как правило, невелика.

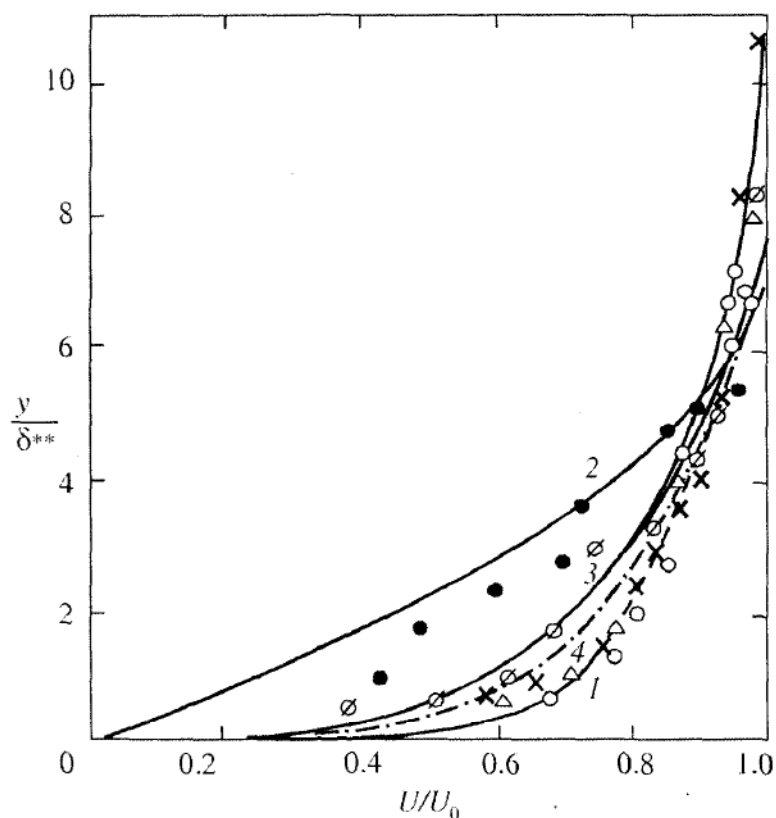


Рис. 3.13. Сопоставление опытных профилей скорости с теоретическими зависимостями: 1 – распределение скоростей $U/U_0 = (y/\delta)^{1/7}$; ($\circ$, Δ , x) – опыты при турбулентном режиме, $Re_x = (4 \dots 5) \cdot 10^5$; 2 – ламинарный профиль Польгаузена $U/U_0 = 2(y/\delta) - 2(y/\delta)^3 + (y/\delta)^4$; ($\bullet$) – эксперимент при ламинарном режиме, $Re = 1,5 \cdot 10^5$; 3 – теоретические зависимости для пограничного слоя со вдувом; ($\odot$) – соответствующие опыты [5]

Степенные законы трения и тепломассообмена. Степенному профилю скорости соответствует и степенной закон трения.

Если записать профиль скорости (3.49) для условий на внешней границе пограничного слоя при $y = \delta$; $u = U_0$

$$U_0 / v^* = C(n)(v^* \delta / \nu)^n, \quad (3.55)$$

то с учетом определения скорости трения

$$v^* = \sqrt{\tau_{\text{ст}} / \rho} = U_0 \sqrt{c_f / 2}$$

получим

$$\begin{aligned} 1 / \sqrt{c_f / 2} &= C(n) \left[\frac{U_0 \delta \sqrt{c_f / 2}}{\nu} \right]^n; \quad (c_f / 2)^{(n+1)/2} = \frac{1}{C(n) \text{Re}_\delta^n}; \\ c_f / 2 &= \left[\frac{1}{C(n) \text{Re}_\delta^n} \right]^{2/(1+n)}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Значения $C(n)$ в зависимости от показателя степени n были вычислены Вигхардтом [1]. При $n = 1/7$, $C(n) = 8,74$ можно показать, что формула (3.56) в точности соответствует широко известной эмпирической формуле Блазиуса, которая была получена при исследовании турбулентного течения в трубах при $\text{Re}_d < 10^5$. Для течения на пластине она имеет вид

$$\frac{c_f}{2} = \frac{0,0255}{\text{Re}_\delta^{0,25}}; \quad \text{Re}_\delta = \frac{U_0 \delta}{\nu}. \quad (3.57)$$

Для течения в трубах ее записывают, как правило, в виде

$$\lambda = \frac{0,3164}{\text{Re}_d^{0,25}}, \quad \text{или} \quad \bar{c}_f = 0,079 \text{Re}_d^{0,25}. \quad (3.58)$$

Следует иметь в виду, что при этом

$$\frac{c_f}{2} = \frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho \bar{u}^2} = \frac{\lambda}{8}; \quad \Delta p = \lambda \frac{L}{d} \frac{\rho \bar{u}^2}{2}; \quad \text{Re}_d = \frac{\bar{u} d}{\nu};$$

$$\Delta p \frac{\pi d^2}{4} = \tau_{\text{ст}} \pi d L.$$

Здесь λ – коэффициент гидравлического сопротивления; $\bar{c}_f$ – коэффициент трения (обе величины определяются по среднерасходной скорости $\bar{u}$). Задаваясь степенным профилем, можно найти

$$\frac{\bar{u}}{U_0} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \quad \text{при } n=1/7, \quad \bar{u}/U_0=0,8,$$

где $U_0 = U_{\text{max}}$ – скорость на внешней границе пограничного слоя (на оси трубы).

Формулы (3.57) и (3.58) полностью соответствуют друг другу с учетом приведенных соотношений и того, что $U_{\text{max}} = U_0$ и $d = 2\delta$. В общем же виде из формулы (3.57) с учетом соотношения для δ^{**}/δ (3.52) следует закон трения в виде

$$c_{f_0}/2 = A \text{Re}^{**m}, \quad (3.59)$$

где $m = 2n/(1+n)$; $A = \frac{1}{[C(n)]^{2/(1+n)} [(1+n)(1+2n)/n]^{2n/(1+n)}}.$

Значения параметров пограничного слоя со степенным профилем скорости для течения на пластине и в трубе приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Параметры	n			
	1/7	1/8	1/9	1/10
$C(n)$	8,74	9,71	10,6	11,5
A	0,0128	0,0103	0,0095	0,0074
m	0,250	0,222	0,200	0,182
δ^{**}/δ	0,0975	0,0890	0,0818	0,0757
H	1,28	1,25	1,22	1,20

Формула (3.59) получена при турбулентном обтекании плоской пластины потоком несжимаемой жидкости с постоянными физическими свойствами. Как и при ламинарном течении, такие условия будем считать «стандартными» – при отсутствии воздействия на пограничный слой различных возмущающих факторов: неизотермичности, сжимаемости, вдува и т.д. Для этих условий коэффициенты трения c_{f_0} и тепломассообмена St_0 и St_{d_0} будем обозначать индексом «0».

Практически в области числа $Re^{**} < 10^4$ можно пользоваться формулой для закона распределения скорости $n = 1/7$:

$$c_{f_0} / 2 = 0,0128 Re^{*-0,25}, \quad (3.60)$$

а в области $10^4 < Re^{**} < 10^6$ – законом, где $n = 1/10$.

На рис. 3.14 сопоставляются формула (3.60) и логарифмический закон сопротивления Кармана (3.47) с опытными данными по коэффициенту трения на плоской пластине [3].

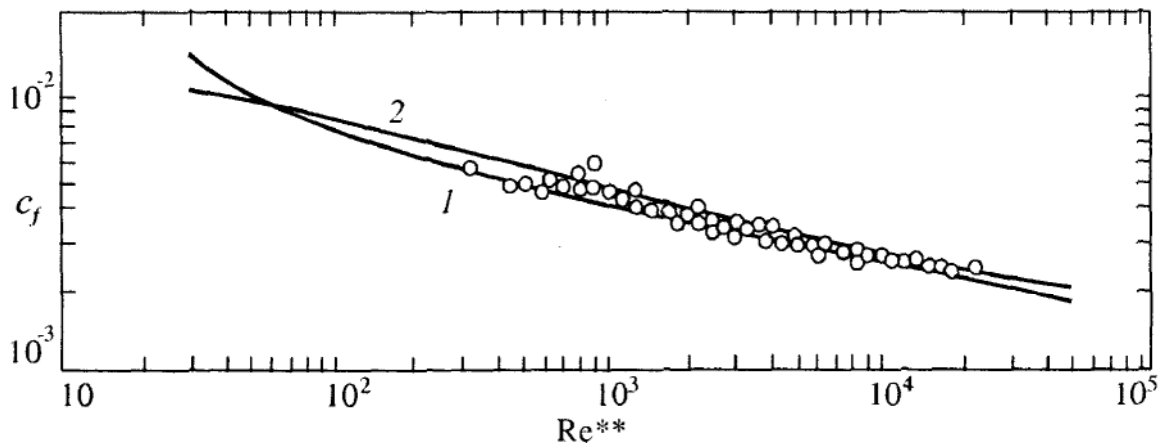


Рис. 3.14. Закон трения для турбулентного пограничного слоя на плоской пластине: 1 – расчет по формуле Кармана (3.47); 2 – расчет по формуле (3.60)

Для газов при $Pr \approx Sc \approx 1$, пользуясь аналогией процессов переноса импульса, энергии и массы (аналогией Рейнольдса), можно принять

$$St_0 = St_{d_0} = c_{f_0} / 2. \quad (3.61)$$

При $Pr \neq 1$ и $Sc \neq 1$ необходимо учитывать их влияние. В принципе существуют теоретические методы, основанные на анализе ламинарного подслоя, позволяющие получить влияние числа Pr . Но они достаточно громоздки, и здесь мы их рассматривать не будем. Тем более, что достаточно непростые формулы потом аппроксимируются степенной зависимостью.

В диапазоне изменения Pr и Sc от 0,5 до 10 хорошие результаты дают формулы [2]:

$$St_0 \approx A / [Re_T^{**m} Pr^{0,75}]; \quad St_{d_0} = A / [Re_d^{**m} Sc^{0,75}]. \quad (3.62)$$

На рис. 3.15 сравнивается расчет по формуле (3.62) с опытными данными по теплообмену на плоской пластине в потоке воздуха.

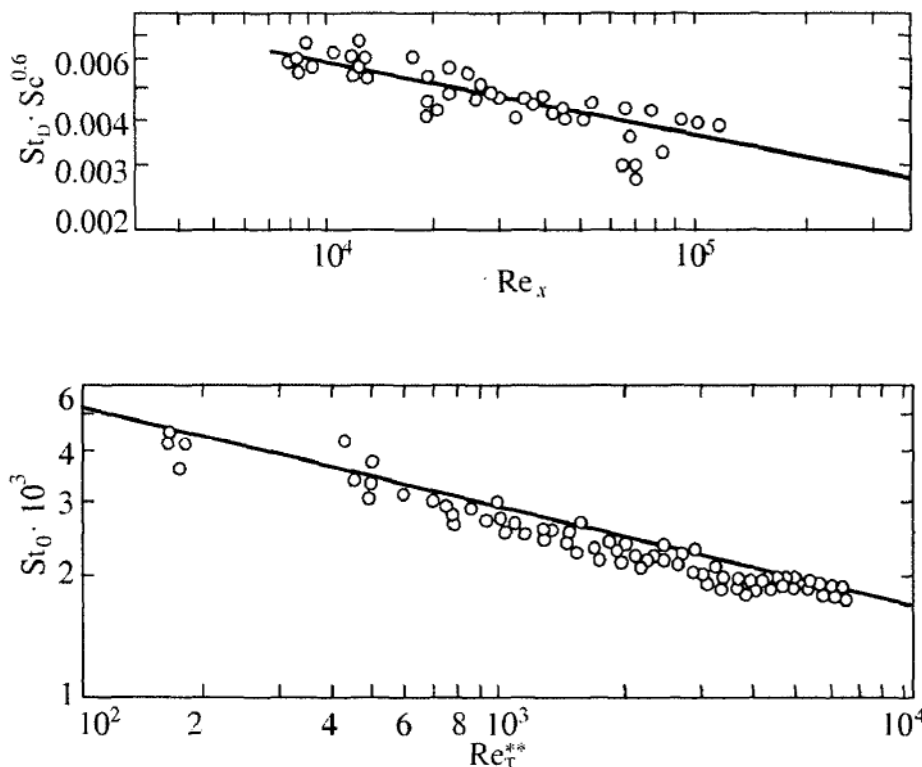


Рис. 3.15. Закон теплообмена на плоской пластине:
(-) – расчет по формуле (3.62)

3.6. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Как уже отмечалось, интегральные соотношения одинаково справедливы и для ламинарного, и для турбулентного пограничных слоев, поскольку представляют собой балансовые уравнения переноса импульса, энергии и вещества для рассматриваемого элемента пограничного слоя. При этом их можно получить как из дифференциальных уравнений, так и путем составления баланса для элементарного участка пограничного слоя. Поэтому уравнения импульса и энергии сохраняют свой прежний вид.

Уравнение импульсов

$$\frac{d Re^{**}}{d \bar{x}} + \frac{Re^{**}}{U_0} \frac{d U_0}{d \bar{x}} (1 + H) = (\Psi + b) Re_L c_{f_0} / 2. \quad (3.63)$$

Уравнение энергии

$$\frac{d Re_T^{**}}{d \bar{x}} + \frac{Re_T^{**}}{\Delta T} \frac{d \Delta T}{d \bar{x}} = (\Psi + b_T) Re_L St_0. \quad (3.64)$$

Здесь $Re^{**} = \frac{\rho_0 U_0 \delta^{**}}{\mu_0}$; $Re_L = \frac{\rho_0 U_0 L}{\mu_0}$; $\bar{x} = x/L$; $b = \frac{2j_{ст}}{\rho_0 U_0 c_{f_0}}$;

$b_T = \frac{j_{ст}}{\rho_0 U_0 St_0}$ – проницаемость; $\Psi = (c_f / c_{f_0})_{Re^{**}} = (St/St_0)_{Re^{**}}$ – от-

носительный коэффициент трения или тепломассообмена, характеризующий влияние различных возмущающих факторов (неизотермичность, вдув и т.д.) по сравнению со «стандартными» условиями. Хотя сами интегральные уравнения остаются такими же, как и для ламинарного слоя, но их решения будут другими, поскольку в этом случае другие законы трения и теплообмена (c_{f_0} , St_0 и Ψ).

Как мы помним, в общем случае для турбулентного пограничного слоя получен логарифмический закон трения. Однако введение в интегральные соотношения (3.63) и (3.64) степенных законов трения и тепломассообмена типа (3.60) и (3.62) позволяет получить более простые аналитические решения.

Простейшим примером является решение задачи обтекания гладкой непроницаемой пластины изотермическим потоком. При этом $b_\tau = b = 0$, $\Psi = 1$, и уравнение импульса (3.63) с учетом степенного закона трения будет иметь вид

$$\frac{d Re^{**}}{d Re_x} = \frac{c_{f0}}{2} = \frac{A}{Re^{**m}} = \frac{0,0128}{Re^{**0,25}}. \quad (3.65)$$

Интегрируя, находим, что

$$Re^{**(1+m)} - Re_{кр}^{**(1+m)} = A(m+1)(Re_x - Re_{кр}), \quad (3.66)$$

где индекс «кр.» означает начало развития турбулентного пограничного слоя. Если $x_{кр} = 0$, т. е. турбулентный пограничный слой возникает сразу на передней кромке пластины (например, вследствие установки специального турбулизатора), то

$$Re^{**} = [A(m+1)Re_x]^{1/(m+1)} \quad (3.67)$$

и

$$c_f/2 = \frac{A}{Re^{**m}} = \frac{A}{[A(m+1)Re_x]^{m/(m+1)}}, \quad (3.68)$$

при $n = 1/7$, $m = 0,25$, $A = 0,0128$ получим

$$c_f/2 = 0,0128 Re_x^{-0,2}; \quad (3.69)$$

$$Re^{**} \approx 0,036 Re_x^{0,8} \quad \text{или} \quad \delta^{**}/x = 0,036/Re_x^{0,2} \quad (3.70)$$

или с учетом того, что при $n = 1/7$ $\bar{\delta}^{**} = 7/72$,

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0,37}{Re_x^{0,2}} \quad \text{или} \quad \delta \approx \frac{0,37 x^{0,8}}{(U_0/\nu)^{0,2}}. \quad (3.71)$$

Как видим, толщина турбулентного пограничного слоя нарастает гораздо интенсивнее, чем ламинарного:

$$\frac{\delta_{\text{л}}}{x} \approx \frac{5}{\sqrt{\text{Re}_x}}; \quad \delta_{\text{л}} \approx \frac{5x^{0,5}}{(U_0/\nu)^{0,5}}.$$

Интегральное соотношение энергии для теплового пограничного слоя при произвольном изменении скорости основного потока $U_0 = f_1(x)$ и для любого закона изменения температуры стенки $\Delta T = f_2(x)$ при течении газа с постоянными физическими свойствами имеет вид

$$\frac{d \text{Re}_T^{**}}{d\bar{x}} + \frac{\text{Re}_T^{**}}{\Delta T} \frac{d\Delta T}{d\bar{x}} = \text{St}_0 \text{Re}_L = \frac{A}{\text{Re}_T^{**m} \text{Pr}^{0,75}} \text{Re}_L. \quad (3.72)$$

Его можно привести к виду, более удобному для интегрирования,

$$\frac{(\text{Re}_T^{**} \Delta T)^m d(\text{Re}_T^{**} \Delta T)}{\Delta T^{m+1} d\bar{x}} = \frac{A}{\text{Pr}^{0,75}} \text{Re}_L. \quad (3.73)$$

После интегрирования с учетом начальных условий при $x = x_0$ $\text{Re}_T^{**} = \text{Re}_{T_0}^{**}$, $\Delta T = \Delta T_0$ получим

$$\text{Re}_T^{**} = 1/\Delta T \left[\frac{A(m+1)}{\text{Pr}^{0,75}} \text{Re}_{0L} \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} \bar{U}_0 \Delta T^{m+1} d\bar{x} + (\text{Re}_T^{**} \Delta T)_{x_0}^{m+1} \right]^{1/(m+1)}, \quad (3.74)$$

где $\text{Re}_{0L} = \frac{U_{01}L}{\nu}$; $\bar{U}_0 = U_0/U_{01}$ – относительная скорость на внешней границе пограничного слоя; $(\text{Re}_T^{**} \Delta T)_{x_0}$ – значение этих параметров в сечении $x = x_0$, начиная с которого ведется расчет (например, $\text{Re}_{x_0} = \text{Re}_{\text{кр}}$ – сечение перехода ламинарного течения в турбулентное). В таком случае значение $(\text{Re}_T^{**} \Delta T)_{x_0}$ находится из расчета ламинарного слоя.

Для случая $U_0 = \text{const}$ и $\Delta T = \text{const}$, если турбулентный пограничный слой развивается с самого начала (с сечения $x = 0$), из (3.74)

$$\text{Re}_T^{**} = \left[\frac{A(m+1)}{\text{Pr}^{0,75}} \text{Re}_x \right]^{1/(m+1)}.$$

Подставляя это соотношение в закон теплообмена (3.62), получаем изменение коэффициента теплообмена по длине поверхности:

$$\text{St}_{0_x} = \frac{A}{\left[\frac{A(m+1)}{\text{Pr}^{0,75}} \text{Re}_x \right]^{1/(m+1)} \text{Pr}^{0,75}}. \quad (3.75)$$

Для степенного профиля с $n = 1/7$, $m = 0,25$, $A = 0,0128$

$$\text{St}_{0_x} = 0,0288 \text{Re}_x^{-0,2} \text{Pr}^{-0,6}. \quad (3.76)$$

Для случая $q_{\text{ст}} = \text{const}$ (тепловой поток по длине поверхности не меняется) уравнение энергии

$$\frac{d[\text{Re}_T^{**} \Delta T]}{d\bar{x}} = \text{St Re}_L = \frac{q_{\text{ст}} L}{c_p \mu_0}. \quad (3.77)$$

$$d[\text{Re}_T^{**} \Delta T] = \frac{q_{\text{ст}}}{\mu_0 c_p} dx, \quad \text{Re}_T^{**} \Delta T = \frac{q_{\text{ст}} x}{\mu_0 c_p}, \quad (3.78)$$

$$\text{Re}_T^{**} = \frac{q_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0 c_p \Delta T} \frac{\rho_0 U_0 x}{\mu_0} = \text{St Re}_x.$$

Подставляя это выражение в степенной закон теплообмена, получаем

$$\text{St} = \frac{0,0128}{\text{Re}_T^{**0,25} \text{Pr}^{0,75}} = \frac{0,0128}{(\text{St Re}_x)^{0,25} \text{Pr}^{0,75}}; \quad (3.79)$$

$$\text{St}^{1,25} = \frac{0,0128}{\text{Re}_x^{0,25} \text{Pr}^{0,75}}; \quad \text{St} = \frac{0,0306}{\text{Re}_x^{0,2} \text{Pr}^{0,6}}.$$

Отсюда следует, что для любого закона изменения скорости на внешней границе пограничного слоя $U_0 = f(x)$ при расчете теплоотдачи с постоянной тепловой нагрузкой $q_{\text{ст}} = \text{const}$ справедлива формула для обтекания плоской пластины, только в числах St и Re_x необходимо подставлять параметры на внешней границе пограничного слоя для рассматриваемого сечения.

Сравнение формул (3.79) и (3.76) показывает, что в турбулентном пограничном слое коэффициенты теплоотдачи при условиях $T_{\text{ст}} = \text{const}$ и $q_{\text{ст}} = \text{const}$ отличаются всего примерно на 6 %,

в то время как в ламинарном пограничном слое $\frac{St_{q=\text{const}}}{St_{T=\text{const}}} = 1,42$

[(см. выражение (2.115)]. Это говорит о том, что турбулентный пограничный слой более консервативен к изменению граничных условий, чем ламинарный.



Глава 4

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

4.1. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ ТРЕНИЯ И ТЕПЛОМАССООБМЕНА

Почное решение системы дифференциальных уравнений пограничного слоя возможно лишь для ограниченного круга задач. Использование численных методов громоздко и трудоемко.

Поэтому большое значение приобретают приближенные методы решения, основанные на применении интегральных уравнений импульсов, энергии и диффузии. Их получают в результате интегрирования дифференциальных уравнений по толщине пограничного слоя.

Важной особенностью интегральных уравнений является то, что они выведены **без каких-либо физических допущений** и справедливы как для ламинарного, так и для турбулентного пограничных слоев, а также для переходной области течения. Они применимы и для «стандартных» условий течения, и для течений, осложненных воздействием возмущающих факторов: неизотермичности, сжимаемости, вдува газа со стенки, наличия химических реакций и т. п.

Интегральные уравнения имеют вид:

- уравнение импульсов

$$\frac{d Re^{**}}{d \bar{x}} + (1 + H) \frac{Re^{**}}{U_0} \frac{d U_0}{d \bar{x}} = \left(\frac{c_f}{2} + \frac{j_{ct}}{\rho_0 U_0} \right) Re_L; \quad (4.1)$$

- уравнение энергии

$$\frac{d Re_T^{**}}{d \bar{x}} + \frac{Re_T^{**}}{\Delta T} \frac{d \Delta T}{d \bar{x}} = \left(St + \frac{j_{ct}}{\rho_0 U_0} \right) Re_L; \quad (4.2)$$

- уравнение диффузии

$$\frac{d \text{Re}_d^{**}}{d\bar{x}} + \frac{\text{Re}_d^{**}}{\Delta C} \frac{d\Delta C}{d\bar{x}} = \left(\text{St}_d + \frac{j_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0} \right) \text{Re}_L. \quad (4.3)$$

$$\text{Здесь } \text{Re}^{**} = \frac{\rho_0 U_0 \delta^{**}}{\mu_0}, \quad \text{Re}_T^{**} = \frac{\rho_0 U_0 \delta_T^{**}}{\mu_0}, \quad \text{Re}_d^{**} = \frac{\rho_0 U_0 \delta_d^{**}}{\mu_0},$$

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{\rho U}{\rho_0 U_0} \left(1 - \frac{U}{U_0} \right) dy, \quad \delta_T^{**} = \int_0^{\delta_T} \frac{\rho U}{\rho_0 U_0} \left(1 - \frac{T - T_{\text{ст}}}{T_0 - T_{\text{ст}}} \right) dy,$$

$$\delta_d^{**} = \int_0^{\delta_d} \frac{\rho U}{\rho_0 U_0} \left(1 - \frac{C_i - C_{i\text{ст}}}{C_{i0} - C_{i\text{ст}}} \right) dy, \quad \Delta T = T_{\text{ст}} - T_0, \quad j_{\text{ст}} = \rho_{\text{ст}} V_{\text{ст}},$$

$$\bar{x} = x/L, \quad \frac{c_f}{2} = \frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0^2}, \quad \text{St} = \frac{q_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0 (T_{\text{ст}} - T_0)},$$

$$\text{St}_d = \frac{j_{\text{ст}d}}{\rho_0 U_0 \Delta C_i} = \frac{-\rho D (\partial C_i / \partial y)_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0 \Delta C_i}. \quad (4.4)$$

Чтобы решить эти уравнения, необходимо знать законы трения, теплообмена и массообмена. В общем случае $\text{St} = f(\text{Re}, T_{\text{ст}}/T_0, M, j_{\text{ст}} \dots)$. Для ламинарного режима течения при определенных граничных условиях законы можно определить аналитическим путем. Для турбулентного режима их получают на основе полуэмпирических теорий турбулентности.

Наиболее простой и результативной является так называемая «теория предельных относительных законов», разработанная С.С. Кутателадзе и А.И. Леонтьевым. Они показали, что при больших числах Рейнольдса ($\text{Re} \rightarrow \infty$) можно получить теоретические зависимости для относительных функций тепломассообмена и трения $\Psi = (c_f / c_{f_0})$, $\Psi_T = (\text{St} / \text{St}_0)$, $\Psi_d = (\text{St}_d / \text{St}_{d_0})$, которые не содержат эмпирических констант турбулентности и позволяют учесть влияние различных возмущающих факторов: неизотермичности, сжимаемости, вдува газа со стенки и др.

Интегральные уравнения, записанные через относительные функции Ψ , будут иметь вид (на примере уравнения энергии)

$$\frac{d \text{Re}_T^{**}}{d \bar{x}} + \frac{\text{Re}_T^{**}}{\Delta T} \frac{d \Delta T}{d \bar{x}} = \text{St}_0 (\Psi + b) \text{Re}_L, \quad (4.5)$$

где $\Psi = \text{St}/\text{St}_0$, $b = j_{\text{ст}}/\rho_0 U_0 \text{St}_0$ – относительный параметр вдува. St , St_0 – числа Стентона в реальных условиях течения и в стандартных (обтекание непроницаемой пластины дозвуковым безградиентным потоком в квазиизотермических условиях).

Для стандартных условий течения при турбулентном режиме:

$$\text{St}_0 = \frac{A}{\text{Re}_T^{**m} \text{Pr}^n}. \quad (4.6)$$

Получим предельный относительный закон теплообмена. Вывод предельных законов трения и массообмена аналогичен, и приводить его не будем.

Физически существование предельных законов объясняется тем, что с увеличением числа Re толщина вязкого подслоя убывает быстрее, чем толщина всего турбулентного слоя:

$$\xi_1 = y_1/\delta \rightarrow 0.$$

В ядре турбулентного пограничного слоя плотность теплового потока

$$q = -c_p \rho \overline{v' T'}, \quad (4.7)$$

где v' – пульсации скорости в поперечном направлении; T' – пульсации температуры.

Связь пульсаций скорости v' и температуры T' с осредненными параметрами течения U и T определяется с использованием гипотезы Прандтля

$$v' \approx l \frac{dU}{dy}, \quad T' \approx l_T \frac{dT}{dy}. \quad (4.8)$$

Здесь l и l_T – длина динамического и теплового пути смешения – расстояние, на котором комок жидкости, перемещающийся при пульсации из одного слоя в другой, сохраняет составляющую импульса в направлении оси x и теплоту.

С учетом гипотезы Прандтля плотность теплового потока будет иметь вид

$$q = -c_p \rho l l_T \frac{dU}{dy} \frac{dT}{dy}. \quad (4.9)$$

Считая, что длины динамического и теплового путей смешения равны, $l = l_T$, имеем

$$q = -c_p \rho l^2 \frac{dU}{dy} \frac{dT}{dy}. \quad (4.10)$$

Введем значения относительной плотности теплового потока

$$\bar{q} = \frac{q}{q_{\text{ст}}}, \quad \bar{q}_0 = \frac{q_0}{q_{\text{ст}0}}, \quad (4.11)$$

где q_0 и $q_{\text{ст}0}$ – значения теплового потока в данной точке пограничного слоя и на стенке в «стандартных» условиях течения (обтекание непроницаемой пластины дозвуковым безградиентным потоком в квазиизотермических условиях); q и $q_{\text{ст}}$ – то же в условиях, отличных от стандартных: воздействие различных возмущающих факторов – поперечного потока вещества, сжимаемости, неизотермичности и др.

Из (4.11) с учетом (4.10) можно записать тепловой поток на стенке:

$$q_{\text{ст}} = \frac{1}{\bar{q}_0} \frac{\bar{q}_0}{\bar{q}} c_p \rho l^2 \frac{dU}{dy} \frac{dT}{dy}. \quad (4.12)$$

Делим левую и правую части уравнения (4.12) на $\rho_0 U_0 (T_0 - T_{\text{ст}}) c_{p0}$ и введем безразмерные параметры $\omega = U/U_0$, $\xi = y/\delta$, $\bar{l} = l/\delta$:

$$\frac{q_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0 c_{p0} (T_0 - T_{\text{ст}})} = \frac{1}{\bar{q}_0} \frac{\bar{q}_0}{\bar{q}} \frac{\rho}{\rho_0} \bar{l}^2 \frac{d\omega}{d\xi} \frac{d(T - T_{\text{ст}})}{d\xi} \frac{1}{T_0 - T_{\text{ст}}}. \quad (4.13)$$

Используя подобие профилей скорости и температуры в виде

$$\omega = \frac{U}{U_0} = \frac{T - T_{\text{ст}}}{T_0 - T_{\text{ст}}},$$

имеем

$$\frac{d(T - T_{\text{ст}})}{d\xi} \frac{1}{T_0 - T_{\text{ст}}} = \frac{d\left(\frac{T - T_{\text{ст}}}{T_0 - T_{\text{ст}}}\right)}{d\xi} = \frac{d\omega}{d\xi}. \quad (4.14)$$

Тогда из (4.13) с учетом того, что

$$St = \frac{q_{ст}}{\rho_0 U_0 c_p (T_{ст} - T_0)},$$

имеем

$$St = \frac{1}{\tilde{q}_0} \frac{\tilde{q}_0}{\tilde{q}} \frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{d\omega}{d\xi} \right)^2 \bar{l}^2. \quad (4.15)$$

Представим число Стентона в относительном виде. Разделим левую и правую части (4.15) на St_0 :

$$\frac{St}{St_0} = \frac{1}{St_0} \frac{1}{\tilde{q}_0} \frac{\tilde{q}_0}{\tilde{q}} \frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{d\omega}{d\xi} \right)^2 \bar{l}^2. \quad (4.16)$$

Учитывая, что $\Psi = St/St_0$, уравнение (4.16) имеет вид:

$$\Psi = \frac{1}{St_0} \frac{1}{\tilde{q}_0} \frac{\tilde{q}_0}{\tilde{q}} \frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{d\omega}{d\xi} \right)^2 \bar{l}^2. \quad (4.17)$$

Преобразуем (4.17), разделяя переменные

$$St_0 \frac{\tilde{q}_0}{\bar{l}^2} d\xi^2 = \frac{1}{\Psi} \frac{\tilde{q}_0}{\tilde{q}} \frac{\rho}{\rho_0} d\omega^2. \quad (4.18)$$

$$\sqrt{St_0} \frac{\sqrt{\tilde{q}_0}}{\bar{l}} d\xi = \sqrt{\frac{1}{\Psi} \frac{\tilde{q}_0}{\tilde{q}} \frac{\rho}{\rho_0}} d\omega. \quad (4.19)$$

Выражение (4.19) справедливо для турбулентного ядра пограничного слоя от ξ_1 (или ω_1) до 1. Проинтегрируем (4.19):

$$\sqrt{St_0} \int_{\xi_1}^1 \frac{\sqrt{\tilde{q}_0}}{\bar{l}} d\xi = \int_{\omega_1}^1 \sqrt{\frac{1}{\Psi} \frac{\tilde{q}_0}{\tilde{q}} \frac{\rho}{\rho_0}} d\omega. \quad (4.20)$$

Поскольку при $Re \rightarrow \infty$ $\xi_1 = y_1/\delta \rightarrow 0$ $\omega_1 \rightarrow 0$, можно изменить нижние пределы интегрирования:

$$\sqrt{St_0} \int_0^1 \frac{\sqrt{\tilde{q}_0}}{\bar{l}} d\xi = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{\Psi} \frac{\tilde{q}_0}{\tilde{q}} \frac{\rho}{\rho_0}} d\omega. \quad (4.21)$$

В ряде работ показано, что в пристенной области $\bar{l} \rightarrow \bar{l}_0$ и $\bar{l} \approx 1$. Тогда в левой части выражения (4.21) стоят все члены, характеризующие «стандартные» условия, и они не зависят от возмущающих факторов. Поэтому уравнение (4.21) справедливо, в частности, и для «стандартных» условий. А для таких условий:

$$\rho = \rho_0 \text{ и } \rho/\rho_0 = 1, \quad \tilde{q} = q/q_{\text{ст}} = q_0/q_{\text{ст}0} = \tilde{q}_0, \quad \tilde{q}/\tilde{q}_0 = 1, \quad \Psi = 1.$$

Тогда уравнение (4.21) имеет вид

$$\sqrt{\text{St}_0} \int_0^1 \frac{\sqrt{\tilde{q}_0}}{\bar{l}} d\xi \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \text{Re} \rightarrow \infty$$

независимо от наличия и вида возмущающих факторов.

Соответственно правая часть уравнения (4.21) также стремится к единице

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{\Psi} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\tilde{q}_0}{\tilde{q}}} d\omega \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \text{Re} \rightarrow \infty.$$

В результате получаем выражение для относительной функции теплообмена:

$$\sqrt{\Psi} = \int_0^1 \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0} \frac{\tilde{q}_0}{\tilde{q}}} d\omega,$$

или

$$\Psi = \left(\int_0^1 \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0} \frac{\tilde{q}_0}{\tilde{q}}} d\omega \right)^2. \quad (4.22)$$

Полученная зависимость (4.22) представляет собой основной интеграл теории Кутателадзе–Леонтьева.

Как видно, для определения относительной функции теплообмена (или трения) необходимо знать распределение плотности газа (ρ/ρ_0) и теплового потока ($q/q_{\text{ст}}$) (или касательных напряжений $\tau/\tau_{\text{ст}}$) по толщине пограничного слоя.

4.2. ОБТЕКАНИЕ НЕПРОНИЦАЕМОЙ СТЕНКИ. ВЛИЯНИЕ НЕИЗОТЕРМИЧНОСТИ И СЖИМАЕМОСТИ ГАЗА

4.2.1. ВЛИЯНИЕ НЕИЗОТЕРМИЧНОСТИ НА ТЕПЛООБМЕН

Рассмотрим турбулентный пограничный слой газа на непроницаемой стенке. Как мы показали выше, предельный относительный закон теплообмена описывается формулой (4.22).

Поскольку стенка непроницаемая, распределение теплового потока поперек пограничного слоя $\tilde{q} = \tilde{q}_0$, $\tilde{q}/\tilde{q}_0 = 1$ и уравнение (4.22) имеет вид

$$\Psi = \left(\int_0^1 \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} d\omega \right)^2. \quad (4.23)$$

Определим влияние неизотермичности газа на теплообмен, когда температура газа сильно изменяется поперек пограничного слоя. При этом существенно меняется плотность газа внутри пограничного слоя, которая характеризует Ψ в формуле (4.23).

Распределение плотности по сечению пограничного слоя найдем из уравнения газового состояния

$$\frac{p}{\rho} = RT, \quad (4.24)$$

где R – газовая постоянная, $R = \frac{8,314}{M}$ [Дж/кг·К].

Отсюда следует, что для однородного газа ($M = \text{const}$) отношение плотности в рассматриваемой точке пограничного слоя и на его внешней границе будет иметь вид

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{T_0}{T}. \quad (4.25)$$

Распределение температуры внутри пограничного слоя получим из условия подобия полей скоростей и температур

$$\omega = \frac{U}{U_0} = \frac{T - T_{\text{ст}}}{T_0 - T_{\text{ст}}}. \quad (4.26)$$

Найдем из (4.26) отношение T/T_0

$$T = \omega(T_0 - T_{\text{ст}}) + T_{\text{ст}},$$

$$\frac{T}{T_0} = \omega \left(1 - \frac{T_{\text{ст}}}{T_0} \right) + \frac{T_{\text{ст}}}{T_0}.$$

Введем понятие температурного фактора (или фактора неизотермичности)

$$\psi = T_{\text{ст}}/T_0.$$

Тогда

$$\frac{T}{T_0} = \omega(1 - \psi) + \psi.$$

Для однородного газа распределение плотности будет [из (4.25)]:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{T_0}{T} = \frac{1}{\psi + (1 - \psi)\omega}. \quad (4.27)$$

Подставляя (4.27) в (4.23), имеем

$$\Psi = \left(\int_0^1 \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} d\omega \right)^2 = \left(\int_0^1 \frac{d\omega}{\sqrt{\psi + (1 - \psi)\omega}} \right)^2. \quad (4.28)$$

Проинтегрируем (4.28):

$$\begin{aligned} \Psi &= \left(\int_0^1 \frac{d\omega}{\sqrt{\psi + (1 - \psi)\omega}} \right)^2 = \left(\frac{2}{1 - \psi} \sqrt{\psi + (1 - \psi)\omega} \Big|_0^1 \right)^2 = \\ &= \left(\frac{2}{1 - \psi} \sqrt{\psi + (1 - \psi)} - \frac{2}{1 - \psi} \sqrt{\psi} \right)^2 = \\ &= \left[\frac{2}{1 - \psi} (1 - \sqrt{\psi}) \right]^2 = \left[\frac{2}{(1 - \sqrt{\psi})(1 + \sqrt{\psi})} (1 - \sqrt{\psi}) \right]^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{\psi} + 1} \right)^2. \\ \Psi &= \left(\frac{2}{\sqrt{\psi} + 1} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Расчет влияния неізотермичности на теплообмен по формуле (4.29) показан на рис. 4.1.

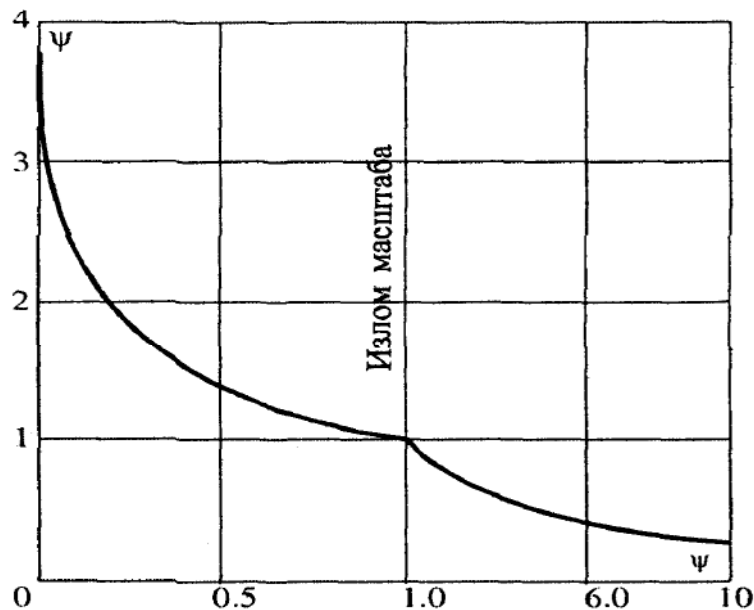


Рис. 4.1. Влияние неізотермичности на теплообмен ($Re \rightarrow \infty$)

4.2.2. ВЛИЯНИЕ СЖИМАЕМОСТИ (ЧИСЛА М) НА ТЕПЛООБМЕН

Предельный относительный закон теплообмена в условиях сжимаемости имеет вид уравнения (4.23), так как распределение плотности теплового потока при сверхзвуковом течении практически не меняется, т. е. остается таким же, как и в стандартных условиях, $q/q_{ст} \approx q_0/q_{0ст}$. Об этом свидетельствуют данные различных авторов, например, работы Maise G., McDonald H. ("AIAA J.", 1968, V. 6, No.1), где сравниваются данные при $M=0$ и $M=5$. Найдем теперь распределение плотности газа в пограничном слое при сверхзвуковом течении. При этом используем уравнение газового состояния (4.25), в котором T – термодинамическая температура. Выразим ее через температуру торможения T^* . Для этого воспользуемся подобием профилей скоростей и температур. При сверхзвуковом течении подобие имеет место между скоростями и температурами торможения:

$$\omega = \frac{T_{ст} - T^*}{T_{ст} - T_{ст}^*}, \quad (4.30)$$

где T^* и $T_{ст}^*$ – температуры торможения газа основного потока в рассматриваемой точке пограничного слоя и на стенке при обте-

кании адиабатической поверхности. Эти температуры находятся с учетом коэффициента восстановления температуры на стенке r :

$$T^* = T + r \frac{U^2}{2c_p}. \quad (4.31)$$

Преобразуем второй член в уравнении (4.31)

$$r \frac{U^2}{2c_p} = r \frac{U^2}{2c_p} \frac{U_0^2}{U_0^2} \frac{a_0^{*2}}{a_0^{*2}},$$

где a_0^* — скорость звука.

Поскольку $U/U_0 = \omega$, $a_0^* = \sqrt{kRT_0}$, $M_0 = U_0/a_0^*$ — число Маха, имеем

$$r \frac{U^2}{2c_p} = r \frac{1}{2c_p} \omega^2 M_0^2 kRT_0.$$

С учетом значения газовой постоянной $R = c_p - c_v$, получаем

$$r \frac{U^2}{2c_p} = r \frac{k-1}{2} \omega^2 M_0^2 T_0.$$

Тогда уравнение (4.31) имеет вид

$$T^* = T + r \frac{k-1}{2} \omega^2 M_0^2 T_0.$$

Отсюда термодинамическая температура

$$T = T^* - r \frac{k-1}{2} \omega^2 M_0^2 T_0. \quad (4.32)$$

Подставляя в (4.32) значение $T^* = T_{ст} - (T_{ст} - T_{ст}^*)\omega$ из (4.30), имеем

$$T = T_{ст} - (T_{ст} - T_{ст}^*)\omega - r \frac{k-1}{2} \omega^2 M_0^2 T_0. \quad (4.33)$$

Делим (4.33) на T_0 :

$$\frac{T}{T_0} = \frac{T_{ст}}{T_0} - \left(\frac{T_{ст}}{T_0} - \frac{T_{ст}^*}{T_0} \right) \omega - r \frac{k-1}{2} \omega^2 M_0^2.$$

Обозначим $\psi = \frac{T_{ст}}{T_0}$, $\psi^* = \frac{T_{ст}^*}{T_0}$, $\Delta\psi = \psi - \psi^*$, тогда

$$\frac{T}{T_0} = \psi - \Delta\psi\omega - r \frac{k-1}{2} \omega^2 M_0^2. \quad (4.34)$$

Так как $T_{ст}^* = T_0 \left(1 + r \frac{k-1}{2} M_0^2\right)$, то $r \frac{k-1}{2} M_0^2 = \psi^* - 1$ и уравнение (4.34) будет иметь вид

$$\frac{T}{T_0} = \psi - \Delta\psi\omega - (\psi^* - 1)\omega^2. \quad (4.35)$$

Параметр $\Delta\psi$ называется фактором теплообмена. Как только температура обтекаемой поверхности $T_{ст}$ отклоняется от адиабатической температуры $T_{ст}^*$, между поверхностью и потоком начинается процесс теплообмена.

Если $\Delta\psi < 0$ – тепловой поток направлен к поверхности, если $\Delta\psi > 0$ – поверхность отдает тепло потоку.

Подставляя (4.34) в (4.25) и (4.23), имеем

$$\Psi = \left(\int_0^1 \frac{d\omega}{\sqrt{\psi - \Delta\psi\omega - r \frac{k-1}{2} \omega^2 M_0^2}} \right)^2. \quad (4.36)$$

Уравнение (4.36) представляет собой табличный интеграл типа

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

и может быть проинтегрировано.

В результате интегрирования получаем относительный закон трения и теплообмена, учитывающий влияние **сжимаемости и неизотермичности**

$$\Psi = \frac{1}{r \frac{k-1}{2} M_0^2} \left[\arcsin \frac{2r \frac{k-1}{2} M_0^2 + \Delta\Psi}{\sqrt{\Delta\Psi^2 + 4r \frac{k-1}{2} M_0^2 \Psi}} - \arcsin \frac{\Delta\Psi}{\sqrt{\Delta\Psi^2 + 4r \frac{k-1}{2} M_0^2 \Psi}} \right]^2. \quad (4.37)$$

Зависимость Ψ от M_0 и $\Delta\Psi$ демонстрируется графиком рис. 4.2.

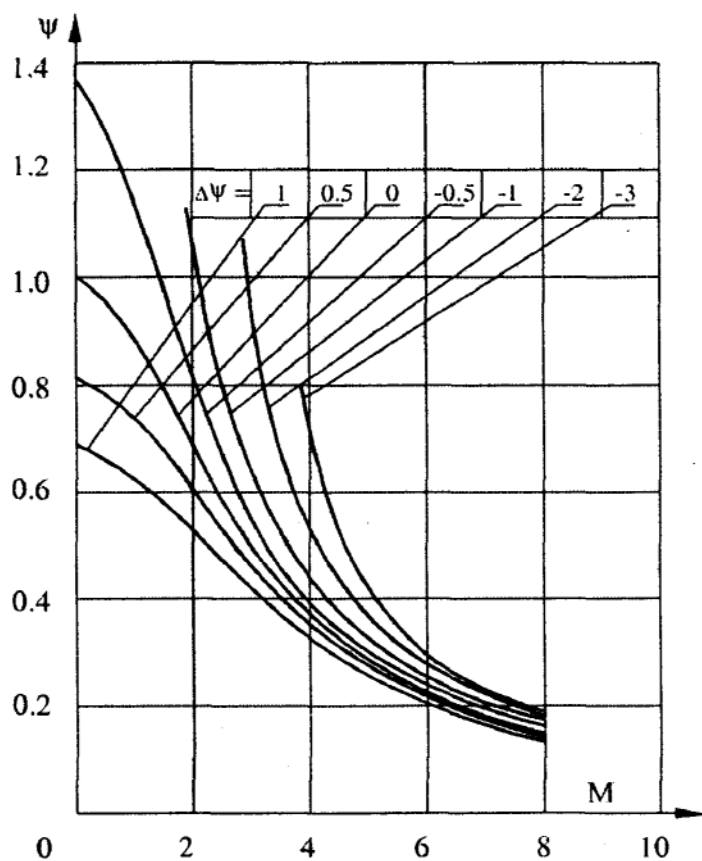


Рис. 4.2. Влияние сжимаемости на теплообмен

Для адиабатического течения $\Delta\Psi = \Psi - \Psi^* = 0$ и уравнение (4.37) имеет вид

$$\Psi = \frac{1}{r \frac{k-1}{2} M^2} \left(\arcsin \sqrt{\frac{r \frac{k-1}{2} M^2}{\Psi^*}} \right)^2. \quad (4.38)$$

Учитывая преобразование тригонометрической функции

$$\arcsin K = \operatorname{arctg} \frac{K}{\sqrt{1-K^2}}, \quad (4.39)$$

уравнение (4.38) можно записать

$$\Psi_M = \left(\frac{\operatorname{arctg} M \sqrt{r \frac{k-1}{2}}}{M \sqrt{r \frac{k-1}{2}}} \right)^2. \quad (4.40)$$

Расчет по этой формуле приведен на рис. 4.2 как расчет для $\Delta\psi = 0$.

Сполдинг предложил относительно простую аппроксимацию уравнения (4.37), которая с точностью до нескольких процентов справедлива до чисел Маха ~ 6 и имеет вид

$$\Psi \approx \left\{ \frac{1}{4} \left[\left(\frac{T_{ст}}{T_0} \right)^{1/2} + 1 \right]^2 + \frac{1}{6} r \frac{k-1}{2} M^2 \right\}^{-1}. \quad (4.41)$$

Принимая $r=0,9$ и $k=1,4$, получаем

$$\Psi \approx \left\{ \frac{1}{4} \left[\left(\frac{T_{ст}}{T_0} \right)^{1/2} + 1 \right]^2 + 0,03 M_0^2 \right\}^{-1}. \quad (4.42)$$

Для условий теплообмена на поверхности, обтекаемой сверхзвуковым потоком (совместное влияние неизотермичности и сжимаемости), хорошие результаты дает аппроксимация:

$$\Psi = \left(\frac{St}{St_0} \right)_{Re_T^{**}} = \Psi_T \Psi_M = \left(\frac{2}{\sqrt{\Psi} + 1} \right)^2 \left(\frac{\operatorname{arctg} M \sqrt{r \frac{k-1}{2}}}{M \sqrt{r \frac{k-1}{2}}} \right)^2. \quad (4.43)$$

Несмотря на то, что (4.43) получено для области $Re \rightarrow \infty$, оно удовлетворительно описывает опытные данные и в области конечных значений чисел Рейнольдса и может быть рекомендовано для практических расчетов (рис. 4.3).

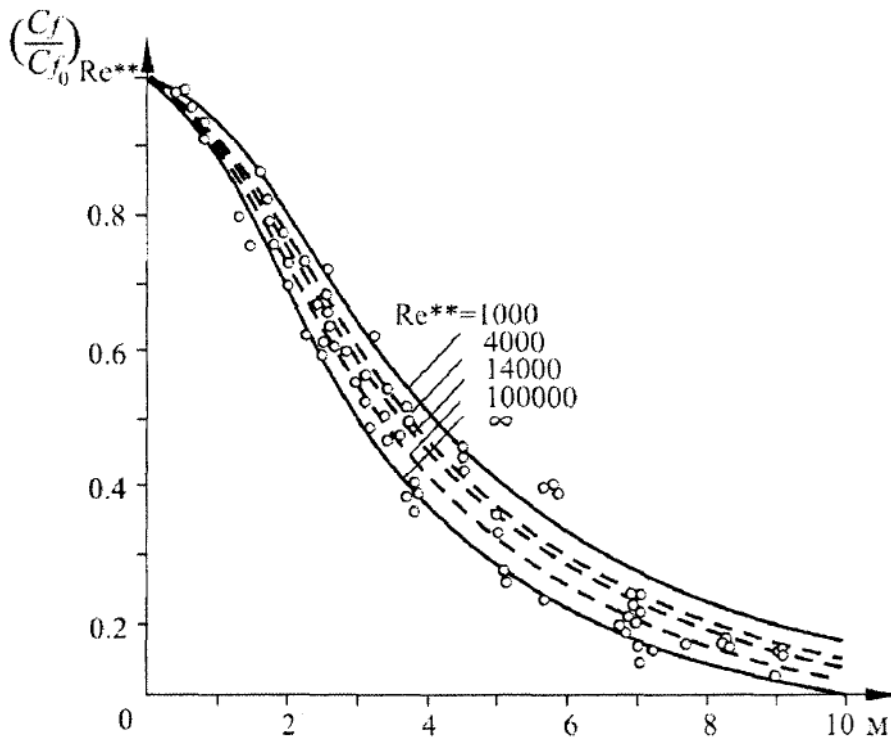


Рис. 4.3. Влияние сжимаемости на трение при разных числах Рейнольдса

4.3. ОБТЕКАНИЕ ПРОНИЦАЕМОЙ СТЕНКИ

Расчет турбулентного пограничного слоя на проницаемой стенке имеет чрезвычайно важное значение. Процессы такого рода возникают при защите элементов машин от воздействия потоков газа с высокой температурой («пористое» охлаждение лопаток газовых турбин, камер сгорания ракетных двигателей и т.п.), при испарении и конденсации, при наличии химических реакций на поверхности теплообмена, при затвердевании жидкости и плавлении твердых тел.

Рассматриваемая схема турбулентного пограничного слоя на проницаемой пластине показана на рис. 1.6.

АППРОКСИМАЦИЯ ПРОФИЛЯ ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ (КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ)

Как было показано, основной предельный интеграл Кутателадзе–Леонтьева имеет вид

$$\Psi = \left(\int_0^1 \sqrt{\frac{\tilde{q}_0}{\tilde{q}} \frac{\rho}{\rho_0}} d\omega \right)^2. \quad (4.44)$$

Видно, что в случае обтекания проницаемой поверхности для решения интеграла (4.44) необходимо знать распределение плотности теплового потока в пограничном слое $\tilde{q} = q/q_{\text{ст}}$.

Получим аппроксимацию распределения плотности тепловых потоков. Из определения теплового пограничного слоя конечной толщины имеем условия:

$$\begin{aligned} \text{при } \xi = y/\delta = 0 & \quad q = q_{\text{ст}}, \\ \text{при } \xi = 1 & \quad q = 0. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Из условия плавности функции $q(\xi)$ в точке $\xi = 1$ следует, что

$$\left. \frac{\partial q}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = 0. \quad (4.46)$$

Уравнение энергии для пограничного слоя имеет вид

$$\rho U c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho V c_p \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial y}. \quad (4.47)$$

Вблизи стенки ($U \approx 0$) уравнение (4.47) будет

$$\frac{\partial q}{\partial y} = \rho_{\text{ст}} V_{\text{ст}} c_p \frac{\partial T}{\partial y},$$

или

$$\left. \frac{\partial q}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = j_{\text{ст}} c_p \frac{\partial (T - T_{\text{ст}})}{\partial \xi}, \quad j_{\text{ст}} = \rho_{\text{ст}} V_{\text{ст}}. \quad (4.48)$$

Этим условиям удовлетворяет кубическая парабола

$$q = a + b\xi + c\xi^2 + d\xi^3. \quad (4.49)$$

Определим постоянные коэффициенты a, b, c, d :

$$\xi = 0 \quad q = q_{\text{ст}} \quad a = q_{\text{ст}}, \quad (4.50)$$

$$\xi = 1 \quad q = 0 \quad a + b + c + d = 0, \quad (4.51)$$

$$\left. \frac{\partial q}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial \xi} = b + 2c\xi + 3d\xi^2 = 0, \quad b + 2c + 3d = 0, \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial q}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} &= j_{\text{ст}} c_p \frac{\partial(T - T_{\text{ст}})}{\partial \xi}, \quad b + 2c\xi + 3d\xi^2 = 0, \\
b &= j_{\text{ст}} c_p \frac{\partial(T - T_{\text{ст}})}{\partial \xi}, \\
b &= j_{\text{ст}} c_p \frac{(T - T_{\text{ст}})}{\xi}.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Из (4.52): $d = \frac{-b-2c}{3}$, из (4.51): $c = -a - b - d = -a - b + \frac{b+2c}{3}$,
 $3c = -3a - 3b + b + 2c$.

$$c = -3a - 2b = -3q_{\text{ст}} - 2j_{\text{ст}} c_p \frac{(T - T_{\text{ст}})}{\xi}, \tag{4.54}$$

$$\begin{aligned}
d = \frac{-b-2c}{3} &= \frac{-j_{\text{ст}} c_p \frac{(T - T_{\text{ст}})}{\xi} + 6q_{\text{ст}} + 4j_{\text{ст}} c_p \frac{(T - T_{\text{ст}})}{\xi}}{3} = \\
&= 2q_{\text{ст}} + j_{\text{ст}} c_p \frac{(T - T_{\text{ст}})}{\xi}.
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Найдем распределение q : подставим в (4.49) коэффициенты из (4.50), (4.53), (4.54), (4.55), сделаем математические преобразования, в результате получим:

$$\tilde{q} = \frac{q}{q_{\text{ст}}} = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 + \frac{j_{\text{ст}} c_p (T - T_{\text{ст}})}{q_{\text{ст}}} (1 - \xi)^2.$$

Из подобия $\frac{T - T_{\text{ст}}}{T_0 - T_{\text{ст}}} = \omega$ выразим $T - T_{\text{ст}} = \omega(T_0 - T_{\text{ст}})$, подставим в предыдущее уравнение, умножим и разделим на $\rho_0 U_0$, получим

$$\tilde{q} = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 + b_1 \omega (1 - \xi)^2, \tag{4.56}$$

где

$$b_1 = \frac{j_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0 \text{St}}, \quad \text{St} = \frac{q_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0 c_p (T_0 - T_{\text{ст}})}. \tag{4.57}$$

Из уравнения (4.56) видно, что распределение плотности теплового потока в пограничном слое не зависит ни от неизотермичности ($\psi = T_{\text{ст}}/T_0$), ни от сжимаемости (число M). Поэтому для таких течений мы брали $\tilde{q} = \tilde{q}_0$.

На непроницаемой поверхности ($b_1 = 0$):

$$\tilde{q}_0 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3. \quad (4.58)$$

Отношение тепловых потоков будет:

$$\frac{\tilde{q}}{\tilde{q}_0} = 1 + b_1 \omega f(\xi),$$

где

$$f(\xi) = (2\xi + 1)^{-1}. \quad (4.59)$$

Для условий $Re \rightarrow \infty$ наиболее существенной для q (и τ) становится пристенная область, где $\xi \ll 1$. Следовательно, можно принять

$$\frac{\tilde{q}}{\tilde{q}_0} = 1 + b_1 \omega. \quad (4.60)$$

Распределение теплового потока по сечению пограничного слоя на проницаемой и непроницаемой стенках показано на рис. 3.10.

Распределение теплового потока в пограничном слое с вдувом газа показано на рис. 4.4.

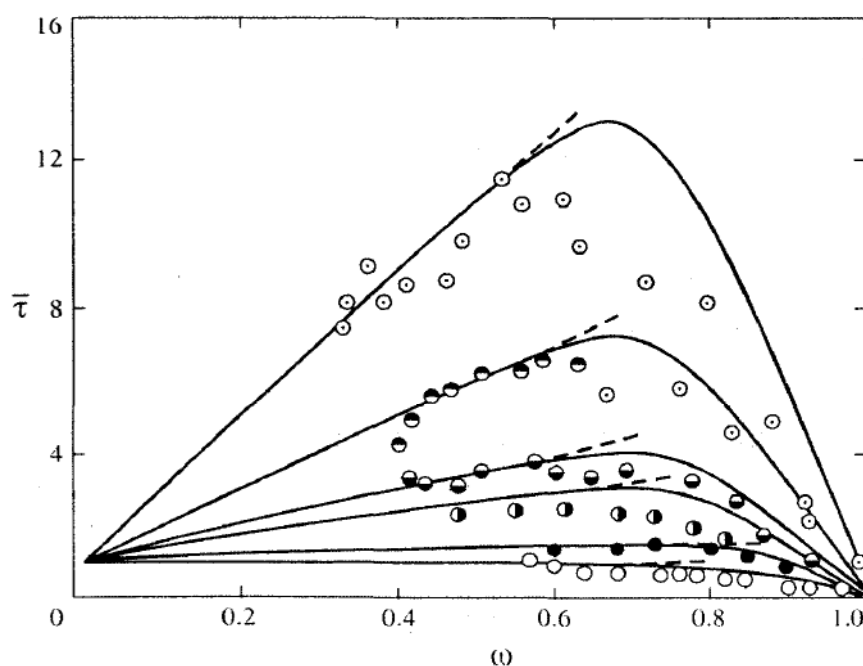


Рис. 4.4. Влияние вдува газа на распределение теплового потока по сечению пограничного слоя. Кривые-расчет по (4.60) для $b_1 = 0 \dots 20$

**ПРЕДЕЛЬНЫЙ ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ ЗАКОН ТЕПЛОМАССООБМЕНА
НА ПРОНИЦАЕМОЙ СТЕНКЕ В УСЛОВИЯХ НЕИЗОТЕРМИЧНОСТИ**

Подставив распределение плотности теплового потока (4.60) в основной интеграл (4.44), получим выражение

$$\Psi = \left(\int_0^1 \frac{(\rho/\rho_0)^{1/2}}{\sqrt{1+b_1\omega}} d\omega \right)^2 \quad (4.61)$$

или

$$\int_0^1 \frac{(\rho/\rho_0)^{1/2}}{\sqrt{\Psi + b\omega}} d\omega = 1, \quad (4.62)$$

где $b = b_1\Psi$.

Относительная плотность ρ/ρ_0 всегда конечна, а относительная скорость ω изменяется от 0 до 1, и, следовательно, существует некоторое значение параметра проницаемости b , при котором интегралу (4.62) соответствует $\Psi = 0$. Такую величину параметра проницаемости будем называть критической и обозначать через $b_{кр}$. Это явление можно отождествлять с оттеснением пограничного слоя от проницаемой поверхности.

Критический параметр проницаемости определяем из уравнения (4.62), полагая $\Psi = 0$:

$$b_{кр} = \left[\int_0^1 \left(\frac{\rho/\rho_0}{\omega} \right)^{1/2} d\omega \right]^2. \quad (4.63)$$

Вдуваемый через стенку газ в общем случае может отличаться по своим свойствам от газа основного потока. Поэтому будем различать вдув однородного ($M_1 = M_2$) и неоднородного газа ($M_1 \neq M_2$).

Для простейшего случая вдува однородного газа в изотермических условиях ($\rho/\rho_0 \approx 1$) из уравнений (4.62) и (4.63) имеем

$$\Psi = \left(1 - \frac{b}{4} \right)^2, \quad (4.64)$$

$$b_{кр} = 4,0. \quad (4.65)$$

Поскольку $b_{кр} = 4$ при $Re \rightarrow \infty$, уравнение (4.64) в общем случае записывают как

$$\Psi = \left(1 - \frac{b}{b_{кр}}\right)^2. \quad (4.66)$$

Предельные относительные законы теплообмена и трения для случая вдува однородного газа в дозвуковой поток газа в неизотермических условиях получаются после подстановки выражения для плотности

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \psi + (1 - \psi)\omega \quad (4.67)$$

в основной интеграл (4.61):

$$\Psi = \left(\int_0^1 \frac{d\omega}{\sqrt{[\psi + (1 - \psi)\omega](1 + b_1\omega)}} \right)^2. \quad (4.68)$$

Интегрирование (4.68) дает следующие выражения для относительной функции теплообмена:

а) при $\psi < 1$

$$\Psi = \frac{4}{(1 - \psi)b_1} \left(\ln \frac{\sqrt{(1 - \psi)(1 + b_1)} + \sqrt{b_1}}{\sqrt{1 - \psi} + \sqrt{b_1\psi}} \right)^2; \quad (4.69)$$

б) при $\psi > 1$

$$\Psi = \frac{4}{(\psi - 1)b_1} \left[\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(\psi - 1)(1 + b_1)}{b_1}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\psi - 1}{b_1\psi}} \right]^2. \quad (4.70)$$

Для критических параметров вдува из уравнения (4.63) с учетом (4.67) получаем:

а) при $\psi < 1$

$$b_{кр} = \frac{1}{1 - \psi} \left(\ln \frac{1 + \sqrt{1 - \psi}}{1 - \sqrt{1 - \psi}} \right)^2; \quad (4.71)$$

б) при $\psi > 1$

$$b_{кр} = \frac{1}{\psi - 1} \left(\arccos \frac{2 - \psi}{\psi} \right)^2. \quad (4.72)$$

Достаточно хорошей аппроксимацией уравнений (4.69) и (4.70) является уравнение

$$\Psi = \left(\frac{2}{\sqrt{\Psi} + 1} \right)^2 \left(1 - \frac{b}{b_{\text{кр}}} \right)^2, \quad (4.73)$$

где $b_{\text{кр}}$ определяется по (4.71) и (4.72).

ВДУВ ИНОРОДНОГО ГАЗА

При вдуве инородного газа через проницаемую пластину для рассматриваемых условий ($Le = Pr = 1$, $dp/dx = 0$, $h_{\text{ст}} = \text{const}$, $C'_{\text{ст}} = \text{const}$) должно существовать подобие в распределении энтальпий, скоростей и массовых концентраций:

$$\frac{h - h_{\text{ст}}}{h_0 - h_{\text{ст}}} = \omega = \frac{C_i - C_{i\text{ст}}}{C_{i0} - C_{i\text{ст}}}. \quad (4.74)$$

Распределение плотности в пограничном слое в предельном интеграле при вдуве инородного газа будет иметь вид:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{M_0 T}{M T_0}.$$

Температуру T найдем из подобия (4.74):

$$h = h_{\text{ст}} + \omega(h_0 - h_{\text{ст}}). \quad (4.75)$$

Считая, что теплоемкость смеси газов c_p в рассматриваемом диапазоне температур не изменяется

$$h = \int_0^T c_p dT = c_p T,$$

определим температуру газа в рассматриваемой точке пограничного слоя

$$T = \frac{h_{\text{ст}} + \omega(h_0 - h_{\text{ст}})}{c_p}. \quad (4.76)$$

Рассмотрим **двухкомпонентный** газ. Найдем теплоемкость смеси газов в данной точке пограничного слоя

$$c_p = c'_p C' + c_{p0} C_0, \quad (4.77)$$

где C' и C_0 – массовые концентрации охладителя (вдуваемого газа) и газа основного потока в данной точке пограничного слоя; c'_p и c_{p0} – их теплоемкости.

Концентрации C' и C_0 определим из условия подобия (4.74)

$$C' = C'_{\text{ст}} + (C'_0 - C'_{\text{ст}})\omega,$$

$$C_0 = C_{\text{ст}}^0 + (C_0^0 - C_{\text{ст}}^0)\omega.$$

Тогда из (4.77) с учетом предыдущих выражений для концентраций после преобразований будем иметь

$$c_p = c_{p\text{ст}} + (C'_0 c'_p + C_0^0 c_{p0})\omega - (C'_{\text{ст}} c'_p + C_{\text{ст}}^0 c'_{p0})\omega.$$

И окончательно выражение для теплоемкости смеси газов примет вид

$$c_p = c_{p\text{ст}} + (c_{p0} - c_{p\text{ст}})\omega. \quad (4.78)$$

Подставляя (4.78) в (4.76), получаем выражение для температуры

$$T = \frac{h_{\text{ст}} + (h_0 - h_{\text{ст}})\omega}{c_{p\text{ст}} + (c_{p0} - c_{p\text{ст}})\omega}. \quad (4.79)$$

Найдем молекулярную массу смеси газов M в рассматриваемой точке пограничного слоя.

$$\frac{1}{M} = \frac{C'}{M'} + \frac{1-C'}{M_0}. \quad (4.80)$$

Из подобия профилей концентраций и скоростей с учетом того, что $C'_0 = 0$, имеем

$$C' = C'_{\text{ст}}(1 - \omega). \quad (4.81)$$

Подставим (4.81) в (4.80):

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} &= \frac{C'_{\text{ст}}}{M'} - \frac{C'_{\text{ст}}}{M'}\omega + \frac{1}{M_0} - \frac{C'_{\text{ст}}}{M_0} + \frac{C'_{\text{ст}}}{M_0}\omega. \\ \frac{1}{M} &= \left(\frac{C'_{\text{ст}}}{M'} + \frac{1}{M_0} - \frac{C'_{\text{ст}}}{M_0} \right) + \left(\frac{1}{M_0} - \frac{1}{M'} \right) C'_{\text{ст}}\omega = \\ &= \frac{1}{M_{\text{ст}}} + \left(\frac{1}{M_0} - \frac{1}{M_{\text{ст}}} \right) \omega, \end{aligned}$$

так как

$$\frac{1}{M_{\text{ст}}} = \frac{C'_{\text{ст}}}{M'} + \frac{(1 - C'_{\text{ст}})}{M_0} = \frac{C'_{\text{ст}}}{M'} + \frac{1}{M_0} - \frac{C'_{\text{ст}}}{M_0} = \frac{1}{M_0} + \left(\frac{1}{M'} - \frac{1}{M_0} \right) C'_{\text{ст}},$$

$$\left(\frac{1}{M_0} - \frac{1}{M'} \right) C'_{\text{ст}} = \frac{1}{M_0} - \frac{1}{M_{\text{ст}}}.$$

Найдем распределение плотности смеси газов в пограничном слое:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{M_0}{M} \frac{T}{T_0} = M_0 \left[\frac{1}{M_{\text{ст}}} + \left(\frac{1}{M_0} - \frac{1}{M_{\text{ст}}} \right) \omega \right] \frac{h_{\text{ст}} + (h_0 - h_{\text{ст}}) \omega}{c_{p\text{ст}} + (c_{p0} - c_{p\text{ст}}) \omega} \frac{1}{T_0} =$$

$$= \left[\frac{M_0}{M_{\text{ст}}} + \left(1 - \frac{M_0}{M_{\text{ст}}} \right) \omega \right] \frac{h_{\text{ст}} + (h_0 - h_{\text{ст}}) \omega}{c_{p\text{ст}} + (c_{p0} - c_{p\text{ст}}) \omega} \frac{1}{T_0}.$$

Обозначим

$$\psi_1 = \frac{h_{\text{ст}}}{h_0}, \quad \psi_2 = \frac{c_{p\text{ст}}}{c_{p0}}, \quad \psi_3 = \frac{M_0}{M_{\text{ст}}},$$

тогда

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left[\psi_3 + (1 - \psi_3) \omega \right] \frac{h_0 [\psi_1 + (1 - \psi_1) \omega]}{c_{p0} [\psi_2 + (1 - \psi_2) \omega]} \frac{1}{T_0}.$$

Для газов одинаковой атомности

$$c_p M = \text{const},$$

$$c_{p\text{ст}} M_{\text{ст}} = c_{p0} M_0, \text{ или } \frac{c_{p\text{ст}}}{c_{p0}} = \frac{M_0}{M_{\text{ст}}}, \text{ т. е. } \psi_2 = \psi_3.$$

Тогда

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \psi_1 + (1 - \psi_1) \omega,$$

т. е. если при инородном вдуве вместо температуры использовать энтальпию, то распределение плотности будет иметь такой же вид, как и при однородном вдуве [см. уравнение (4.67)]. Тогда и выражения для относительной функции теплообмена и критического параметра вдува также будут иметь прежний вид [уравнения (4.69)–(4.72)].

Влияние вдува инородного газа на коэффициент трения на пластине показано на рис. 4.5.

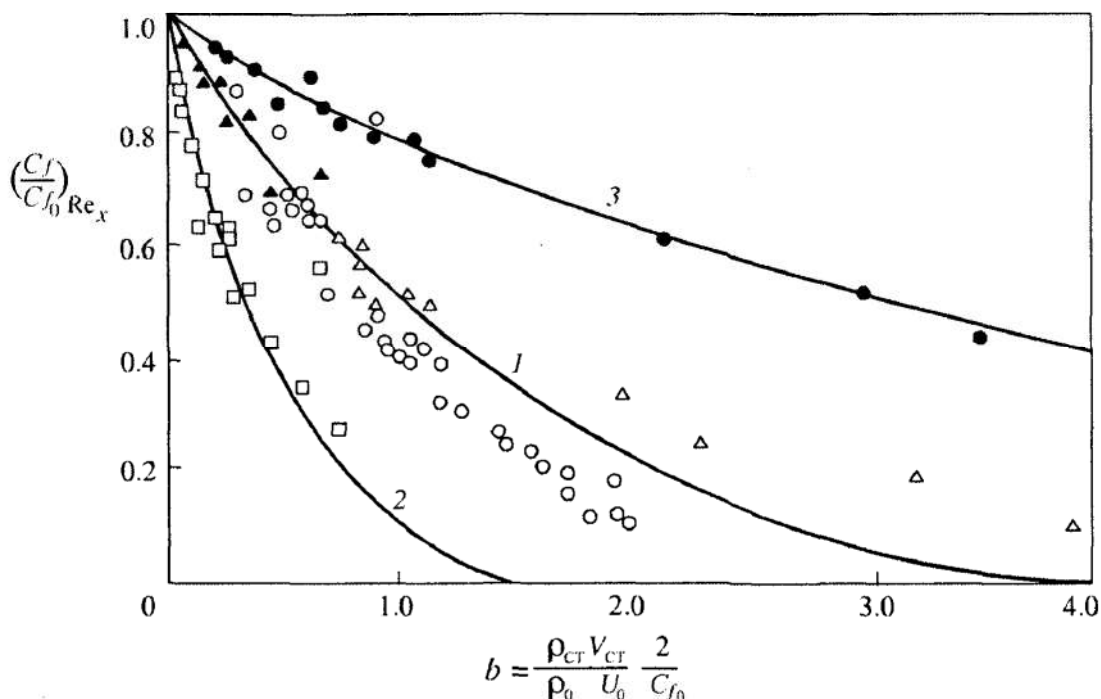


Рис. 4.5. Влияние вдува инородного газа на коэффициент трения на пластине: 1 – вдув воздуха в воздух; 2 – гелий – воздух; 3 – фреон-12 – воздух. Точки – опыты

ОТСОС

Отсос газа из пограничного слоя может использоваться для интенсификации процессов теплообмена, для повышения устойчивости течения. Процессы, аналогичные отсосу, имеют место при конденсации, адсорбции.

Параметр проницаемости стенки при отсосе по сравнению с вдувом имеет отрицательное значение, так как поток массы направлен к стенке $b < 0$.

Относительная функция трения (или теплообмена) будет иметь вид:

$$\Psi = \left(1 + \frac{b}{4}\right)^2.$$

Профиль скорости в пограничном слое при отсосе:

$$\omega = \left(1 + \frac{b}{4}\right) \omega_0 - \frac{b}{4} \omega_0^2,$$

где ω_0 – распределение скорости в пограничном слое на непроницаемой пластине.

Для предельного отсоса газа $b=4$ и $\omega_{ac} = \omega_0(2 - \omega_0)$, $\psi \rightarrow b$,

$$\frac{j_{ст}}{\rho_0 U_0} = \frac{c_f}{2}, \quad \tau_{ст} = -\rho V_{ст} U_0.$$

Таким образом, при отсосе турбулентного слоя существует предельное решение. Аналогичный результат, как будет показано ниже, получается и для случая асимптотического отсоса.

Автомодельное решение для асимптотического отсоса

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad V = V_{ст} = \text{const} < 0.$$

Уравнение движения вблизи стенки

$$V_{ст} \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad U = 0, \quad V = V_{ст} \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Распределение скорости в пограничном слое имеет вид

$$U(y) = U_0 (1 - e^{V_{ст} y / \nu}).$$

Тогда касательное напряжение

$$\tau_{ст} = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} = -\rho U_0 V_{ст}.$$

Коэффициент трения

$$\frac{c_f}{2} = \frac{\tau_{ст}}{\rho_0 U_0^2} = -\frac{V_{ст}}{U_0} = \frac{j_{ст}}{\rho_0 U_0}, \quad \frac{c_f}{c_{f0}} = \frac{j_{ст}}{\rho_0 U_0} \frac{2}{c_{f0}} = b.$$

Предельный закон трения

$$\Psi = b, \quad b_1 = -1.$$

4.4. РАСЧЕТ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Начальными параметрами в расчете являются:

- координаты рассматриваемых поперечных сечений (x), которые отсчитываются от передней кромки пористой пластины;
- параметры основного потока:
 $h_0 = f(x)$ – энтальпия,
 $U_0 = f(x)$ – скорость,
 $\rho_0 = f(x)$ – плотность,

- $\mu_0 = f(x)$ – вязкость,
 c_{p0} – удельная теплоемкость при постоянном давлении,
 Pr – число Прандтля;
 • параметры вторичного потока:
 $j_{ст} = \rho_{ст} V_{ст} = f(x)$ – массовый поток охладителя, или
 $T_{ст} = f(x)$ – температура стенки
 h' – энтальпия охладителя,
 c'_p – удельная теплоемкость охладителя;
 • для осесимметричного потока;
 $d = f(x)$ – диаметр.

Параметры, которые должны быть вычислены:

- $T_{ст} = f(x)$ – температура стенки,
 $j_{ст} = f(x)$ – массовый поток охладителя,

а также другие производные характеристики:

- St – число Стентона,
 $q_{ст}$ – плотность теплового потока на стенке,
 c_f – коэффициент трения,
 $\tau_{ст}$ – касательное напряжение,
 RES – сила сопротивления,
 $C'_{ст}$ – концентрация охладителя на стенке.

1. Известен массовый поток охладителя на стенке $j_{ст} = f(x)$.

Запишем интегральное уравнение энергии в общем случае для осесимметричного течения

$$\frac{d Re_T^{**}}{d \bar{x}} + \frac{Re_T^{**}}{\Delta h} \frac{d(\Delta h)}{d \bar{x}} + \frac{Re_T^{**}}{d} \frac{d(d)}{d \bar{x}} = \left(St + \frac{j_{ст}}{\rho_0 U_0} \right) Re_L, \quad (4.82)$$

$$\text{где } Re_T^{**} = \rho_0 U_0 \delta_T^{**} / \mu_0, \quad \delta_T^{**} = \int_0^\delta \frac{\rho U}{\rho_0 U_0} \left(1 - \frac{h - h_{ст}}{h_0 - h_{ст}} \right) dy,$$

$$\Delta h = h_0 - h_{ст}, \quad \bar{x} = x/L, \quad Re_L = \rho_0 U_0 L / \mu_0, \quad j_{ст} = \rho_{ст} V_{ст},$$

$$St = q_{ст} / \rho_0 U_0 (h_0 - h_{ст}), \quad q_{ст} = j_{ст} (h_{ст} - h').$$

Подставляя выражения для St и $q_{ст}$ в (4.82) и интегрируя от $x=0$ до $x=x$, получаем число Рейнольдса Re_T^{**} :

$$Re_T^{**} = \frac{1}{\Delta h d} \left[\int_0^x \frac{j_{ст}(h_0 - h')d}{\mu_0} dx + (Re_T^{**} \Delta h d)_{x=0} \right], \quad (4.83)$$

где $(Re_T^{**} \Delta h d)_{x=0}$ зависит от предыстории потока и получается из расчета поверхности, расположенной перед пористой пластиной.

Поскольку $h_{ст}$ – неизвестная величина, мы ее находим методом итерации, принимая за нулевое приближение $h_{ст} = h'$.

Число Стентона в «стандартных» условиях

$$St_0 = \frac{A}{Re_T^{**m} Pr^{0,75}}, \quad (4.84)$$

для $Re^{**} = 300 - 10^4$, $n = 1/7$: $A = 0,0128$, $m = 0,25$.

Параметр вдува

$$b = \frac{j_{ст}}{\rho_0 U_0} \frac{1}{St_0}. \quad (4.85)$$

Энтальпийный фактор

$$\psi = \frac{h_{ст}}{h_0}. \quad (4.86)$$

Критический параметр вдува
при $\psi < 1$

$$b_{кр} = \frac{1}{1-\psi} \left(\ln \frac{1+\sqrt{1-\psi}}{1-\sqrt{1-\psi}} \right)^2 \left(1 + \frac{0,83}{Re_T^{**0,14}} \right); \quad (4.87)$$

при $\psi > 1$

$$b_{кр} = \frac{1}{\psi-1} \left(\arccos \frac{2-\psi}{\psi} \right)^2 \left(1 + \frac{0,83}{Re_T^{**0,14}} \right), \quad (4.88)$$

где $\left(1 + \frac{0,83}{Re_T^{**0,14}} \right)$ – учитывает влияние конечности числа Рейнольдса на критический параметр вдува.

Предельная относительная функция теплообмена, учитывающая влияние неизотермичности на теплообмен:

$$\Psi_{\tau} = \left(\frac{2}{\sqrt{\Psi} + 1} \right)^2. \quad (4.89)$$

Предельная относительная функция теплообмена, учитывающая влияние вдува на теплообмен

$$\Psi_b = \left(1 - \frac{b}{b_{\text{кр}}} \right)^2. \quad (4.90)$$

Совместное влияние неизотермичности и вдува

$$\Psi = \frac{St}{St_0} = \Psi_{\tau} \Psi_b.$$

Число Стентона

$$St = St_0 \Psi_{\tau} \Psi_b. \quad (4.91)$$

Из определения числа Стентона

$$St = \frac{j_{\text{ст}}(h_{\text{ст}} - h')}{\rho_0 U_0 (h_0 - h_{\text{ст}})}$$

находим новое приближение для $h_{\text{ст}}$

$$h_{\text{ст}} = \frac{(j_{\text{ст}} / \rho_0 U_0) h' + St h_0}{(j_{\text{ст}} / \rho_0 U_0) + St}. \quad (4.92)$$

После подстановки нового значения $h_{\text{ст}}$ из (4.92) в (4.83) делаем следующее приближение по формулам (4.82)–(4.92) и так далее, до тех пор, пока относительная разность между текущим и предшествующим значениями $h_{\text{ст}}$ не станет меньше наперед заданной малой величины.

Далее определяем искомую величину $T_{\text{ст}}$

$$T_{\text{ст}} = h_{\text{ст}} / c_{\text{рст}},$$

теплоемкость смеси газов на стенке

$$c_{\text{рст}} = \sum_{i=1}^n C_{\text{сти}} c_{pi}.$$

Для бинарной смеси

$$c_{pст} = c_{p0} + C'_{ст}(c'_p - c_{p0}).$$

Тепловой поток на стенке

$$q_{ст} = j_{ст}(h_{ст} - h').$$

Концентрацию вдуваемого охладителя на стенке в текущем сечении получаем из подобия процессов тепломассообмена

$$St_d = \frac{j_{ст}(1 - C'_{ст})}{\rho_0 U_0 C'_{ст}} = St.$$

$$C'_{ст} = \frac{j_{ст}}{St \rho_0 U_0 + j_{ст}}.$$

Коэффициент трения

$$c_f = 2St Pr^n.$$

Касательное напряжение

$$\tau_{ст} = \frac{c_f}{2} \rho_0 U_0^2.$$

Сила сопротивления на единицу ширины обтекаемой поверхности

$$RES = \int_0^x \tau_{ст} dx.$$

2. Известна температура стенки $T_{ст} = f(x)$

Вычисляем энтальпию смеси газов на стенке

$$h_{ст} = T_{ст} c_{pст} = T_{ст} [c_{p0} + C'_{ст}(c'_p - c_{p0})]. \quad (4.93)$$

Поскольку $C'_{ст}$ неизвестна, определяем ее методом итераций. За нулевое приближение принимаем $C'_{ст} \approx 0,5$.

Определяем параметр К:

$$K = (h_{ст} - h') / (h_0 - h_{ст}).$$

Энтальпийный фактор

$$\psi = \frac{h_{ст}}{h_0}.$$

Влияние неизотермичности на теплообмен

$$\Psi_T = \left(\frac{2}{\sqrt{\psi} + 1} \right)^2.$$

Критический параметр вдува:

при $\psi < 1$

$$b_{кр} = \frac{1}{1-\psi} \left(\ln \frac{1+\sqrt{1-\psi}}{1-\sqrt{1-\psi}} \right)^2;$$

при $\psi > 1$

$$b_{кр} = \frac{1}{\psi-1} \left(\arccos \frac{2-\psi}{\psi} \right)^2.$$

Параметр проницаемости

$$b = b_{кр} - \frac{K b_{кр}^2}{2 \Psi_T} \left(\sqrt{\frac{4 \Psi_T}{K b_{кр}} + 1} - 1 \right).$$

Функция, учитывающая влияние вдува,

$$\Psi_b = \left(1 - \frac{b}{b_{кр}} \right)^2.$$

Из решения интегрального уравнения энергии

$$\frac{d \operatorname{Re}_T^{**}}{d \bar{x}} + \frac{\operatorname{Re}_T^{**}}{\Delta h} \frac{d(\Delta h)}{d \bar{x}} + \frac{\operatorname{Re}_T^{**}}{d} \frac{d(d)}{d \bar{x}} = \operatorname{Re}_L \operatorname{St}_0 b (1 + K),$$

$$\operatorname{Re}_T^{**} = \frac{1}{\Delta h d} \left[\frac{A(m+1)}{\operatorname{Pr}^{0,75}} \int_0^x b(\Delta h d)^{m+1} (1+K) \frac{\rho_0 U_0}{\mu_0} dx + (\operatorname{Re}_T^{**} \Delta h d)_{x=0}^{m+1} \right]^{\frac{1}{m+1}}.$$

Число Стентона в стандартных условиях

$$\operatorname{St}_0 = \frac{A}{\operatorname{Re}_T^{**m} \operatorname{Pr}^{0,75}}.$$

Число Стентона в реальных условиях

$$\operatorname{St} = \operatorname{St}_0 \Psi_T \Psi_b.$$

Массовый поток охладителя через стенку

$$j_{\text{ст}} = \rho_0 U_0 \text{St}_0 b.$$

Из подобия тепломассообмена

$$C'_{\text{ст}} = j_{\text{ст}} / (\text{St} \rho_0 U_0 + j_{\text{ст}}).$$

Полученное значение $C'_{\text{ст}}$ подставляем в (4.93) и выполняем новое приближение, и так до тех пор, пока предыдущее и последующее значения не будут отличаться на малую наперед заданную величину.

Тепловой поток

$$q_{\text{ст}} = j_{\text{ст}} (h_{\text{ст}} - h').$$

Коэффициент трения

$$\frac{c_f}{2} = \text{St} \text{Pr}^{0,75}.$$

Касательное напряжение на стенке

$$\tau_{\text{ст}} = \frac{c_f}{2} \rho_0 U_0^2.$$

Сила сопротивления на длине от $x=0$ до $x=x$ на единицу ширины канала

$$\text{RES} = \int_0^x \tau_{\text{ст}} dx.$$



Глава 5

ГАЗОВЫЕ ЗАВЕСЫ

5.1. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ГАЗОВЫХ ЗАВЕС ПРИ ОБТЕКАНИИ АДИАБАТИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Одной из проблем теплофизики является защита обтекаемых поверхностей от воздействия высокотемпературных и химически агрессивных потоков газа. Во многих случаях весьма эффективными могут быть **гидродинамические методы защиты**, когда охлаждающий газ (или жидкость) вдувается в пограничный слой через защищаемую поверхность. Не всегда можно распределить вдуваемый газ равномерно по большой площади и сохранить достаточную прочность стенки, поэтому более простым методом заградительного охлаждения является локальный вдув через небольшие пористые участки, тангенциальные щели или интенсивное охлаждение начального участка проницаемой стенки.

В литературе указанные методы защиты называются по-разному: заградительное, струйное или пленочное охлаждение, тепловые или газовые завесы.

Рассмотренный здесь метод основан на асимптотической теории турбулентного пограничного слоя, развивающегося на **адиабатической и неадиабатической** поверхностях.

Различные схемы организации газовых завес основываются на использовании одного из следующих способов тепловой защиты (рис. 5.1):

- а) охлаждение предвключенного непроницаемого участка;
- б) вдув охладителя через начальный пористый участок;
- в) подача охладителя через тангенциальную щель.

Основным параметром, которым оценивается эффективность газовой завесы, является безразмерная относительная температура

теплоизолированной стенки:

$$\Theta = \frac{T_{\text{ст}}^* - T_0}{T_{\text{ст}0} - T_0}.$$

Этот параметр так и называется – эффективность газовой завесы. Найдем распределение температуры адиабатической стенки по длине пластины.

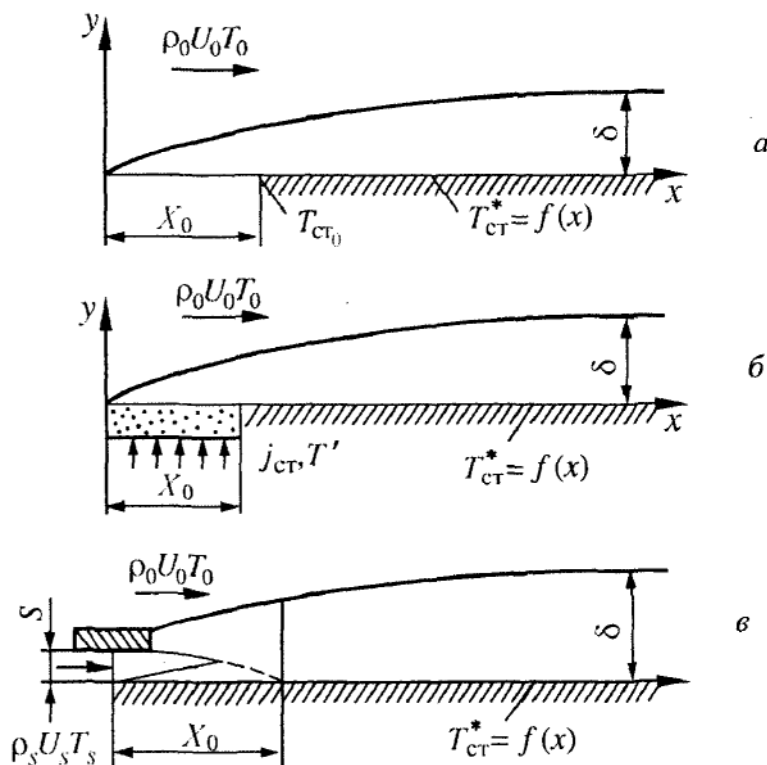


Рис. 5.1. Схемы основных вариантов организации газовых завес

Интегральное уравнение энергии на плоской непроницаемой пластине

$$\frac{d \text{Re}_T^{**}}{d\bar{x}} + \frac{\text{Re}_T^{**}}{\Delta T} \frac{d\Delta T}{d\bar{x}} = \text{St Re}_L. \quad (5.1)$$

Поскольку поверхность адиабатическая, $q_{\text{ст}} = 0$, $\text{St} = 0$ и уравнение (5.1) имеет вид

$$\frac{d \text{Re}_T^{**}}{d\bar{x}} + \frac{\text{Re}_T^{**}}{\Delta T} \frac{d\Delta T}{d\bar{x}} = 0 \quad (5.2)$$

или

$$\frac{d(\text{Re}_T^{**} \Delta T)}{\Delta T d\bar{x}} = 0,$$

$$\text{Re}_T^{**} \Delta T = \text{const},$$

$$\text{Re}_{T_0}^{**} \Delta T_0 = \text{Re}_T^{**} \Delta T,$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_0} = \frac{\text{Re}_{T_0}^{**}}{\text{Re}_T^{**}},$$

$$\text{где } \Delta T = T_{\text{ст}}^* - T_0, \quad \Delta T_0 = T_{\text{ст}0} - T_0,$$

$$\Theta = \frac{T_{\text{ст}}^* - T_0}{T_{\text{ст}0} - T_0} = \frac{\text{Re}_{T_0}^{**}}{\text{Re}_T^{**}}, \quad (5.3)$$

где $\text{Re}_{T_0}^{**}$ – число Рейнольдса в начальном сечении адиабатической пластины; Re_T^{**} – число Рейнольдса в текущем сечении адиабатической пластины. Число $\text{Re}_{T_0}^{**}$ находится из решения интегрального уравнения энергии участка охлаждения (см. схемы организации завес).

На участке $x < x_0$ при $\text{Pr} = 1$ выполняется условие

$$\delta_T \approx \delta, \quad \delta_T^{**} \approx \delta^{**}.$$

В области $x > x_0$ подобие динамического и теплового пограничных слоев нарушается, так как изменяются граничные условия на адиабатической поверхности пластины. Внутри пограничного слоя происходит выравнивание температур только вследствие турбулентного перемешивания и подсоса массы газа из внешнего потока. При этом наибольшая интенсивность перемешивания имеет место в пристенной области, где производная $\partial U / \partial y$ максимальна. В результате деформация профиля температур происходит таким образом, что область с $\partial T^* / \partial y \approx 0$ непрерывно увеличивается, т. е. растет область, где $T^* \approx T_{\text{ст}}^*$. Одновременно вследствие подсоса газа из внешнего потока температура в пограничном слое приближается к температуре T_0 , т. е. при $x \rightarrow \infty$

$$T^* \rightarrow T_{\text{ст}}^* \rightarrow T_0. \quad (5.4)$$

Развитие теплового пограничного слоя на адиабатической стенке, охлаждаемой завесой, показано на рис. 5.2.

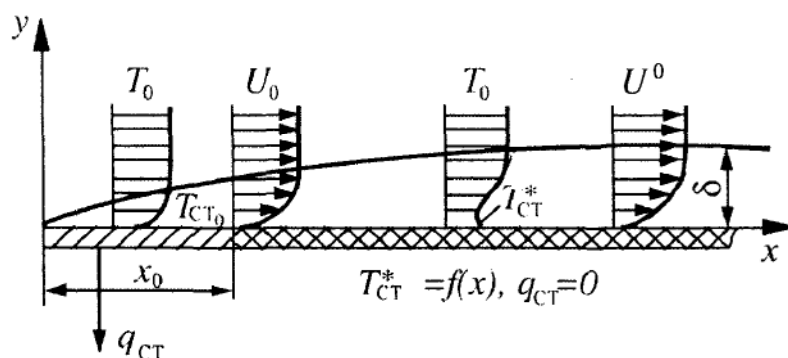


Рис. 5.2. Вырождение теплового пограничного слоя на адиабатической поверхности в условиях завесы

Поскольку теплообмен через стенку отсутствует (стенка адиабатическая), можно записать, что $q_{ст} = -\lambda \left(\frac{\partial T^*}{\partial y} \right)_{ст} = 0$, откуда следует $\left(\frac{\partial T^*}{\partial y} \right)_{ст} = 0$, или на некотором расстоянии от стенки

$T^* \approx \text{const}$. Это означает, что у стенки имеется участок, где температура в пограничном слое постоянна.

Запишем выражение для толщины потери энергии пограничного слоя постоянных физических свойств

$$\delta_T^{**} = \int_0^1 \omega \left(1 - \frac{T^* - T_{ст}^*}{T_0 - T_{ст}} \right) d\xi.$$

Учитывая (5.4), на адиабатической поверхности при $Re \rightarrow \infty$ получим

$$\delta_T^{**} = \int_0^1 \omega d\xi.$$

Тогда отношение толщины потери энергии на адиабатической стенке с учетом деформации профиля температуры к толщине потери импульса будет иметь вид

$$\beta = \frac{\delta_T^{**}}{\delta^{**}} = \frac{\int_0^1 \omega d\xi}{\int_0^1 \omega(1-\omega) d\xi}.$$

Принимая во внимание, что $\omega = \xi^{1/7}$, получаем $\beta = 9$ – коэффициент, учитывающий деформацию поля температур.

При $x \rightarrow x_0$ $\beta \rightarrow 1$, а при $x \rightarrow \infty$ $\beta \rightarrow \beta_{\max} \rightarrow 9$. Тогда уравнение (5.3) имеет вид

$$\Theta = \frac{Re_{\tau_0}^{**}}{Re_T^{**}} = \frac{Re_{\tau_0}^{**}}{\beta Re^{**}}. \quad (5.5)$$

Число Рейнольдса Re^{**} находится из решения интегрального уравнения импульсов

$$\frac{d Re^{**}}{d \bar{x}} + \frac{Re^{**}}{U_0} \frac{d U_0}{d \bar{x}} = \frac{c_{f_0}}{2} Re_L,$$

где коэффициент трения

$$\frac{c_{f_0}}{2} = \frac{A}{Re^{**m}}.$$

При течении газа на пластине ($U_0 = \text{const}$, $dU_0/dx = 0$) уравнение импульсов будет иметь вид

$$\frac{d Re^{**}}{d \bar{x}} = \frac{A}{Re^{**m}} Re_L,$$

где $Re_L = \frac{\rho_0 U_0 L}{\mu_0}$, $\bar{x} = x/L$.

В результате интегрирования уравнения импульсов имеем

$$Re^{**} = \left[A(m+1) Re_{\Delta x} + Re_0^{**m+1} \right]^{\frac{1}{m+1}}. \quad (5.6)$$

Подставляем (5.6) в (5.5):

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{Re_{\tau_0}^{**}}{\beta Re^{**}} = \left(\beta \frac{Re^{**}}{Re_{\tau_0}^{**}} \right)^{-1} = \\ &= \left[\frac{A(m+1)\beta^{m+1} Re_{\Delta x}}{Re_{\tau_0}^{**m+1}} + \frac{\beta^{m+1} Re_0^{**m+1}}{Re_{\tau_0}^{**m+1}} \right]^{-\frac{1}{m+1}}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Поскольку на участке $x < x_0$ $\delta_\tau = \delta$, $\delta_{\tau_0}^{**} = \delta_0^{**}$ и $Re_{\tau_0}^{**} = Re_0^{**}$, а коэффициент $\beta = \delta_\tau^{**} / \delta^{**} = 1$, получаем из (5.7)

$$\Theta = \left[1 + A(m+1)\beta^{m+1} \frac{Re_{\Delta x}}{Re_{\tau_0}^{**m+1}} \right]^{\frac{1}{m+1}}. \quad (5.8)$$

Для развитого турбулентного пограничного слоя со степенным профилем скорости $n = 1/7$: $A = 0,0128$, $m = 0,25$, $\beta = 9$, тогда

$$\Theta = \left[1 + 0,25 \frac{Re_{\Delta x}}{Re_{\tau_0}^{**0.25}} \right]^{-0,8}. \quad (5.9)$$

Начальное число Рейнольдса $Re_{\tau_0}^{**}$ в сечении $x = x_0$ находим в зависимости от способа организации завесы путем решения интегрального уравнения энергии на участке $0 < x < x_0$.

1. При вдуве охладителя через тангенциальную щель

$$\delta_{\tau_0}^{**} = \int_0^\delta \frac{\rho U}{\rho_0 U_0} \left(1 - \frac{T - T_{ст}}{T_0 - T_{ст}} \right) dy.$$

В сечении щели $T = T_{ст} = \text{const}$, $\rho = \rho_s$, $U = U_s$, $\delta = S$, поэтому

$$\delta_{\tau_0}^{**} = \int_0^S \frac{\rho_s U_s}{\rho_0 U_0} dy = \frac{\rho_s U_s S}{\rho_0 U_0},$$

откуда

$$Re_{\tau_0}^{**} = \frac{\rho_0 U_0 \delta_{\tau_0}^{**}}{\mu_0} = Re_s \frac{\mu_s}{\mu_0}.$$

Тогда (5.9) будет иметь вид

$$\Theta = \left[1 + 0,25 \frac{Re_{\Delta x}}{Re_s^{1,25}} \left(\frac{\mu_0}{\mu_s} \right)^{1,25} \right]^{-0,8}, \quad (5.10)$$

где $Re_s = \frac{\rho_s U_s S}{\mu_s}$, S — высота щели.

2. При охлаждении начального непроницаемого участка

$$\text{Re}_{\tau_0}^{**} = \left[\frac{A(m+1)}{\text{Pr}^n} \text{Re}_{x_0} \right]^{\frac{1}{m+1}}, \text{ где } \text{Re}_{x_0} = \frac{\rho_0 U_0 x_0}{\mu_0},$$

$$\Theta = \left(1 + 15,6 \frac{x - x_0}{x_0} \right)^{-0,8}. \quad (5.11)$$

3. При вдуве через пористый участок число Рейнольдса в конце пористой поверхности находится из решения интегрального уравнения энергии

$$\text{Re}_{\tau_0}^{**} = \left[\frac{A(m+1)}{\text{Pr}^n} \int_0^{x_0} (\Psi_b + b) \frac{\rho_0 U_0}{\mu_0} dx \right]^{\frac{1}{m+1}}. \quad (5.12)$$

Тогда параметр эффективности завесы при вдуве через пористый участок будет

$$\Theta = \left[1 + \frac{0,25 \text{Re}_{\Delta x}}{\text{Re}_{\text{ст}}^{1,25} (1+K)^{1,25}} \right]^{-0,8}, \quad (5.13)$$

где $\text{Re}_{\text{ст}} = \frac{1}{\mu_0} \int_0^x j_{\text{ст}} dx$, $K = \frac{T_{\text{ст}0} - T'}{T_0 - T_{\text{ст}0}}.$

5.2. ТЕПЛООБМЕН В ОБЛАСТИ ГАЗОВОЙ ЗАВЕСЫ

УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОВОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С ГАЗОВОЙ ЗАВЕСОЙ НА НЕАДИАБАТИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Рассматриваемые условия соответствуют комбинированному способу охлаждения обтекаемой поверхности, когда наряду с локальной подачей охладителя непосредственно в пограничный слой происходит регенеративный теплообмен через стенку. Необходимо определить коэффициент теплоотдачи в области газовой завесы. Схемы завесы на адиабатической и неадиабатической поверхностях показаны на рис 5.3.

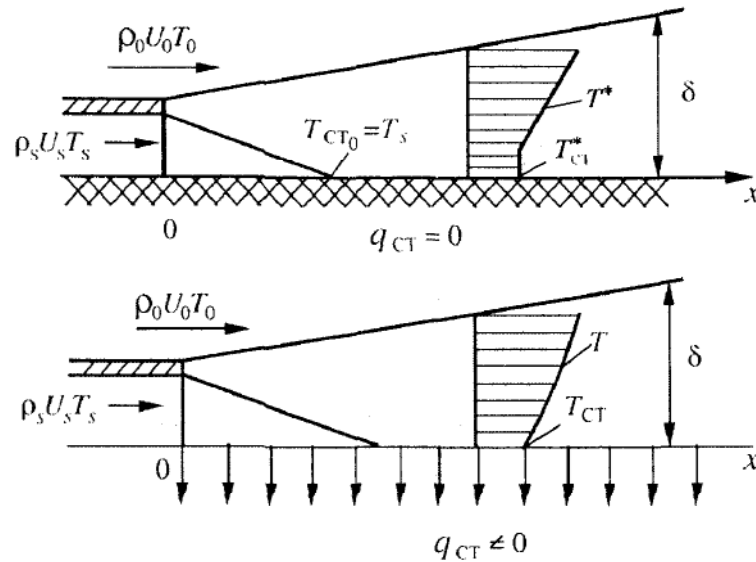


Рис. 5.3. Схемы завес на адиабатической и неадиабатической поверхностях

Если определять α по разности $T_0 - T_{ст}$, то возникает вопрос о влиянии на теплоотдачу различных параметров газовой завесы: величины вдува, высоты щели, коэффициента восстановления и др. Это потребовало бы проведения достаточно широких исследований.

Эккерт и Жестков предложили определять коэффициент теплоотдачи в области газовой завесы формулой, аналогичной выражению для нахождения коэффициента теплоотдачи при течении газа с большими скоростями:

$$\alpha = q_{ст} / (T_{ст}^* - T_{ст}). \quad (5.14)$$

Здесь $T_{ст}^*$ – температура адиабатической стенки. Эта гипотеза предполагает, что общее решение дифференциального уравнения энергии получается наложением двух решений, одно из которых учитывает заградительное охлаждение стенки, другое – регенеративное охлаждение.

Рассмотрим пристенный пограничный слой. Тепловой пограничный слой на участке $x < x_0$ формируется одним из способов организации газовой завесы. Для области $x > x_0$ коэффициент теплоотдачи будем определять по формуле (5.14). Получим интегральное уравнение энергии в области действия газовой завесы ($x > x_0$).

Уравнение теплопроводности в рассматриваемых условиях ($q_{ст} \neq 0$) запишем обычным способом:

$$c_p \rho U \frac{\partial T}{\partial x} + c_p \rho V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial y}. \quad (5.15)$$

В случае газовой завесы на адиабатической поверхности ($q_{\text{ст}} = 0$)

$$c_p \rho U \frac{\partial T^*}{\partial x} + c_p \rho V \frac{\partial T^*}{\partial y} = \frac{\partial q^*}{\partial y}. \quad (5.16)$$

Вычитая из (5.15) уравнение (5.16) с учетом уравнения неразрывности, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} c_p \rho U (T - T^*) + \frac{\partial}{\partial y} c_p \rho V (T - T^*) = \frac{\partial (q - q^*)}{\partial y}. \quad (5.17)$$

Интегрируя это уравнение по толщине пограничного слоя с учетом граничных условий:

$$\text{при } y=0 \quad T = T_{\text{ст}}, \quad T^* = T_{\text{ст}}^*, \quad q = q_{\text{ст}}, \quad q^* = 0,$$

$$\text{при } y = \delta_T \quad T = T^* = T_0, \quad q = q^* = 0,$$

имеем

$$q_{\text{ст}} = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_T} c_p \rho U (T - T^*) dy. \quad (5.18)$$

Это уравнение подобно обычному уравнению энергии теплового пограничного слоя и переходит в него при отсутствии тепловой завесы ($T^* = T_0$). После несложных преобразований (5.18) получается интегральное уравнение энергии пограничного слоя газовой завесы на неадиабатической поверхности

$$\frac{d \text{Re}_T^{**}}{d\bar{x}} + \frac{\text{Re}_T^{**}}{\Delta T} \frac{d\Delta T}{d\bar{x}} = \text{St Re}_L. \quad (5.19)$$

Как видно, по форме оно совпадает с обычным уравнением теплового пограничного слоя, но в этом случае

$$\Delta T = T_{\text{ст}}^* - T_{\text{ст}}, \quad (5.20)$$

а толщина потери энергии

$$\delta_T^{**} = \int_0^{\delta_T} \frac{\rho U}{\rho_0 U_0} \left(\frac{T - T^*}{T_{\text{ст}} - T_{\text{ст}}^*} \right) dy, \quad (5.21)$$

где T^* и T – температуры в рассматриваемой точке пограничного слоя с газовой завесой соответственно при отсутствии и наличии теплообмена на стенке.

Для обычного пограничного слоя толщина потери энергии

$$\delta_T^{**} = \int_0^{\delta_T} \frac{\rho U}{\rho_0 U_0} \left(1 - \frac{T - T_{\text{ст}}}{T_0 - T_{\text{ст}}} \right) dy = \int_0^{\delta_T} \frac{\rho U}{\rho_0 U_0} \left(\frac{T - T_0}{T_{\text{ст}} - T_0} \right) dy. \quad (5.22)$$

Было экспериментально определено подобие профилей температур и скоростей на примере ступенчатого подвода тепла к стенке. Вторую ступень можно рассматривать как находящуюся в области завесы со стороны первой ступени. Профили температуры при наличии теплообмена в области газовой завесы были измерены и обработаны двумя способами. При первом способе они представлены в виде безразмерной избыточной температуры относительно температуры невозмущенного потока T_0

$$\frac{T - T_0}{T_{\text{ст}} - T_0} = f \left(\frac{y}{\delta_T^{**}} \right),$$

при этом толщина потери энергии рассчитывалась по выражению (5.22). В такой обработке данные показаны на рис. 5.4, поз. А. Они сопоставлены с профилем дефекта скорости и расчетом по степенной зависимости $n = 1/7$:

$$\frac{T - T_0}{T_{\text{ст}} - T_0} = 1 - \omega = 1 - 0,715 \left(\frac{y}{\delta_T^{**}} \right)^{1/7}. \quad (5.23)$$

Как видно, в такой обработке наблюдается существенное неподобие профилей скоростей и температур.

На рис. 5.4, поз. Б те же самые экспериментальные данные обработаны вторым способом: относительно адиабатической температуры в рассматриваемой точке пограничного слоя T^* , которая представляет собой профиль температуры в условиях газовой завесы на адиабатической стенке. В этом случае толщина потери энергии δ_T^{**} определялась выражением (5.21). При такой обработке сохраняется подобие полей скоростей и температур при наличии теплообмена в зоне завесы

$$\frac{T - T^*}{T_{\text{ст}} - T_{\text{ст}}^*} = 1 - \omega. \quad (5.24)$$

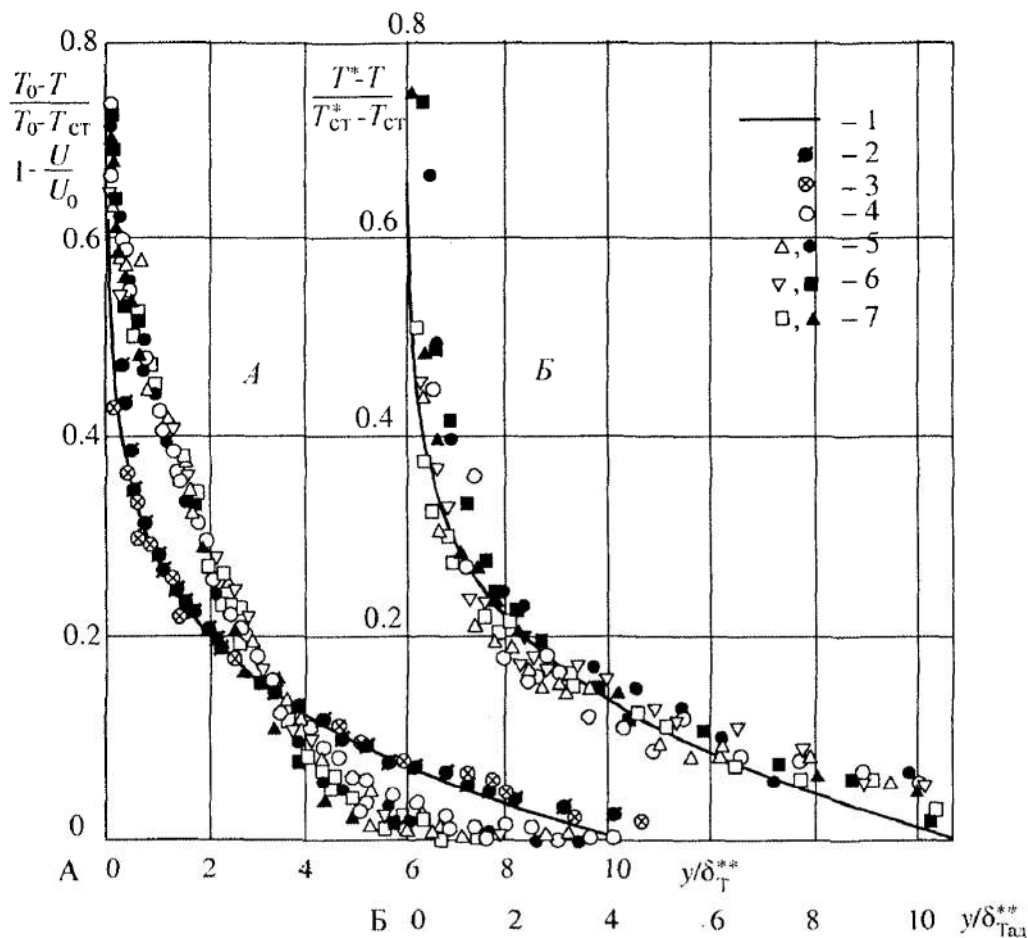


Рис. 5.4. Подобие профилей температур и скоростей в условиях завесы: 1 – расчетный степенной профиль $1/7$. Опыты: 2 – профиль скорости; 3 – профиль температуры при $q_{ст} = \text{const}$; 4-7 – профиль температуры при $q_{ст1}/q_{ст2} = 6,7$

ТЕПЛООБМЕН В ЗОНЕ ЗАВЕСЫ

Как было показано, при комбинированном охлаждении интегральное соотношение энергии (5.19), записанное относительно адиабатической температуры стенки $T_{ст}^*$, имеет вид, тождественный обычному интегральному соотношению теплового пограничного слоя. Следовательно, если закон теплообмена

$$St = \frac{A}{Re_T^{**m} Pr^n} = \frac{0,0128}{Re_T^{**0,25} Pr^{0,75}} \quad (5.25)$$

останется консервативным по отношению к изменению граничных условий и в данном случае, то при расчетах теплообмена на поверхности в области завесы коэффициент теплоотдачи в форме (5.14) можно определять обычным способом.

Консервативность (5.25) подтверждена в опытах при ступенчатом подводе теплоты к стенке. Опыты проводили в два этапа. Сна-

чала теплоту подводили только к первой ступени $q_{ст_1}$. При этом на поверхность вниз по потоку (вторая ступень) воздействовала тепловая завеса со стороны первой ступени. Измеряли температуру газа в пограничном слое T^* и температуру адиабатической стенки $T_{ст}^*$. Затем подводили тепло на второй ступени $q_{ст_2}$.

Опытные данные о теплообмене на второй ступени обрабатывали двумя способами. В первом случае числа Стентона и Рейнольдса определяли по разности температур стенки и невозмущенного потока

$$St_0 = \frac{q_{ст}}{\rho_0 U_0 c_{p0} (T_{ст} - T_0)}, \quad Re_T^{**} = \frac{\int_0^x q_{ст} dx}{\mu c_{p0} (T_{ст} - T_0)}. \quad (5.26)$$

Экспериментальные данные в такой обработке сопоставлены с законом теплообмена (5.25) (рис. 5.5), откуда видно, что в удовлетворительном соответствии с расчетом находятся только те опыты, в которых отношение тепловых потоков $q_{ст_1}/q_{ст_2} < 1$. В этих опытах вследствие слабого теплообмена на первой ступени адиабатическая температура стенки $T_{ст}^*$ близка к температуре невозмущенного потока T_0 . При $q_{ст_1}/q_{ст_2} > 1$ наблюдается существенное отклонение опытов от расчета. Таким образом, этот способ обработки не позволяет обобщить экспериментальные данные в области тепловой завесы.

При обработке вторым способом коэффициент теплоотдачи и толщину потери энергии находили по разности $T_{ст}^*$ и $T_{ст}$:

$$St_0 = \frac{q_{ст}}{\rho_0 U_0 c_{p0} (T_{ст} - T_{ст}^*)}, \quad Re_T^{**} = \frac{\int_{x_0}^x q_{ст} dx}{\mu c_{p0} (T_{ст} - T_{ст}^*)}. \quad (5.27)$$

Поскольку процесс теплообмена на второй ступени происходит в уже развившемся пограничном слое, при определении числа Стентона учитывали влияние начального динамического слоя по формуле

$$St = 0,037 Re_x^{-0,2} \left(\frac{x}{x - x_0} \right)^{0,109}.$$

В такой обработке опытные данные удовлетворительно согласуются с законом теплообмена (5.25) (рис. 5.5).

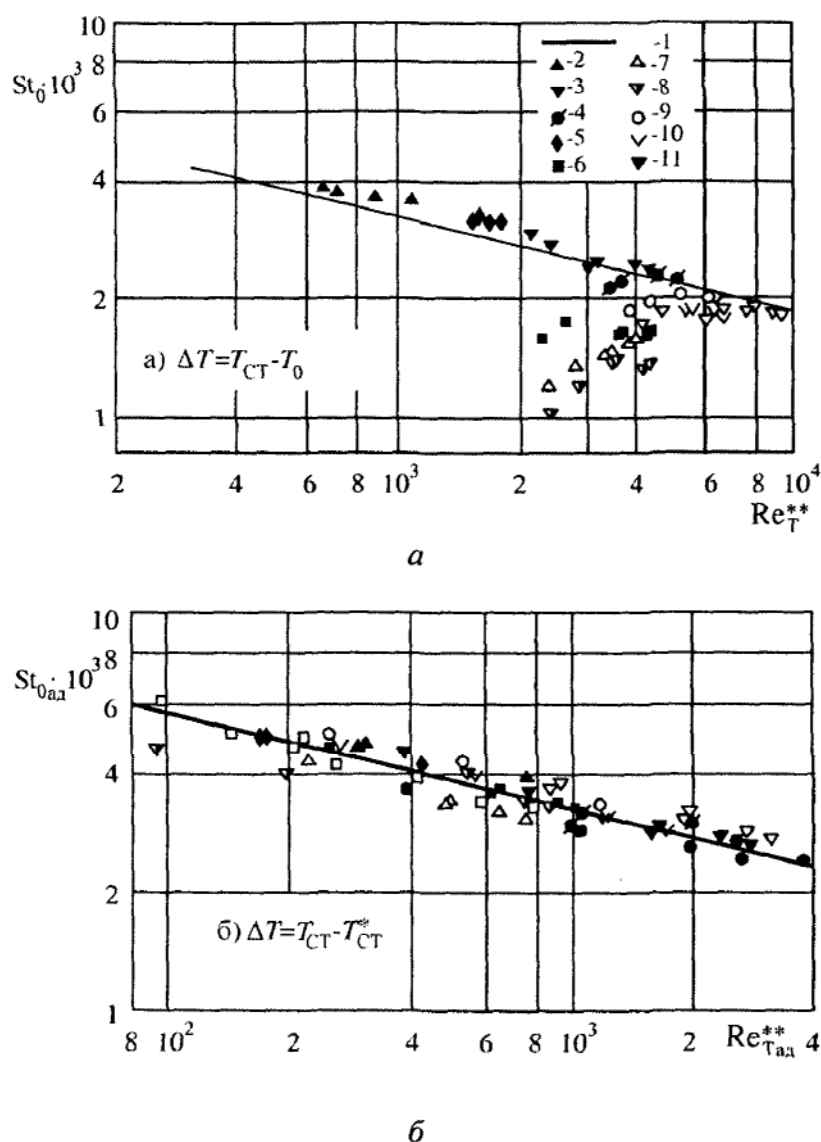


Рис. 5.5. Теплообмен в условиях завесы на непроницаемой пластине: а – обработка опытов по $T_{CT} - T_0$; б – $T_{CT} - T_{CT}^*$

На рис. 5.5 нанесены также опытные данные Афанасьева и соавторов при ступенчатом изменении тепловых граничных условий и опыты Комарова и Леонтьева за пористым участком.

5.3. ТЕПЛООБМЕН В ПРИСТЕННОЙ СТРУЕ

Важным предельным случаем щелевого заградительного охлаждения является затопленная струя, взаимодействующая с поверхностью, когда скорость спутного потока равна нулю ($U_0 = 0$) или мала по сравнению со скоростью вдува ($U_S \gg U_0$). Схема рассматриваемого течения показана на рис. 5.6.

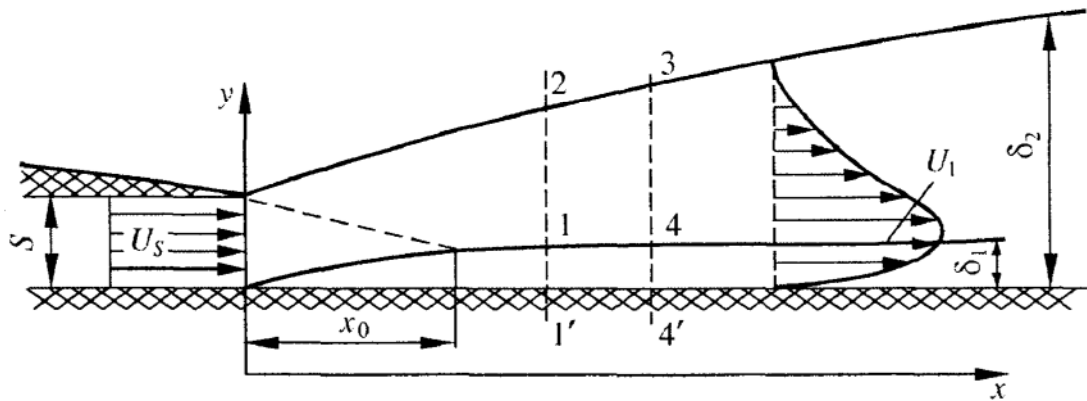


Рис. 5.6. Схема течения затопленной пристенной струи

Для элемента струи dx толщиной δ_2 уравнение импульсов имеет вид

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_2} \rho U^2 dy = -\tau_{ст}. \quad (5.28)$$

Разбиваем пределы интегрирования

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_1} \rho U^2 dy + \frac{d}{dx} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \rho U^2 dy = -\tau_{ст}. \quad (5.29)$$

Силы трения на внешней границе пограничного слоя равны нулю (при $y = \delta$, $\partial U / \partial y = 0$ и $\tau = 0$), для контура 1–2–3–4 можно записать следующее уравнение импульсов:

$$\frac{d}{dx} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \rho U^2 dy + U_1 \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_1} \rho U dy = 0, \quad (5.30)$$

где U_1 – скорость на внешней границе пристенного пограничного слоя. Производная во втором члене (5.30) есть масса, проходящая через сечение 1–4. Изменение массы от сечения 1–1' до сечения 4–4', т. е. на расстоянии dx , происходит только за счет добавки массы, которая проходит через сечение 1–4. Из уравнения (5.30) следует, что

$$\frac{d}{dx} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \rho U^2 dy = -U_1 \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_1} \rho U dy. \quad (5.31)$$

Это уравнение связывает изменение импульса во внешней части струи с импульсом, вносимым в пристенный пограничный слой присоединяемой к нему массой жидкости из области $y > \delta_1$.

С учетом (5.31) уравнение (5.29) имеет вид

$$U_1 \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_1} \rho U dy - \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_1} \rho U^2 dy = -\tau_{ст}. \quad (5.32)$$

Введем величины, характерные для пристенного пограничного слоя δ^{**} и δ^* :

$$\delta^* = \int_0^{\delta_1} \left(1 - \frac{\rho U}{\rho_1 U_1} \right) dy, \quad \delta^{**} = \int_0^{\delta_1} \frac{\rho U}{\rho_1 U_1} \left(1 - \frac{U}{U_1} \right) dy.$$

Тогда уравнение (5.32) приводится к виду

$$\frac{d}{dx} \rho_1 U_1^2 \delta^{**} + \rho_1 U_1 (\delta^* - \delta_1) \frac{dU_1}{dx} = \tau_{ст}, \quad (5.33)$$

или

$$\frac{d \text{Re}^{**}}{d\bar{x}} + \left(1 + H - \frac{\delta_1}{\delta^{**}} \right) \frac{\text{Re}^{**}}{\bar{U}_1} \frac{d\bar{U}_1}{d\bar{x}} = \frac{c_{f1}}{2} \text{Re}_S \bar{U}_1. \quad (5.34)$$

Здесь $\text{Re}^{**} = U_1 \delta^{**} / \nu_0$, $\bar{x} = x / S$, $\bar{U}_1 = U_1 / U_S$,

$$c_{f1} / 2 = \tau_{ст} / \rho_1 U_1^2, \quad \text{Re}_S = U_S S / \nu_1, \quad H = \delta^* / \delta^{**}.$$

Уравнение (5.34) отличается от обычного уравнения импульсов тем, что помимо формпараметра H содержит в себе еще отношение толщины пограничного слоя к толщине потери импульса δ_1 / δ^{**} . Кроме того, следует обратить внимание на то, что наличие этих формпараметров и величины dU_1 / dx в данном случае не связано с градиентом давления, который в дозвуковой затопленной струе практически равен нулю.

При степенном распределении скоростей в пристенном пограничном слое по закону степени $n = 1/7$

$$C_1 = 1 + H - \frac{\delta_1}{\delta^{**}} = 1 + (1 + 2n) - \frac{(1 + n)(1 + 2n)}{n} = -8. \quad (5.35)$$

Уравнение (5.34) можно получить также, интегрируя уравнение движения пограничного слоя по оси y от $y=0$ до $y=\delta_1$:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad (5.36)$$

учитывая уравнение неразрывности

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (5.37)$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} y=0 \quad U=V=0 \quad \tau=\tau_{\text{ст}}, \\ y=\delta_1 \quad U=U_1=f(x) \quad \tau=0. \end{aligned}$$

Полагаем, что законы трения и теплообмена сохраняют консервативность и в рассматриваемом случае течения. Тогда для квази-изотермического течения несжимаемого газа уравнение (5.34) с учетом закона трения запишется в виде

$$\frac{d \text{Re}^{**}}{d\bar{x}} + C_1 \frac{\text{Re}^{**}}{\bar{U}_1} \frac{d\bar{U}_1}{d\bar{x}} = \frac{A}{\text{Re}^{**m}} \bar{U}_1 \text{Re}_s \quad (5.38)$$

(для $n=1/7$: $A=0,0128$, $m=0,25$, $C_1=-8$).

Поскольку толщина пристенного пограничного слоя во много раз меньше толщины струи $\delta_1 \ll \delta_2$ (Г.Н. Абрамович), закон изменения максимальной скорости в пристенной струе можно принять таким же, как и в свободной струе с начальным сечением $2S$ (скорость на стенке при отсутствии трения):

$$\bar{U}_1 = C_2 \bar{x}^a \approx 3,8 \bar{x}^{-0,5}. \quad (5.39)$$

Уравнение (5.39) хорошо подтверждено в опытах Майерса, Шауэра, Юстиса и Сигаллы.

Уравнение (5.38) – линейное дифференциальное уравнение типа Бернулли. Интегрируя его от $\bar{x}_0$ до $\bar{x}$ при условии $\bar{x} > \bar{x}_0$, имеем

$$\text{Re}^{**} \approx \left[\frac{A(m+1)C_2 \text{Re}_s \bar{x}^{a+1}}{aC_1(m+1) + a+1} \right]^{\frac{1}{m+1}}. \quad (5.40)$$

Подставляя (5.40) в степенной закон трения, имеем:

– по скорости U_1

$$c_{f_1}/2 = \tau_{\text{ст}}/\rho_1 U_1^2 = 0,0315/\text{Re}_S^{0,2} \bar{x}^{0,1}, \quad (5.41)$$

$$c_{f_1} = 0,0825(U_1 x/\nu)^{-0,2}; \quad (5.42)$$

– по скорости U_S

$$c_{f_2}/2 = \tau_{\text{ст}}/\rho_1 U_S^2 = 0,457/\text{Re}_S^{0,2} \bar{x}^{1,1}. \quad (5.43)$$

На начальном участке:

$$\frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho_s U_S^2} = 0,029 \left(\frac{\rho_s U_S x}{\mu_s} \right)^{-0,2}. \quad (5.44)$$

Полагая для турбулентного потока подобие

$$\text{St}_1 = (c_{f_1}/2) \text{Pr}^{-0,6}, \quad (5.45)$$

находим коэффициенты теплообмена:

а) для затопленной струи, распространяющейся вдоль поверхности в пространстве, затопленном покоящейся жидкостью:

$$\text{St}_2 = \alpha/c_p \rho U_S = 0,12 \text{Re}_S^{-0,2} (\bar{x} \text{Pr})^{-0,6}, \quad (5.46)$$

$$\text{Nu}_x = \alpha x/\lambda = 0,12(U_S x/\nu)^{0,8} \bar{x}^{-0,4} \text{Pr}^{0,4}; \quad (5.47)$$

б) при наличии слабого спутного потока

$$3 < U_S/U_0 < 9 \quad \text{St}_2 = 0,113/\text{Re}_S^{0,2} \bar{x}^{0,56} \text{Pr}^{0,6}. \quad (5.48)$$

Сопоставление формул (5.46), (5.48), (5.43) с опытами показано на рис. 5.7 и 5.8.

Напомним, что при обтекании потоком пластины коэффициент теплообмена определяется по формуле

$$\text{St} = 0,029 \text{Re}_x^{-0,2} \text{Pr}^{-0,6}. \quad (5.49)$$

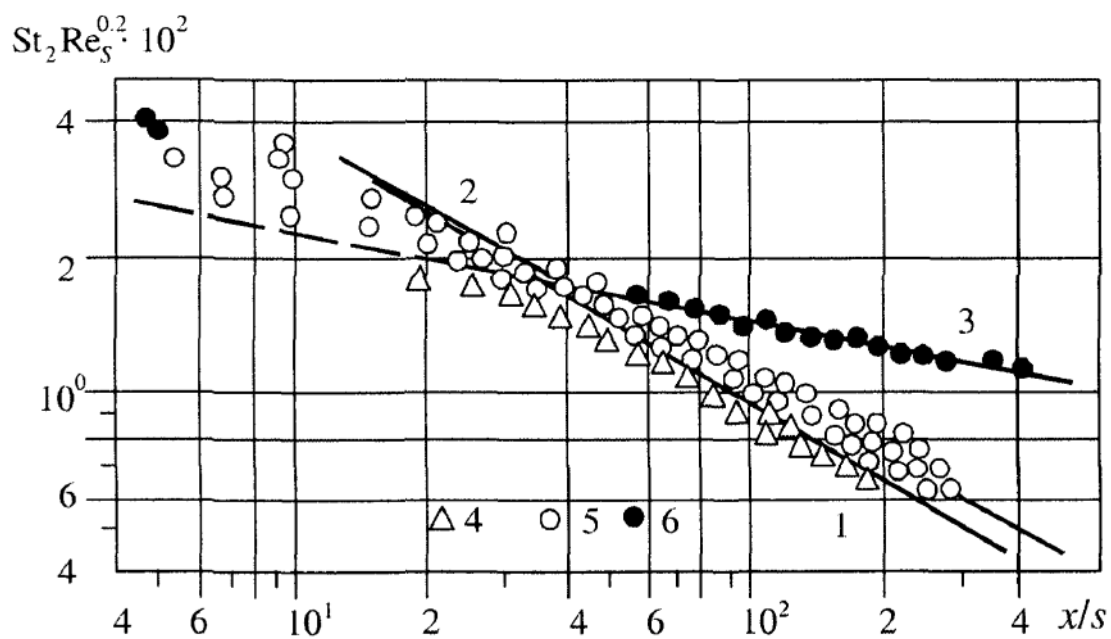


Рис. 5.7. Теплообмен в пристенной струе:
1 – расчет по (5.46), 2 – (5.48), 3 – (5.49), 4 – 6 – опыты

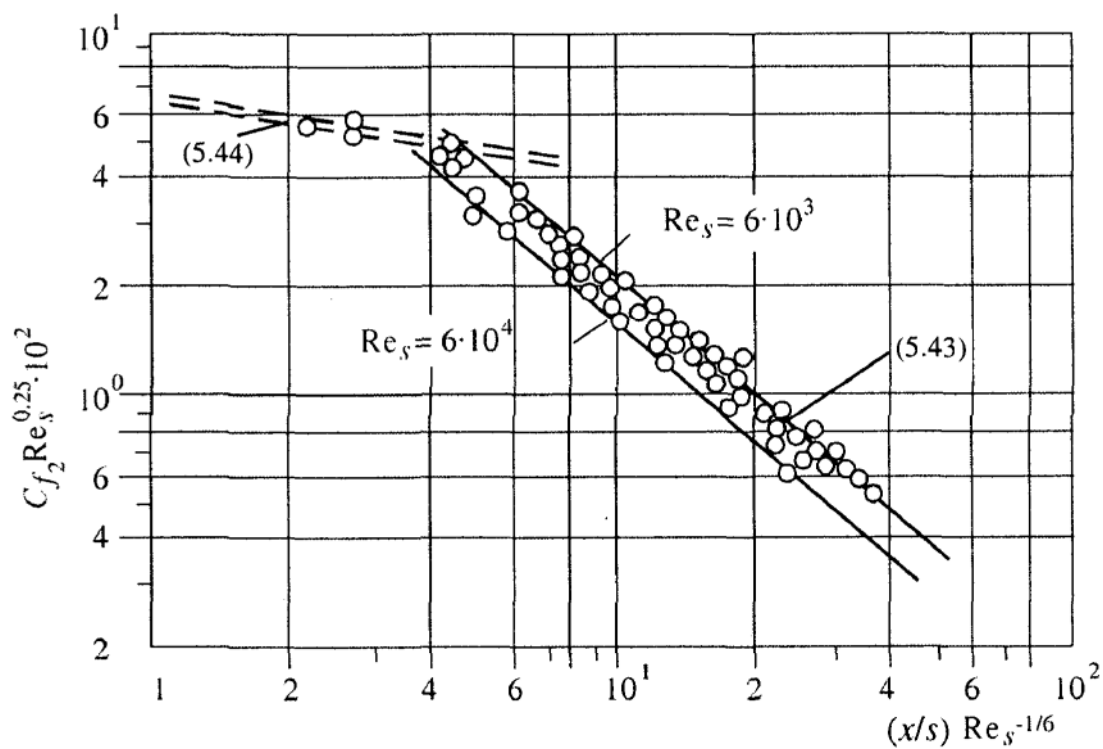


Рис. 5.8. Коэффициент трения в затопленной пристенной струе.
Сопоставление с опытами Майерса

5.4. ГАЗОВАЯ ЗАВЕСА С ПЕРЕМЕННЫМИ ФИЗИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

Рассмотрим процессы турбулентного тепломассообмена в условиях газовой завесы при воздействии поперечного потока вещества на стенке, неизотермичности, неоднородности состава газа, сжимаемости. Теоретический анализ будет основан на использовании асимптотической теории турбулентного пограничного слоя С.С. Кутателадзе и А.И. Леонтьева.

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ ТЕПЛООБМЕНА

В турбулентном ядре пограничного слоя плотность теплового потока в соответствии с формулой Прандтля можно выразить следующим образом:

$$q = \rho l \frac{\partial U}{\partial y} l_T \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (5.50)$$

где U , h – скорость и энтальпия в рассматриваемой точке пограничного слоя; l и l_T – длина гидродинамического и теплового пути смешения. Считаем, что влияние пульсации плотности на перенос количества движения и теплоты отсутствует ($\beta = \beta_T = 1$).

При течении газов, когда подобны граничные условия и $Pr \approx 1$, можно принять также подобие профилей скоростей и полных энтальпий. Как мы показали ранее, при наличии газовой завесы условие подобия выполняется, если профили относительных энтальпий (температур) строить с учетом их адиабатических значений (т. е. значений в рассматриваемой точке пограничного слоя в условиях завесы на адиабатической стенке):

$$(h - h^*) / (h_{ст} - h_{ст}^*) = 1 - \omega. \quad (5.51)$$

Здесь $h_{ст}$ и $h_{ст}^*$ – теплосодержание газа на стенке при наличии теплообмена ($q_{ст} \neq 0$) и без него ($q_{ст} = 0$); h и h^* – теплосодержание газа в рассматриваемой точке пограничного слоя при наличии газовой завесы на неадиабатической и адиабатической стенках.

Условие (5.51) подтверждается опытными данными при $c_p = \text{const}$. При заградительном охлаждении адиабатической стенки, когда $(\partial h / \partial y)_{ст} = 0$ вследствие турбулентного перемешивания происходит выравнивание энтальпий внутри пограничного слоя. При этом наибольшая интенсивность турбулентного перемешивания

наблюдается в пристенной области, где градиент скорости $\partial U / \partial y$ имеет максимальное значение. Поэтому деформация профиля энтальпий происходит таким образом, что область с $\partial h^* / \partial y \approx 0$ интенсивно размывается от стенки в глубь пограничного слоя и увеличивается зона с $h^* \approx h_{\text{ст}}^*$. Этот процесс выравнивания энтальпии в окрестности адиабатической поверхности символически можно записать:

$$\text{при } x \rightarrow \infty \quad h^* \rightarrow h_{\text{ст}}^*. \quad (5.52)$$

Если воспользоваться этим допущением, подобие профилей скоростей и энтальпий (5.51) будет иметь вид

$$(h - h_{\text{ст}}^*) / (h_{\text{ст}} - h_{\text{ст}}^*) = 1 - \omega. \quad (5.53)$$

Проведем преобразования выражения для турбулентного потока тепла (5.50) аналогично тому, как это было сделано С.С. Кутателадзе и А.И. Леонтьевым для обычного пограничного слоя. С учетом подобия скоростей и энтальпий (5.53) получаем следующее соотношение, справедливое и при наличии газовой завесы в турбулентном пограничном слое:

$$\int_{\omega_1}^1 \sqrt{\frac{1}{\Psi} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\tilde{q}_0}{\tilde{q}}} d\omega = \int_{\xi_1}^1 \sqrt{\frac{St_0 \tilde{q}_0}{\tilde{l}}} d\xi. \quad (5.54)$$

Здесь ρ , ρ_0 – плотность газа в рассматриваемой точке пограничного слоя и в ядре потока; $\tilde{q} = q / q_{\text{ст}}$, $\tilde{q}_0 = q_0 / q_{0_{\text{ст}}}$ – относительная плотность теплового потока в реальных и «стандартных» условиях течения; $\Psi = St / St_0$ – относительная величина коэффициента тепломассообмена; $St = q_{\text{ст}} / \rho_0 U_0 (h_{\text{ст}}^* - h_{\text{ст}})$ – число Стентона, определенное по $h_{\text{ст}}^*$. «Стандартные» условия – турбулентный пограничный слой с постоянными физическими свойствами на гладкой непроницаемой поверхности. Индекс «1» относится к значениям величин на границе ламинарного подслоя. При $Re \rightarrow \infty$ происходит вырождение вязкого подслоя:

$$\xi_1 \rightarrow 0, \quad \omega_1 \rightarrow 0. \quad (5.55)$$

В пристенной области длина пути смешения консервативна относительно возмущающих факторов, т. е. можно принять $\tilde{l} = \tilde{l}_0$.

В таком случае

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{\Psi} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\tilde{q}_0}{\tilde{q}}} d\omega = \int_0^1 \sqrt{\frac{St_0 \tilde{q}_0}{\tilde{l}}} d\xi. \quad (5.56)$$

Правая часть (5.56) характеризует стандартный пограничный слой, представляет постоянную величину, не зависящую от возмущающих факторов. Рассматривая (5.56) в стандартных условиях ($\Psi = 1$, $\tilde{q} = \tilde{q}_0$, $\rho = \text{const}$), получаем

$$\Psi = \left(\int_0^1 \sqrt{\frac{\tilde{q}_0}{\tilde{q}} \frac{\rho}{\rho_0}} d\omega \right)^2, \quad (5.57)$$

т. е. основной предельный интеграл теории сохраняет прежний вид и в условиях завесы.

Для определения относительных законов теплообмена из (5.57) при воздействии различных возмущающих факторов необходимо знать распределение теплового потока и плотности газа по сечению пограничного слоя.

Аппроксимация профиля тепловых потоков при наличии газовой завесы сохраняет тот же вид, что и при отсутствии завесы

$$\tilde{q} / \tilde{q}_0 = 1 + b_1^* \omega. \quad (5.58)$$

Здесь $b_1^* = j_{\text{ст}} / \rho_0 U_0 St$.

Распределение плотности по сечению пограничного слоя определяем из уравнения состояния идеального газа

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{M}{M_0} \frac{T_0}{T} \quad (5.59)$$

и условия подобия профилей энтальпий и массовых концентраций

$$\omega = \frac{h - h_{\text{ст}}}{h_{\text{ст}}^* - h_{\text{ст}}} = \frac{C_i - C_{i\text{ст}}}{C_{i\text{ст}}^* - C_{i\text{ст}}}. \quad (5.60)$$

Здесь M и M_0 – молекулярная масса газа в рассматриваемой точке пограничного слоя и в невозмущенном потоке; C_i – массовая концентрация i -й составляющей газовой смеси.

Распределение плотности по сечению пограничного слоя должно зависеть от параметров газовой завесы, так как в (5.60) входят

величины $h_{\text{ст}}^*$ и $C_{\text{ст}}^*$, характеризующие эффективность завесы на адиабатической стенке.

Температура смеси газов в рассматриваемой точке

$$T = \frac{h}{c_p} = \frac{h_{\text{ст}} + (h_{\text{ст}}^* - h_{\text{ст}})\omega}{c_p}. \quad (5.61)$$

Теплоемкость и молекулярная масса смеси газов определяются уравнениями

$$c_p = \sum_1^n c_{pi} C_i, \quad (5.62)$$

$$\frac{1}{M} = \sum_1^n \frac{C_i}{M_i}. \quad (5.63)$$

Если пренебречь зависимостью теплоемкости от температуры, то из (5.62) и (5.63) с учетом (5.60) получим

$$c_p = c_{p\text{ст}} + (c_{p\text{ст}}^* - c_{p\text{ст}})\omega, \quad (5.64)$$

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{M_{\text{ст}}} + \left(\frac{1}{M_{\text{ст}}^*} - \frac{1}{M_{\text{ст}}} \right) \omega. \quad (5.65)$$

Здесь $c_{p\text{ст}}^*$ и $M_{\text{ст}}^*$ – теплоемкость и молекулярная масса смеси газов на адиабатической стенке.

Подставляя в (5.59) выражения (5.61), (5.64) и (5.65), получаем распределение плотности по сечению пограничного слоя

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{M_{\text{ст}}^*}{M_0} \frac{T_0}{T_{\text{ст}}^*} \frac{[\psi_2 + (1 - \psi_2)\omega]}{[\psi_1 + (1 - \psi_1)\omega][\psi_3 + (1 - \psi_3)\omega]}. \quad (5.66)$$

Здесь $\psi_1 = h_{\text{ст}} / h_{\text{ст}}^*$, $\psi_2 = c_{p\text{ст}} / c_{p\text{ст}}^*$, $\psi_3 = M_{\text{ст}}^* / M_{\text{ст}}$.

Для газов одинаковой атомности справедливо соотношение $c_p M = \text{const}$ или

$$c_{p\text{ст}} / c_{p\text{ст}}^* = M_{\text{ст}}^* / M_{\text{ст}}, \quad \psi_2 = \psi_3. \quad (5.67)$$

Тогда распределение плотности будет

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{M_{\text{ст}}^*}{M_0} \frac{T_0}{T_{\text{ст}}^*} \frac{1}{\psi_1 + (1 - \psi_1)\omega}. \quad (5.68)$$

Основной предельный интеграл (5.57) после подстановки в него (5.58) и (5.68) имеет вид

$$\Psi = \frac{M_{\text{ст}}^*}{M_0} \frac{T_0}{T_{\text{ст}}^*} \left(\int_0^1 \frac{d\omega}{\sqrt{[\psi_1 + (1-\psi_1)\omega](1+b_1^*\omega)}} \right)^2. \quad (5.69)$$

Интегрируя (5.69) при $b_1^* = 0$, получаем влияние неизотермичности на тепломассообмен при наличии газовой завесы на **непроницаемой стенке**

$$\Psi_T = \frac{M_{\text{ст}}^*}{M_0} \frac{T_0}{T_{\text{ст}}^*} \left(\frac{2}{\sqrt{\psi_1 + 1}} \right)^2. \quad (5.70)$$

Формула (5.70) при отсутствии завесы ($h_{\text{ст}}^* \rightarrow h_0$, $M_{\text{ст}}^* \rightarrow M_0$) переходит в известную формулу С.С. Кутателадзе. Дополнительный множитель в (5.70) позволяет учесть наличие газовой завесы при неизотермическом обтекании непроницаемой поверхности.

Для неизотермического обтекания **проницаемой** поверхности при наличии завесы получаются следующие относительные законы тепломассообмена:

– при $\psi_1 < 1$

$$\Psi = \frac{M_{\text{ст}}^*}{M_0} \frac{T_0}{T_{\text{ст}}^*} \frac{4}{b_1^*(1-\psi_1)} \left[\ln \frac{\sqrt{(1-\psi_1)(1+b_1^*)} + \sqrt{b_1^*}}{\sqrt{(1-\psi_1)} + \sqrt{b_1^*\psi_1}} \right]^2; \quad (5.71)$$

– при $\psi_1 > 1$

$$\Psi = \frac{M_{\text{ст}}^*}{M_0} \frac{T_0}{T_{\text{ст}}^*} \frac{4}{b_1^*(\psi_1-1)} \left[\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(\psi_1-1)(1+b_1^*)}{b_1^*}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\psi_1-1}{b_1^*\psi_1}} \right]^2. \quad (5.72)$$

Из предельного соотношения (5.69) можно получить критическое значение фактора проницаемости $b_{\text{кр}}^* = j_{\text{ст}} / \rho_0 U_0 St_0$, если положить $\Psi = 0$:

$$b_{\text{кр}}^* = \frac{M_{\text{ст}}^*}{M_0} \frac{T_0}{T_{\text{ст}}^*} \left(\int_0^1 \frac{d\omega}{\sqrt{[\psi_1 + (1-\psi_1)\omega]\omega}} \right)^2. \quad (5.73)$$

После интегрирования (5.73) имеем:

– при $\psi_1 < 1$

$$b_{кр}^* = \frac{M_{ст}^*}{M_0} \frac{T_0}{T_{ст}^*} \frac{1}{1-\psi_1} \left(\ln \frac{1+\sqrt{1-\psi_1}}{1-\sqrt{1-\psi_1}} \right)^2; \quad (5.74)$$

– при $\psi_1 > 1$

$$b_{кр}^* = \frac{M_{ст}^*}{M_0} \frac{T_0}{T_{ст}^*} \frac{1}{\psi_1-1} \left(\arccos \frac{2-\psi_1}{\psi_1} \right)^2. \quad (5.75)$$

Как показывают расчеты, относительные законы тепломассообмена (5.71) и (5.72) могут быть аппроксимированы простой комбинацией формул

$$\Psi = \frac{M_{ст}^*}{M_0} \frac{T_0}{T_{ст}^*} \left(\frac{2}{\sqrt{\psi_1} + 1} \right)^2 \left(1 - \frac{b}{b_{кр}^*} \right)^2, \quad (5.76)$$

где $b_{кр}^*$ определяется по (5.74) и (5.75).

Таким образом, все предельные отношения отличаются от полученных ранее в работах С.С. Кутателадзе и А.И. Леонтьева множителем $\frac{M_{ст}^*}{M_0} \frac{T_0}{T_{ст}^*}$ и определением фактора неизотермичности

$\psi_1 = h_{ст} / h_{ст}^*$, что и позволяет учесть влияние завесы на относительные законы тепломассообмена и $b_{кр}$.

Проверка полученного закона тепломассообмена на **проницаемой** стенке в условиях завесы осуществлена в опытах при ступенчатом вдуве воздуха и гелия. Результаты показаны на рис. 5.9.

$$\text{При вдуве гелия } \frac{M_{ст}^*}{M_0} \frac{T_0}{T_{ст}^*} = 0,35 \dots 0,8, \quad \frac{T_{ст}}{T_0} = 0,9 \dots 0,95.$$

Проверка влияния **неизотермичности** на непроницаемой стенке (т. е. справедливость уравнения (5.70)) была выполнена в опытах по выгоранию графитовой поверхности с газовой завесой как за тангенциальной щелью, так и за участком пористого вдува азота, аргона и гелия. Результаты таких исследований демонстрируются на рис. 5.10.

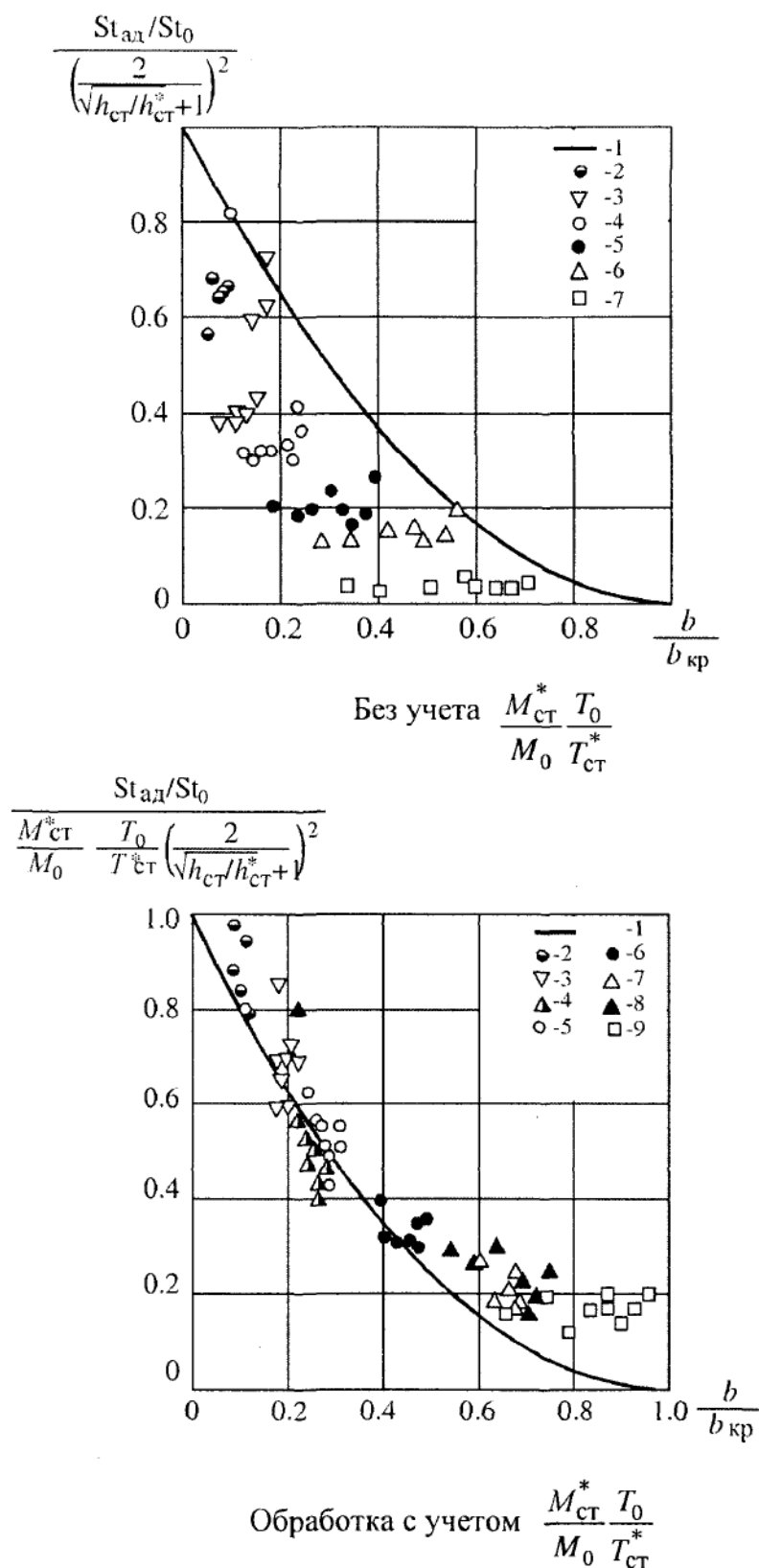


Рис. 5.9. Теплообмен на проницаемой поверхности в условиях завесы при ступенчатом вдуве гелия (первая ступень) и воздуха (вторая ступень)

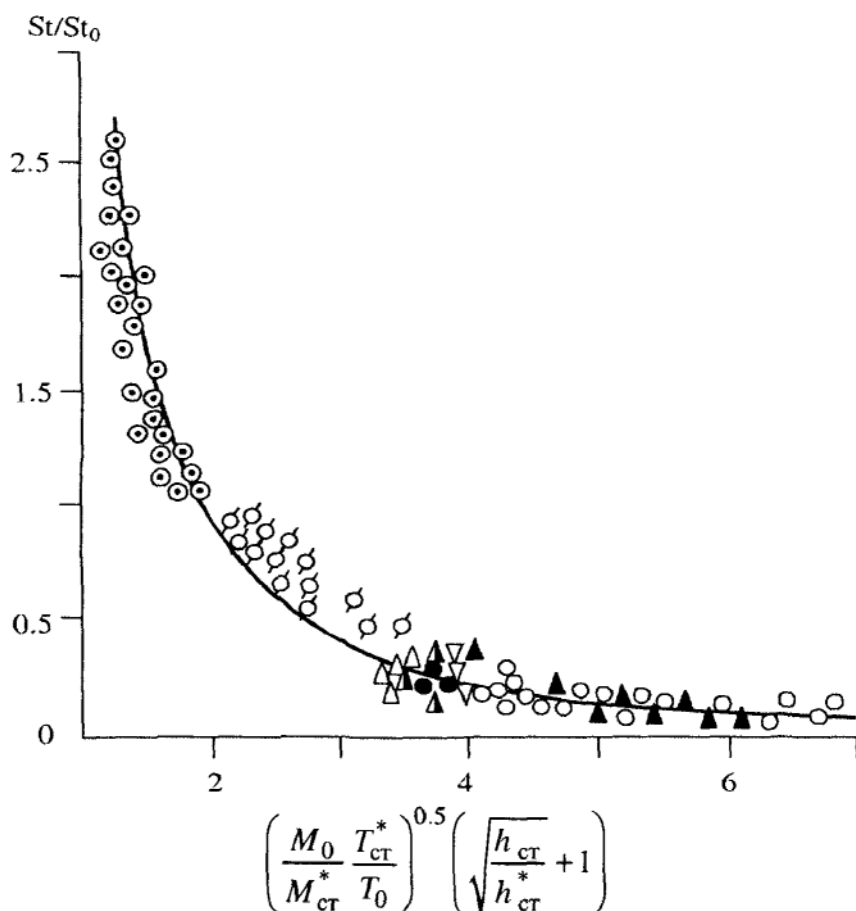


Рис. 5.10. Влияние неизотермичности на тепломассообмен в условиях завесы. Сопоставление расчета с экспериментом

Видно, что теоретическая формула (5.70) удовлетворительно согласуется с экспериментом во всем исследованном диапазоне изменения фактора неизотермичности ψ_1 , $T_{ст}^*/T_0$, и неоднородности вдува газа $M_0/M_{ст}^*$.

5.5. ЗАВЕСА В ГРАДИЕНТНЫХ ПОТОКАХ И СОПЛАХ

Тепловой пограничный слой по сравнению с динамическим консервативен по отношению к продольному градиенту давления. С увеличением положительного градиента давления (диффузорные течения) профили скорости сильно деформируются, снижаются коэффициенты трения. Профили же температур почти не изменяются, и коэффициенты теплообмена не зависят от величины градиента давления вплоть до зоны отрыва, если опыты обрабатывают по локальным параметрам потока.

Отрицательный градиент давления также практически не влияет на закон теплообмена до значения параметра ускорения потока

$K = (\mu_0 / \rho_0 U_0^2) / (dU_0 / dx) < 2,5 \cdot 10^{-0,6}$, характеризующего возможное начало его ламинаризации.

Рассмотрим газовую завесу на плоской теплоизолированной стенке, когда скорость в ядре потока U_0 является функцией продольной координаты (рис. 5.11).

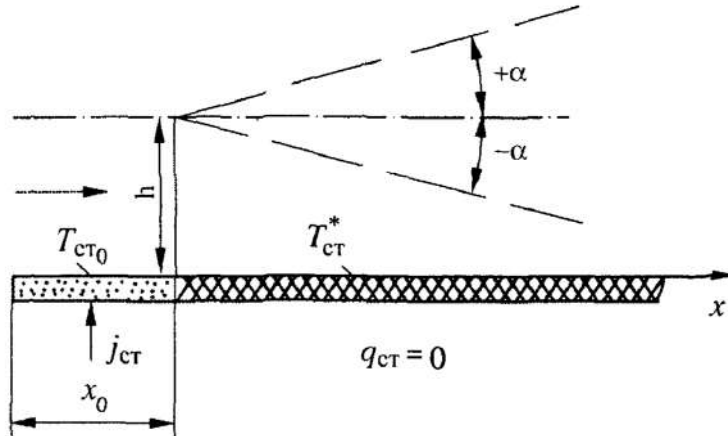


Рис. 5.11. Схема завесы в градиентном потоке

Из уравнения энергии на теплоизолированной части стенки

$$\frac{d \text{Re}_T^{**}}{d\bar{x}} + \frac{\text{Re}_T^{**}}{\Delta T} \frac{d\Delta T}{d\bar{x}} = 0 \quad (5.77)$$

получаем следующее соотношение для эффективности тепловой завесы:

$$\Theta = \frac{T_0 - T_{ст}^*}{T_0 - T_{ст0}} = \frac{\text{Re}_{T_0}^{**}}{\text{Re}_T^{**}}. \quad (5.78)$$

В случае безградиентного течения для определения коэффициента β , учитывающего деформацию профиля температур на адиабатической стенке, использовалась толщина потери импульса. При градиентном течении она зависит от величины градиента давления и поэтому коэффициент β удобнее выразить через толщину потери энергии $(\delta_T^{**})_{T_{ст} = \text{const}}$:

$$\beta = \frac{\delta_T^{**}}{(\delta_T^{**})_{T_{ст} = \text{const}}} \rightarrow \frac{\int_0^1 \omega d\xi_T}{\int_0^1 \omega(1 - \vartheta) d\xi_T}, \quad (5.79)$$

где $\omega = U / U_0$, $\vartheta = (T - T_{ст}) / (T_0 - T_{ст})$.

При степенных профилях скорости $\omega = \xi^{n_1}$ и температуры $\vartheta = \xi_T^{n_2}$ и при условии $\delta \approx \delta_T$ из (5.79) получаем

$$\beta_{\max} \rightarrow \frac{n_1 + n_2 + 1}{n_2}. \quad (5.80)$$

Для безградиентного и конфузорного течения (при $n_1 = n_2 = 1/7$) $\beta_{\max} = 9$, а для предотрывного диффузорного ($n_1 = 0,5$, $n_2 = 1/7$) $\beta_{\max} = 11,5$.

Из интегрального соотношения энергии пограничного слоя при $T_{\text{ст}} = \text{const}$

$$\frac{d \text{Re}_T^{**}}{d\bar{x}} = \text{Re}_{x_0} A \text{Re}_T^{**m} \text{Pr}^{-n} \quad (5.81)$$

получаем следующее выражение:

$$\left(\text{Re}_T^{**} \right)_{T_{\text{ст}} = \text{const}} = \left[\text{Re}_{T_0}^{**m+1} + \frac{A(m+1)}{\text{Pr}^n} \text{Re}_{x_0} \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} \bar{U}_0 d\bar{x} \right]^{\frac{1}{m+1}}, \quad (5.82)$$

где $\text{Re}_{x_0} = \rho_{01} U_{01} x_0 / \mu_0$, $\bar{U}_0 = U_0 / U_{01}$.

Тогда для течения с переменной скоростью на внешней границе пограничного слоя из (5.77), (5.79) и (5.82) можно получить интерполяционную формулу для эффективности завесы

$$\Theta = \left[1 + 0,016 \beta^{1,25} \left(\text{Re}_{x_0} / \text{Re}_{T_0}^{**1,25} \right) \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} \bar{U}_0 d\bar{x} \right]^{-0,8}. \quad (5.83)$$

Здесь $\text{Re}_{T_0}^{**}$ – число Рейнольдса, построенное по параметрам в конце участка охлаждения, и зависит от способа организации завесы.

При течении в каналах, образованных плоскими стенками, скорость на внешней границе пограничного слоя изменяется по закону

$$\bar{U}_0 = 1 / \left(1 + \frac{\Delta x}{h} \text{tg} \alpha \right), \quad (5.84)$$

где h – начальная высота канала; α – угол наклона стенки. Тогда формула (5.83) для эффективности завесы в таких каналах для кон-

фузорного течения (при $\beta = 9$) имеет вид

$$\Theta = (1 + 0,24 A_1)^{-0,8}, \quad (5.85)$$

где

$$A_1 = (\text{Re}_{\Delta x} / \text{Re}_{\tau_0}^{**1,25}) \frac{h}{\Delta x} \text{tg} \alpha \ln(1 + \frac{\Delta x}{h} \text{tg} \alpha). \quad (5.86)$$

Изменение эффективности газовой завесы за участком пористого вдува по длине канала для разных углов наклона стенки показано на рис. 5.12 (в первичной обработке).

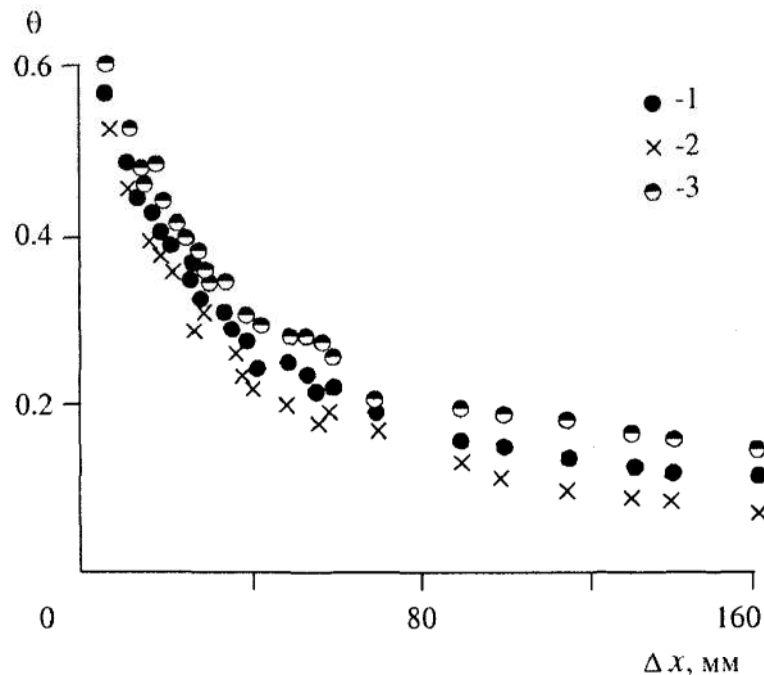


Рис. 5.12. Влияние угла наклона стенки на эффективность завесы: 1 - $\alpha = 0^\circ$, 2 - $\alpha = -15^\circ$, 3 - $\alpha = +15^\circ$

Видно, что в одинаковых условиях на входе положительный градиент давления увеличивает эффективность газовой завесы, а отрицательный – уменьшает.

Опыты при конфузорном течении в плоском канале с наклонной стенкой $\alpha = -5^\circ \dots -15^\circ$ хорошо обобщаются с учетом изменения скорости по длине и согласуются с расчетом (5.85) (рис. 5.13).

В области умеренных положительных градиентов давления будет справедлива формула (5.85), учитывающая изменение скорости вдоль поверхности. В этом случае для диффузорного предотрывного течения $\beta = 11,5$ и получаем следующее выражение для эффективности завесы:

$$\Theta = (1 + 0,33 A_1)^{-0,8}. \quad (5.87)$$

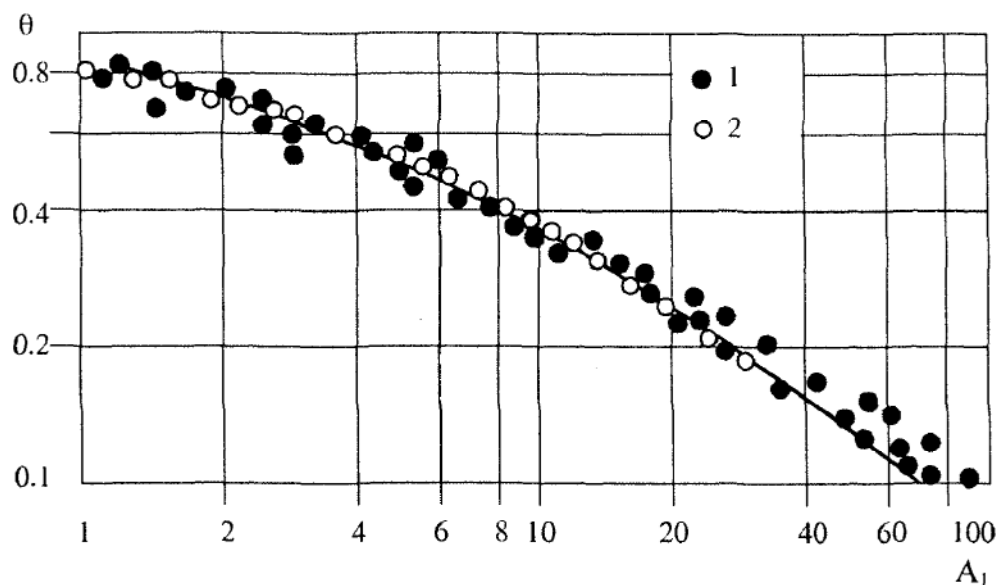


Рис. 5.13. Обобщение опытов при конфузном течении

При безотрывном течении в пограничном слое опыты удовлетворительно согласуются с (5.85) и (5.87). С увеличением угла раскрытия диффузора и интенсивном вдуве через пористый участок эффективность завесы может резко ухудшиться (см. рис. 5.14), что объясняется ростом размеров отрывной зоны вниз по потоку за задней кромкой проницаемого участка. Это подтверждают измерения профилей скоростей.

Положение точки отрыва наступает раньше при больших пористых вдувах. Увеличение же скорости тангенциального вдува повышает устойчивость течения.

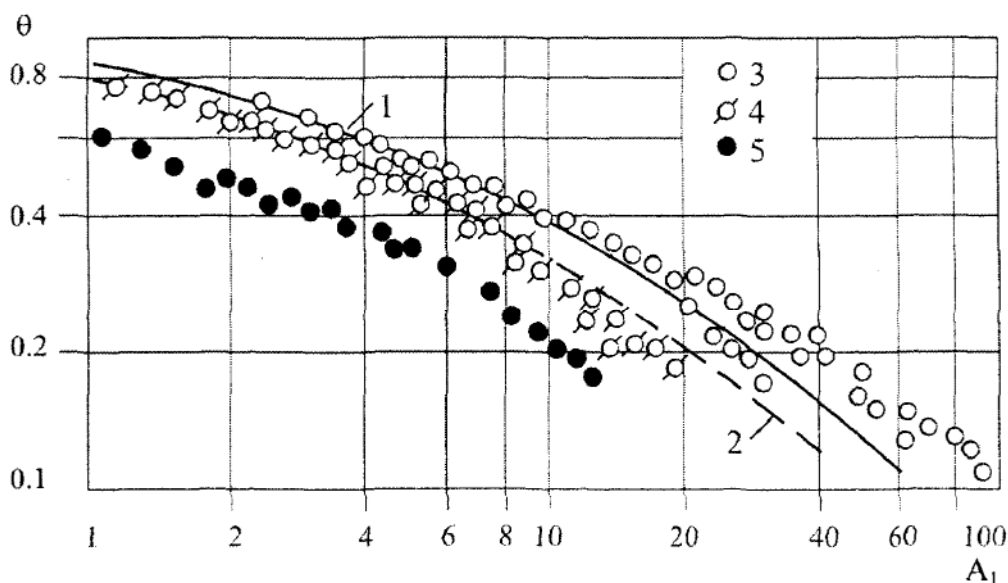


Рис. 5.14. Эффективность завесы при диффузном течении
1, 2 – расчеты по (5.85) и (5.87); 3...5 – опыты

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ЗАВЕСЫ ПРИ ТЕЧЕНИИ В СОПЛАХ

Рассмотрим заградительное охлаждение осесимметричных сопел Лавала с адиабатическими стенками (рис. 5.15). В отличие от течения в плоском канале в сопле на эффективность завесы воздействуют сильный отрицательный градиент давления, сжимаемость потока (число Маха), скачки уплотнения на нерасчетных режимах течения.

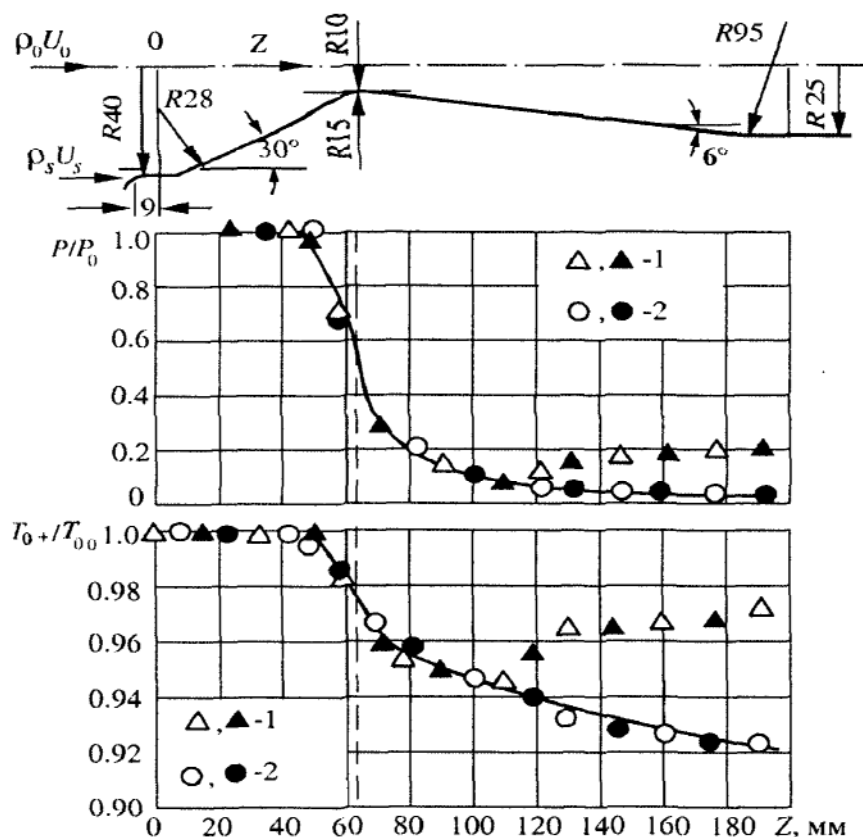


Рис. 5.15. Распределение статического давления и равновесной температуры стенки по длине сверхзвукового сопла:
1 – течение со скачками уплотнения; 2 – без скачков

Показано, что щелевой вдув воздуха в дозвуковую часть сопла не влияет на коэффициент восстановления температуры на стенке и на распределение статического давления, которые хорошо описываются теорией для одномерного изоэнтропического течения.

Равновесная температура стенки T_0^+ отличается от температуры торможения потока T_{00} вследствие диссипации энергии в пограничном слое, что учитывается коэффициентом восстановления температуры на стенке r :

$$T_0^+/T_{00} = \left(1 + r \frac{k-1}{2} M^2\right) / \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right). \quad (5.88)$$

Статическое давление соответствует расчету

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)^{-\frac{1}{k}} \left[1 - \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{F}{F_{\text{кр}}} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{-\frac{1}{k-1}} \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.89)$$

Эффективность газовой завесы в сверхзвуковом осесимметричном сопле определяется из интегрального соотношения энергии на теплоизолированной части стенки сопла ($x > x_0$)

$$\frac{d \text{Re}_T^{**}}{d\bar{x}} + \frac{\text{Re}_T^{**}}{\Delta T} \frac{d\Delta T}{d\bar{x}} + \frac{\text{Re}_T^{**}}{d} \frac{d(d)}{d\bar{x}} = 0 \quad (5.90)$$

и имеет вид

$$\Theta = \frac{T_0^+ - T_{\text{ст}}^*}{(T_0^+ - T_{\text{ст}}^*)_0} = \frac{\text{Re}_{T_0}^{**}}{\text{Re}_T^{**}} \frac{d_0}{d}, \quad (5.91)$$

где $T_0^+ = T_0 \left(1 + r \frac{k-1}{2} M^2\right)$ – равновесная температура стенки при течении без завесы.

Характерное изменение эффективности завесы по длине сопла показано на рис. 5.16. Отчетливо просматривается различный характер изменения Θ в до- и сверхзвуковой областях. Замедление падения эффективности в сверхзвуковой части объясняется влиянием сжимаемости потока, которое усиливается с ростом числа Маха по длине сопла (на выходе $M = 3,2$).

Опыты показали, что увеличение градиента скорости снижает эффективность завесы (рис. 5.17)

Получим соотношение для расчета эффективности газовой завесы в сверхзвуковом осесимметричном сопле.

В адиабатических условиях ($q_{\text{ст}} = 0$) профиль температуры в пограничном слое отличается от профиля температуры в условиях теплообмена. Это приводит к изменению толщины потери энергии и соответственно числа Re_T^{**} в (5.91). Число Re_T^{**} , построенное по толщине потери энергии на адиабатической стенке, можно получить с помощью соотношения

$$\text{Re}_T^{**} = \beta \text{Re}_{T_{\Delta T = \text{const}}}^{**}. \quad (5.92)$$

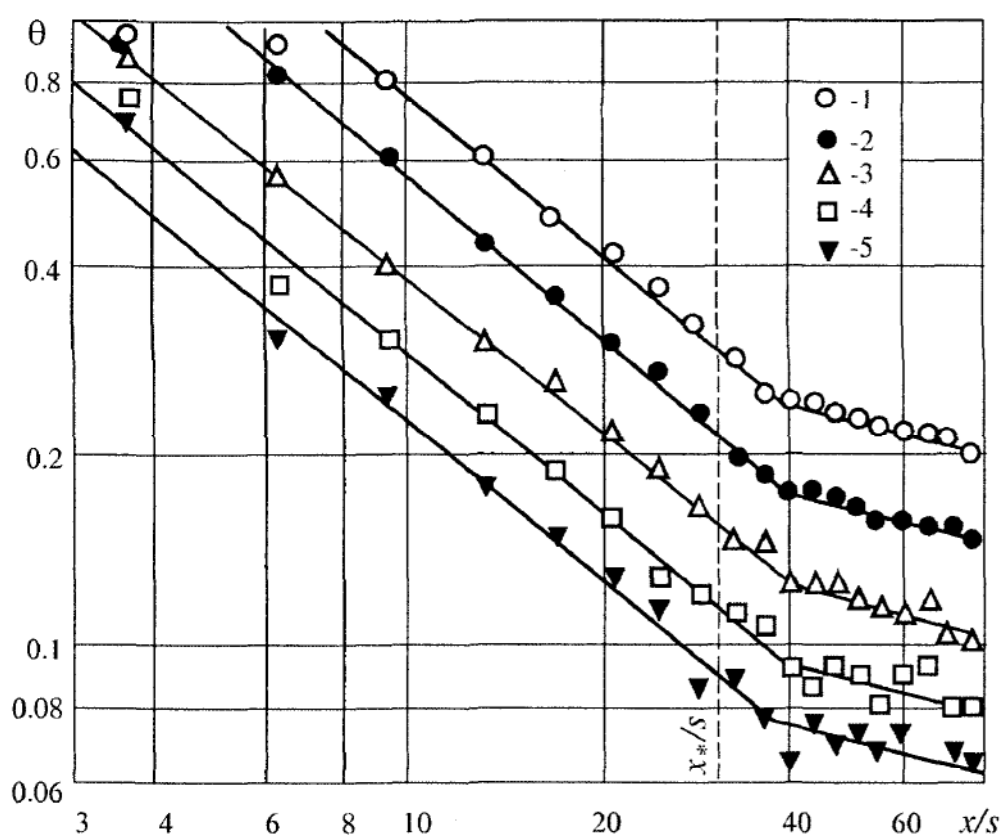


Рис. 5.16. Изменение эффективности завесы в дозвуковой и сверхзвуковой областях сопла при разных параметрах ддува m

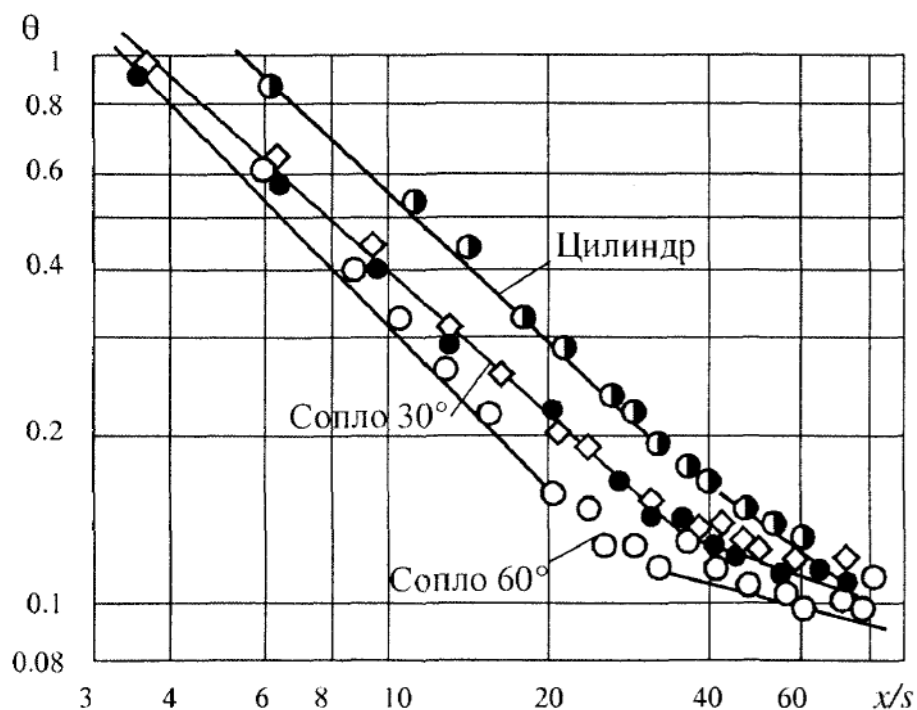


Рис. 5.17. Влияние градиента скорости на эффективность завесы в соплах. Полууглы сужения равны 0° , 30° , 60°

Число $Re_{T\Delta T=\text{const}}^{**}$ находим из решения уравнения энергии для случая, когда существует теплообмен на стенке при условии $\Delta T = \text{const}$. При этом число Стентона St в уравнении энергии определяем с учетом влияния неизотермичности и сжимаемости газа

$$St = \Psi_T \Psi_M St_0 = \Psi_T \Psi_M \frac{A}{Re_{T\Delta T=\text{const}}^{**m} Pr^n} \left(\frac{\mu_{ст}}{\mu_0} \right)^m. \quad (5.93)$$

В результате получаем интерполяционную формулу для определения числа Рейнольдса Re_T^{**} , рассчитанного по толщине потери энергии на теплоизолированной стенке сопла при течении с завесой:

$$Re_T^{**} = \left[Re_{T_0}^{**1,25} \left(\frac{d_0}{d} \right)^{1,25} + 0,016 \beta^{1,25} \left(\frac{d_{кр}}{d} \right)^{1,25} Re_{кр} \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} \Psi_T \Psi_M \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\mu_{ст}}{\mu_0} \right)^{0,25} \left(\frac{d_{кр}}{d} \right)^{0,75} d\bar{x} \right]^{0,8}. \quad (5.94)$$

На рис. 5.18 показано изменение толщины потери энергии при наличии газовой завесы. Опыты сопоставляем с расчетом (5.94) при $\beta = 9$, что соответствует условиям завесы на адиабатической стенке. Здесь же приводим расчет при $\beta = 1$ для теплообмена при $\Delta T = \text{const}$. Как видно, в адиабатических условиях толщина потери энергии нарастает значительно интенсивнее, чем в условиях теплообмена, расчет с учетом $\beta = 9$ удовлетворительно описывает эксперимент.

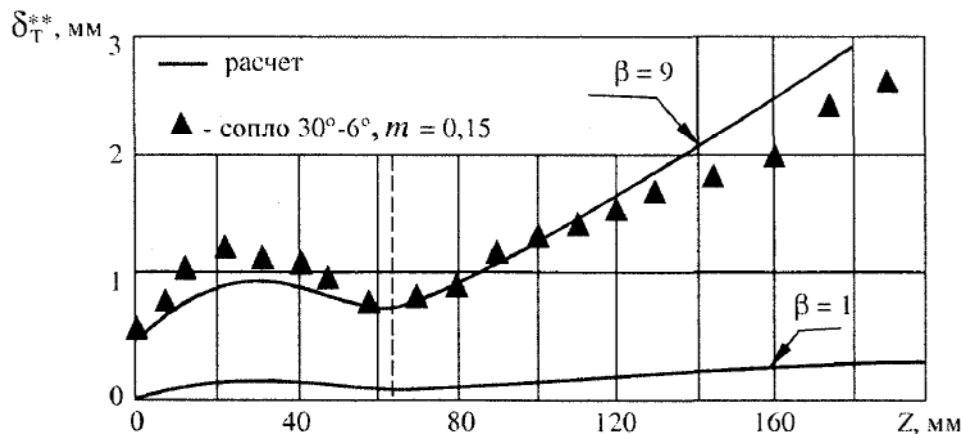


Рис. 5.18. Толщина потери энергии на адиабатической стенке сопла с завесой

Окончательное выражение для эффективности завесы на теплоизолированной стенке при осесимметричном течении в сопле получаем из соотношений (5.91) и (5.94):

$$\Theta = \left[1 + 0,25 \left(\frac{d_{кр}}{d_0} \right)^{1,25} \frac{Re_{кр}}{Re_S^{1,25}} \left(\frac{\mu_{00}}{\mu_S} \right)^{1,25} \times \right. \\ \left. \times \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} \Psi_r \Psi_M \left(\frac{\mu_{ст}}{\mu_{00}} \right)^{0,25} \left(\frac{d_{кр}}{d} \right)^{0,75} d\bar{x} \right]^{-0,8}. \quad (5.95)$$

Опыты с разными углами сужения в осесимметричных и плоском соплах удовлетворительно согласуются с (5.95). Это показано на рис. 5.19.

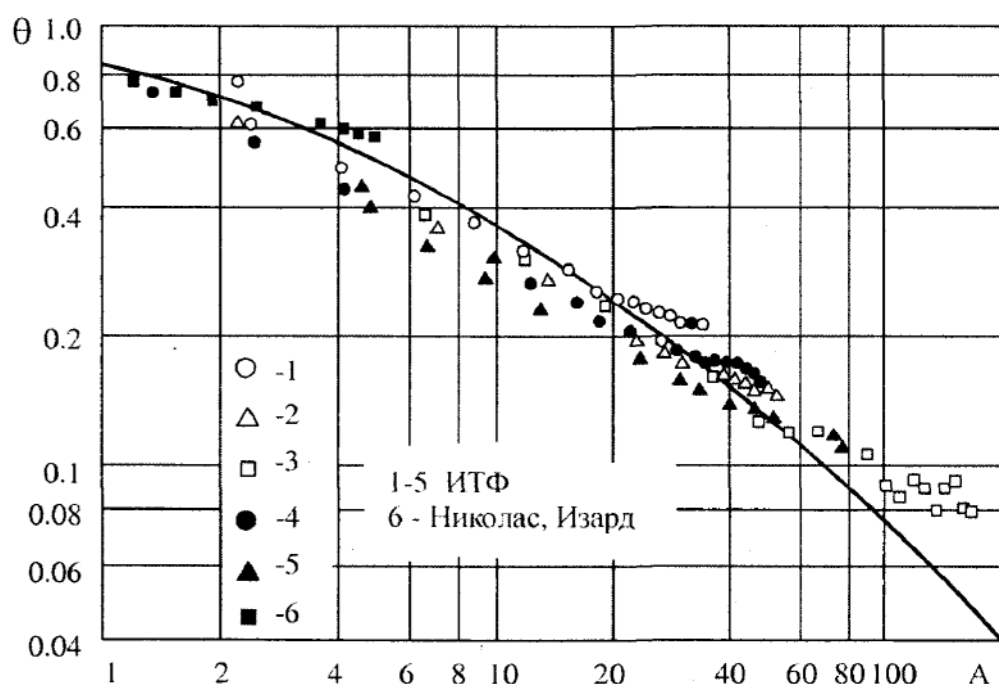


Рис. 5.19. Обобщение опытов в соплах Лавалья

Следует заметить, что использование для расчета эффективности газовой завесы в соплах Лавалья зависимости для пластины

$$\Theta = (1 + 0,25 A_0)^{-0,8}, \quad A_0 = \frac{Re_{\Delta x}}{Re_S^{1,25}} \left(\frac{\mu_{00}}{\mu_S} \right)^{1,25}, \quad (5.96)$$

$$Re_{\Delta x} = \rho_0 U_0 (x - x_0) / \mu_{00},$$

в которой значение $Re_{\Delta x}$ определяется по локальным параметрам потока (скорости U_0 и плотности ρ_0 газа в рассматриваемом сечении сопла), не позволяет получить удовлетворительного обобщения опытных данных. Наблюдается сильное расхождение (до 400 %) опытных данных с расчетом (рис. 5.20)

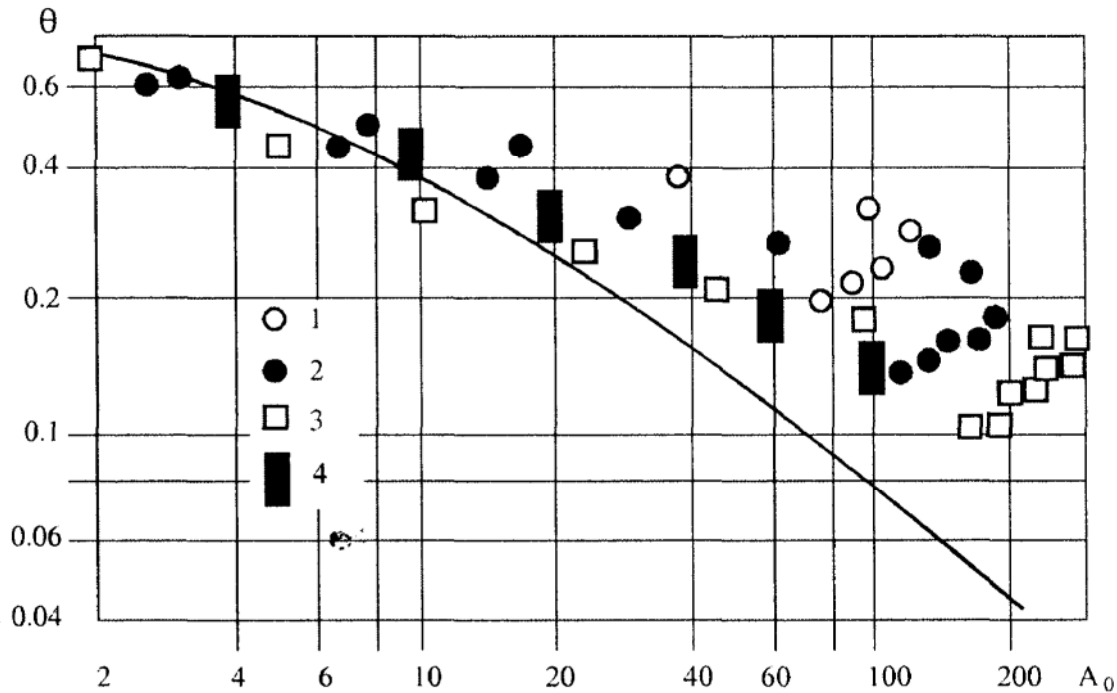


Рис. 5.20. Обработка опытов с использованием локальных значений плотности и скорости

Таким образом, в градиентных потоках эффективность завесы определяется не только начальными или текущими значениями параметров потока, но и всей предысторией. Эту предысторию можно учесть, если использовать интегральные соотношения пограничного слоя. Формула (5.95) учитывает совместное влияние на Θ параметра m , сжимаемости, градиента скорости.



Глава 6

ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ С ХИМИЧЕСКИМИ РЕАКЦИЯМИ

6.1. ТЕПЛОМАССООБМЕН НА РЕАГИРУЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

Проблема пограничного слоя с химическими реакциями представляет самостоятельный интерес. Она охватывает широкий круг явлений, начиная с различных видов горения топлив и кончая взаимодействием высокоскоростных газовых потоков с химически активными поверхностями. Большое практическое значение имеют реакции углерода с газами, поскольку графит и другие углеродсодержащие материалы широко применяются в различных отраслях современной техники. Значительная часть потребности в энергии удовлетворяется путем прямого или косвенного использования реакций углерода с газами.

В пограничном слое могут происходить как гомогенные, так и гетерогенные химические реакции. Гетерогенные – когда твердая стенка сама принимает участие в реакциях. Скорость гетерогенных реакций обусловлена двумя факторами: 1) диффузией реагирующего газа из невозмущенного потока через пограничный слой к поверхности, 2) скоростью протекания самой химической реакции (реакционной способностью).

При низких температурах скорость протекания химической реакции ниже скорости диффузии, поэтому определяющим является кинетический режим. С увеличением температуры скорость реакции возрастает и преобладающей всего процесса является скорость диффузии, что характеризует диффузионный режим реагирования. На рис. 6.1 показана зависимость интенсивности выгорания графита в потоке воздуха от температуры стенки. Видно, что при температурах до 1400 К наблюдается сильная зависимость от температуры, что характерно для кинетического режима, при $T_{ст} > 1400$ К имеет место диффузионный режим.

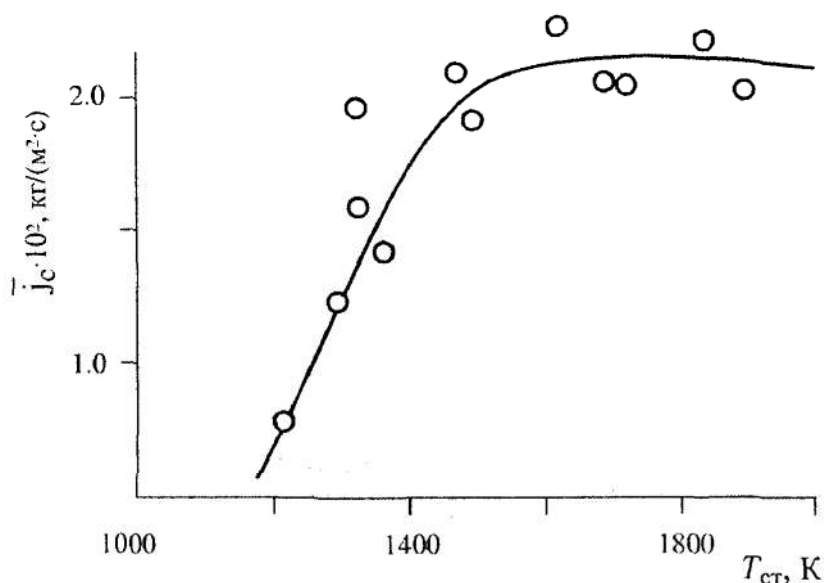


Рис. 6.1. Зависимость интенсивности выгорания графита от температуры в потоке воздуха. $U_0 \sim 90$ м/с, $T_0 \sim 290$ К

В реагирующем пограничном слое необходимо учитывать взаимосвязь процессов диффузии, теплопередачи и химических реакций. В общем случае должны быть использованы уравнения движения, энергии, диффузии и условия протекания химических реакций – уравнения химической кинетики.

В газовой смеси тепловой поток определяется как теплопроводностью, так и диффузионным потоком энтальпии

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \sum \rho V_i C_i h_i. \quad (6.1)$$

Здесь второй член – перенос энергии вследствие диффузии; ρ – плотность газовой смеси в рассматриваемой точке; C_i , V_i – массовая концентрация и скорость диффузии отдельного компонента газовой смеси; h_i – теплосодержание (энтальпия) i -го компонента

$$h_i = \int_0^T c_{p_i} dT + h_{i_0}, \quad (6.2)$$

где h_{i_0} – количество тепла, которое выделяется или поглощается при образовании i -го компонента (теплота реакции).

Уравнения диффузии многокомпонентных смесей сложны для анализа. Поэтому такую смесь заменяют эффективной бинарной смесью, в этом случае уравнения диффузии значительно упрощаются. По молекулярно-кинетической теории газов, диффузионный поток вещества зависит от концентрационной диффузии, термодиф-

фузии и бародиффузии, т. е.

$$j_i = \rho V_i C_i = -\rho C_i D_{ij} \left[\nabla \ln C_i + \frac{M_j - M_i}{M} C_j \nabla \ln P + \right. \\ \left. + \frac{M_i M_j}{C_i M^2} K_T \nabla \ln T \right]. \quad (6.3)$$

Здесь $K_T = D_T/D_{ij}$ – термодиффузионное отношение; C_i, C_j – концентрации компонентов; M_i, M_j – молекулярные массы компонентов; D_{ij}, D_T – коэффициенты концентрационной и термической диффузии.

В приближении теории пограничного слоя ($\partial P/\partial y = 0$) бародиффузия исключается. Влияние термодиффузии мало ($\sim 10\%$). Поэтому определяющей является концентрационная диффузия и справедлив закон Фика

$$j_i = \rho V_i C_i = \rho D_{12} \frac{\partial C_i}{\partial y}. \quad (6.4)$$

Выразим первый член в (6.1) через полное теплосодержание смеси газов в рассматриваемой точке

$$dh = c_p dT + \sum h_i dC_i, \quad (6.5)$$

откуда получим

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\lambda}{c_p} \sum h_i \frac{\partial C_i}{\partial y}. \quad (6.6)$$

Подставляя (6.4) и (6.6) в (6.1), найдем

$$q = -\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\lambda}{c_p} (1 - \text{Le}) \sum h_i \frac{\partial C_i}{\partial y}, \quad (6.7)$$

где $\text{Le} = \rho D_{12} c_p / \lambda = \text{Pr} / \text{Sc}$ – критерий Льюиса, $\text{Pr} = \nu / a$, $\text{Sc} = \nu / D$.

Для газов в большинстве случаев критерий Льюиса близок к единице ($\text{Le} \approx 1$) и выражение для потока тепла упрощается

$$q = -\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial y}. \quad (6.8)$$

В такой форме уравнение передачи тепла не зависит от механизма теплообмена и от скорости химических реакций. Дифференциальное уравнение энергии пограничного слоя с учетом (6.8) должно

быть записано через полное теплосодержание газа:

$$\rho U \frac{\partial h}{\partial x} + \rho V \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial y} \right). \quad (6.9)$$

Уравнение диффузии i -го компонента газовой смеси с учетом (6.4) имеет вид

$$\rho U \frac{\partial C_i}{\partial x} + \rho V \frac{\partial C_i}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D_{12} \frac{\partial C_i}{\partial y} \right) = a_i. \quad (6.10)$$

Здесь a_i – скорость образования i -го компонента в результате химической реакции в рассматриваемой точке, т. е. при химических реакциях концентрации отдельных компонентов газа могут меняться. Наличие этого члена приводит к неподобию дифференциальных уравнений энергии (6.9) и диффузии (6.10).

Массовые же доли отдельных химических элементов во время реакций не меняются. С помощью некоторых преобразований можно записать уравнение диффузии через обобщенные концентрации i -го химического элемента. В такой записи оно будет подобно уравнению энергии. Рассмотрим это на примере реакции между углеродом и кислородом с образованием окиси углерода: $C + O \rightarrow CO$. Обозначим массовую долю кислорода в продуктах реакции M_1 . Тогда скорость образования окиси углерода a_{CO} будет связана со скоростью исчезновения свободного газообразного кислорода a_O соотношением $M_1 a_{CO} = -a_O$. Обобщенная концентрация кислорода как химического элемента в рассматриваемой точке составит $\bar{C}_O = C_O + M_1 C_{CO}$, где C_O – количество свободного кислорода, не вступившего в реакцию; $M_1 C_{CO}$ – количество кислорода в продуктах реакции.

Запишем в соответствии с (6.10) уравнение диффузии для свободного кислорода

$$\rho U \frac{\partial C_O}{\partial x} + \rho V \frac{\partial C_O}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D_{12} \frac{\partial C_O}{\partial y} \right) = a_O \quad (6.11)$$

и уравнение диффузии окиси углерода

$$\rho U \frac{\partial C_{CO}}{\partial x} + \rho V \frac{\partial C_{CO}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D_{12} \frac{\partial C_{CO}}{\partial y} \right) = a_{CO}. \quad (6.12)$$

Умножив последнее на M_1 и сложив его с (6.11), получим, что уравнение диффузии кислорода, записанное через обобщенные

концентрации, подобно уравнению энергии пограничного слоя:

$$\rho U \frac{\partial \bar{C}_i}{\partial x} + \rho V \frac{\partial \bar{C}_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D_{12} \frac{\partial \bar{C}_i}{\partial y} \right). \quad (6.13)$$

Поскольку уравнение диффузии (6.13) аналогично уравнению энергии (6.9) при $Le = 1$, при подобии граничных условий должны быть подобны поля приведенных концентраций и полных энтальпий

$$\frac{\bar{C}_{ict} - \bar{C}_i}{\bar{C}_{ict} - \bar{C}_{i0}} = \frac{h_{ct} - h}{h_{ct} - h_0}. \quad (6.14)$$

Интегрируя (6.9) и (6.13), можно получить интегральные уравнения энергии и диффузии. Для осесимметричного течения они имеют вид:

$$\frac{d Re_{\tau}^{**}}{d \bar{x}} + Re_{\tau}^{**} \left(\frac{1}{\Delta h} \frac{d \Delta h}{d \bar{x}} + \frac{1}{R} \frac{d R}{d \bar{x}} \right) = St_{\tau} (1 + b_{1\tau}) Re_L, \quad (6.15)$$

$$\frac{d Re_d^{**}}{d \bar{x}} + Re_d^{**} \left(\frac{1}{\Delta \bar{C}_i} \frac{d \Delta \bar{C}_i}{d \bar{x}} + \frac{1}{R} \frac{d R}{d \bar{x}} \right) = St_d (1 + b_{1d}) Re_L. \quad (6.16)$$

Для определения чисел Стентона St_{τ} и St_d при решении интегральных соотношений воспользуемся предельными относительными законами тепломассообмена С.С. Кутателадзе и А.И. Леонтьева

$$St/St_0 = \Psi = f(h_{ct}/h_0, M, b_1). \quad (6.17)$$

При этом

$$St_{0d} = A Re_d^{**m} Sc^{-n}. \quad (6.18)$$

Определим параметр проницаемости $b_1 = j_{ct}/\rho_0 U_0 St$ и концентрации компонентов на стенке. Из уравнения диффузии i -го элемента, записанного для условий на стенке,

$$j_{ict} = j_{ct} \bar{C}_{ict} - \left(\rho D \frac{\partial \bar{C}_i}{\partial y} \right)_{ct} \quad (6.19)$$

и выражения для диффузионного критерия Стентона

$$St_d = \frac{j_{ct} (j_{ict}/j_{ct} - \bar{C}_{ict})}{\rho_0 U_0 (\bar{C}_{ict} - \bar{C}_{i0})}, \quad (6.20)$$

где $j_{ст}$ – суммарный поперечный поток вещества на реагирующей стенке; $j_{ист}$ – поток i -го элемента на стенке.

Подставляя (6.20) в $b_{1д}$, получаем

$$b_{1д} = \frac{j_{ст}}{\rho_0 U_0 St_d} = \frac{\bar{C}_{ист} - \bar{C}_{i_0}}{(j_{ист} / j_{ст}) - \bar{C}_{ист}}. \quad (6.21)$$

При выгорании графитовой поверхности параметр проницаемости определяется следующими соотношениями, выраженными:

а) через концентрацию углерода $(\bar{C}_C)_0 = 0$, $j_{ст} = j_{ист} = j_C$:

$$b_1 = \frac{(\bar{C}_C)_{ст}}{1 - (\bar{C}_C)_{ст}} \quad \text{или} \quad (\bar{C}_C)_{ст} = \frac{b_1}{1 + b_1}, \quad (6.22)$$

б) через концентрацию кислорода (стенка для кислорода в этом случае непроницаема: $j_{ист} = 0$)

$$b_1 = \frac{(\bar{C}_O)_0}{(\bar{C}_O)_{ст}} - 1, \quad \text{или} \quad (\bar{C}_O)_{ст} = \frac{(\bar{C}_O)_0}{1 + b_1}. \quad (6.23)$$

Для диффузионного режима горения в области, где идет реакция $C + O \rightarrow CO$, из стехиометрического соотношения имеем:

$$(\bar{C}_C)_{ст} = \frac{12}{28} (C_{CO})_{ст}, \quad (\bar{C}_O)_{ст} = \frac{16}{28} (C_{CO})_{ст}, \quad (6.24)$$

где $(C_{CO})_{ст}$ – концентрация окиси углерода на стенке. И, наконец, из уравнений (6.22), (6.23), (6.24) получаем следующее выражение для параметра проницаемости на выгорающей графитовой стенке

$$b_1 = \frac{(\bar{C}_C)_{ст}}{(\bar{C}_O)_{ст}} (\bar{C}_O)_0 = 0,75 (\bar{C}_O)_0. \quad (6.25)$$

Таким образом, параметр проницаемости стенки определяется только концентрацией кислорода в основном потоке, т.е. он характеризует окислительный потенциал газового потока.

Из решения интегральных уравнений энергии и диффузии совместно с законами тепломассообмена (6.17) и (6.18) можно полу-

чить зависимость $Re_d^{**} = f(\bar{x})$ и из выражения для параметра проницаемости

$$b_1 = \frac{j_{ст}}{\rho_0 U_0 St_d}$$

определить интенсивность выгорания стенки $j_{ст}$ и теплообмен на ней.

В соответствии с соотношениями (6.22), (6.23) при выгорании графита в потоке воздуха параметр проницаемости стенки b_1 и концентрации отдельных компонентов на стенке будут постоянными по длине. Тогда интегральное соотношение диффузии (6.16) при постоянной концентрации компонентов на стенке для цилиндрического канала запишется в виде

$$d Re_d^{**} / d \bar{x} = St_d (1 + b_1) Re_d = St_0 \Psi (1 + b_1) Re_d. \quad (6.26)$$

Для определения влияния неизотермичности и проницаемости стенки на турбулентный тепломассообмен в пограничном слое воспользуемся предельными относительными законами С.С. Кутателадзе и А.И. Леонтьева [3]. При дозвуковом течении газа и $\psi > 1$ предельный относительный закон тепломассообмена имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi &= \left(\frac{St}{St_0} \right)_{Re^{**} \rightarrow \infty} = \\ &= \frac{4}{b_1(\psi - 1)} \left[\arctg \sqrt{\frac{b_1}{(\psi - 1)(1 + b_1)}} - \arctg \sqrt{\frac{b_1 \Psi}{\psi - 1}} \right]^2, \end{aligned} \quad (6.27)$$

где $\psi = T_{ст}/T_0$ – температурный фактор.

Закон тепломассообмена в стандартных условиях принимается в форме

$$St_0 = A Re_d^{*-m} Sc^{-0.75} \left(\frac{\mu_{ст}}{\mu_0} \right)^m, \quad (6.28)$$

где $\mu_{ст}/\mu_0$ – отношение вязкости газа на стенке к вязкости в невозмущенном потоке. Как показано в этих же работах, при таком определении числа Рейнольдса предельные соотношения достаточно хорошо учитывают влияние неизотермичности потока на тепломассообмен и при конечных числах Re^{**} .

Из соотношений (6.27) и (6.28) следует, что интенсивность химической эрозии графита в потоке газа можно определить следующей формулой:

$$j_C = b_1 \rho_0 U_0 \text{St}_d = 0.75 (\bar{C}_O)_0 \rho_0 U_0 \frac{A}{\text{Re}_d^{**0.25} \text{Sc}^{0.75}} \left(\frac{\mu_{\text{ст}}}{\mu_0} \right)^m \Psi. \quad (6.29)$$

Число Рейнольдса Re_d^{**} находим интегрированием уравнения диффузии пограничного слоя (6.26) совместно с законом теплообмена (6.28). После интегрирования

$$\text{Re}_d^{**} = \left[\frac{A(m+1)}{\text{Sc}^{0.75}} \text{Re}_d \int_0^{\bar{x}} \Psi (1+b_1) \left(\frac{\mu_{\text{ст}}}{\mu_0} \right)^m d\bar{x} \right]^{\frac{1}{1+m}}. \quad (6.30)$$

В рассматриваемых условиях $b_1 = \text{const}$ и $\Psi = \text{const}$. Из уравнений (6.27), (6.28) и (6.30) следует, что диффузионный критерий Стентона (с учетом того, что при $\text{Re}^{**} < 10^4$ $A = 0.0128$; $m = 0.25$) определяется зависимостью

$$\text{St}_d = 0.029 \text{Re}_X^{-0.2} \text{Sc}^{-0.6} \Psi^{0.8} (1+b_1)^{-0.2} (\mu_{\text{ст}}/\mu_0)^{0.2}. \quad (6.31)$$

Подставляя (6.30) в (6.29), получаем интенсивность выгорания графита в зависимости от параметров газового потока:

$$j_C = 22 \cdot 10^{-3} (\bar{C}_O)_0 \rho_0 U_0 \text{Re}_X^{-0.2} \text{Sc}^{-0.6} \Psi^{0.8} (1+b_1)^{-0.2} (\mu_{\text{ст}}/\mu_0)^{0.2}. \quad (6.32)$$

Чтобы проверить влияние концентрации кислорода в основном потоке на интенсивность уноса графита проводили специальные опыты. В них воздух, подаваемый в канал, разбавляли азотом. Сопоставление эксперимента с расчетом показано на рис. 6.2. Видно, что интенсивность выгорания падает по длине канала и увеличивается с ростом концентрации кислорода в основном потоке.

Экспериментальные данные о выгорании различных графитов в широком диапазоне параметров газового потока обобщены в виде зависимости диффузионного числа Стентона от числа Рейнольдса на рис. 6.3. Видно, что экспериментальные результаты удовлетворительно согласуются с теоретическим расчетом теплообмена в турбулентном пограничном слое.

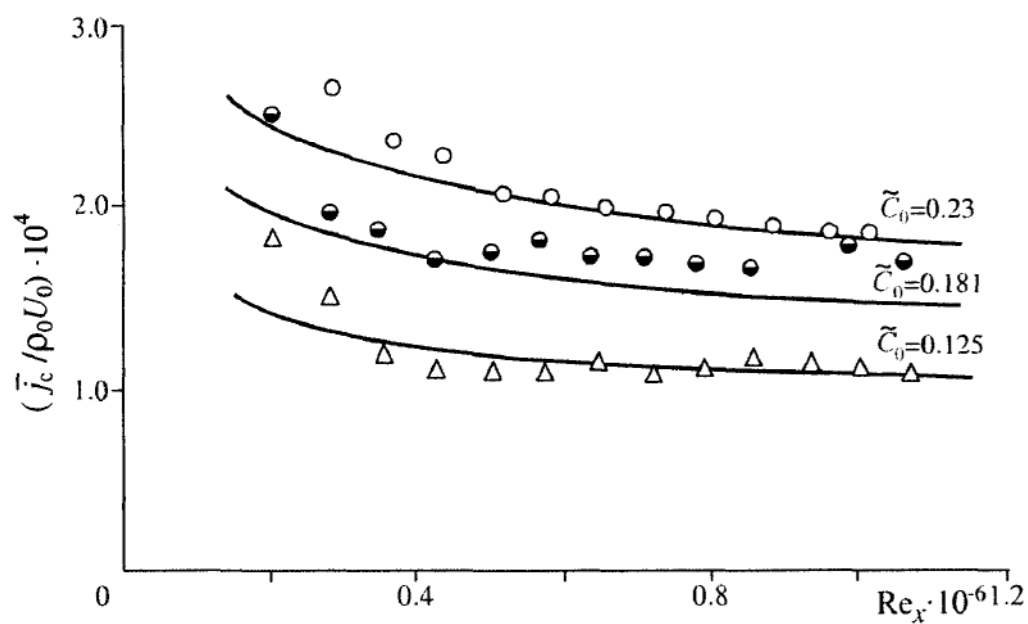


Рис.6.2. Влияние концентрации кислорода в потоке газа на интенсивность выгорания графита

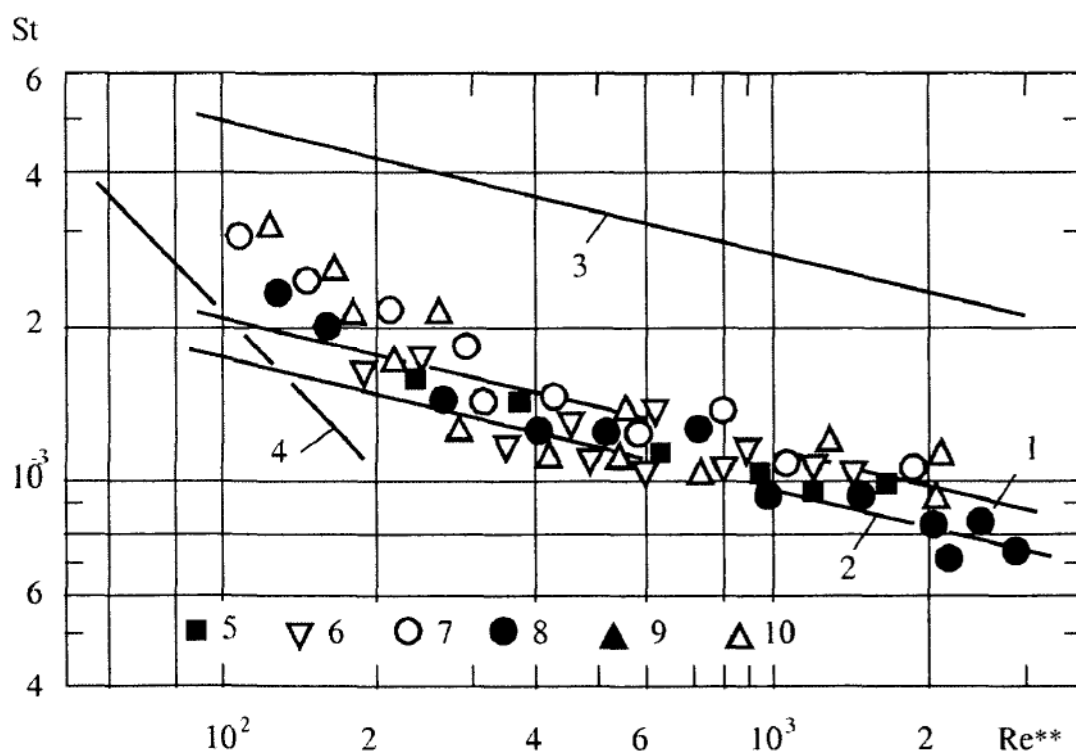


Рис.6.3. Диффузионное число Стентона на выгорающей поверхности:
1-3 – расчет для турбулентного пограничного слоя; $\psi = 6$;
7 и 1 соответственно; 4 – расчет для ламинарного слоя при $\psi = 7$

6.2. ТЕПЛОМАССОБМЕН НА РЕАГИРУЮЩЕЙ ПОРИСТОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ВДУВЕ ИНЕРТНОГО ГАЗА

Как известно, вдув газа в пограничный слой вызывает существенное снижение тепловых потоков к проницаемой поверхности. При обтекании же реагирующей поверхности вдув инертного газа приводит к снижению интенсивности химической эрозии, так как вдуваемый газ затрудняет диффузию окислителя из основного потока к стенке.

Аналогичные процессы имеют место в тех случаях, когда материал обтекаемой поверхности разлагается от термического воздействия газового потока. Образующиеся при этом газообразные компоненты вдуваются в пограничный слой, а твердый остаток уносится вследствие химической эрозии.

Рассмотрим турбулентный пограничный слой, развивающийся на проницаемой поверхности, которая может вступать в химические реакции с газом основного потока. Интегральные соотношения энергии (6.15) и диффузии (6.16) пограничного слоя сохраняют свой вид. Необходимо только учесть в граничных условиях, что поперечный поток вещества определяется как вдувом газа, так и эрозией самой стенки:

$$j_{\Sigma}^{\Sigma} = j_{\Gamma} + j_C.$$

Здесь $j_{\Gamma} = (\rho_{\Gamma} V_{\Gamma})_{\text{ст}}$ — массовый поток на стенке вдуваемого газа; $j_C = (\rho_C V_C)_{\text{ст}}$ — поток вещества на стенке вследствие химической эрозии; j_{Σ}^{Σ} — сумарный поперечный поток на стенке.

С учетом этого интегральное соотношение диффузии i -го химического элемента для плоского пограничного слоя можно записать в виде

$$\frac{d[\text{Re}_{\text{д}_i}^{**} \Delta \bar{C}]}{\Delta \bar{C}_i d\bar{x}} - \frac{j_{\Sigma}^{\Sigma}}{\rho_0 U_0} \text{Re}_L = \text{St}_{\text{д}} \text{Re}_L. \quad (6.33)$$

Здесь $\text{Re}_{\text{д}_i}^{**}$ и Re_L — числа Рейнольдса, записанные соответственно по толщине потери массы $\delta_{\text{д}_i}^{**}$ i -го элемента и линейному характерному размеру L ;

$$\delta_{\text{д}_i}^{**} = \int_0^{\infty} \frac{\rho U}{\rho_0 U_0} \frac{(\bar{C}_i) - (\bar{C}_i)_0}{(\bar{C}_i)_{\text{ст}} - (\bar{C}_i)_0} dy;$$

$$\bar{x} = x/L, \Delta \bar{C}_i = (\bar{C}_i)_{\text{ст}} - (\bar{C}_i)_0;$$

$$\text{St}_d = -\rho D \left(\frac{d\bar{C}_i}{dy} \right)_{\text{ст}} / \rho_0 U_0 \Delta \bar{C}_i \quad (6.34)$$

– диффузионное число Стентона.

Используя уравнение диффузии i -го элемента на стенке

$$(j_i)_{\text{ст}} = j_{\text{ст}}^{\Sigma} (\bar{C}_i)_{\text{ст}} - \rho D \left(\frac{d\bar{C}_i}{dy} \right)_{\text{ст}}, \quad (6.35)$$

выражение для диффузионного числа Стентона (6.34) можно привести к виду

$$\text{St}_d = \frac{(j_i)_{\text{ст}} - j_{\text{ст}}^{\Sigma} (\bar{C}_i)_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0 \Delta \bar{C}_i}, \quad (6.36)$$

или

$$(\bar{C}_i)_{\text{ст}} - (\bar{C}_i)_0 = \frac{(j_i)_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0 \text{St}_d} - \frac{j_{\text{ст}}^{\Sigma}}{\rho_0 U_0 \text{St}_d} (\bar{C})_{\text{ст}}. \quad (6.37)$$

Запишем последнее уравнение для отдельных компонентов:

а) через приведенные концентрации материала стенки $\bar{C}_i = \bar{C}_C$;

$$(\bar{C}_C)_0 = 0; (j_i)_{\text{ст}} = j_C;$$

$$(\bar{C}_C)_{\text{ст}} = b_1^C - b_1^{\Sigma} (\bar{C}_C)_{\text{ст}} = b_1^C / (1 + b_1^{\Sigma}), \quad (6.38)$$

где

$$b_1^C = j_C / \rho_0 U_0 \text{St}_d; b_1^{\Sigma} = j_{\text{ст}}^{\Sigma} / \rho_0 U_0 \text{St}_d \quad (6.39)$$

– параметры проницаемости стенки, записанные через массовый поток вещества стенки j_C и суммарный поток вещества на стенке $j_{\text{ст}}^{\Sigma}$ соответственно;

б) через концентрацию окислителя основного потока $\bar{C}_i = \bar{C}_0$.

Так как стенка непроницаема для окислителя $(j_i)_{\text{ст}} = 0$, из (6.37) получаем выражение

$$(\bar{C}_0)_{\text{ст}} = \frac{(\bar{C}_0)_0}{1 + b_1^{\Sigma}}; \quad (6.40)$$

в) через концентрацию вдуваемого газа $\bar{C}_i = \bar{C}_r$; $(j_i)_{\text{ст}} = j_r$

$$(\bar{C}_r)_{\text{ст}} = \frac{b_1^r + (\bar{C}_r)_0}{1 + b_1^\Sigma}, \quad (6.41)$$

где

$$b_1^r = j_r / \rho_0 U_0 \text{St}_d \quad (6.42)$$

– параметр проницаемости стенки, записанный через массовый поток вдуваемого газа. Если концентрация вдуваемого газа в основном потоке равна нулю: $(\bar{C}_r)_0 = 0$, имеем

$$(\bar{C}_r)_{\text{ст}} = b_1^r / (1 + b_1^\Sigma). \quad (6.43)$$

Из уравнений (6.38) и (6.40) получаем выражение для параметра проницаемости b_1^C , непосредственно характеризующего интенсивность химической эрозии стенки:

$$b_1^C = (1 + b_1^\Sigma) (\bar{C}_C)_{\text{ст}} = (\bar{C}_C / \bar{C}_O)_{\text{ст}} (\bar{C}_O)_0. \quad (6.44)$$

Например, в области диффузионного реагирования углерода с кислородом $\text{C} + \text{O} \rightarrow \text{CO}$ с учетом стехиометрического соотношения (6.24) имеем

$$b_1^C = (3/4) (\bar{C}_O)_0. \quad (6.45)$$

Как видно из уравнений (6.45) и (6.25), параметр проницаемости стенки b_1^C для диффузионной области реагирования – величина постоянная, определяемая окислительным потенциалом основного потока, и не зависит от дополнительного вдува инертного газа через уносимую поверхность.

Из интегрального соотношения диффузии (6.33) и уравнения (6.36) можно получить выражение для числа Рейнольдса Re_d^{**} , построенного по толщине потери массы, которым удобно пользоваться при экспериментальном определении законов тепломассообмена:

$$\text{Re}_d^{**} = \frac{\int_0^x \left[(j_i)_{\text{ст}} - j_{\text{ст}}^\Sigma (\bar{C}_i)_0 \right] dx}{\mu_0 \left[(\bar{C}_i)_{\text{ст}} - (\bar{C}_i)_0 \right]}. \quad (6.46)$$

Или для отдельных компонентов можно записать:

а) для уносимого материала стенки при $\bar{C}_i = \bar{C}_C$; $(\bar{C}_C)_0 = 0$;
 $(j_i)_{\text{ст}} = j_C$

$$\text{Re}_d^{**} = \frac{\int_0^x j_C dx}{\mu_0 (\bar{C}_C)_{\text{ст}}} = \frac{(1+b_1^\Sigma) \int_0^x j_C dx}{\mu_0 b_1^C}; \quad (6.47)$$

б) для вдуваемого инертного газа, когда его концентрация в основном потоке $(\bar{C}_r)_0 = 0$; $(j_i)_{\text{ст}} = j_r$,

$$\text{Re}_d^{**} = \frac{\int_0^x j_r dx}{\mu_0 (\bar{C}_r)_{\text{ст}}} = \frac{(1+b_1^\Sigma) \int_0^x j_r dx}{\mu_0 b_1^r}; \quad (6.48)$$

в) для кислорода при $\bar{C}_i = \bar{C}_O$; $(j_i)_{\text{ст}} = 0$

$$\text{Re}_d^{**} = \frac{(\bar{C}_O)_0 \int_0^x j_{\text{ст}}^\Sigma dx}{\mu_0 [(\bar{C}_O)_0 - (\bar{C}_O)_{\text{ст}}]} = \frac{(1+b_0^\Sigma) \int_0^x j_{\text{ст}}^\Sigma dx}{\mu_0 b_1^\Sigma}. \quad (6.49)$$

Запишем интегральное соотношение диффузии (6.33) в виде

$$\frac{d \text{Re}_d^{**}}{d\bar{x}} + \frac{\text{Re}_d^{**}}{\Delta \bar{C}_i} \frac{d(\Delta \bar{C}_i)}{d\bar{x}} = \text{St}_0 \Psi (1+b_1^\Sigma) \text{Re}_L. \quad (6.50)$$

Здесь $\Psi = (\text{St}_d / \text{St}_0)_{\text{Re}^{**}}$ – относительный коэффициент тепломассообмена, учитывающий влияние таких возмущающих факторов, как вдув, неизотермичность, сжимаемость потока и др.

Закон массообмена в стандартных условиях принимаем по аналогии с теплообменом в степенной форме

$$\text{St}_0 = \frac{A}{\text{Re}_d^{**0.25} \text{Sc}^{0.75}} \left(\frac{\mu_{\text{ст}}}{\mu_0} \right)^m. \quad (6.51)$$

При дозвуковом турбулентном обтекании неизотермической проницаемой поверхности относительный коэффициент тепломассообмена можно принять в виде [3]

$$\Psi = \Psi_\tau \Psi_b = \left(\frac{2}{\sqrt{\psi_1} + 1} \right)^2 \left(1 - \frac{b^\Sigma}{b_{кр}} \right)^2. \quad (6.52)$$

Здесь $b^\Sigma = j_{ст}^\Sigma / \rho_0 U_0 St_d = b_1^\Sigma \Psi$; $\psi_1 = h_{ст} / h_0$.

Значения критического параметра вдува при $Re \rightarrow \infty$ определяются по формулам:

– при $\psi_1 < 1$

$$b_{кр}^* = \frac{1}{1 - \psi_1} \left(\ln \frac{1 + \sqrt{1 - \psi_1}}{1 - \sqrt{1 - \psi_1}} \right)^2; \quad (6.53)$$

– при $\psi_1 > 1$

$$b_{кр}^* = \frac{1}{\psi_1 - 1} \left(\arccos \frac{2 - \psi_1}{\psi_1} \right)^2, \quad (6.54)$$

а с учетом поправки на конечность числа Рейнольдса [3]

$$b_{кр} \approx b_{кр}^* (1 - 0.83 / Re^{**0.14}). \quad (6.55)$$

Решение уравнения (6.50) совместно с (6.51) можно записать в общем виде:

$$Re_d^{**} = \left[\frac{A(m+1)Re_i}{Sc^{0.75} (\Delta \bar{C}_i)^{m+1}} \int_0^{\bar{x}} \Psi (1 + b_1^\Sigma) (\Delta \bar{C}_i)^{m+1} \left(\frac{\mu_{ст}}{\mu_0} \right)^m d\bar{x} \right]^{\frac{1}{m+1}}. \quad (6.56)$$

Рассмотрим два частных случая вдува: вдув инертного газа по законам $b^\Sigma = \text{const}$ и $j_r = \text{const}$.

При вдуве по закону $b^\Sigma = \text{const}$ из (6.56), (6.40) и (6.52) следует, что $\Delta \bar{C}_i = \text{const}$; $\Psi = \text{const}$. Тогда из (6.56) имеем

$$Re_d^{**} = \left[0.016 Sc^{-0.75} Re_x \Psi (1 + b_1^\Sigma) (\mu_{ст} / \mu_0)^{0.25} \right]^{0.8}. \quad (6.57)$$

Подставив (6.57) в уравнение (6.51) и (6.52), получим значение числа Стентона в виде

$$St_d = 0.0292 Re_x^{-0.2} Sc^{-0.6} \Psi^{0.8} (1 + b_1^\Sigma)^{-0.2} (\mu_{ст} / \mu_0)^{0.2}. \quad (6.58)$$

Величину химической эрозии материала стенки находим из выражения (6.39) для параметра проницаемости b_1^C :

$$j_C = b_1^C \rho_0 U_0 St_d = \\ = 0.0292 b_1^C \rho_0 U_0 Re_x^{-0.2} Sc^{-0.6} \Psi^{0.8} (1 + b_1^\Sigma)^{-0.2} (\mu_{ст} / \mu_0)^{0.2}, \quad (6.59)$$

где b_1^C в общем случае определяется по формуле (6.44), а при диффузионном горении графитовой поверхности – по формуле (6.45).

При вдуве инертного газа по закону $j_r = \text{const}$ из соотношения (6.45) следует, что

$$Re_d^{**} = \frac{j_r x (1 + b_1^\Sigma)}{\mu_0 b_1^\Gamma} = Re_x \frac{j_r}{\rho_0 U_0} \frac{1 + b_1^\Sigma}{b_1^\Gamma}, \quad (6.60)$$

или с учетом выражения для параметра проницаемости вдуваемого газа (6.42) получим

$$Re_d^{**} = St_d Re_x (1 + b_1^\Sigma). \quad (6.61)$$

Решая это уравнение совместно с законом тепломассообмена (6.51) и (6.52):

$$St_d = St_0 \Psi = \frac{A}{Re_d^{**m} Sc^{0.75}} \left(\frac{\mu_{ст}}{\mu_0} \right)^m \Psi, \quad (6.62)$$

можно получить следующие выражения:

– для числа Рейнольдса

$$Re_d^{**} = \left[\frac{A}{Sc^{0.75}} Re_x (1 + b_1^\Sigma) \left(\frac{\mu_{ст}}{\mu_0} \right)^m \Psi \right]^{\frac{1}{1+m}}; \quad (6.63)$$

– для диффузионного числа Стентона

$$St_d = 0.0306 Re_x^{-0.2} Sc^{-0.6} (1 + b_1^\Sigma)^{-0.2} \left(\frac{\mu_{ст}}{\mu_0} \right)^{0.2}, \quad (6.64)$$

и соответственно величина интенсивности химической эрозии определяется равенством

$$j_C = b_1^C \rho_0 U_0 St_d = \\ = 0.0306 b_1^C \rho_0 U_0 Re_x^{-0.2} Sc^{-0.6} \Psi^{0.8} (1 + b_1^\Sigma)^{-0.2} (\mu_{ст} / \mu_0)^{0.2}. \quad (6.65)$$

Как видно из (6.65) и (6.58), интенсивность химической эрозии при вдуве газа по закону $j_r = \text{const}$ всего на 5 % отличается от интенсивности выгорания при вдуве по закону $b = \text{const}$.

Расчет выгорания поверхности при вдуве инертного газа выполняется методом последовательных приближений. В первом приближении диффузионное число Стентона определяем по формуле (6.64) без учета вдува инертного газа ($(C_r)_{\text{ст}} = 0$, $b_r = 0$, $b_1^\Sigma = b_1^C$). После этого по известному потоку инертного газа через поверхность по формулам (6.39) и (6.42) вычисляются параметры проницаемости b_C^r и b_C^Σ и концентрация газа на стенке (6.41) или (6.43). Значение фактора неизотермичности $\psi_1 = h_{\text{ст}}/h_0$ определяем с учетом концентрации газовых компонентов на стенке. По формуле (6.52) рассчитываем функцию тепломассообмена Ψ . В последующих приближениях число Стентона St вычисляем по формуле (6.65) уже с учетом вдува инертного газа. Аналогичным способом можно вести расчет от области критических вдувов, полагая в первом приближении $(C_r)_{\text{ст}} = 1$.

Экспериментальное исследование выгорания в потоке воздуха пористой поверхности при вдуве через нее инертного газа проводилось на стенде с индукционным нагревом графитового канала [12]. Результаты представлены на рис. 6.4 в виде зависимости интенсивности выгорания от интенсивности вдува инертного газа.

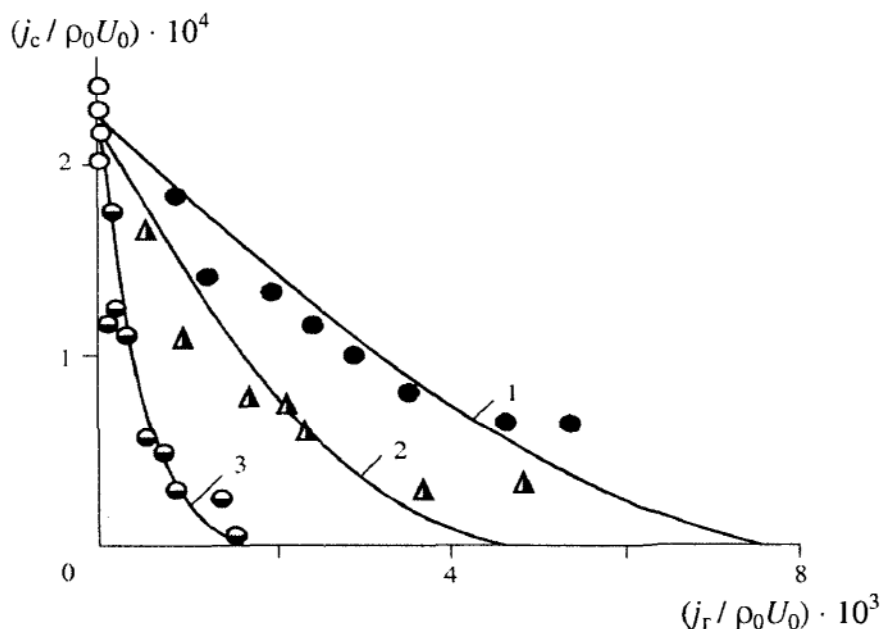


Рис. 6.4. Зависимость интенсивности выгорания графита от интенсивности вдува инертного газа ($x = 50$ мм; $T = 290$ К; $T_{\text{ст}} = 1900 \dots 2500$ К; $\rho_0 U_0 = 107$ кг/(м²с)). 1-3 расчет по (6.65) и (6.52) соответственно для вдува аргона, азота и гелия

Как видно, вдув существенно снижает скорость химической эрозии поверхности, причем более эффективен вдув газа с меньшим молекулярным весом. Результаты опытов удовлетворительно согласуются с теоретическим расчетом по формулам (6.65) и (6.52).

Как показывает анализ, значительное влияние на массообмен оказывает неизотермичность. Значение энтальпийного фактора неизотермичности $\psi_1 = h_{ст}/h_0$ в опытах изменялось в следующих пределах: при вдуве азота его значение было примерно тем же, что и без вдува $\psi_1 \approx 7.5$; при вдуве аргона было несколько ниже $3.5 \leq \psi_1 \leq 6$; и значительно выше при вдуве гелия $10 \leq \psi_1 \leq 33$. С увеличением неизотермичности потока при $\psi_1 > 1$ снижаются как интенсивность выгорания поверхности, так и значения критических параметров вдува.

На рис. 6.5 в соответствии с формулой (6.52) выделено относительное влияние вдува инертного газа на тепломассообмен реагирующей поверхности: $\Psi_b = \Psi / \Psi_T$. Видно, что зависимость коэффициентов тепломассообмена от поперечного потока вещества на стенке в неизотермических условиях сохраняется такой же, как и в изотермических, если значения критических параметров вдува $b_{кр}$ определяются с учетом влияния неизотермичности (6.53) и (6.54). Экспериментальные результаты можно описать формулой

$$\Psi_b = \Psi / \Psi_T = \left(1 - b^2 / b_{кр}^2\right)^2. \quad (6.66)$$

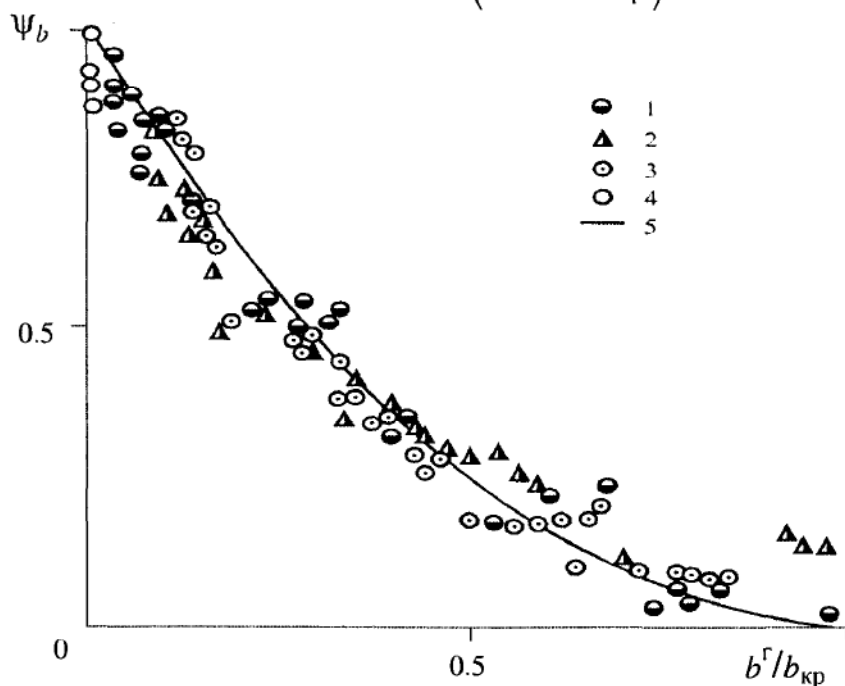


Рис. 6.5. Относительное влияние вдува на тепломассообмен в неизотермических условиях: 1 — гелий; 2 — азот; 3 — аргон; 4 — $j_r = 0$; 5 — расчет по (6.66)

Предлагаемый метод расчета на рис. 6.6 сопоставляется с опытами [12] по выгоранию графитового канала в воздушной и азотной плазме, когда фактор неизотермичности был меньше единицы ($0.3 < \psi_1 < 0.6$). Через графитовую стенку вдувался аргон, и неизотермичность увеличивала скорость химической эрозии и снижала эффективность вдува.

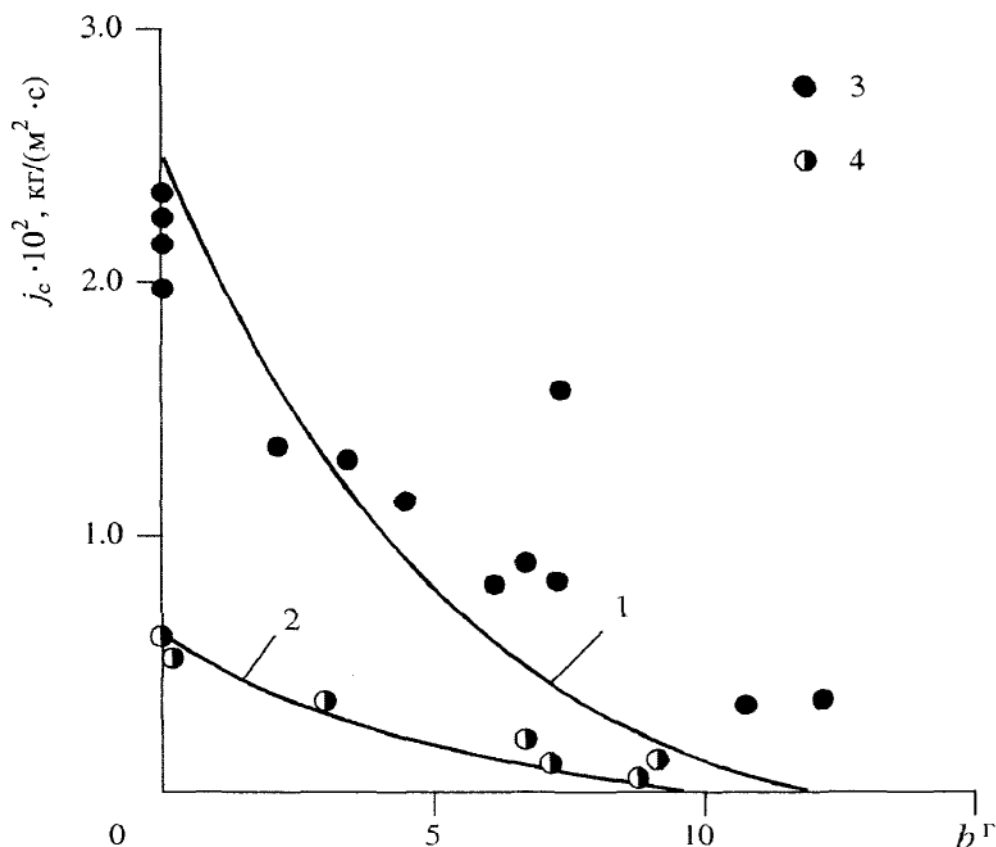


Рис. 6.6. Влияние вдува аргона на выгорание графита в плазменном потоке: 1, 2 — расчеты по формулам (6.65) и (6.52) соответственно для воздушной ($\sim 21\% \text{ O}_2$) и азотной ($\sim 5\% \text{ O}_2$) плазмы; 3, 4 — опыты Г.М. Щеголева и др. из [12] в воздушной и азотной плазме, $T_0 \approx 2800 \text{ K}$, $T_{\text{ст}} = 1700 - 1970 \text{ K}$

Таким образом, в диффузионном режиме выгорания вдув инертного газа значительно снижает скорость химической эрозии реагирующей поверхности. Эффективность вдува растет с уменьшением молекулярного веса вдуваемого газа и с увеличением фактора неизотермичности.

Следует отметить, что проведенный анализ выгорания графитовой поверхности может быть распространен и на другие случаи химического взаимодействия поверхности с потоком газа. При этом в соответствии с протекающими реакциями изменяются значения параметра проницаемости и выражения для концентраций компонентов на стенке.

6.3. ГАЗОВАЯ ЗАВЕСА НА ВЫГОРАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

Газовая завеса может использоваться как для тепловой защиты, так и для защиты обтекаемых поверхностей от химического взаимодействия. При вдуве в пограничный слой инертного газа снижаются концентрация агрессивных компонентов у стенки и интенсивность турбулентного теплообмена. Процессы массообмена в пограничном слое с завесой на реагирующей поверхности подобны процессам теплообмена при заградительном охлаждении неадиабатической стенки, рассмотренным в гл. 5. Как и в случае теплообмена, для анализа процессов массообмена на реагирующей поверхности с завесой воспользуемся методом интегральных соотношений пограничного слоя, но с учетом влияния неизотермичности потока, химических реакций и проницаемости стенки. В качестве реагирующей поверхности рассмотрим графитовую стенку, обтекаемую турбулентным пограничным слоем газа, содержащим кислород. Стенка разогрета до температуры выше 1500 К, и химические реакции протекают на ней в диффузионной области, когда интенсивность выгорания зависит от скорости подвода окислителя к стенке. В начале обтекаемой поверхности для снижения интенсивности выгорания организована локальная подача нейтрального газа в пограничный слой через тангенциальную щель или пористый участок.

При локальном вдуве в пограничный слой концентрация окислителя вблизи поверхности изменяется по длине и определяется процессами турбулентного массообмена. Как показано ранее (в п. 5.4), при отсутствии химических реакций концентрации отдельных компонентов на поверхности можно выразить через эффективность газовой завесы на адиабатической стенке из условия подобия

$$\Theta = \frac{h_0 - h_{\text{ст}}^*}{h_0 - h_S} = \frac{(C_i)_0 - (C_i)_{\text{ст}}^*}{(C_i)_0 - (C_i)_S},$$

где $(C_i)_0$, $(C_i)_S$, $(C_i)_{\text{ст}}^*$ – концентрации компонента в основном потоке, щели и на стенке в отсутствии химических реакций.

В соответствии с этим концентрация кислорода на графитовой поверхности при отсутствии химических реакций может быть определена следующим образом:

$$(\bar{C}_O)_{\text{ст}}^* = (\bar{C}_O)_0 (1 - \Theta) + \Theta (\bar{C}_O)_S, \quad (6.67)$$

где Θ рассчитывается по формулам для эффективности газовой завесы на адиабатической стенке, приведенным в гл. 5.

Аналогично тому, как в гл. 5 выведено интегральное соотношение энергии при заградительном охлаждении неадиабатической стенки, получим интегральное соотношение диффузии для пограничного слоя на реагирующей поверхности с газовой завесой.

При анализе процессов диффузии отдельных компонентов смесь газов будем рассматривать как некоторую эффективную бинарную. В таких условиях уравнение диффузии i -го химического элемента, записанное через приведенные концентрации, в общем случае сохраняет свой обычный вид:

$$\rho U \frac{\partial \bar{C}_i}{\partial x} + \rho V \frac{\partial \bar{C}_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho D_{12} \frac{\partial \bar{C}_i}{\partial y} \right). \quad (6.68)$$

Уравнение же диффузии этого элемента в пограничном слое с газовой завесой на нереагирующей стенке запишем в виде

$$\rho U \frac{\partial \bar{C}_i^*}{\partial x} + \rho V \frac{\partial \bar{C}_i^*}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho D_{12} \frac{\partial \bar{C}_i^*}{\partial y} \right). \quad (6.69)$$

Здесь индексом * обозначена концентрация i -го элемента в рассматриваемой точке пограничного слоя при наличии завесы на инертной поверхности при прочих равных условиях.

Вычтем из уравнения (6.68) уравнение (6.69) и проинтегрируем полученное выражение по толщине диффузионного пограничного слоя при следующих граничных условиях: при $y = 0$ $U = 0$, $\rho V = j_{\text{ст}}$, $\bar{C}_i = (\bar{C}_i)_{\text{ст}}$, $(\partial \bar{C}_i^* / \partial y)_{\text{ст}} = 0$; при $y = \delta_d$ $\bar{C}_i = \bar{C}_i^* = (\bar{C}_i)_0$, $\partial \bar{C}_i / \partial y = \partial \bar{C}_i^* / \partial y = 0$. В результате будем иметь интегральное соотношение диффузии пограничного слоя с газовой завесой на реагирующей стенке

$$\frac{d(\text{Re}_d^{**} \Delta \bar{C})}{\Delta \bar{C} d\bar{x}} - \frac{j_{\text{ст}}}{\rho_0 U_0} \text{Re}_L = \text{St}_d \text{Re}_L, \quad (6.70)$$

где $\Delta \bar{C} = (\bar{C}_{\text{ст}} - \bar{C}_{\text{ст}}^*)$ — разность концентраций рассматриваемого элемента на стенке при наличии и отсутствии химических реакций; $\bar{x} = x/L$ — относительное расстояние; $\text{Re}_L = \rho_0 U_0 L / \mu_0$;

$$Re_{д}^{**} = \rho_0 U_0 \delta_{д}^{**} / \mu_0; \quad \delta_{д}^{**} = \int_0^{\delta} \frac{\rho U}{\rho_0 U_0} \left[\frac{\bar{C}_i - \bar{C}_i^*}{(\bar{C}_i)_{ст} - (\bar{C}_i)_{ст}^*} \right] dy;$$

$\bar{C}_i^*$ – приведенная концентрация i -го компонента в текущей точке пограничного слоя на не реагирующей стенке;

$$St_{д} = \frac{-\rho D (\partial \bar{C}_i / \partial y)}{\rho_0 U_0 \Delta \bar{C}_i} \quad (6.71)$$

– диффузионное число Стентона.

Из уравнений диффузии, записанных для условий на реагирующей и не реагирующей стенке, следует, что

$$j_{iст} = (\rho V)_{ст} (\bar{C}_i)_{ст} - \rho D (\partial \bar{C}_i / \partial y)_{ст}; \quad -\rho D (\partial \bar{C}_i^* / \partial y)_{ст} = 0. \quad (6.72)$$

Подставляя (6.72) в выражение для диффузионного числа Стентона (6.71), получаем

$$St_{д} = \frac{j_C \left[(j_{iст} / j_C) - (\bar{C}_i)_{ст}^* \right]}{\rho_0 U_0 \left[(\bar{C}_i)_{ст} - (\bar{C}_i)_{ст}^* \right]}, \quad (6.73)$$

где на реагирующей графитовой поверхности поперечный поток вещества на стенке равен интенсивности выгорания углерода: $(\rho V)_{ст} = j_C$; $(j_i)_{ст}$ – массовый поток i -го компонента на стенке.

Параметр проницаемости поверхности при наличии газовой завесы с учетом выражения (6.73) имеет следующий вид:

$$b_1^* = \frac{j_C}{\rho_0 U_0 St_{д}} = \frac{(\bar{C}_i)_{ст} - (\bar{C}_i)_{ст}^*}{((j_i)_{ст} / j_C) - (\bar{C}_i)_{ст}^*}. \quad (6.74)$$

Значение параметра проницаемости b_1^* на выгорающей графитовой поверхности определяется очевидными соотношениями, выраженными:

а) через концентрации углерода $(\bar{C}_C)_{ст}^* = 0$; $(j_i)_{ст} = j_C$

$$b_1^* = \frac{(\bar{C}_C)_{ст}}{1 - (\bar{C}_C)_{ст}}, \quad \text{или} \quad (\bar{C}_C)_{ст} = \frac{b_1^*}{1 + b_1^*}; \quad (6.75)$$

б) через концентрации кислорода $(j_i)_{\text{ст}} = 0$

$$b_1^* = \frac{(\bar{C}_O)_{\text{ст}}^*}{1 - (\bar{C}_O)_{\text{ст}}^*} - 1. \quad (6.76)$$

Кроме того, для диффузионного режима горения в области, где идет реакция $\text{C} + \text{O} \rightarrow \text{CO}$, с учетом стехиометрического соотношения имеем

$$(\bar{C}_C)_{\text{ст}} = (12/28)(C_{\text{CO}})_{\text{ст}}; \quad (\bar{C}_O)_{\text{ст}} = (16/28)(C_{\text{CO}})_{\text{ст}}, \quad (6.77)$$

где $(C_{\text{CO}})_{\text{ст}}$ – концентрация окиси углерода на стенке. Из уравнений (6.75), (6.76) и (6.77) следует, что

$$b_1^* = \frac{(\bar{C}_C)_{\text{ст}}}{(\bar{C}_O)_{\text{ст}}} (\bar{C}_C)_{\text{ст}}^* = \frac{3}{4} (\bar{C}_O)_{\text{ст}}^*, \quad (6.78)$$

т. е. параметр проницаемости в условиях газовой завесы определяется концентрацией окислителя на поверхности при отсутствии химических реакций. Концентрацию кислорода на не реагирующей стенке $(\bar{C}_O)_{\text{ст}}^*$ находим из уравнения (6.67), и при локальном вдуве инертного газа $((C_O)_S = 0)$ имеем

$$b_1^* = (3/4) (\bar{C}_O)_0 (1 - \Theta). \quad (6.79)$$

Таким образом, параметр проницаемости b_1^* в рассматриваемых условиях зависит от эффективности газовой завесы на адиабатической не реагирующей стенке и его значение изменяется по длине поверхности в отличие от случая вдува инертного газа через пористую реагирующую поверхность (см. п. 6.2), когда b_1 сохраняет постоянное значение и не зависит от величины вдува.

Интегральное соотношение диффузии (6.70) для решения удобно записать в виде

$$\frac{d \text{Re}_d^{**}}{d \bar{x}} + \frac{\text{Re}_d^{**}}{\Delta \bar{C}} \frac{d \Delta \bar{C}}{d \bar{x}} = \text{St}_0 \Psi (1 + b_1^*) \text{Re}_L. \quad (6.80)$$

Принимая закон массообмена в стандартных условиях аналогичным закону теплообмена, имеем

$$\text{St}_{d_0} = A \text{Re}^{** - m} \text{Sc}^{-n} (\mu_{\text{ст}} / \mu_0)^m. \quad (6.81)$$

Тогда после интегрирования уравнения (6.80) с учетом (6.81) получаем

$$\text{Re}_d^{**} = \frac{1}{\Delta \bar{C}} \left[\frac{A(1+m)}{\text{Sc}^n} \int_0^{\bar{x}} \text{Re}_L \Psi (1+b_1^*) \Delta \bar{C}^{(m+1)} \left(\frac{\mu_{\text{ст}}}{\mu_0} \right)^m d\bar{x} \right]^{\frac{1}{1+m}} \quad (6.82)$$

– уравнение, выражающее изменение диффузионного числа Рейнольдса по длине $\text{Re}_d^{**} = f(\bar{x})$ при заданных параметрах завесы и условиях на внешней границе пограничного слоя.

И, наконец, интенсивность завесы инертного газа с учетом выражения (6.79) для параметра проницаемости может быть вычислена по формуле

$$j_C = b_1^* \rho_0 U_0 \text{St}_0 \Psi = \frac{3}{4} (\bar{C}_O)_0 (1-\Theta) \frac{A \Psi \rho_0 U_0}{\text{Re}_d^{**m} \text{Sc}^n} \left(\frac{\mu_{\text{ст}}}{\mu_0} \right)^m, \quad (6.83)$$

где относительный закон теплообмена Ψ также определяется с учетом газовой завесы по формулам (5.71), (5.72) или (5.76).

Как видно, локальный вдув инертного газа может привести к резкому снижению интенсивности химической эрозии непосредственно за участком вдува, где $\Theta \rightarrow 1$, вниз же по течению эффективность газовой завесы Θ падает и интенсивность эрозии будет увеличиваться.

Экспериментальные данные о скорости выгорания графита в потоке воздуха при тангенциальном вдуве азота сопоставлены с расчетами по формулам (6.83), (6.79) и (5.72) на рис. 6.7. Можно отметить удовлетворительное соответствие предлагаемого метода расчета с опытами, а также значительное влияние вдува инертного газа на интенсивность выгорания.

При экспериментальном определении законов массообмена локальные значения диффузионного критерия Рейнольдса удобно рассчитывать по формуле

$$\text{Re}_d^{**} = \frac{1+b_1^* \int_0^x j_C dx}{\mu_0 b_1^*}, \quad (6.84)$$

которая следует из интегрального соотношения диффузии (6.70), записанного для углерода, и уравнений (6.73) и (6.75).

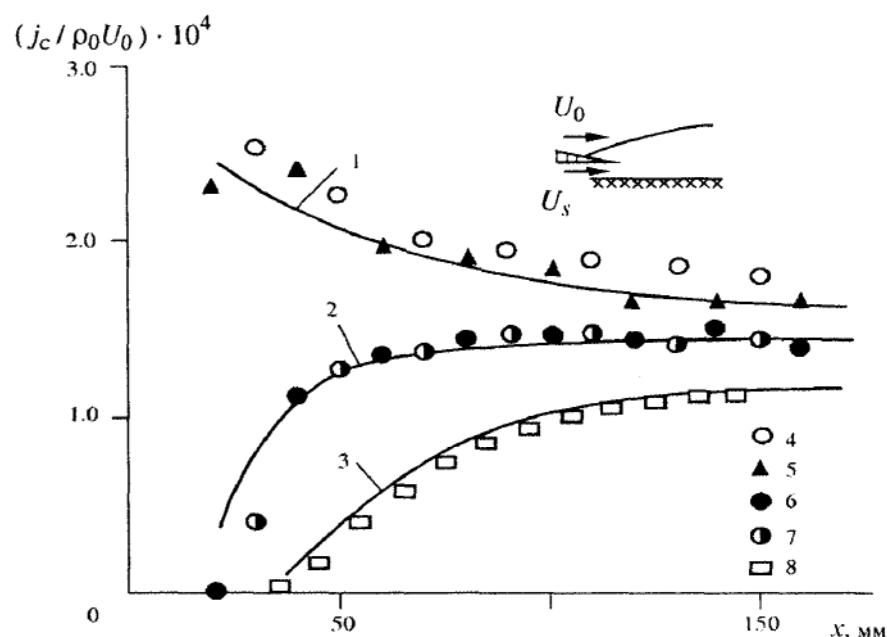


Рис. 6.7. Выгорание графита в потоке воздуха при тангенциальном вдуве азота: 1-3 – расчет по (6.83), (6.79) и (5.72)

На рис. 6.8 полученные данные обобщены в виде зависимости диффузионного числа Стентона от числа Рейнольдса, которое определялось по формуле (6.84). При такой обработке опытные данные о коэффициентах массообмена при наличии завесы инертного газа практически совпадают с результатами опытов без завесы, подтверждая справедливость законов массообмена (6.81) и (5.72) для рассмотренных условий.

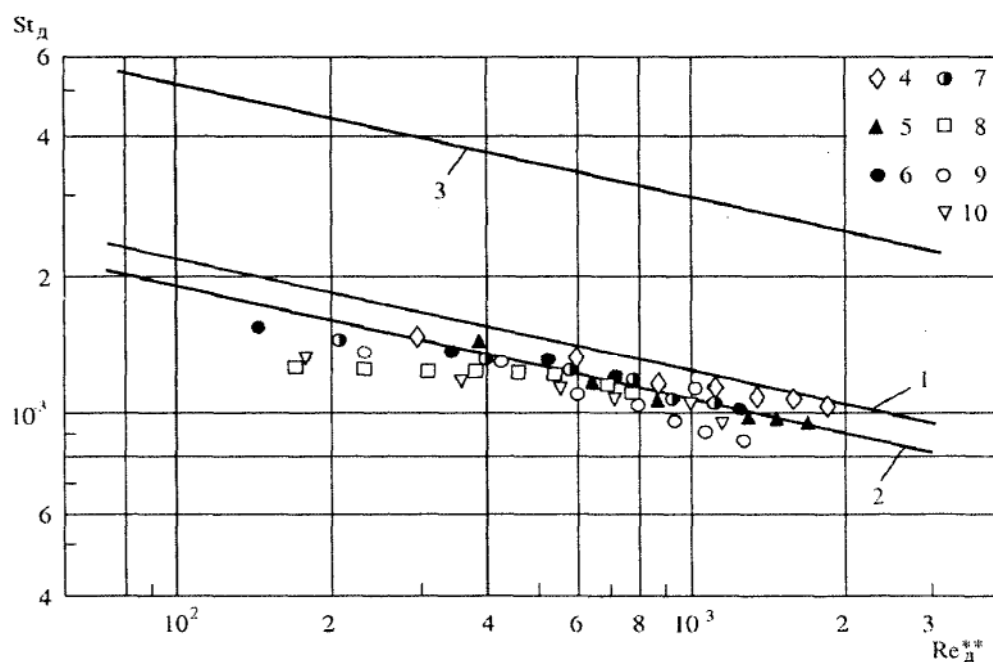


Рис. 6.8. Обобщение опытных данных о выгорании графита в потоке воздуха с завесой азота и без нее: 1-3 расчет по формуле (6.83) при $T_{ст}/T_0 = 6, 7$ и 1 соответственно

Зависимость скорости выгорания от относительного вдува азота, аргона и гелия через тангенциальную щель показана на рис. 6.9. Если сравнение вести при одинаковой относительной скорости вдува $\bar{U}_s$, то получим, что выгорание почти не зависит от молекулярной массы вдуваемого газа при прочих равных условиях интенсивность выгорания ниже при вдуве более легкого газа.

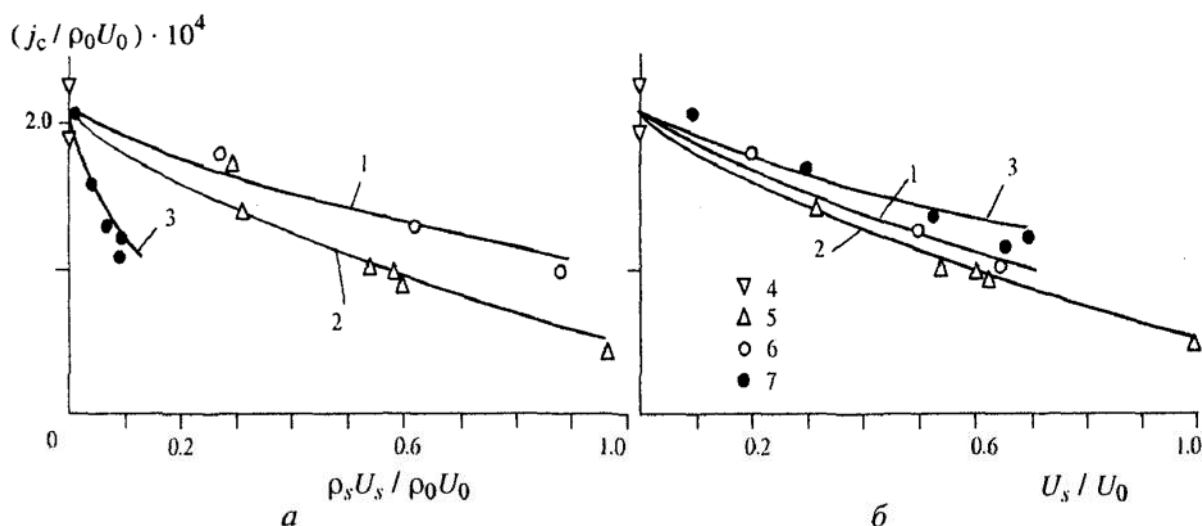


Рис. 6.9. Зависимость скорости выгорания графита от тангенциального вдува:
1-3 – расчеты по формуле (6.83) соответственно для вдува аргона, азота и гелия.
Опыты: 4 – в потоке воздуха без вдува; 5 – вдув азота; 6 – аргона; 7 – гелий

Следует отметить, что анализ выгорания графитовой поверхности в турбулентном пограничном слое с завесой может быть распространен и на другие случаи химического взаимодействия поверхности с потоком газа. При этом в соответствии с протекающими реакциями изменятся только значения параметров проницаемости и концентраций соответствующих компонентов у стенки, которые рассчитываются с учетом стехиометрических соотношений типа (6.77) из выражений (6.75), (6.76) и (6.78).

6.4. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ С ФРОНТОМ ГОРЕНИЯ

В предыдущем разделе были изучены течения с гетерогенными химическими реакциями, фронт которых располагался на поверхности. Рассмотрим пограничный слой, химические реакции в котором протекают в газовой фазе при взаимодействии основного потока с подающимся через проницаемую стенку горючим или окислителем (рис. 6.10).

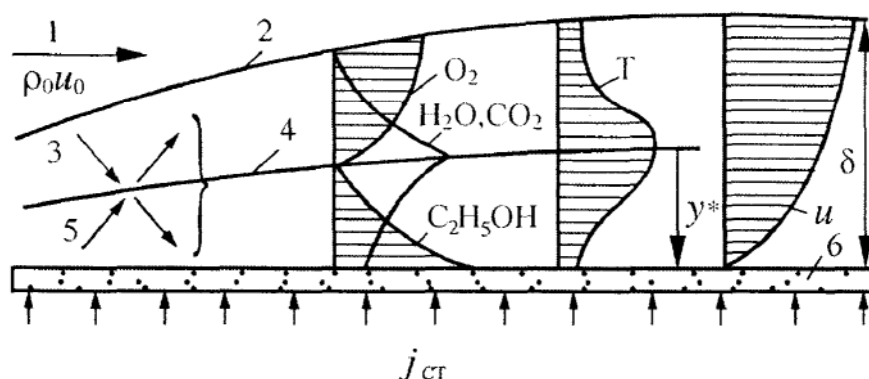


Рис. 6.10. Схема течения в пограничном слое со вдувом реагирующего вещества

Как показали расчеты, во многих случаях хорошее соответствие с экспериментом дает модель диффузионного фронта горения В.А. Шваба и Я.Б. Зельдовича. Согласно этой модели образующийся фронт реакции делит пограничный слой на две части: зону горючего (от стенки до фронта) и зону окислителя (от фронта до внешней границы пограничного слоя). Скорость химической реакции принимаем бесконечно большой, поэтому процесс в пограничном слое будет определяться диффузионным переносом. Фронт реакции в соответствии с диффузионной моделью непроницаем для горючего и окислителя, и в нем содержатся только продукты сгорания.

Проанализируем процесс тепломассообмена на основе асимптотической теории турбулентного пограничного слоя С.С. Кутателадзе и А.И. Леонтьева. В соответствии с принятой моделью диффузионного фронта горения предельный интеграл теории разбивается на две части: от пористой стенки до фронта пламени (зона горючего) и от фронта до внешней границы пограничного слоя (окислительная зона)

$$\Psi = \left(\int_0^{\vartheta^*} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0} \frac{\tilde{q}_0}{\tilde{q}}} d\vartheta + \int_{\vartheta^*}^1 \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0} \frac{\tilde{q}_0}{\tilde{q}}} d\vartheta \right)^2. \quad (6.85)$$

Здесь $\Psi = St/St_0$, $St = q_{ст}/\rho_0 U_0 (h_{ст} - h_0)$ – число Стентона в рассматриваемых условиях (вдув плюс горение); $h_{ст}$ и h_0 – полная энтальпия газа на стенке и в ядре потока; St_0 – число Стентона без вдува и горения; $\vartheta^* = (h^* - h_{ст})/(h_0 - h_{ст})$ – безразмерная полная энтальпия во фронте горения.

Изменение тепловых потоков в пограничном слое с вдувом реагирующих веществ такое же, как и при вдуве без реакций

$$\tilde{q}/\tilde{q}_0 = 1 + b_1 \vartheta. \quad (6.86)$$

Распределение плотности газа ρ/ρ_0 зависит от температуры и концентраций компонентов газовой смеси.

В соответствии с уравнением состояния смеси идеальных газов имеем

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{M}{M_0} \frac{T_0}{T}. \quad (6.87)$$

Молекулярная масса смеси газов определяется по формуле

$$\frac{1}{M} = \sum_{n=1}^n \frac{C_n}{M_n}, \quad (6.88)$$

где C_n , M_n – массовая концентрация n -го химического соединения (вещества) в рассматриваемой точке пограничного слоя и соответственно его молекулярная масса.

Аналогия процессов тепломассообмена и трения в реагирующем пограничном слое записывается

$$\omega = \frac{h - h_{\text{ст}}}{h_0 - h_{\text{ст}}} = \frac{\bar{C}_i - \bar{C}_{i\text{ст}}}{\bar{C}_{i_0} - \bar{C}_{i\text{ст}}}, \quad (6.89)$$

т. е. подобны профили скоростей, полных энтальпий и обобщенных концентраций.

Для химически реагирующих систем обобщенную концентрацию i -го химического элемента можно определить как

$$\bar{C}_i = \sum_{n=1}^m a_{in} C_n, \quad (6.90)$$

где a_{in} – массовая доля i -го химического элемента в n -м химическом соединении.

Распределение обобщенных концентраций химических элементов находим из условия подобия (6.89)

$$\bar{C}_i = \bar{C}_{i\text{ст}} + (\bar{C}_{i_0} - \bar{C}_{i\text{ст}}) \vartheta. \quad (6.91)$$

Значение концентрации i -го элемента на стенке $C_{i\text{ст}}$ определяем из уравнения сохранения его массы на пористой поверхности:

$$j_{ict} = j_{ct}^{\Sigma} \bar{C}_{ict} - \rho D \left(\frac{\partial \bar{C}_i}{\partial y} \right)_{ct}, \quad (6.92)$$

где j_{ct}^{Σ} – суммарный поперечный поток вещества через стенку;
 $j_{ict} = j_{ct}^{\Sigma} \bar{C}_{ict}$ – поток i -го химического элемента через стенку; $\bar{C}_i'$ – концентрация i -го элемента во вдуваемом газе.

С учетом выражения для диффузионного числа Стентона

$$St_d = -\rho D (\partial \bar{C}_i / \partial y)_{ct} / \rho_0 U_0 (\bar{C}_{ict} - \bar{C}_{i_0}) \quad (6.93)$$

из (6.92) получаем следующее выражение для концентрации i -го элемента на стенке:

$$\bar{C}_{ict} = (\bar{C}_i' b_1 + \bar{C}_{i_0}) / (1 + b_1). \quad (6.94)$$

Параметр проницаемости в (6.94) рассчитываем по суммарному поперечному потоку вещества

$$b_1 = j_{ct}^{\Sigma} / \rho_0 U_0 St.$$

Подставляя (6.94) в (6.91) и далее в (6.90), можно найти распределение концентраций компонентов C_n газовой смеси в пограничном слое с горением.

Рассмотрим пример обтекания поверхности кислородом с пористым вдувом в пограничный слой реагирующего водорода. Если протекает реакция $2H_2 + O_2 = 2H_2O$, то в пограничном слое будут находиться три вещества (H_2 , O_2 , H_2O), состоящие из двух химических элементов (Н и О).

Значения обобщенных концентраций водорода (Н) и кислорода (О) на пористой стенке находим из соотношения (6.94) с учетом граничных условий: на внешней границе пограничного слоя имеется только кислород $(C_O)_0 = 1$, $(C_H)_0 = 0$, а во вдуваемом газе – только водород $(C_H)' = 1$, $(C_O)' = 0$. Тогда значения обобщенных концентраций химических элементов на стенке определяем параметром вдува:

$$(\bar{C}_H)_{ct} = b_1 / (1 + b_1), \quad (\bar{C}_O)_{ct} = 1 / (1 + b_1). \quad (6.95)$$

Используя соотношение (6.91) и значения концентраций на стенке (6.95), получаем распределение концентраций Н и О по сечению пограничного слоя

$$\bar{C}_H = \frac{b_1}{1 + b_1} (1 - \vartheta), \quad \bar{C}_O = \frac{1 + b_1 \vartheta}{1 + b_1}. \quad (6.96)$$

С учетом стехиометрического соотношения можно получить выражение, определяющее границу фронта пламени. Для реакции водорода с кислородом

$$\bar{C}_H^* = \frac{2}{18} C_{H_2O}^*, \quad C_{H_2O}^* = 1,$$

следовательно,

$$\vartheta^* = 1 - \frac{2}{18} C_{H_2O}^* \frac{1+b_1}{b_1} = 1 - \frac{2}{18} \frac{1+b_1}{b_1}. \quad (6.97)$$

Как видно, положение фронта реакций зависит от интенсивности вдува и стехиометрического соотношения.

При вдувах, не превышающих определенного значения, фронт реакций располагается на поверхности ($\vartheta^* \rightarrow 0$). В этом случае кислород полностью реагирует на стенке. При меньших значениях b_1 на стенке может быть избыточный кислород.

С увеличением вдува фронт пламени смещается от стенки, но даже при интенсивных вдувах ($b_1 \rightarrow \infty$) не достигает внешней границы пограничного слоя. Его положение в режиме критических вдувов определяется стехиометрическим соотношением.

Зависимость положения фронта реакций от параметра вдува при горении в потоке кислорода различных веществ показана на рис. 6.11. С уменьшением молекулярной массы вдуваемого горючего фронт пламени сдвигается к внешней границе пограничного слоя.

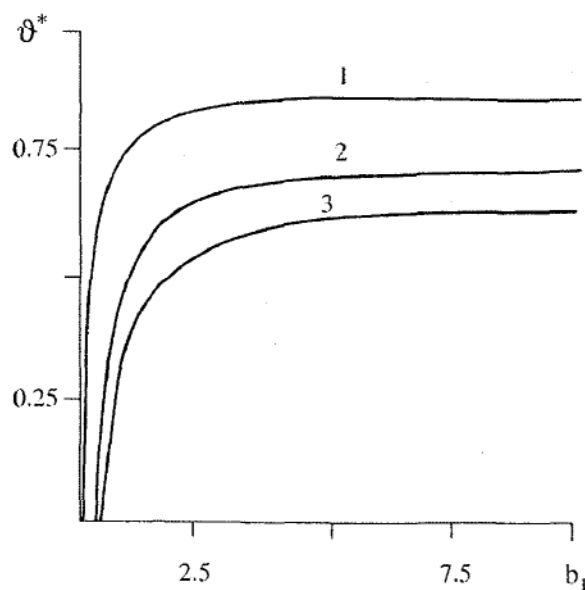


Рис. 6.11. Зависимость координаты фронта ϑ^* от интенсивности вдува при горении различных веществ:
1 — H_2 ; 2 — CO ; 3 — C_2H_5OH

Найдем распределение концентраций веществ C_n по сечению пограничного слоя. При горении водорода в зоне горючего $\vartheta < \vartheta^*$ имеется только водород и пары воды, а в зоне окислителя – кислород и вода. Тогда:

– при $\vartheta < \vartheta^*$

$$\bar{C}_O = \frac{16}{18} C_{H_2O}, \quad \bar{C}_H = C_{H_2} + \frac{2}{18} C_{H_2O}, \quad (6.98)$$

– при $\vartheta > \vartheta^*$

$$\bar{C}_O = C_{O_2} + \frac{16}{18} C_{H_2O}, \quad \bar{C}_H = \frac{2}{18} C_{H_2O}. \quad (6.99)$$

Отсюда с учетом (6.96) определяются концентрации веществ в пограничном слое [из (6.98) и (6.96)]:

– при $\vartheta < \vartheta^*$

$$C_{H_2O} = \frac{18}{16} \frac{1+b_1\vartheta}{1+b_1}, \quad C_{H_2} = 1 - \frac{18}{16} \frac{1+b_1\vartheta}{1+b_1}, \quad (6.100)$$

– при $\vartheta > \vartheta^*$

$$C_{H_2O} = \frac{18}{2} \frac{b_1(1-\vartheta)}{1+b_1}, \quad C_{O_2} = 1 - \frac{18}{2} \frac{b_1(1-\vartheta)}{1+b_1}. \quad (6.101)$$

Распределение температуры по толщине пограничного слоя в (6.87) находим из подобия (6.89) и выражения для полной энтальпии

$$h = \sum_{n=1}^n C_n h_n = \sum_{n=1}^n C_n \left(\int_0^T c_{pn} dT + h_n^0 \right). \quad (6.102)$$

Типичные распределения температур в реагирующем пограничном слое, обработанные с учетом координаты фронта пламени $T = f(y/y^*)$, представлены на рис. 6.12. В такой обработке опытные профили достаточно хорошо обобщаются. Однако по мере удаления течения от фронта к стенке и к ядру наблюдается некоторое расхождение расчета с опытом. Это, по всей вероятности, объясняется тем, что используемый метод расчета не учитывает некоторые особенности реального процесса горения: радиационный теплообмен, многостадийность реакций и т.д.

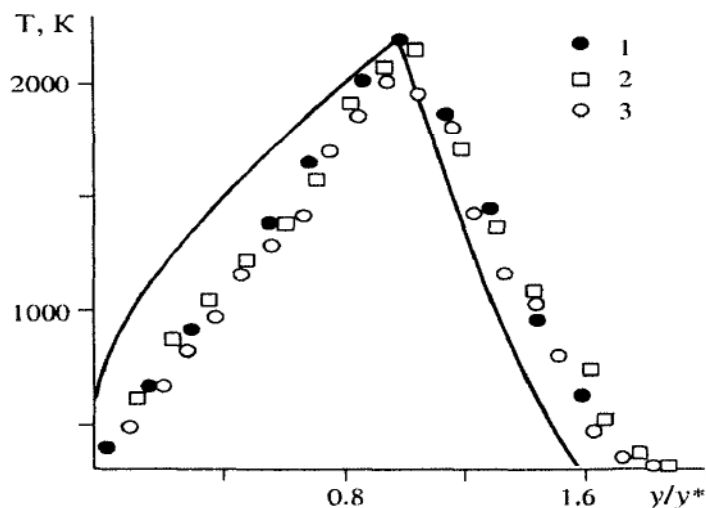


Рис. 6.12. Обобщение профилей температур при горении спирта. Линия – расчетный профиль температуры при параметре вдува $b = 0.75$

Опытные и расчетные профили массовых концентраций основных компонентов при горении этилового спирта в потоке воздуха сопоставлены на рис. 6.13. Опытные данные показывают, что зона окислительных реакций локализована в узкой области пограничного слоя и кислород из ядра потока практически не проникает за фронт горения. Концентрация продуктов сгорания CO_2 и H_2O в области фронта совпадает с расчетными концентрациями при стехиометрическом сгорании спирта.

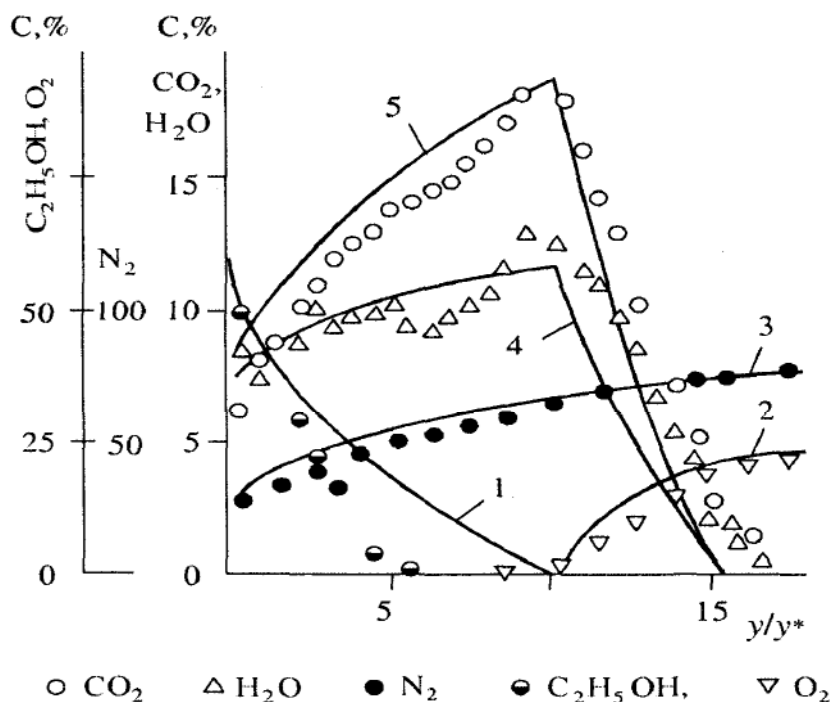


Рис. 6.13. Сопоставление опытных и расчетных профилей концентраций. Расчетные кривые: 1 – $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$; 2 – O_2 ; 3 – N_2 ; 4 – H_2O ; 5 – CO_2

Таким образом, используя (6.87), (6.88), (6.90), можно найти распределение плотности и после подстановки его в (6.85) определить функцию тепломассообмена. Расчет тепломассообмена в пограничном слое с вдувом спирта показан на рис. 6. 14.

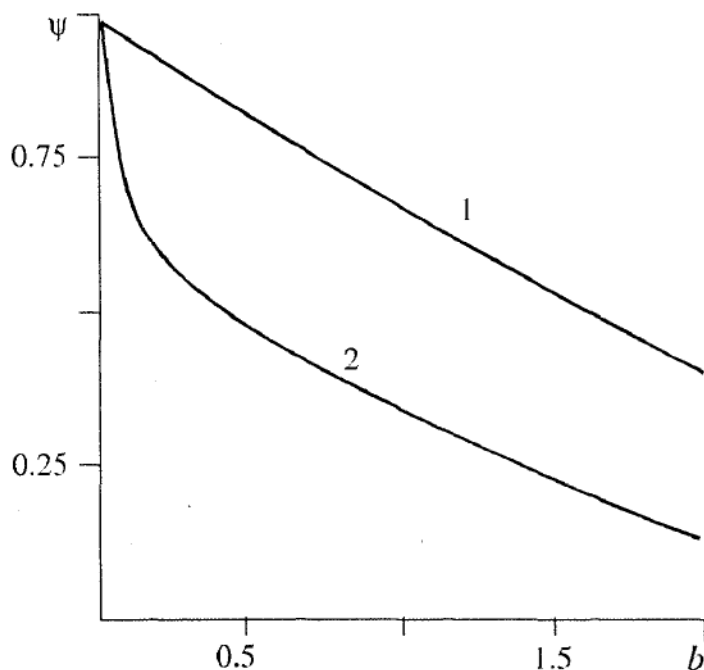


Рис. 6.14. Тепломассообмен в пограничном слое с вдувом спирта: 1 – без горения; 2 – с горением

Наличие фронта экзотермической реакции значительно снижает интенсивность тепломассообмена к стенке.

Естественно, что однофронтальная диффузионная модель горения не может описать всех особенностей процессов химического взаимодействия сложных углеводородов, однако по основным параметрам переноса – коэффициентам тепломассообмена, профилям температур и концентрации основных компонентов – имеется качественное и количественное соответствие с опытами.



Глава 7

НЕКОТОРЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Бурное развитие вычислительной техники во второй половине XX столетия позволило проводить численное моделирование течений жидкости и газа. Однако если в случае ламинарных течений проблема заключается только в построении численного метода для решения уравнений в частных производных, то для турбулентного режима течения необходимо привлекать дополнительные физические гипотезы.

Как отмечалось в главе 3, в основных дифференциальных уравнениях осредненного турбулентного движения присутствуют неизвестные турбулентные напряжения τ_t , представляющие собой корреляционные моменты второго порядка пульсаций скорости $\tau_t = -\rho \overline{u'v'}$. Аналогичные члены присутствуют и в уравнениях переноса теплоты $(-\rho c_p \overline{v'T'})$ и вещества $(-\rho \overline{v'C'})$ в турбулентном потоке.

В результате появления таких членов уравнения для средних характеристик течения становятся незамкнутыми и необходимо ввести модель турбулентности, определяющую члены турбулентного переноса, а потом уже приступить к решению этих уравнений.

Замкнуть систему уравнений осредненного турбулентного течения можно несколькими способами. Один из них заключается в установлении связи между членами турбулентного переноса и осредненными параметрами потока. Этот метод подразумевает, что турбулентный перенос прямо пропорционален градиенту осредненного параметра. Такая гипотеза для турбулентного напряжения трения была первоначально высказана Буссинеском, предложившим определять турбулентное трение выражением

$$\tau_t = -\rho \overline{u'v'} = \mu_t \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Здесь μ_t – коэффициент турбулентной вязкости, который в отличие от коэффициента молекулярной вязкости не является физической константой жидкости, а зависит от распределения скорости.

В этой гипотезе применяется концепция турбулентной вязкости (диффузии), которая постулирует связь между членами турбулентного переноса и градиентами осредненных характеристик течения.

Турбулентная вязкость μ_t согласно гипотезе Прандтля о длине перемешивания связана с локальным градиентом скорости

$$\mu_t = \rho l^2 \left| \frac{dU}{dy} \right|.$$

Это соотношение соответствует тонким сдвиговым слоям, содержит один неизвестный параметр – длину пути перемешивания l , распределение которой должно быть задано с помощью эмпирической информации.

Используя градиенты осредненных температуры и концентрации, аналогичным образом записываем связь для переноса теплоты и вещества. Эти связи обычно имеют чисто эмпирический характер. Поэтому теории турбулентности, использующие этот принцип, называют полуэмпирическими, а соответствующие модели – *градиентными моделями турбулентности первого приближения*.

В число градиентных моделей турбулентности первого приближения входят рассмотренные в разделе 3.3 модели Буссинеска, Прандтля. К ним же относят модели Кармана, Тейлора, Рейхардта.

Во всех моделях турбулентности первого приближения, по существу, заложена идея линейной зависимости вторых моментов от градиентов осредненных скорости, температуры, концентрации. Очевидно, что пределы применимости этих моделей ограничены. Они широко используются для расчета сравнительно простых течений с тонкими сдвиговыми слоями и позволяют получить информацию лишь об осредненных характеристиках течения. Градиентные модели турбулентности в основном правильно отражают наиболее важные особенности осредненных параметров турбулентных течений в пограничных слоях, трубах, каналах, струях и следах. Они широко использовались при решении авиационно-космических задач.

Однако всесторонняя проверка выявила ограниченность гипотезы о длине перемешивания, в частности отсутствие универсальности по отношению к начальной эмпирической информации. Од-

ним из главных недостатков этой гипотезы является то, что она исходит из предположения о локальном равновесии турбулентности, согласно которому в каждой точке течения скорость диссипации энергии турбулентности совпадает со скоростью ее генерации, так что влияние генерации турбулентности в других точках течения или в более ранние моменты времени оказывается невозможным. Следовательно, гипотеза о длине перемешивания не может учитывать влияние переноса турбулентности или предыстории ее развития. В результате этого согласно гипотезе о длине перемешивания турбулентная вязкость и диффузия обращаются в нуль ($\mu_t = 0$), как только градиент скорости становится равным нулю $\left(\left| \frac{dU}{dy} \right| = 0 \right)$. Это зна-

чит, например, что $\mu_t = 0$ на оси трубы, в области перемешивания пристенной струи с основным потоком и в ряде других случаев. Измерения показывают, что это далеко не так.

Другой недостаток указанных моделей заключается в том, что они не могут учитывать сил плавучести, вращения или кривизны линий тока, поскольку трудно сконструировать общеприменимые эмпирические соотношения, описывающие эти влияния. Несмотря на то что имеется большой опыт по распределению длины перемешивания l для простых сдвиговых слоев, при определении l в случаях, когда взаимодействуют несколько сдвиговых слоев, возникают значительные трудности. Поэтому рассматриваемые модели турбулентности применимы для течений с тонкими сдвиговыми слоями, для которых длина перемешивания может быть определена. В случае течений более сложных, чем сдвиговые слои, таких, например, как отрывные или полностью трехмерные течения, задача эмпирического определения l становится трудной и иногда даже неразрешимой.

Для решения более широкого круга задач предложены модели турбулентности, учитывающие эффекты переноса турбулентности и предысторию ее развития. При этом замыкание осредненных уравнений течения выполняется введением дополнительных дифференциальных уравнений для переноса локальных характеристик турбулентности: кинетической энергии турбулентности k , диссипации турбулентной энергии ε , турбулентного трения τ , турбулентной вязкости ν_t , масштаба турбулентности L и др. Число таких уравнений может меняться от 1 для простейших моделей до 12 и более

для наиболее сложных моделей турбулентности. Эти модели получили название *моделей турбулентности второго приближения или дифференциальных параметрических моделей*. Уравнения для различных характеристик турбулентности могут быть получены непосредственно из уравнений Навье – Стокса при их осреднении.

Простейшие модели, учитывающие эффекты переноса и пред-ыстории развития турбулентности, используют уравнение переноса подходящего масштаба скорости турбулентного движения. Обычно за такой масштаб принимают $\sqrt{k}$, где k – кинетическая энергия турбулентности, которая является мерой турбулентных пульсаций по всем трем направлениям.

Одна из первых таких моделей была предложена Колмогоровым (1940 г.). В большинстве моделей используется следующее уравнение переноса k :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) - \overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y} - \epsilon. \quad (7.1)$$

Скорость
изменения

Конвекция

Диффузия

Генерация

Диссипация

Это уравнение выводится из уравнений Навье-Стокса и является точным, за исключением диффузионного члена, в котором диффузионный поток величины k принимается пропорциональным градиенту k (σ_k – эмпирическая постоянная). Уравнение (7.1) описывает, как скорость изменения k во времени уравновешивается конвективным переносом за счет турбулентного движения, генерацией за счет взаимодействия турбулентных напряжений и градиента средней скорости и диссипацией турбулентности ϵ .

В моделях с одним дополнительным уравнением скорость диссипации ϵ обычно находим из соотношения

$$\epsilon \approx c_D (k^{3/2} / L), \quad (7.2)$$

которое является следствием анализа размерностей, если предположить, что скорость диссипации ϵ определяется крупномасштабным турбулентным движением и что это движение характеризуется масштабом скорости $\sqrt{k}$ и масштабом длины L . Два принципиальных предположения делаем для того, чтобы связать турбулентные напряжения с кинетической энергией k , определяемой из уравнения

ее переноса. Первое предположение исходит из концепции турбулентной вязкости, и тогда анализ размерностей дает так называемое соотношение Колмогорова-Прандтля

$$\nu_t = c_\mu \sqrt{k} L. \quad (7.3)$$

Другое предположение было введено Брэдшоу и сотрудниками, которые не использовали концепции турбулентной вязкости, но преобразовали уравнение для кинетической энергии в уравнение турбулентного переноса касательного напряжения $\overline{u'v'}$, предположив наличие прямой связи между $\overline{u'v'}$ и k . Их модель была предназначена для пристеночных пограничных слоев, для которых согласно экспериментальным данным $\overline{u'v'} \approx 0,3k$.

Модели с одним дополнительным уравнением применимы лишь к течениям или областям течений, которым соответствуют достаточно большие значения локального турбулентного числа Рейнольдса $Re_t = \nu_t / \nu$. Следовательно, они неприменимы вблизи стенки и вязкий подслой необходимо рассматривать с помощью пристеночных функций.

Наибольшее развитие получили дифференциальные модели с двумя дополнительными уравнениями. Чаще всего в них решается уравнение для кинетической энергии турбулентности k и еще для одного параметра (например, масштаба длины l , скорости диссипации ϵ , временного масштаба τ и др.)

Широкоизвестной моделью турбулентности второго приближения является $(k-L)$ -модель турбулентности, предложенная Колмогоровым и Прандтлем. В ней помимо осредненных уравнений Рейнольдса использованы два дополнительных дифференциальных уравнения для турбулентной энергии k и масштаба турбулентности L .

Для турбулентной вязкости использовалось соотношение (7.3).

Для получения замкнутой системы уравнений необходимо иметь уравнение для определения масштаба L . В задаче свободной турбулентности используют гипотезу Прандтля $L = kb$, где b – полуширина зоны смешения на основном участке струи. В более сложных течениях для определения L выводят дополнительное дифференциальное уравнение.

Модель Колмогорова – Прандтля использовалась для расчета пограничного слоя и свободных струйных течений.

Одной из наиболее популярных является $(k-\varepsilon)$ -модель турбулентности, предложенная Харлоу (1968). Эта модель по существу – вариант модели Колмогорова-Прандтля. В ней вместо неизвестного масштаба L использованы дифференциальное уравнение переноса диссипации турбулентной кинетической энергии ε и связь (7.2).

Соотношение (7.2) исключает из рассмотрения L . Турбулентная вязкость при этом

$$\nu_t = c_\mu k^2 / \varepsilon, \quad (7.4)$$

а турбулентное трение

$$\tau_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (7.5)$$

При использовании этой модели дополнительно к уравнениям для осредненного течения привлекают уравнения переноса кинетической энергии турбулентности k и скорости ее диссипации ε , которые для плоских течений имеют вид:

$$\rho U \frac{\partial k}{\partial x} + \rho V \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho \nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \rho \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \rho \varepsilon. \quad (7.6)$$

$$\rho U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \rho V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho \nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \rho \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - c_{\varepsilon 2} \frac{\rho \varepsilon^2}{k}. \quad (7.7)$$

Эти уравнения содержат пять постоянных, для которых в результате проведенного комплекса контрольных расчетов выбраны следующие значения:

$$c_\mu = 0,09; \quad c_{\varepsilon 1} = 1,43; \quad c_{\varepsilon 2} = 1,92; \quad \sigma_k = 1,0; \quad \sigma_\varepsilon = 1,3.$$

Указанные константы обеспечили удовлетворительные результаты расчетов для плоских течений. Для осесимметричных, затопленных и спутных струй приведенные значения констант давали плохое согласование расчета с экспериментом, что привело к необходимости введения соответствующих поправок.

Следует отметить, что приведенные выше уравнения для k и ε справедливы только в области, достаточно удаленной от стенки, где

числа $Re_t = \frac{\sqrt{kl}}{v}$ велики и влияние молекулярной вязкости пренебрежимо мало по сравнению с турбулентной вязкостью. Для типичных пограничных слоев это означает, что $y^+ > 30$. Для задания граничных условий часто используют пристеночные функции (Launder, 1974), которые позволяют определить значения всех параметров на некотором расстоянии от стенки, которое больше, чем толщина вязкого подслоя. В соответствии с этим методом предполагаем, что распределение скорости подчиняется логарифмическому закону и турбулентность находится в локальном равновесии, т. е. генерация турбулентности равна ее диссипации. С помощью этих предположений устанавливаем связь между скоростью, кинетической энергией турбулентности, скоростью диссипации и другими параметрами течения.

Такой подход практически неприменим к течениям с сильным изменением свойств среды поперёк слоя, течениям около пористой поверхности, при наличии сильных градиентов давления и ряде других осложняющих факторов. Поэтому в последние годы большое значение уделяется так называемым моделям для течений с низкими турбулентными числами Re_t . В них «константы» модели (например C_1 , C_2 и C_μ) являются функциями числа Re_t , учитывающими влияние молекулярной диффузии, что позволяет проводить расчет вплоть до стенки. При этом граничные условия задаются непосредственно на основе физического смысла. Так например, $k_{ст} = 0$, так как турбулентные пульсации затухают на стенке.

Особое внимание в настоящее время уделяется моделям напряжений Рейнольдса. Эти модели лишены недостатков всех упомянутых выше моделей, поскольку не используют гипотезу Буссинеска. В то же время использование таких моделей требует решения, по меньшей мере, пяти дополнительных дифференциальных уравнений, что делает их мало применимыми для инженерных приложений. Более того, для ряда членов, входящих в уравнения для напряжений Рейнольдса, необходимо введение в модель дополнительных гипотез, справедливость которых остается в настоящий момент недоказанной.

С более подробным сравнением различных моделей турбулентности можно познакомиться в многочисленных обзорах, например [6, 7, 17...20].

Надо отметить, что уравнения переноса, в частности, уравнения для k и ε , а также для любого из напряжений Рейнольдса имеют одинаковую структуру. Это объясняется тем, что переменные (составляющие скорости, кинетическая энергия турбулентности, скорость диссипации, температура или энтальпия, массовые концентрации химической составляющей и др.) выводятся или из одного закона сохранения, или из подобных ему законов. Отсюда следует важное свойство, позволяющее существенно упростить процедуру расчета уравнений переноса. Обозначив любую из перечисленных выше зависимых переменных буквой Φ , можно получить так называемое «транспортное» уравнение [21]. В наиболее общей векторной форме оно выглядит так:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Phi) + \text{div}(\rho U\Phi) = \text{div}(\Gamma \text{grad}\Phi) + S, \quad (7.8)$$

где Γ – коэффициент переноса; S – источниковый член.

Конкретный вид Γ и S зависит от смысла переменной Φ . В таблице приведены конкретные значения Γ и S для двумерного плоского течения несжимаемой жидкости при использовании модификации [19] модели $k-\varepsilon$.

Уравнение	Φ	Γ	S
– неразрывности	1	0	0
– U – компоненты скорости	U	$\mu + \mu_T$	$-\frac{\partial p}{\partial x}$
– V – компоненты скорости	V	$\mu + \mu_T$	$-\frac{\partial p}{\partial y}$
– энергии, записанное через энтальпию	H	$\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_T}{Pr_T}$	0
– кинетической энергии турбулентности	k	$\mu + \frac{\mu_T}{Pr_k}$	$\mu_T \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \rho\varepsilon$
– диссипации кинетической энергии турбулентности	ε	$\mu + \frac{\mu_T}{Pr_\varepsilon}$	$C_1 f_1 \frac{\varepsilon}{k} \mu_T \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - C_2 f_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k}$

В приведенных в таблице соотношениях использованы следующие значения констант и функций:

$$C_1 = 1.44, \quad C_2 = 1.83, \quad Pr_T = 0.9, \quad Pr_k = 1.36, \quad Pr_\varepsilon = 1.36,$$

$$f_1 = 1, \quad f_2 = \left(1 - \frac{2}{9} \exp(-Re_T^2/36)\right) \left(1 - \exp(-y^+/4.9)\right)^2.$$

При этом турбулентная вязкость вычисляется по формуле

$$\mu_T = C_\mu f_\mu \rho k^2 / \varepsilon,$$

где $C_\mu = 0.09$, $f_\mu = \left(1 - \frac{3.45}{\sqrt{Re_T}}\right) \tanh(y^+/70)$

Тензорная запись обобщенного уравнения в декартовой системе координат имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \Phi) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_j \Phi) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) + S, \quad (7.9)$$

где индекс j в соответствии с тремя пространственными координатами принимает значения 1, 2, 3.

Процедура записи дифференциального уравнения в обобщенном виде заключается в его преобразовании до тех пор, пока нестационарный, диффузионный и источниковый члены уравнения для данной зависимой переменной не примут стандартный (канонический) вид. Тогда за выражение для Γ принимают коэффициент перед $\text{grad} \Phi$ в диффузионном члене, а оставшиеся члены в правой части обозначают буквой S (источниковый член).

Таким образом, все интересующие нас дифференциальные уравнения, описывающие гидродинамику, тепломассообмен и турбулентность, можно рассматривать как частные случаи транспортного уравнения (7.9). Указанный факт позволяет ограничиться численным решением этого уравнения для различных значений Φ . Следовательно, при создании программы расчета достаточно записать общую последовательность операций для решения уравнения (7.9), которую можно применять для определения Φ , используя соответствующие выражения для Γ и S и, конечно, соответствующие начальные и граничные условия.

Более подробно с методами решения таких уравнений можно познакомиться в монографиях по методам вычислительной гидродинамики [21, 22 и др.].

Можно выделить также модели турбулентности, которые не основываются полностью на уравнениях Рейнольдса. Сюда, например, относится очень перспективный метод моделирования крупных вихрей. В этом методе сделана попытка разрешить крупномасштабное турбулентное движение из неосредненных уравнений Навье – Стокса, а моделирование турбулентности проводится лишь для описания наиболее мелких вихрей. Такой подход очень перспективен, однако, вычислительные затраты, связанные с его применением, оказываются слишком высокими для того, чтобы использовать его в инженерных приложениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1969. – 742 с.
2. Теория теплообмена: Учебник для вузов / Под ред. акад. РАН А.И. Леонтьева. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. – 684 с.
3. Кутателадзе С.С., Леонтьев А.И. Теплообмен и трение в турбулентном пограничном слое. – 2-е изд. перераб. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 320 с.
4. Хинце И.О. Турбулентность. – М.: Физматгиз, 1963. – 680 с.
5. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. – М.: Атомиздат, 1979. – 415 с.
6. Бруацкий Е.В. Турбулентные стратифицированные струйные течения. – Киев: Наукова думка, 1986. – 295 с.
7. Белов И.А. Модели турбулентности: Учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. / Ленингр. мех. ин-т им. Д.Ф. Устинова. – Л., 1986. – 100 с.
8. Турбулентность. Принципы и применения / Под ред. У. Фроста, Т. Моулдена. – М.: Мир, 1980. – 535 с.
9. Кирпиков В.А., Шорин Г.Н. Введение в теорию пограничного слоя: Учеб. пособие / Под ред. проф. А.А. Гухмана / Москов. ин-т хим. машиностроения. – М., 1974. – 288 с.
10. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – 6-е изд., перераб и доп. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
11. Себеси Т., Брэдишоу П. Конвективный теплообмен. – М.: Мир, 1987. – 590 с.
12. Волчков Э.П. Пристенные газовые завесы. – Новосибирск: Наука, 1983. – 240 с.
13. Эккерт Э.Р., Дрейк Р.М. Теория тепло- и массообмена. – М.: Госэнергоиздат, 1961. – 680 с.
14. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике: Учебник для вузов / В.С. Авдудевский, Б.М. Галицкий, Г.А. Глебов и др. – М.: Машиностроение, 1992. – 519 с.

-
15. Кейс В.М. Конвективный тепло- и массообмен: Пер. с англ. – М.: Энергия, 1972. – 440 с.
 16. Петухов Б.С. Теплообмен в движущейся однофазной среде / Изд-во МЭИ. – М., 1963. – 350 с.
 17. Роди В. Примеры моделей турбулентности для течений несжимаемой жидкости // Аэрокосмическая техника. – 1983. – № 2. – Т. 1, 3-14.
 18. Kral L.D. Recent experience with different turbulence models applied to the calculation of flow over aircraft components, Progress in Aerospace Sciences, 1998, 34, 481-541.
 19. Speziale C.G., Abid R., Anderson E.C. A critical evaluation of two-equation models for near wall turbulence, ICASE report No. 90-46, 1990.
 20. Пейтел В.К., Роди В., Шойерер Г. Модели турбулентности для течений в пристеночной области с малыми числами Рейнольдса (обзор) // Аэрокосмическая техника. – 1986. – № 1. – С. 183-197.
 21. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 150 с.
 22. Андерсон Д., Тannehill Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. – М.: Мир, 1990.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ.....	5
ПРЕДИСЛОВИЕ	8
ВВЕДЕНИЕ.....	10
Г л а в а 1. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ И ГАЗА.....	13
1.1. Законы переноса импульса, теплоты и вещества	13
1.2. Дифференциальные уравнения движения, энергии и диффузии	18
1.3. Ламинарное и турбулентное течения	24
1.4. Понятие о пограничном слое	25
1.5. Дифференциальные уравнения пограничного слоя (уравнения Прандтля)	27
1.6. Интегральные соотношения пограничного слоя.....	34
Г л а в а 2. ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ	47
2.1. Методы расчета ламинарного пограничного слоя	47
2.2. Пограничный слой на плоской пластине. Решение Блазиуса	50
2.3. Связь между трением, теплоотдачей и диффузией. Тройная аналогия	59
2.4. Трение и теплообмен при ламинарном течении на плоской стенке. Метод Кармана–Польгаузена	62
2.5. Ламинарный пограничный слой на проницаемой поверхности	83

Г л а в а 3. ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ	97
3.1. Переход ламинарного течения в турбулентное.....	98
3.2. Осредненное и пульсационное движения. Дифференциальные уравнения турбулентного пограничного слоя (уравнения Рейнольдса).....	102
3.3. Дополнительная вязкость и теплопроводность при турбулентном движении.....	106
3.4. Полуэмпирические гипотезы для расчета турбулентных течений.....	109
3.5. Логарифмические и степенные профили скорости, законы трения и тепломассообмена	112
3.6. Решение интегральных соотношений турбулентного пограничного слоя	126
Г л а в а 4. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ	131
4.1. Предельные относительные законы трения и тепломассообмена.....	131
4.2. Обтекание непроницаемой стенки. Влияние неизотермичности и сжимаемости газа	137
4.3. Обтекание проницаемой стенки	144
4.4. Расчет турбулентного пограничного слоя на проницаемой поверхности.....	154
Г л а в а 5. ГАЗОВЫЕ ЗАВЕСЫ	161
5.1. Эффективность газовых завес при обтекании адиабатической поверхности	161
5.2. Теплообмен в области газовой завесы	167
5.3. Теплообмен в пристенной струе.....	173
5.4. Газовая завеса с переменными физическими свойствами.....	179
5.5. Завеса в градиентных потоках и соплах	186

Г л а в а 6. ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ С ХИМИЧЕСКИМИ РЕАКЦИЯМИ	197
6.1. Тепломассообмен на реагирующей поверхности	197
6.2. Тепломассообмен на реагирующей пористой поверхности при вдуве инертного газа	206
6.3. Газовая завеса на выгорающей поверхности.....	215
6.4. Пограничный слой с фронтом горения	221
Г л а в а 7. НЕКОТОРЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ.....	229
Список литературы	238

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Эдуард Петрович Волчков,
Валерий Павлович Лебедев

**ТЕПЛОМАССООБМЕН В ПРИСТЕННЫХ
ТЕЧЕНИЯХ**

Учебник

Редактор *И. Л. Кескевич*
Художник-дизайнер *А.В. Волошина*
Корректор *Л.Н. Ветчакова*
Компьютерная верстка *С. Н. Кондратенко*

Лицензия ИД № 04303 от 20.03.01.
Подписано в печать 10.10.02.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная.
Уч.-изд. л. 14,5. Печ. л. 15,25.
Тираж 3000 экз. (1-й завод – 1 – 500 экз.) Заказ № 961.

Издательство Новосибирского государственного
технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20
E = mail: root@publish.nstu.ru

Отпечатано в ГУП РПО СО РАСХН, ротاپринт
630500, Новосибирская обл., пос. Краснообск