

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе
Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи



Вожаков Иван Сергеевич

**Математическое моделирование волновых
режимов течения пленок жидкости в
вертикальных каналах**

01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

к. ф.-м. н.

Архипов Дмитрий Григорьевич

Новосибирск – 2017

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Обзор литературы	9
1.1. Гладкая пленка жидкости	13
1.2. Теория смазки	14
1.3. Длинноволновое приближение	16
1.4. Развитие теории смазки	18
1.5. Спектральные методы	20
1.6. Замена переменных	23
1.7. Воздействие газового потока	25
Глава 2. Плавление оболочки твэл и перемещение расплава . .	30
2.1. Модель плавления и перемещения расплава	30
2.2. Тестирование модели	33
2.3. Выводы ко второй главе	37
Глава 3. Волновые режимы течения свободно стекающей пленки жидкости	39
3.1. Свойства решений задачи волнового стекания пленки жидкости .	41
3.2. Вывод новой математической модели методом взвешенных невязок	50
3.3. Сравнительный анализ моделей волнового пленочного течения .	55
3.4. Выводы к третьей главе	58
Глава 4. Волновые режимы течения пленки жидкости под воздействием газового потока	60
4.1. Математическая постановка задачи	60
4.2. Вывод эволюционного уравнения при малых числах Рейнольдса	62

4.3.	Линейные модели для вычисления тензора напряжений газового потока	70
4.4.	Результаты моделирования динамики двухфазной системы . . .	73
4.5.	Вывод интегральной модели с учетом членов до второго порядка малости	77
4.6.	Выводы к четвертой главе	91
Заключение		94
Список литературы		96

Введение

Актуальность темы исследования.

Моделирование волновых течений является одной из фундаментальных проблем гидродинамики и теории нелинейных волновых процессов. Зачастую в энергетических установках имеют место расслоенные двухфазные режимы течения, поэтому их изучение представляется весьма интересным не только с точки зрения фундаментальной науки, но и практического приложения. Поэтому поиск оптимальных параметров двухфазного течения играет решающую роль в проектировании различных энергетических установок. Немаловажным для практических приложений является задача устойчивости пленочного течения формирующегося под влиянием сильного газового потока. Изучение нелинейных волновых режимов имеет большое значение для определения оптимальных параметров течения в различных энергетических установках. Для решения этих задач необходимо создание новых математических моделей и развитие существующих вычислительных методов. Так например, в настоящее время прямое численное моделирование двухфазных течений требует колоссальных вычислительных ресурсов, поэтому сегодня требуется разработка новых подходов к этому вопросу с учетом его особенностей.

Обеспечение безопасной эксплуатации энергетических установок в настоящее время является актуальной задачей в атомной энергетике. Подход к проектированию, основанный на минимизации ущерба даже в случае тяжелой аварии, требует отдельных исследований. На сегодняшний день для реакторов с водяным теплоносителем есть хорошо зарекомендовавшие себя верифицированные модели, позволяющие предсказывать ход аварии, однако для реакторов на быстрых нейтронах (БН) таковые отсутствуют. Реакторы типа БН имеют свои отличительные особенности, поэтому для описания процессов в ходе аварии в таких реакторах требуется разработка новых моделей.

Целью диссертационной работы является разработка новых моделей

и развитие методов моделирования двухфазных течений.

Основные задачи работы.

Разработка новых методов решения задачи о моделировании свободностекающей тонкой пленки жидкости.

Разработка новых методов решения задачи о моделировании совместного течения тонкой пленки жидкости и турбулентного газового потока.

Создание модели плавления и перемещения расплава оболочек твэл с учетом особенностей хода тяжелой аварии в реакторах типа БН.

Научная новизна.

Впервые обнаружена инвариантность модельных уравнений для свободностекающей пленки жидкости. Показано, что решения этой системы в расширенной области обладают симметрией.

С использованием обнаруженной симметрии разработана новая модельная система уравнений галеркинского типа.

Получено новое эволюционное уравнение для описания слабонелинейных возмущений на пленке жидкости, обдуваемой спутным газовым потоком.

Получена новая система уравнений для моделирования при умеренных числах Рейнольдса стекающей пленки жидкости, обдуваемой газовым потоком, с учетом вязких членов второго порядка малости по параметру длинноволновости.

Разработана новая модель плавления и перемещения расплава оболочек твэл в реакторах типа БН.

Теоретическая и практическая значимость.

Обнаружена инвариантность в модельных уравнениях свободностекающей пленки жидкости, что позволило существенно сократить время расчета эволюции стекающей пленки жидкости.

В результате анализа моделей трения пленки с газом, расчета типичных сценариев эволюции обдуваемой газом пленки и сопоставления результатов расчета с экспериментальными данными были выявлены сильные и слабые сторо-

ны квазистационарных моделей трения пленки с газом, а также выработаны рекомендации по использованию этих моделей при расчете эволюции.

Результаты настоящей работы по изучению обдуваемой газом пленки жидкости значительно сужают круг возможных гипотез, объясняющих природу вторичной неустойчивости.

Разработанные модели плавления и перемещения расплава оболочек ТВЭЛ в реакторах типа БН могут быть использованы для обоснования безопасности разрабатываемых реакторов при анализе начальных этапов тяжелых аварий.

Положения, выносимые на защиту.

Свойства системы уравнений для моделирования тонких пленок жидкости в длинноволновом приближении.

Новая низкоразмерная модельная система галеркинского типа.

Эволюционное уравнение для моделирования обдуваемых спутным потоком газа тонких пленок жидкости, полученное в приближении малых чисел Рейнольдса.

Результаты расчетов эволюции возмущений на тонкой пленки жидкости под действием газового потока.

Новая интегральная модельная система обдуваемой газовым потоком тонкой пленки жидкости при умеренных числах Рейнольдса, учитывающая вязкие члены во втором порядке малости по параметру длинноволновости.

Результаты моделирования вторичной неустойчивости на заднем склоне первичных волн.

Модель плавления и перемещения расплава оболочек ТВЭЛ реакторов типа БН.

Апробация результатов.

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях: Всероссийская научная конференция "Теплофизика и физическая гидродинамика" с элементами школы молодых ученых (Ялта, 18-26 сентября 2016); Всероссийская конференция "XXXII Сибирский теплофизический семинар" (Но-

восибирск, 19–20 ноября 2015); XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 20-24 августа 2015); Bifurcations and Instabilities in Fluid Dynamics (Париж, Франция, 15-17 июля 2015); "Фундаментальные основы МЭМС- и нанотехнологий" (Новосибирск, 15-18 июня 2015); Всероссийская школа-конференция молодых учёных с международным участием "Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики" (Новосибирск, 2014); "Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики" (Алушта, 2014); 5-ая Всероссийская конференция с участием зарубежных ученых "Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения" (Бийск, 2014); Конференция молодых ученых "Новые нетрадиционные и возобновляемые источники энергии" (Новосибирск, 2013); Международная конференция "Математические и информационные технологии, MIT-2013" (Врнячка Баня, Сербия, Будва, Черногория, 2013).

Публикации.

Материалы диссертации опубликованы в 8 статьях. Из них 5 в журналах из перечня ВАК и 3 статьи в рецензируемых журналах. Кроме этого материалы опубликованы в 11 тезисах докладов.

Личный вклад автора в защищаемую работу является следующим:

Диссертантом получены модельные уравнения, написаны программы для их решения, проведены теоретические и численные расчеты и обработаны результаты. Инвариантность модельных уравнений свободно-стекающей пленки жидкости показана совместно с Архиповым Д.Г. Диссертантом совместно с Архиповым Д.Г. разработаны программы для нахождения решений модельных уравнений. Диссертантом получена модель на четных полиномах Чебышева, проведен сравнительный линейный анализ, численные расчеты и обработаны результаты.

Постановка задачи о стекании пленки жидкости совместно с газовым потоком сформулирована совместно с Архиповым Д.Г. и Цвелодубом О.Ю. Диссертантом получено эволюционное уравнение на толщину пленки жидкости.

Диссертантом получена новая модель обтекаемой газом пленки жидкости, учитывающая влияние вязких членов во втором порядке по параметру длинноволновости и проведены расчеты эволюции возмущений при умеренных числах Рейнольдса.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, 4 глав, включающих в себя обзор литературы, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 103 страниц, из них 94 страницы текста, включая 30 рисунков. Библиография включает 79 наименований на 8 страницах.

Глава 1

Обзор литературы

Одним из ключевых элементов при обосновании безопасной эксплуатации ядерных энергетических установок (ЯЭУ) является расчет процессов, протекающих в ходе развития тяжелых аварий с плавлением и разрушением тепловыделяющих элементов (ТВЭЛ) активной зоны.

Для описания процессов, протекающих при плавлении активной зоны реакторов с водяным теплоносителем, наилучшие предсказания дают модели, которые опираются на результаты экспериментальных исследований [1]. Подобные модели используются в кодах СОКРАТ, ICARE2, SCDAP/RELAP5 [2], [3], [4].

В процессе разработки интегрального кода СОКРАТ-БН [5] было выяснено, что из-за особенностей конструкции и физических свойств материалов ТВЭЛ реакторов, охлаждаемых жидким натрием (реакторы типа БН), использовать разработанные модели для реакторов с водяным теплоносителем не представляется возможным.

Особенностями реакторов БН являются высокие удельные энерговыделения и низкие рабочие давления, которые приводят к тому, что при закипании теплоносителя в процессе развития аварии с потерей расхода скорость течения паров натрия может достигать сотен метров в секунду, что оказывает значительное влияние на динамику течения расплава материалов ТВЭЛ.

Для обеспечения безопасности быстрых реакторов с натриевым теплоносителем за рубежом используются расчетные коды семейства SAS и SIMMER. Код SAS4A применяется для описания начальной стадии аварии с плавлением активной зоны. Модель, используемая в коде SAS4A [6] для расчета разрушения ТВЭЛ, предполагает детальное описание многих процессов, происходящих на начальном этапе аварии: плавление и перемещение оболочки; плавление и перемещение топлива внутри ТВЭЛ; разрушение ТВЭЛ и выброс расплава топлива

и оболочки в канал теплоносителя.

Семейство кодов SIMMER [7] изначально разрабатывалось для анализа переходной стадии аварии, которая сопровождается полным разрушением активной зоны. Современная версия кода может быть использована также и для анализа процессов, происходящих в единичной ТВС. В настоящее время широкая область применимости кода связана с развитой системой соотношений, используемых для описания динамики поведения многофазного потока.

В России основные работы по обоснованию проектов реакторных установок (РУ) типа БН проводились в ГНЦ РФ ФЭИ им. Лейпунского. Там же был разработан код COREMELT [8], который для моделирования физических процессов на этапе тяжелой аварии использует подходы близкие к подходам кода SIMMER-III. Активная зона (а.з.) в коде COREMELT рассчитывается в приближении пористого тела [9]. Перемещение расплава в каналах с теплоносителем рассчитывается с использованием многоконтинуальной модели [10].

Для анализа событий в быстром реакторе предполагается использование подхода, учитывающего особенности конструкции твэл быстрого реактора, т.е. подробное рассмотрение структуры твэл и связанные с этим особенности в процессах плавления и перемещения расплава. Предложенный подход позволяет детально описывать поведение расплава на начальном этапе тяжелой аварии, когда распространение расплава с хорошей точностью описывается пленочным течением под действием гравитации и газового потока.

Тонкие пленки жидкости – это частный случай двухфазных течений, которые применяются во многих современных технологиях. В литературе можно найти следующие упоминания и примеры использования тонких пленок жидкости:

1. пленочное охлаждение ракетных двигателей [11], лопаток турбин [12] и реакторных теплообменников [13],
2. транспортировка жидкостей газовыми потоками в нефтяных трубопро-

водах [14],

3. транспортировка радиоактивных материалов с дождевой водой [15],
4. теплоперенос тонким слоем расплавленного металла [1].

Несмотря на существенное различие в содержании отдельных задач, относящихся к различным направлениям, в процессе подготовки их к решению необходима математическая формулировка задачи. Полная формулировка задачи о свободном стекании изотермических пленок по вертикальной поверхности в двумерной постановке включает в себя систему уравнений Навье – Стокса и неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.3)$$

На стенке ($y = 0$) записываются условия прилипания и непротекания:

$$u = 0 \quad (1.4)$$

$$v = 0 \quad (1.5)$$

Наличие кривизны поверхности на свободной границе обуславливает скачок давления:

$$\sigma_{ij} n_j n_i + p_0 = \sigma K \quad (1.6)$$

При свободном стекании пленки газ считается не вязким, по этой причине на свободной поверхности граничные условия означающие отсутствие касательных напряжений имеют вид:

$$\sigma_{ij} n_j \tau_i = 0 \quad (1.7)$$

Здесь i, j – индексы, относящиеся к координатам x, y соответственно, σK – капиллярный скачок давления на границе раздела фаз, σ – коэффициент поверхностного натяжения.

Кривизна поверхности K выражается через мгновенную толщину $h = h(x, t)$ следующим образом:

$$K = \frac{h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}}$$

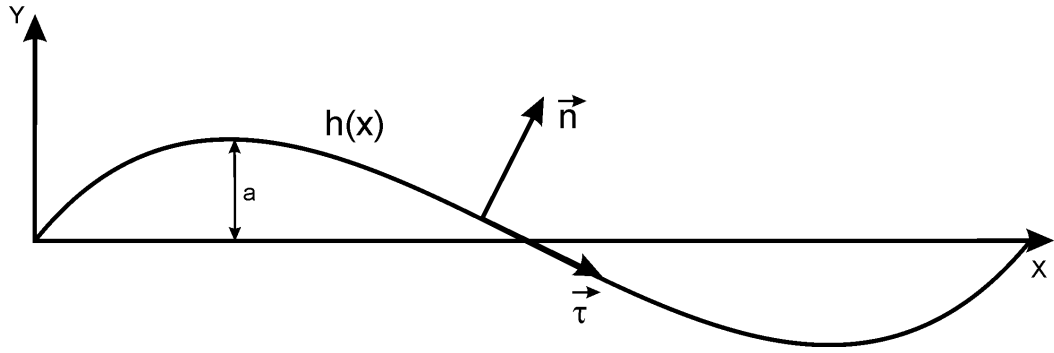


Рис. 1.1. Волна

Для компонент нормального и тангенсального единичных векторов n и τ (рисунок 1.1), имеем:

$$\mathbf{n} = \left(\frac{-h_x}{\sqrt{1 + h_x^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + h_x^2}} \right) \quad (1.8)$$

$$\tau = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + h_x^2}}, \frac{h_x}{\sqrt{1 + h_x^2}} \right) \quad (1.9)$$

Компоненты тензора напряжений имеют вид:

$$\sigma^{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.10)$$

$$\sigma^{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (1.11)$$

$$\sigma^{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.12)$$

С учетом выражений (1.8) - (1.12) граничные условия на свободной поверхности (1.6 - 1.7) для нормальных и касательных напряжений принимают вид:

$$p = p_0 - \frac{\sigma h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}} - 2\mu \frac{1 - h_x^2}{1 + h_x^2} \frac{\partial u}{\partial x} - 2\mu \frac{h_x}{1 + h_x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (1.13)$$

$$4h_x \frac{\partial u}{\partial x} - (1 - h_x^2) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (1.14)$$

На свободной поверхности также выполняется кинематическое условие (условие непротекания):

$$v(h) = \frac{\partial h}{\partial t} + u(h) \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1.15)$$

В таком виде задача чрезвычайно сложна для аналитического решения, а ее численное решение стало возможно лишь в последние годы в связи с появлением более эффективных численных методов и колоссально возросшими возможностями вычислительных машин.

1.1. Гладкая пленка жидкости

Одно из первых теоретических исследований пленочного течения является проведенное в 1916 году в основополагающей для теории пленочной конденсации работы Нуссельта Nusselt [16]. Дальнейшее развитие эта проблема получила в трудах Яacob [17] и Кутателадзе [18]. В своей работе Нуссельт дал точное решение задачи о безволновом стекании тонкого слоя вязкой жидкости по твердой стенке. Для гладкой пленки жидкости постоянной толщины стекающей по вертикальной поверхности система уравнений Навье – Стокса принимает вид:

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g = 0 \quad (1.16)$$

с граничными условиями:

$$u(0) = 0 \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(h) = 0 \quad (1.18)$$

Решение задачи (1.16)-(1.18) для профиля скорости имеет вид:

$$u = \frac{g}{\nu} \left(yh - \frac{y^2}{2} \right) \quad (1.19)$$

Из (1.19) находим выражение для расхода:

$$q = \int_0^h u dy = \frac{gh^3}{3\nu} \quad (1.20)$$

Для числа Рейнольдса имеем:

$$Re = \frac{q}{\nu} = \frac{gh^3}{3\nu^2} \quad (1.21)$$

Среднерасходная скорость:

$$u_0 = \frac{1}{h} \int_0^h u dy = \frac{gh^2}{3\nu} \quad (1.22)$$

и скорость жидкости на поверхности:

$$u(h) = \frac{gh^2}{2\nu} = \frac{3}{2}u_0 \quad (1.23)$$

Число Рейнольдса, расход и среднерасходная скорость являются характерными не только для гладких, но и для волнистых стекающих пленок жидкости и используются при решении задач, связанных с ними.

1.2. Теория смазки

Течение тонких слоев жидкости, распространяющихся по твердым поверхностям, имеет длинную историю изучения, начатую со времен Рейнольдса, который был одним из первых исследователей течения смазочных материалов [19]. Эксперименты, проведенные Beauchamp Tower в 1883-1884 годах, подтолкнули Рейнольдса к созданию того, что сегодня называют теорией смазки, которая

широко использовалась для изучения течения тонких пленок жидкости. Такое раннее взаимодействие теории и эксперимента стало важной вехой в изучении этого вопроса.

Теория смазки стала первым и наиболее простым подходом к решению нестационарной гидродинамической задачи. В этой теории используется предположение о локальной гладкости пленки, которое накладывает значительные ограничения на ее использование: теория смазки применима для описания течения жидкостей с чрезвычайно низкими числами Рейнольдса ($Re \ll 1$).

Исходное уравнение неразрывности имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.24)$$

Проинтегрируем его по поперечной координате от стенки ($y = 0$) до свободной поверхности ($y = h$):

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy + v(h) - v(0) = 0 \quad (1.25)$$

Поскольку поперечная скорость на стенке равна нулю,

$$v(0) = 0 \quad (1.26)$$

а на свободной поверхности определяется из кинематического условия

$$v(h) = \frac{\partial h}{\partial t} + u(h) \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (1.27)$$

уравнение неразрывности после интегрирования можно записать в виде:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u(h) \frac{\partial h}{\partial x} + \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy = 0 \quad (1.28)$$

или

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u(h) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy - u(h) \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (1.29)$$

Переходя к расходу:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (1.30)$$

Далее подставим выражение для расхода гладкой пленки:

$$q = \frac{gh^3}{3\nu} \quad (1.31)$$

В итоге получим эволюционное уравнение на толщину пленки:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{gh^2}{\nu} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (1.32)$$

Полученное уравнение может описывать распространение кинематических волн.

1.3. Длинноволновое приближение

Теория смазки Рейнольдса позволила описать нестационарные гидродинамические процессы в пленках жидкости, однако настолько упрощенная задача не могла удовлетворить возникший интерес исследователей. По этой причине начинают появляться новые гипотезы и подходы к решению пленочных задач. Особенностью пленочного течения жидкости в большинстве случаев является малость отношения характерного возмущения поверхности (h_0) к длине волны этого возмущения (l_0). В силу малости отношения $\varepsilon = h_0/l_0$ его называют параметром длинноволновости. В этом приближении некоторые члены в уравнениях Навье – Стокса для пленочной задачи малы и их можно исключить. Такой подход был назван длинноволновым приближением – впервые он был применен Прандтлем в 1904 году [20], развит Шлихтингом [21] и впоследствии нашел применение к пленочному течению в трудах Капицы [22], Левича [23], Бенни [24] и многих других.

Перепишем исходную систему уравнений в безразмерном виде, где в качестве характерных параметров обычно используют величины, полученные для

гладкой пленки (см. 1.1):

$$\varepsilon Re \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\varepsilon Re \frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{Re}{Fr} \quad (1.33)$$

$$\varepsilon^2 Re \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -Re \frac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.35)$$

На стенке ($y = 0$) – условия прилипания и непротекания имеют вид:

$$u(0) = 0 \quad (1.36)$$

$$v(0) = 0 \quad (1.37)$$

Динамическое условие для касательных напряжений ($y = h$) имеет вид:

$$4\varepsilon^2 h_x \frac{\partial u}{\partial x} - (1 - \varepsilon^2 h_x^2) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (1.38)$$

Кинематическое условие на свободной поверхности ($y = h$) имеет вид:

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1.39)$$

Изменение давления вследствие кривизны поверхности с учетом (1.38) имеет вид:

$$p = p_0 - \frac{3^{1/3} Fi^{1/3}}{Re^{5/3}} \frac{\varepsilon^2 h_{xx}}{(1 + \varepsilon^2 h_x^2)^{3/2}} - \frac{2\varepsilon}{Re} \frac{1 - \varepsilon^2 h_x^2}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.40)$$

В длинноволновом приближении исходная постановка задачи в виде уравнений Навье-Стокса преобразуется в систему уравнений, в которой оставлены члены, содержащие ε со степенью не больше единицы:

$$\varepsilon Re \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\varepsilon Re \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{Re}{Fr} \quad (1.41)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (1.42)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.43)$$

с граничными условиями прилипания и непротекания на стенке ($y = 0$):

$$u(0) = 0 \quad (1.44)$$

$$v(0) = 0 \quad (1.45)$$

скачком давления ввиду искривления поверхности раздела:

$$p = p_0 - \sigma h_{xx} \quad (1.46)$$

отсутствия касательных напряжений на свободной поверхности ($y = h(x, t)$):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (1.47)$$

и кинематическим условием на свободной поверхности ($y = h(x, t)$):

$$v(x, h(x, t)) = \frac{\partial h}{\partial t} + u(x, h(x, t)) \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1.48)$$

1.4. Развитие теории смазки

Введение малого параметра позволило использовать метод последовательных приближений для решения задачи пленочных течений. Следуя классическим работам Бенни [24], Гевика [25], Лина [26], Накайи [27], Атертона и Хомси [28], в нулевом порядке малости по ε система уравнений Навье-Стокса запишется в виде:

$$u_{\eta\eta}^0 + \frac{Re}{Fr} (h^0)^2 = 0 \quad (1.49)$$

$$\frac{\partial h^0}{\partial t} + \frac{\partial(u^0 h^0)}{\partial x} + \frac{\partial(v^0 h^0)}{\partial \eta} = 0 \quad (1.50)$$

Для такой задачи существует тривиальное решение - гладкая пленка, для которой безразмерный параметр h_0 по определению равняется единице.

Тогда профиль скорости примет вид:

$$u^0 = \frac{Re}{Fr} \left(\eta - \frac{\eta^2}{2} \right) \quad (1.51)$$

Найденный профиль скорости совместно с равенством расхода единице позволяет исключить из уравнений число Фруда, однозначно связав его с числом Рейнольдса:

$$Q^0 = 1 \Rightarrow Fr = \frac{Re}{3} \quad (1.52)$$

$$h_0 = \left(\frac{3\nu^2 Re}{g} \right)^{1/3} \quad (1.53)$$

$$u_0 = \left(\frac{\nu Re^2 g}{3} \right)^{1/3} \quad (1.54)$$

Включив в рассмотрение кривизну поверхности $h = h(x, t)$ мы придем к уравнению аналогичному (1.32):

$$h_t + 3h^2 h_x = 0 \quad (1.55)$$

Учитывая члены до первого порядка по параметру длинноволновости ε включительно, уравнения Навье-Стокса примут вид:

$$\varepsilon Re \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\varepsilon Re \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{Re}{Fr} \quad (1.56)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (1.57)$$

$$u = u^0 + \varepsilon u^1$$

$$v = 0 + \varepsilon v^1$$

В этом приближении уравнение на толщину пленки примет вид (при условии $Re \sim 1$):

$$h_t + 3h^2 h_x + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3} \varepsilon^2 Re We h^3 h_{xxx} + \frac{6}{5} Re h^5 h_x h \right) = 0 \quad (1.58)$$

Если в этом уравнении положить $h = 1 + H$, где H имеет порядок ε – возмущение толщины пленки, и в предположении слабой нелинейности оставить

члены до первого порядка малости включительно, то мы получим известное модельное уравнение для двумерных волн (уравнение Непомнящего) [29]:

$$H_t + 3H_x + 6HH_x + \varepsilon ReH_{xx} + \varepsilon^3 Wh_{xxx} = 0 \quad (1.59)$$

Недостатком слабо нелинейных моделей является то, что они справедливы только для волн малой амплитуды. Для случая длинных волн (уравнение 1.58), мы будем оставаться в области применимости, однако амплитуда не обязательно будет мала. Уравнение (1.58) было получено без каких либо предположений о величине амплитуды возмущений. Пумир, Манневил и Помо [30] показали, что это уравнение имеет сингулярность. Стационарно-бегущие уединенные волны имеют место только в ограниченном диапазоне чисел Рейнольдса, а нестационарные волны имеют тенденцию к самофокусировке, за которой следует взрывной рост их амплитуды. Этот факт был подробно исследован в работе [31].

1.5. Спектральные методы

Исходная постановка задачи подразумевает решение в изменяющейся и неизвестной заранее области течения, что значительно усложняет математическое и численное моделирование. Одним из плодотворных путей решения проблемы подвижной поверхности в свое время стал интегральный подход. Впервые его применил Капица [22]. Дальнейшее развитие метод получил в работах Левича [23], Маурина [32] и Шкадова [33]. Для вертикальной пленки жидкости уравнение сохранения импульсов было получено Шкадовым в 1967 году, в основу которого положена гипотеза об автомоделном полупараболическом профиле продольной скорости в пленке, проверенная в ряде экспериментов:

$$u(x, \eta, t) = 2\eta - \eta^2, \eta = y/h(x, t) \quad (1.60)$$

Интегрируя уравнение (1.41) по поперечной координате, получаем:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right) = -\frac{3q}{\varepsilon Re h^2} + \frac{3h}{\varepsilon Re} \frac{3^{1/3} Fi^{1/3}}{Re^{2/3}} \varepsilon^2 h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \quad (1.61)$$

Интегральную модель Шкадова критикуют за плохое соответствие результатов линейного анализа с данными полученными по полному уравнению длинноволнового приближения, в частности за значительное различие в длине волны нейтральной устойчивости, а также за неверное описание диссипации в коротковолновом пределе. Однако, эта модель, долгое время была популярной из-за удобства ее применения.

Поскольку полупараболический профиль наблюдается в очень ограниченном диапазоне чисел Рейнольдса, который зачастую имеют место только на исследовательских стендах, корректировка профиля продольной скорости позволила бы получить более точные модели. Одной из первых в этом направлении стала известная работа Руйер-Квила и Маневила [34], в которой авторы уточняют параболический профиль скорости, вводя новую переменную – тензор напряжений на стенке и записывают на эту переменную дополнительное уравнение. Этот подход не нашел широкого признания, однако спустя 2 года этим же коллективом была представлена другая работа [35]. В этой работе авторы используя классический метод Галеркина получили модельную систему для свободно-стекающей пленки жидкости на базисе из 3 полиномов:

$$\begin{aligned} g_0 &= \eta - \frac{1}{2}\eta^2 \\ g_1 &= \eta - \frac{17}{6}\eta^2 + \frac{7}{3}\eta^3 - \frac{7}{12}\eta^4 \\ g_2 &= \eta - \frac{13}{2}\eta^2 + \frac{57}{4}\eta^3 - \frac{111}{8}\eta^4 + \frac{99}{16}\eta^5 - \frac{33}{32}\eta^6 \end{aligned}$$

Здесь продольная скорость представляется в виде $u = b_0 g_0 + b_1 g_1 + b_2 g_2$, а коэффициенты перед базисными функциями определяются следующими выражениями:

$$b_0 = 3 \frac{q - s_1 - s_2}{h} \quad (1.62)$$

$$b_1 = 45 \frac{s_1}{h} \quad (1.63)$$

$$b_2 = 210 \frac{s_2}{h} \quad (1.64)$$

К выбору такого базиса авторов фактически подтолкнули аналитические результаты, полученные при рассмотрении случая слабонелинейных возмущений при малых расходах, когда числа Рейнольдса имеют порядок единицы. Полученная авторами система уравнений довольно громоздка, что значительно затрудняет ее использование для численного моделирования:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} = & \frac{27}{28}h - \frac{81}{28}\frac{q}{h^2} - 33\frac{s_1}{h^2} - \frac{3069}{28}\frac{s_2}{h^2} - \frac{12}{5}\frac{qs_1h_x}{h^2} - \frac{126}{65}\frac{qs_2h_x}{h^2} + \frac{12}{5}\frac{s_1q_x}{h} + \\ & + \frac{171}{65}\frac{s_2q_x}{h} + \frac{12}{5}\frac{qs_{1x}}{h} + \frac{1017}{455}\frac{qs_{2x}}{h} + \frac{6}{5}\frac{q^2h_x}{h^2} - \frac{12}{5}\frac{qq_x}{h} + \frac{5025}{896}\frac{qh_x^2}{h^2} - \frac{5055}{896}\frac{q_xh_x}{h} - \\ & - \frac{10851}{1792}\frac{qh_{xx}}{h} + \frac{2027}{448}q_{xx} - \frac{27}{28}Bhh_x + \frac{27}{28}\Gamma hh_{xxx} \end{aligned} \quad (1.65)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_1}{\partial t} = & \frac{1}{10}h - \frac{3}{10}\frac{q}{h^2} - \frac{3}{35}\frac{q^2h_x}{h^2} - \frac{126}{5}\frac{s_1}{h^2} - \frac{126}{5}\frac{s_2}{h^2} + \frac{1}{35}\frac{qq_x}{h} + \frac{108}{55}\frac{qs_1h_x}{h^2} - \frac{5022}{5005}\frac{qs_2h_x}{h^2} - \\ & - \frac{103}{55}\frac{s_1q_x}{h} + \frac{9657}{5005}\frac{s_2q_x}{h} - \frac{39}{55}\frac{qs_1}{h} + \frac{10557}{10010}\frac{qs_{2x}}{h} + \frac{93}{40}\frac{qh_x^2}{h^2} - \frac{69}{40}\frac{h_xq_x}{h} + \frac{21}{80}\frac{qh_{xx}}{h} - \\ & - \frac{9}{40}q_{xx} - \frac{1}{10}Bhh_x + \frac{1}{10}\Gamma hh_{xxx} \end{aligned} \quad (1.66)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_2}{\partial t} = & \frac{13}{420}h - \frac{13}{140}\frac{q}{h^2} - \frac{39}{5}\frac{s_1}{h^2} - \frac{11817}{140}\frac{s_2}{h^2} - \frac{4}{11}\frac{qs_1h_x}{h^2} + \frac{18}{11}\frac{qs_2h_x}{h^2} - \frac{2}{33}\frac{s_1q_x}{h} - \\ & - \frac{19}{11}\frac{s_2q_x}{h} + \frac{6}{55}\frac{qs_{1x}}{h} - \frac{288}{385}\frac{qs_{2x}}{h} - \frac{3211}{4480}\frac{qh_x^2}{h^2} + \frac{2613}{4480}\frac{h_xq_x}{h} - \frac{2847}{8960}\frac{qh_{xx}}{h} + \frac{559}{2240}q_{xx} - \\ & - \frac{13}{420}Bhh_x + \frac{13}{420}\Gamma hh_{xxx} \end{aligned} \quad (1.67)$$

1.6. Замена переменных

В середине 80-х годов прошлого столетия возникает альтернативный подход к решению проблемы подвижной свободной поверхности. Уравнения гидродинамики переписываются в новых переменных, преобразующих область течения в полосу постоянной толщины:

$$x = x, \quad \eta = \frac{y}{h(x, t)}, \quad t = t \quad (1.68)$$

где $h(x, t)$ – мгновенная локальная толщина пленки. Система координат (1.68) неортогональна, поэтому обычная векторная формулировка уравнений для нее неприменима. По этой причине, многие авторы ограничиваются простой заменой переменных без преобразования векторов и тензоров, содержащихся в исходных уравнениях как это было сделано в работах Гешева [36] и Трифонова [37]. Уравнение сохранения массы записывается в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\eta}{h} \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{h} \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad (1.69)$$

Выражая поперечную скорость, получаем:

$$v(\eta) = \eta u h_x - \int_0^\eta (u h)_x d\eta \quad (1.70)$$

Воспользуемся этим уравнением и найдем поперечную скорость на границе раздела:

$$v(1) = u h_x - q_x \quad (1.71)$$

Приравняв полученное выражение к кинематическому условию на свободной поверхности, имеем:

$$h_t + q_x = 0 \quad (1.72)$$

Далее выполним аналогичную замену в уравнении сохранения импульса в длинноволновом приближении:

$$\varepsilon Re \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \varepsilon^3 \frac{3^{1/3} Fi^{1/3}}{Re^{2/3}} h_{xxx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 \quad (1.73)$$

$$\varepsilon Re \left(u_t + uu_x + \frac{u_\eta}{h} \left(\eta q - h \int_0^\eta u d\eta \right)_x \right) = \varepsilon^3 \frac{3^{1/3} Fi^{1/3}}{Re^{2/3}} h_{xxx} + \frac{u_{\eta\eta}}{h^2} + 3 \quad (1.74)$$

Здесь удобно ввести новую величину:

$$v^* = \frac{1}{h} \left(\eta q - h \int_0^\eta u d\eta \right)_x \quad (1.75)$$

тогда уравнение сохранения импульса принимает вид:

$$\varepsilon Re (u_t + uu_x + v^* u_\eta) = \varepsilon^3 \frac{3^{1/3} Fi^{1/3}}{Re^{2/3}} h_{xxx} + \frac{u_{\eta\eta}}{h^2} + 3 \quad (1.76)$$

Другой способ провести преобразование (1.68) заключается в использовании новых переменных в уравнениях движения, записанных в тензорной, не зависящей от системы координат форме [38]. В данной ситуации необходимо использовать запись тензорных уравнений движения в четырехмерном пространстве, где одной из координат является время.

В работе [39] преобразование (1.68) было выполнено для системы уравнений гидродинамики, выписанной в тензорной, инвариантной относительно систем координат форме. В результате в длинноволновом приближении была получена дивергентная система уравнений:

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + \frac{\partial(huv)}{\partial \eta} = \frac{\sigma}{\rho} h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{\nu}{h} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + gh \quad (1.77)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial \eta} = 0 \quad (1.78)$$

При этом для свободно стекающей пленки на твердой стенке выполняются граничные условия прилипания

$$u(x, 0, t) = v(x, 0, t) = 0, \quad (1.79)$$

а на свободной поверхности – условие отсутствия касательных напряжений и кинематическое условие, соответственно:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x, 1, t) = 0, \quad v(x, 1, t) = 0 \quad (1.80)$$

Подчеркнем, что в (1.77)–(1.80) $u(x, \eta, t)$ и $v(x, \eta, t)$ – контрвариантные компоненты скорости, отвечающие координатам x и η , соответственно. Ясно, что, так как x осталась исходной физической декартовой координатой, то компонента $u(x, \eta, t)$, в отличие от $v(x, \eta, t)$, остается продольной компонентой физической скорости.

1.7. Воздействие газового потока

Совместное течение жидкости и газа – классическая задача гидродинамики. Применительно к задачам теплофизики и химической технологии часто имеет место турбулентное течение газа над тонким, покрытым волнами слоем жидкости. Основной объем экспериментальных исследований был посвящен случаю больших расходов жидкости, при которых происходит формирование волн возмущения и отрыв капель с поверхности пленки. Объектом исследования данной работы является случай малых расходов жидкости и высоких скоростей газа. Этот случай сравнительно мало исследован экспериментально; в то же время, он значительно ближе к классической задаче стекающих пленок жидкости и легче поддается моделированию.

Поверхность тонких пленок жидкости, стекающих по вертикальной или наклонной поверхности под действием силы тяжести, неустойчива к малым возмущениям в широком спектре волновых чисел. В результате неустойчивости амплитуда малых возмущений экспоненциально возрастает с расстоянием от области формирования пленки. Достигнув достаточно большой амплитуды, волны становятся нелинейными. Благодаря взаимодействию нелинейных волн формируются уединенные солитонобразные волны с крутым передним и поло-

гим задним склоном и выраженным капиллярным предвестником [40].

Наличие спутного потока газа существенно влияет на процессы волнообразования на поверхности пленки жидкости. Анализ линейной устойчивости и экспериментальные исследования [41] показывают, что область неустойчивости расширяется в сторону больших волновых чисел, увеличивается частота, уменьшаются длины волн максимального роста, возрастают значения фазовой скорости возмущений и инкрементов нарастания их амплитуды. Это приводит к повышению скорости и частоты следования нелинейных уединенных волн и сокращению их продольного размера. Благодаря ускорению течения вследствие увеличения средней скорости, толщина пленки жидкости и амплитуда волн уменьшаются. Кроме того, существенно сокращается начальный участок линейного роста и формирования нелинейных волн. Помимо этого, при наличии потока газа сильно уменьшается или вовсе исчезает капиллярный предвестник волн.

Исследования развитых волн на поверхности тонких пленок жидкости, обдуваемых сильным потоком газа проводились, главным образом, в рамках статистического подхода. Suzuki и Nagiware [42] использовали датчики проводимости с вынесенными в поток электродами для получения временных записей толщины пленки жидкости и измерения средних характеристик волн (амплитуда, частота, скорость). В частности, ими было показано, что характеристики волн практически не меняются с изменением расстояния от входа в канал. Asali and Hanratty [43] измеряли среднюю длину волны по тeneвым фотографиям поверхности пленки. Измеренная частота оказалась в два раза ниже расчетной частоты для волн максимального роста.

Более детальный подход к исследованию волновой структуры был продемонстрирован в работе Ohba and Nagaе [44]. В этой работе мгновенные распределения локальной толщины пленки жидкости были получены методом люминесцентной визуализации. В ограниченной области режимов ($V_g = 15 - 30$ м/с) было обнаружено сосуществование двух типов волн: волн ряби с малым

поперечным размером и «кольцевых» волн (“ringwaves”) с поперечным размером, превышающим размер видимой области канала. За пределами указанной области кольцевых волн не наблюдалось. Было показано, что кольцевые волны отличаются от волн ряби большими значениями амплитуды и скорости.

В работе [45] при помощи метода лазерно-индуцированной флюоресценции были получены мгновенные распределения локальной толщины пленки жидкости в одном продольном сечении канала с высокой частотой съемки. Таким образом, было проведено исследование пространственно-временной эволюции волн. Было обнаружено наличие двух типов волн, различающихся амплитудой, скоростью и временем жизни. Волны двух типов были названы первичными и вторичными волнами. Двухволновая структура наблюдалась в широкой режимной области: фактически, эта область покрывает все режимы без уноса жидкой фазы, начиная с относительно небольших (порядка 10 м/с) скоростей потока газа. Данные по средней скорости волн двух типов хорошо согласуются с данными Ohba and Nagae [44]. Различие в области существования объясняется ошибочным определением первичных волн как кольцевых, т.е., занимающих весь периметр канала. Согласно [46], эти волны имеют конечный поперечный размер, уменьшающийся с ростом скорости газа.

Ключевое же отличие первичных волн от вторичных состоит не в значениях волновых характеристик, а пространственно-временном поведении. Первичные волны, распространяясь вниз по потоку, генерируют на задних склонах вторичные волны. Возникнув, вторичная волна движется медленнее породившей ее первичной волны по тонкому остаточному слою между первичными волнами до тех пор, пока ее не поглотит следующая первичная волна. Пример такого пространственно-временного поведения волн двух типов, наблюдаемого в эксперименте, проиллюстрирован на рисунке 1.2. Первичные волны обозначены на рисунке римскими цифрами, вторичные - арабскими. Профили толщины пленки даны в системе отсчета волны I (ее скорость - 0.7 м/с). Вторичные волны 4, 5 и 6 генерируются первичной волной I, а вторичные волны 1 и 2 поглощаются

первичной волной II. Можно также отметить, что вторичные волны 9 и 10 по амплитуде сравнимы с первичными волнами.

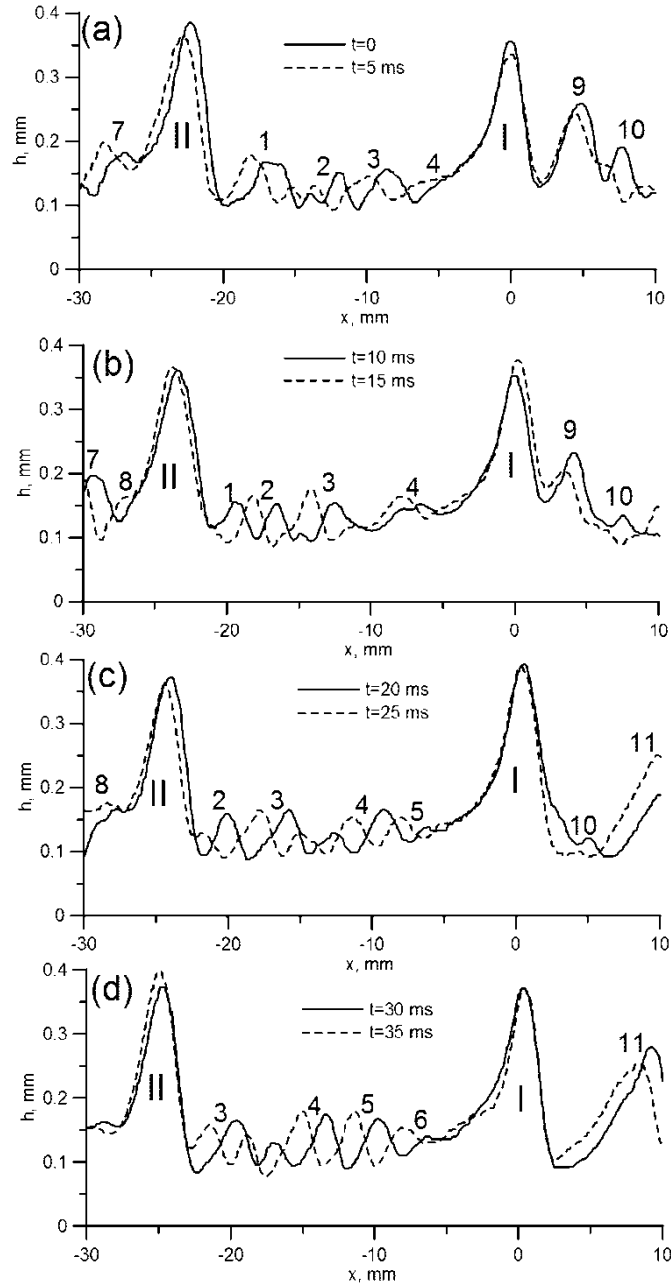


Рис. 1.2. Эволюция мгновенного профиля толщины пленки с шагом по времени 5 мс. $Re = 20$, $V_g = 18$ м/с (эксперимент).

Таким образом, наличие высокоскоростного спутного потока газа не только воздействует на характеристики уединенных волн, но и порождает вторичную неустойчивость заднего склона первичных волн. Экспериментальное определение природы этой неустойчивости является крайне сложной задачей. Можно выдвинуть ряд гипотез, описывающих механизм такой неустойчивости:

1) Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца на локальном повышении толщины пленки жидкости Woodmansee and Hanratty [47] использовали подобный подход в модели формирования волн ряби на гребнях волн возмущения в режимах с уносом жидкости в дисперсную фазу.

2) Развитием зоны смешения (пограничного слоя) под задним склоном волны (Brauner and Maron [48]). 3) Существованием вихря в пограничном слое в газовой фазе, приводящий к понижению давления над задним склоном волны Hewitt and Hall Taylor [49]

4) Поперечной неустойчивостью заднего склона или гребня первичной волны. Вторичные волны имеют меньший поперечный размер. Сходное явление было обнаружено при исследовании атомизации обдуваемых газом струй жидкости. В этой ситуации на поверхности кольцевых волн, генерируемых благодаря неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, появляются трехмерные поперечные волны, возникающие благодаря неустойчивости Рэлея-Тэйлора (Gorokhovski and Herrmann [50]).

5) Генерация "взрыва турбулентности" в пленке жидкости на заднем склоне волны за счет взаимодействия с турбулентными вихрями в газовой фазе. В этом случае возможна реакция стенки канала, вытесняющая турбулентную зону в сторону поверхности и генерирующая вторичные волны (Pham [51]). Экспериментальная проверка описанных выше гипотез потребовала бы измерения полей скорости как в жидкости, так и в газовой фазе (например, при помощи метода PIV), что является крайне сложной экспериментальной задачей ввиду малой толщины и высокой скорости пленки, сильных градиентов скорости, оптических искажений, нерегулярной волновой структуры и т.д. В настоящее время такие измерения проводятся лишь для толстых пленок жидкости и слабого или отсутствующего потока газа (Alekseenko [52], Zadrazil and Markides [53]). Помимо всего прочего, описанные механизмы не противоречат друг другу и могут действовать совместно.

Глава 2

Плавление оболочки твэл и перемещение расплава

2.1. Модель плавления и перемещения расплава

В реакторах с быстрыми нейтронами (РУ БН) могут реализовываться два основных механизма разрушения твэла. Первый механизм обусловлен высокой энергонапряженностью активной зоны и низкой теплопроводностью оксидного топлива. При резком росте реактивности (авария типа УТОР в международной классификации), быстрое увеличение мощности при низкой скорости отвода тепла может привести к плавлению или диспергированию топливного сердечника еще до того, как будет разрушена оболочка. Второй механизм обусловлен разогревом оболочки из-за ухудшения отвода тепла с поверхности твэл при кризисе кипения, вызванного снижением расхода теплоносителя (авария типа LOF). При таких условиях твэл нагревается постепенно, а значительное отличие в температурах плавления топлива и оболочки приводит к тому, что первой начинает плавиться оболочка твэл.

Модель, представленная в настоящей работе, описывает разрушение твэл в соответствии со вторым механизмом. Результаты экспериментов, проведенных на реакторе TREAT [54], и визуальных наблюдений перемещения расплава оболочки [55] показали, что при умеренных скоростях набегающего газового потока (до 100 м/с) расплав перемещается по твэл в виде пленки. При больших скоростях пленка разбивается на ручейки. Поэтому базовым предположением модели является представление о том, что после плавления расплав оболочки движется в виде жидкой пленки под действием сил гравитации и газового потока.

Предположение о преобладании вначале движения расплава пленочной

структуры, позволяет построить соответствующую данному режиму математическую модель, что нашло отражение в работах многих авторов [56], [57], [58]. Стоит отметить, что недостатком работ [57], [58] является предположение о равенстве толщины пленки во всех точках вдоль направления движения. В работе [59] показано, что пленка, увлекаемая газовым потоком (без учета капиллярных и инерционных сил), имеет линейный профиль по толщине: $\delta(z, t) \approx \frac{\mu_m}{\tau_i} \frac{z}{t}$, а при движении под действием силы тяжести профиль имеет вид: $\delta(z, t) \approx \sqrt{\frac{\mu_m z}{\rho_m g t}}$. Здесь, δ – толщина пленки расплава, ρ_m – плотность расплава, z – координата в направлении движения, τ_i – напряжение трения на границе с газовым потоком, μ_m – динамическая вязкость расплава.

Для того чтобы с хорошей точностью рассчитывать перемещение расплава необходимо учитывать значительную неравномерность толщины пленки вдоль направления своего движения, то есть решать полное уравнение сохранения массы.

Изменение массы расплава в выделенном объеме может быть найдено из решения уравнения баланса:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_m dV = - \int_S \rho_m v_m dS + \Gamma \quad (2.1)$$

Представленное уравнение может быть решено с использованием метода конечных объемов (схематичное изображение расчетных ячеек представлено на рисунке 2.1):

$$\frac{\partial m}{\partial t} = (\rho_m v_m S)_l - (\rho_m v_m S)_r + \Gamma \quad (2.2)$$

Здесь m – масса расплава в расчетном объеме, v_m – скорость движения расплава, Γ – количество массы, образующееся (исчезающее) за единицу времени в результате плавления (затвердевания), S – площадь поперечного сечения пленки расплава, индексы r и l – показывают, что значения переменных берутся на двух границах (одномерный случай).

Аналогично для выделенного объема записывается уравнение сохранения импульса. При расчете учитывается взаимодействие с газовым потоком, сила

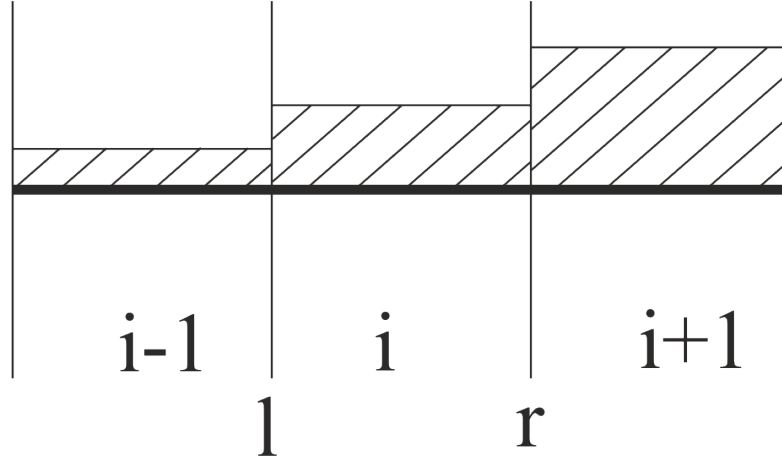


Рис. 2.1. Схематичное изображение расчетных ячеек

тяжести и трение расплава с твердой стенкой.

$$\frac{\partial m \bar{v}_m}{\partial t} + (\rho_m |v_m| \bar{v}_m S)_r - (\rho_m |v_m| \bar{v}_m S)_l = \bar{F}_{gas} + \bar{F}_{grav} + \bar{F}_{fric} \quad (2.3)$$

Трение с газовым потоком рассчитывается по известной формуле [60], которая была получена для водяных пленок. Использование формулы для расплава металла оправдано, по причине подобия гидродинамики жидких металлов и воды. Так как скорость газового потока ($v_g \approx 100$ м/с) значительно превосходит по величине скорость перемещения расплава ($v_m < 1$ м/с), скоростью расплава можно пренебречь. Т.е. расплав можно считать неподвижным относительно газового потока. Выбор коэффициента трения определяется режимом течения газового ядра.

Здесь $F_{gas} = \tau_i S$, $\tau_i = \lambda_g \frac{\rho_g v_g^2}{8}$, где $\lambda_g = 0,02(1 + 300 \frac{\delta}{D})$, S – площадь расплава, взаимодействующая с газовым потоком, D – гидравлический диаметр канала. $F_{grav} = mg$ – сила тяжести, $F_{fric} = \lambda_w \frac{\rho_m v_m^2}{8} S_{wall}$ – сила трения с твердой стенкой, где S_{wall} – площадь соприкосновения расплава с твердой стенкой.

Для ламинарного режима используется коэффициент трения, полученный для гладкой ламинарной пленки, стекающей по поверхности, которая расположена под углом θ к горизонту [59]:

$$\lambda_w = \frac{64}{Re_m} - \frac{8 \sin \theta}{3 Fr}, Re_m = \frac{\rho_m v_m 4 \delta}{\mu_m}, Fr = \frac{v_m^2}{g \delta} \quad (2.4)$$

Для турбулентного режима с удовлетворительной точностью для расчета коэффициента трения пленки со стенкой могут быть использованы обычные эмпирические корреляции для трения в круглых трубах, например, корреляция Блазиуса:

$$\lambda_w = \frac{0.316}{Re_m^{0,25}} \quad (2.5)$$

Для решения тепловой задачи с учетом фазовых переходов и определения массы образовавшегося материала было предложено решать уравнение теплопроводности в энтальпийной формулировке, в отличие, например, от кодов SAS4A [56] и SIMMER [6], использующих температурную формулировку. Преимущество энтальпийной формулировки состоит в том, что она позволяет с хорошей точностью описывать процессы плавления и затвердевания. Кроме того, по сравнению с температурной формулировкой, энтальпийная является более естественной, поскольку энтальпия при фазовом переходе изменяется непрерывно [61]:

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + q \quad (2.6)$$

Здесь ρ – плотность, h – удельная энтальпия, λ – коэффициент теплопроводности, T – температура, q – поток тепла от источников. Использование энтальпии позволяет однозначно определить температуру и фазовое состояние контрольных объемов.

2.2. Тестирование модели

Верификация разработанной модели проводилась на задачах, которые имеют аналитическое решение, а также на результатах вне реакторных экспериментов исследования плавления твэл. В частности, решение уравнения теплопроводности с учетом фазового перехода проверялось на известной задаче Стефана о плавлении цилиндра. При проведении численного эксперимента рассматривался цилиндр с твердым материалом при температуре плавления T_m . В начальный момент времени температура боковой поверхности мгновенно повы-

шается до температуры $T_w > T_m$ и поддерживается такой на протяжении всего процесса.

Процесс плавления в цилиндре при постоянной температуре стенки описывается системой уравнений, в которую входят уравнение теплопроводности и граничные условия, в том числе и на подвижной границе фаз, с учетом фазового перехода.

Решение такой задачи известно [62] и может быть представлено в виде зависимости координаты фронта плавления от времени:

$$\frac{\eta^2}{2} \ln \frac{R}{\eta} - \frac{1}{4}(R^2 - \eta^2) = -\frac{\lambda(T_w - T_m)}{\rho L} t \quad (2.7)$$

Здесь λ – коэффициент теплопроводности, ρ – плотность (считается, что она не меняется при фазовом переходе), L – скрытая теплота плавления, η – расстояние от оси цилиндра до фронта плавления, R – радиус цилиндра.

Время полного плавления цилиндра будет равно:

$$t_m = \frac{\rho L R^2}{4\lambda(T_w - T_m)} \quad (2.8)$$

Зависимость координаты фронта плавления от времени была найдена численно решением уравнения (2.7) методом Ньютона. На рисунке 2.2 представлено сравнение аналитического решения и расчетных значений. Проведено три численных эксперимента с различными параметрами, так чтобы в соответствии с формулой (2.8) время полного плавления составляло 250, 500 и 1000 секунд. Результаты расчетов представлены на рисунке тремя соответствующими наборами точек.

Расхождение в самом конце процесса плавления обусловлено дискретизацией расчетной области. Скорость движения фронта плавления зависит от соотношения внешней площади оставшейся твердой части к ее объему, а в результате разбиения расчетной области на конечные объемы это соотношение меняется скачком при переходе фронта плавления из одной расчетной ячейки в другую, что и приводит к накоплению численной ошибки, которая становится наиболее заметна когда объем и площадь стремятся к нулю.

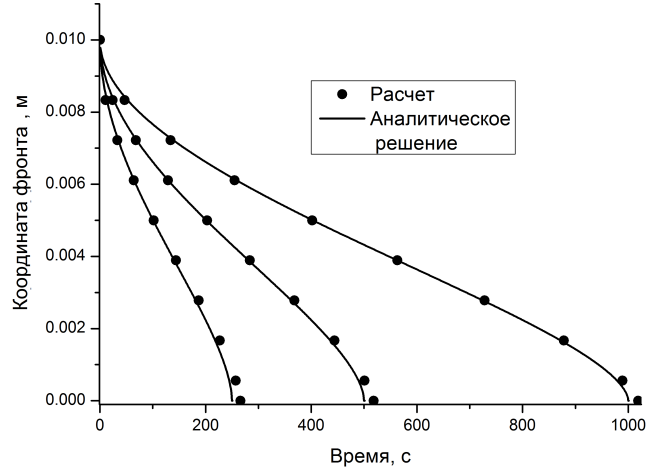


Рис. 2.2. Координаты фронта плавления в зависимости от времени

Для проверки разработанной модели стекания было проведено моделирование перемещения расплава стальной оболочки по одномерному стержню под действием гравитационных сил и сил трения со стороны газового потока. При моделировании предполагалось, что расплав не обменивается энергией ни со стержнем, ни с газовым потоком.

В численном эксперименте рассматривались два сценария. В первом сценарии конечная масса расплава, находящаяся на одном из концов горизонтального стержня, перемещается под действием сил трения со стороны газового потока. Во втором сценарии расплав находится на верхнем конце вертикального стержня и стекает под действием силы тяжести. Стационарная скорость течения пленки, при воздействии на нее только гравитационных сил имеет вид [59]:

$$\bar{v}_m = \frac{\rho_m \bar{g} \delta_m^2 \sin \theta}{3\mu_m} \quad (2.9)$$

Здесь θ – угол наклона стержня к горизонту.

В таком случае, расстояние, на которое переместилась граница расплава:

$$x_n = \left(\frac{9A^2 \rho_m g t}{4\mu_m} \right)^{1/3} \quad (2.10)$$

Здесь A – площадь продольного сечения пленки.

Стационарная скорость пленки при воздействии на нее силы трения со стороны газового потока [59]:

$$\bar{v}_m = \frac{\bar{\tau}_i \delta_m}{2\mu_m} \quad (2.11)$$

В таком случае, расстояние, на которое переместилась граница расплава [59]:

$$x_n = \left(\frac{2A\tau_i t}{\mu_m} \right)^{1/2} \quad (2.12)$$

На рисунках 2.3-2.4 представлено сравнение результатов численного расчета положения границы расплава и его аналитического решения. Расчеты выполнены для двух сценариев – стекания под действием гравитации и перемещение под действием силы трения со стороны газового потока. Видно хорошее согласие расчетных данных кодом СОКРАТ-БН и аналитического решения.

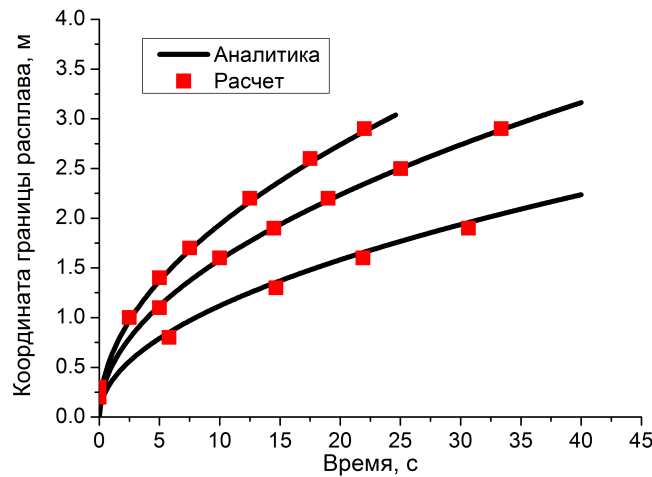


Рис. 2.3. Положение границы пленки при воздействии газовым потоком в различные моменты времени

Для верификации модели плавления и стекания оболочки было проведено моделирование эксперимента, выполненного в Аргонской национальной лаборатории на 7-стержневой сборке с натриевым теплоносителем [63].

Эксперимент выполнен в рамках R-серии на петле реактора TREAT. Петля включала в себя напорную камеру, участок входного дросселирования, пучок из семи твэл типа FFTF и специальный резервуар, имитирующий верхнюю

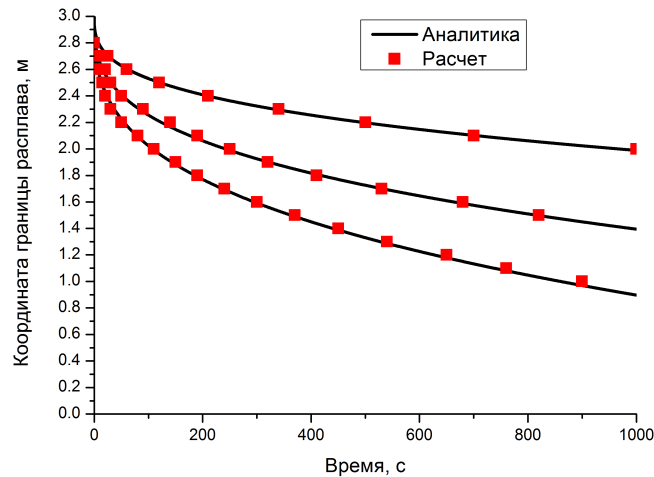


Рис. 2.4. Положение границы пленки в различные моменты времени при стекании под действием гравитации

камеру реактора со свободным уровнем натрия и газовой подушкой над ним. Петля имела U –образную форму и представляла собой разомкнутую систему. Вход был подключён к питательному баку высокого давления, а выход – к сбросному резервуару с относительно низким давлением. Разность давлений между баками являлась движущим напором циркуляции. Имитация условий аварии ULOF осуществлялась посредством сброса давления в газовой подушке питательного бака. На рисунке 2.5 представлено сравнение результатов расчета границ расплава кодом СОКРАТ-БН и SAS3A.

2.3. Выводы ко второй главе

Разработаны и внедрены модели, позволяющие описывать плавление и перемещение расплавленных оболочек ТВЭЛ реакторов типа БН. Тестирование моделей проведено на задачах, имеющих аналитическое решение, выполнена кросс-верификация с кодом SAS4A на эксперименте серии R реактора TREAT.

Представленная модель может быть применена только к начальной стадии аварии, когда расплавлены только несколько ТВЭЛ и можно пренебречь обратными связями с мощностью реактора.

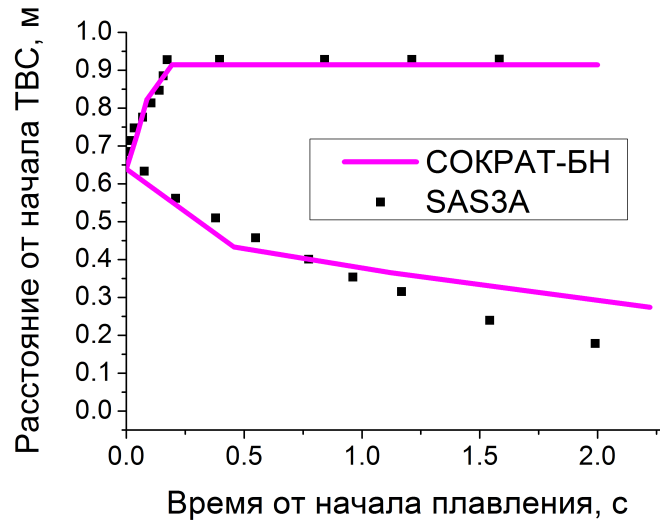


Рис. 2.5. Границы расплавленной оболочки в эксперименте R-4 в зависимости от времени после начала плавления

Недостатком и одновременно плюсом выбранной модели является ее простота. В данной модели пренебрегается волновыми процессами, возникающими вследствие неустойчивости на границе раздела фаз жидкость-газ. Дальнейшие главы будут посвящены изучению именно этого вопроса.

Глава 3

Волновые режимы течения свободно стекающей пленки жидкости

Полная формулировка задачи о волновом режиме стекания изотермических пленок включает в себя систему уравнений Навье–Стокса и неразрывности с соответствующими граничными условиями на стенке и на свободной поверхности. Такая постановка подразумевает решение задачи в изменяющейся и неизвестной заранее области течения, что значительно усложняет математическое и численное моделирование. Одним из плодотворных путей решения этой проблемы стал интегральный подход Шкадова [33], в основу которого положена гипотеза об автомодельном полупараболическом профиле продольной скорости в пленке, проверенная в ряде экспериментов. В этой работе автор также отмечает возможность уточнения картины течения в слое путем применения к системе уравнений движения жидкости классического спектрального метода Галеркина. В последнее время усилия многих исследователей сосредоточены на получении новых модельных систем именно таким методом (см. например [34], [35], [64]).

В середине 80-х годов прошлого столетия возникает альтернативный подход к решению проблемы подвижной свободной поверхности. Уравнения гидродинамики переписываются в новых переменных, преобразующих область течения в полосу постоянной толщины:

$$x = x, \quad \eta = \frac{y}{h(x, t)}, \quad t = t \quad (3.1)$$

где $h(x, t)$ – мгновенная локальная толщина пленки. Система координат (3.1) неортогональна, поэтому обычная векторная формулировка уравнений для нее неприменима. По этой причине, многие авторы ограничиваются простой заменой переменных без преобразования векторов и тензоров, содержащихся в ис-

ходных уравнениях ([36] , [37]).

В работе [39] преобразование (3.1) было выполнено для системы уравнений гидродинамики, выписанной в тензорной, инвариантной относительно систем координат форме. В результате в длинноволновом приближении была получена система:

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + \frac{\partial(huv)}{\partial \eta} = \frac{\sigma}{\rho} h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{\nu}{h} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + gh \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial \eta} = 0 \quad (3.3)$$

При этом для свободно стекающей пленки на твердой стенке выполняются граничные условия прилипания

$$u(x, 0, t) = v(x, 0, t) = 0, \quad (3.4)$$

а на свободной поверхности – условие отсутствия касательных напряжений и кинематическое условие, соответственно:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x, 1, t) = 0, \quad v(x, 1, t) = 0 \quad (3.5)$$

Подчеркнем, что в (3.2)–(3.5) $u(x, \eta, t)$ и $v(x, \eta, t)$ – контрвариантные компоненты скорости, отвечающие координатам x и η , соответственно. Ясно, что, так как x осталась исходной физической декартовой координатой, то компонента $u(x, \eta, t)$, в отличие от $v(x, \eta, t)$, остается продольной компонентой физической скорости.

3.1. Свойства решений задачи волнового стекания пленки жидкости

3.1.1. Симметрия системы уравнений

Сделаем в задаче (3.2)-(3.5) преобразование сдвига по поперечной координате η :

$$\eta' = \eta - 1 \quad (3.6)$$

Отметим здесь, что η' выражается через исходные декартовы координаты следующим образом:

$$\eta' = \frac{y}{h(x, t)} - 1 \quad (3.7)$$

Теперь рассматриваемая область течения занимает полосу $\eta' \in [-1, 0]$. Легко заметить, что уравнения системы (3.2)-(3.3) инвариантны относительно преобразования:

$$\begin{aligned} \eta' &\rightarrow -\eta' \\ u(x, \eta', t) &\rightarrow u(x, -\eta', t) \\ v(x, \eta', t) &\rightarrow -v(x, -\eta', t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Справедливость данного преобразования означает в частности, что у этих уравнений в полосе $\eta' \in [-1, 1]$ в принципе существуют решения двух типов. Решения первого типа обладают симметрией:

$$\begin{aligned} u(x, \eta', t) &= u(x, -\eta', t) \\ v(x, \eta', t) &= -v(x, -\eta', t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ясно, что если среди решений этого типа взять те, которые в полосе $\eta \in [-1, 1]$ удовлетворяют граничным условиям прилипания на обеих границах:

$$\begin{aligned} u(x, -1, t) &= v(x, -1, t) = 0 \\ u(x, 1, t) &= v(x, 1, t) = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

то в полуполосе $[-1, 0]$ они являются решением задачи (3.2)–(3.5). Действительно на границе $\eta' = -1$ условия прилипания выполнены, а граничное условие непротекания при $\eta' = 0$ (кинематическое условие – $v(x, 0, t) = 0$) удовлетворяется автоматически, в силу того, что поперечной контравариантная компонента скорости $v(x, \eta', t)$ для таких решений – антисимметричная функция. А так как функция $u(x, \eta', t)$ – четная, на этой границе у данных решений также автоматически выполняется и динамическое условие:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta'}(x, 0, t) = 0$$

Решения второго типа симметрией (3.9) не обладают, но в силу симметрии в системе, если существует решение $u(x, \eta', t)$ и $v(x, \eta', t)$, то есть и решение:

$$\begin{aligned} u_1(x, \eta', t) &= u(x, -\eta', t) \\ v_1(x, \eta', t) &= -v(x, -\eta', t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Однако, если решения этого типа продолжить на весь интервал $[-1, 1]$, то для них на границе $\eta' = 1$ не обязаны выполняться условия прилипания. Рассмотренные выше свойства инвариантности системы (3.2)–(3.3) могут оказаться полезными при построении решений исследуемой задачи. Далее для численного решения система (3.2)–(3.5) представлялась в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon Re \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{QV}{h} \right) \right) &= \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2} + 3h + We \varepsilon^3 Re h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \eta} &= 0 \\ Q(\eta = -1) &= 0 \\ V(\eta = -1) &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial \eta}(\eta = 0) &= 0 \\ V(\eta = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Здесь Re – число Рейнольдса, We – число Вебера, $\varepsilon = h_0/l_0$ – параметр длинноволновости. При обезразмеривании использовались характерные масштабы

скорости u_0 , длины l_0 , толщины h_0 , времени l_0/u_0 . Введены новые функции $Q = hu$ и $V = hv$ потому, что для них второе уравнение системы (3.12) линейно.

3.1.2. Линейный анализ

Был проведён линейный анализ задачи (3.12). Решение линейной задачи показывает, что невозмущенное течение

$$h_0 = 1, \quad Q_0(\eta') = 1.5(1 - \eta'^2), \quad V_0 = 0$$

неустойчиво относительно линейных возмущений вида

$$(Q', h', V') = (Q'_a, 1, V'_a) (\eta') h'_a \exp(i\alpha(x - ct)) + c.c.$$

в области волновых чисел $\alpha < \alpha_n$, где α_n - волновое число нейтральных возмущений ($c_i = 0$). Здесь $c = c_r + ic_i$ - комплексная фазовая скорость.

В принципе, масштабы длины и толщины (а значит и параметр ε) можно выбрать таким образом, чтобы волновое число нейтральных возмущений при любых значениях числа Рейнольдса было равно единице ($\alpha_n = 1$). При такой нормировке для невозмущенного течения область неустойчивости ($c_i > 0$) относительно линейных возмущений занимала бы интервал $0 < \alpha < \alpha_n = 1$. Тогда волновые числа устойчивых возмущений располагались бы в области $\alpha > \alpha_n = 1$. Для того, чтобы выполнить такую нормировку нужно из решения линейной задачи определить соотношение между параметрами ε, Re, Fi . Для задачи (3.12) аналитически такую связь в общем случае получить не удастся. Однако в работе [65] показано, что при малых числах Рейнольдса система (3.2) - (3.5) приводится к уравнению Курамото-Сивашинского (Непомнящего), для которого известно волновое число нейтральных возмущений [66]:

$$\varepsilon^2 \alpha_n^2 = \frac{6}{5} \frac{3Re^{5/3}}{3^{1/3} Fi^{1/3}}$$

Отсюда полагая $\alpha_n = 1$, для ε имеем:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{6}{5} \frac{3\text{Re}^{5/3}}{3^{1/3} Fi^{1/3}}}$$

Именно это выражение для ε использовалось нами и при рассмотрении задачи (3.12) в области умеренных значений чисел Рейнольдса. Как показали расчеты, вплоть до значений $\varepsilon \text{Re} = 6$ (что для водных пленок соответствует $\text{Re} \approx 20$), α_n отличается от единицы меньше чем на 0.002. Тогда, коэффициент при капиллярном слагаемом в системе (3.12) (последнее слагаемое в первом уравнении) принимает вид

$$\frac{3^{1/3} Fi^{1/3}}{Re^{5/3}} \varepsilon^3 Re = \frac{18}{5} \varepsilon Re$$

и в задаче остается один параметр – εRe .

Для решения линейной задачи использовался алгоритм, описанный в работе [66]: система уравнений (3.12) приводилась к одному уравнению на модифицированную функцию тока, уравнение линеаризовалось и решалось методом стрельбы с подложки (при решении задачи Коши применялся метод Рунге-Кутты 4 порядка точности). Как показывают прямые численные расчеты, при продолжении линейного решения задачи (3.2)–(3.5) на интервал $\eta' \in [0, 1]$, как для устойчивых, так и для неустойчивых волновых чисел получаются решения, обладающие симметрией (3.9). Два примера таких расчетов приведены на рис 3.1.

3.1.3. Стационарно-бегущие решения

Рост неустойчивых линейных возмущений со временем может быть остановлен за счет действия нелинейных эффектов, в результате чего могут формироваться установившиеся нелинейные режимы. Поэтому при исследовании волновых течений пленок жидкостей большое внимание уделяется стационарно-бегущим волнам. Здесь мы также ограничимся рассмотрением периодиче-

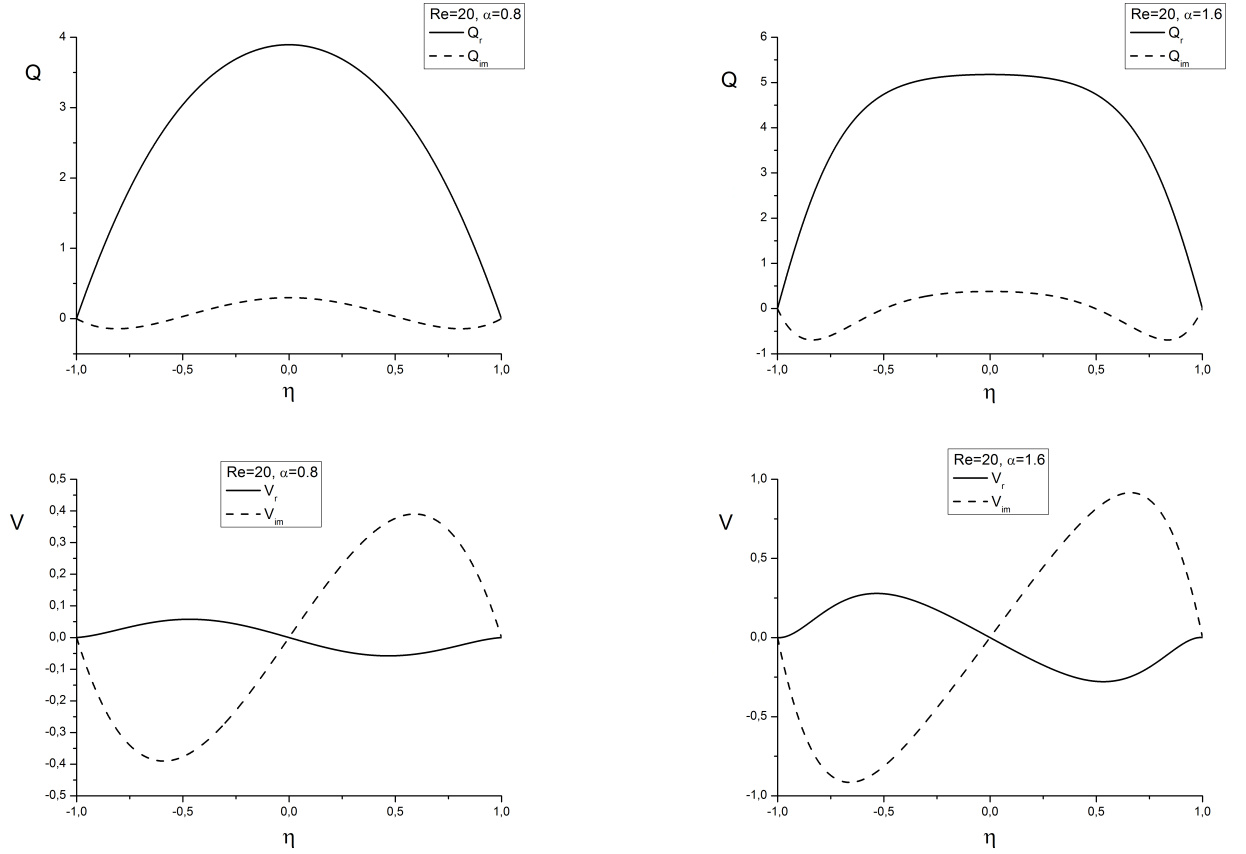


Рис. 3.1. Действительные (Q_r, V_r) и мнимые (Q_{im}, V_{im}) части Q и V в зависимости от безразмерной поперечной координаты в расширенной области течения.

ских стационарно-бегущих решений системы (3.12):

$$[Q, h, V] = [Q, h, V](\tilde{x}, \eta'), \quad \tilde{x} = \alpha(x - ct) \quad (3.13)$$

При численном исследовании задачи использовался псевдоспектральный метод: функции, зависящие от поперечной координаты η , раскладывались в ряд по полиномам Чебышева T_i :

$$\begin{aligned} Q &= \sum Q_i(x) T_i(\eta) \\ V &= \sum V_i(x) T_i(\eta) \end{aligned} \quad (3.14)$$

а функции, зависящие от продольной координаты x , разлагались в ряд Фурье:

$$\begin{aligned} Q_i(x) &= \sum Q_i^k e^{ikx} \\ V_i(x) &= \sum V_i^k e^{ikx} \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$h(x) = \sum H^k e^{ikx}$$

Вследствие вещественности функций: $Q_i^{-k} = Q_i^{*k}$, $V_i^{-k} = V_i^{*k}$, $H^{-k} = H^{*k}$. Знак * означает операцию комплексного сопряжения

Ограничиваясь первыми N гармониками в (3.15) и подставляя выражения (3.14)–(3.15) в систему (3.13), записанную для множества чебышевских узлов:

$$\eta_j = \cos\left(\frac{2j-1}{2M\pi}\right), j = 1..M$$

приходим к системе нелинейных алгебраических уравнений для коэффициентов Q_i^k , V_i^k , H^k , c .

Полученная таким образом задача решалась итерационным методом Ньютона–Канторовича:

$$[Q, V, h, c, \alpha]_{n+1} = [Q, V, h, c, \alpha]_n + [\delta Q, \delta V, \delta h, \delta c, \delta \alpha]$$

Здесь символ δ означает вариацию соответствующего коэффициента. После линеаризации относительно вариаций задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений:

$$A_0(x)\delta b(x) = \sum A_{k-k'}\delta b_{k'} = C_0$$

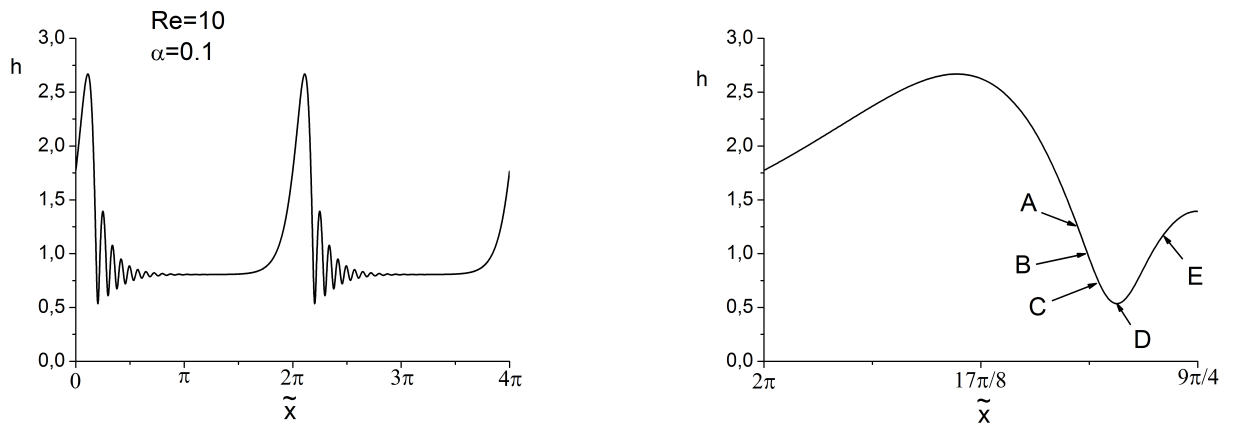


Рис. 3.2. Профиль волны

С помощью описанного выше алгоритма была проведена серия расчетов стационарно–бегущих решений системы (3.12) в полосе $\eta' \in [-1, 1]$. Параметр

εRe менялся в пределах $[0.03 \div 8]$. Для воды это означает изменение числа Рейнольдса в диапазоне $[1 \div 30]$. Расчеты выполнялись на базисах с числом полиномов $T_i = 4, 8, 12$. Проведенные расчеты показали, что различие в форме волны, полученной на базисах, содержащих 4 и 8 полиномов T_i , было существенным в областях с большими градиентами толщины (на фронте волны и в области предвестника). Но даже в этих областях результаты, построенные на базисах из 8 и 12 полиномов, совпадали уже с графической точностью. При этом самый примечательный результат заключается в том, что полученные в ходе расчетов значения коэффициентов при всех нечетных полиномах Чебышева оказались равны нулю. Это означает, что все найденные стационарно-бегущие решения системы (3.2)-(3.5) обладают симметрией (3.9).

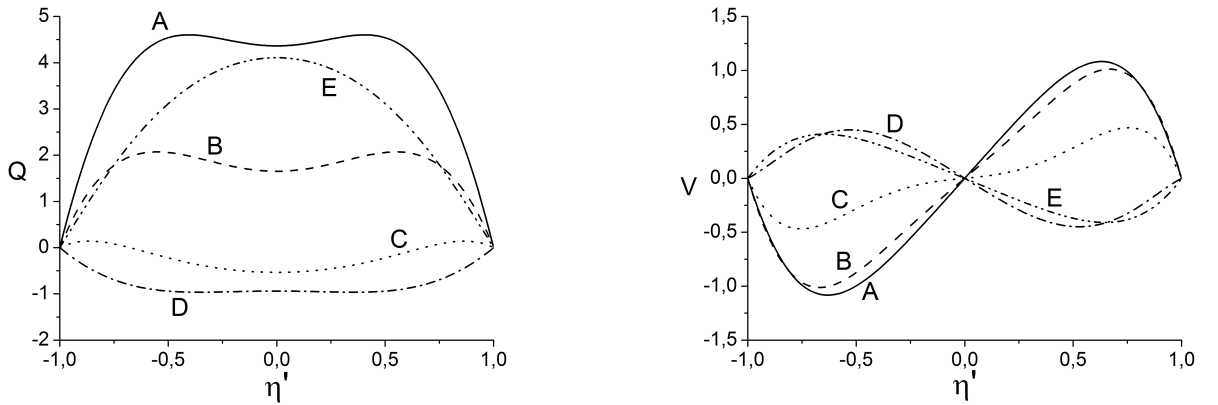


Рис. 3.3. Профили функций Q и V для указанных сечений

3.1.4. Использование упрощенного базиса

Учитывая, что все найденные стационарно-бегущие решения системы (3.2) - (3.5) обладают симметрией (3.9), был реализован альтернативный метод решения, в котором для представления функции Q использовались только четные полиномы Чебышева, а для функции V – только нечетные:

$$Q = \sum Q_{2i}(x) (T_{2i}(\eta') - 1) \quad (3.16)$$

$$V = \sum V_{2i+1}(x) (T_{2i+1}(\eta') - \eta') \quad (3.17)$$

Такой выбор обеспечивает автоматическое выполнение граничных условий на границе раздела и на твердой стенке.

При выполнении итераций в качестве начального приближения использовались результаты анализа линейной устойчивости плоскопараллельного течения, полученные в работе [66]. В этой точке зарождается первое семейство нелинейных стационарных режимов (рисунок 3.4, кр. 1).

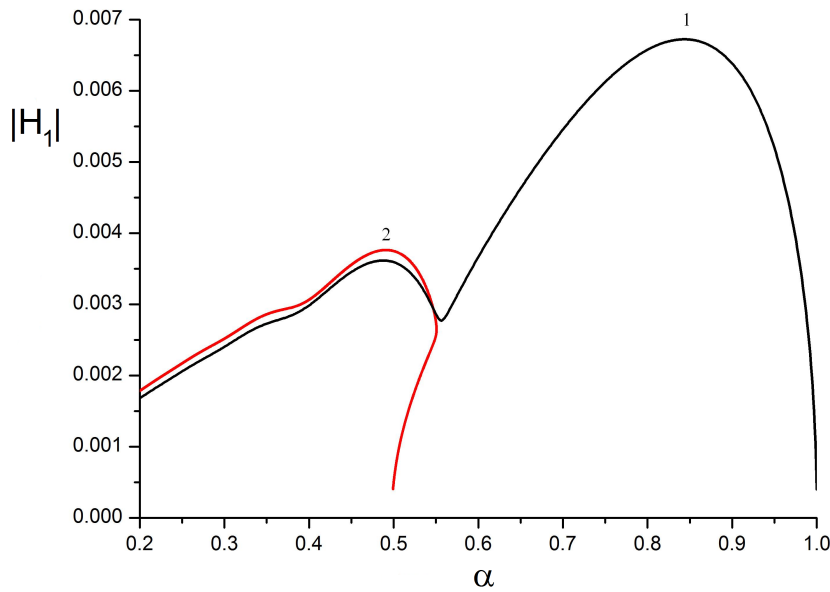


Рис. 3.4. Зависимость амплитуды первой гармоники стационарно-бегущих возмущений от волнового числа

Это семейство может быть непрерывно продолжено в область малых волновых чисел и в пределе $\alpha \rightarrow 0$ переходит в отрицательный солитон (солитон-вмятину). Для случая водных пленок в диапазоне чисел Рейнольдса $[1 \div 30]$ анализ устойчивости решений данного семейства по отношению к возмущениям того же периода показал, что решения теряют устойчивость вблизи $\alpha \approx 0.5$. Здесь имеет место бифуркация Ландау-Хопфа и возникает периодический нестационарный режим (см., например, [67], [68]). Исследование устойчивости решений по отношению к удвоенному периоду дает новые точки бифуркации. Например, на рис.3.4 показано, как при $Re = 1$ от решения первого семейства

с волновым числом $\alpha = 0.9956$ ответвляется новое семейство стационарных решений (кр. 2). Оно зарождается в точке $\alpha = 0.4978$. При небольших числах Рейнольдса это второе семейство в пределе $\alpha \rightarrow 0$ переходит в положительный солитон (солитон – возвышение или горб).

При увеличении расхода жидкости и продвижении вглубь области линейной неустойчивости топология решений становится более сложной. Так, при числе Рейнольдса $Re = 8.99$ второе семейство все еще продолжается до положительного солитона, а уже при $Re = 9$ это семейство при $\alpha \rightarrow 0$ переходит в двугорбый отрицательный солитон (солитон с двумя вмятинами).

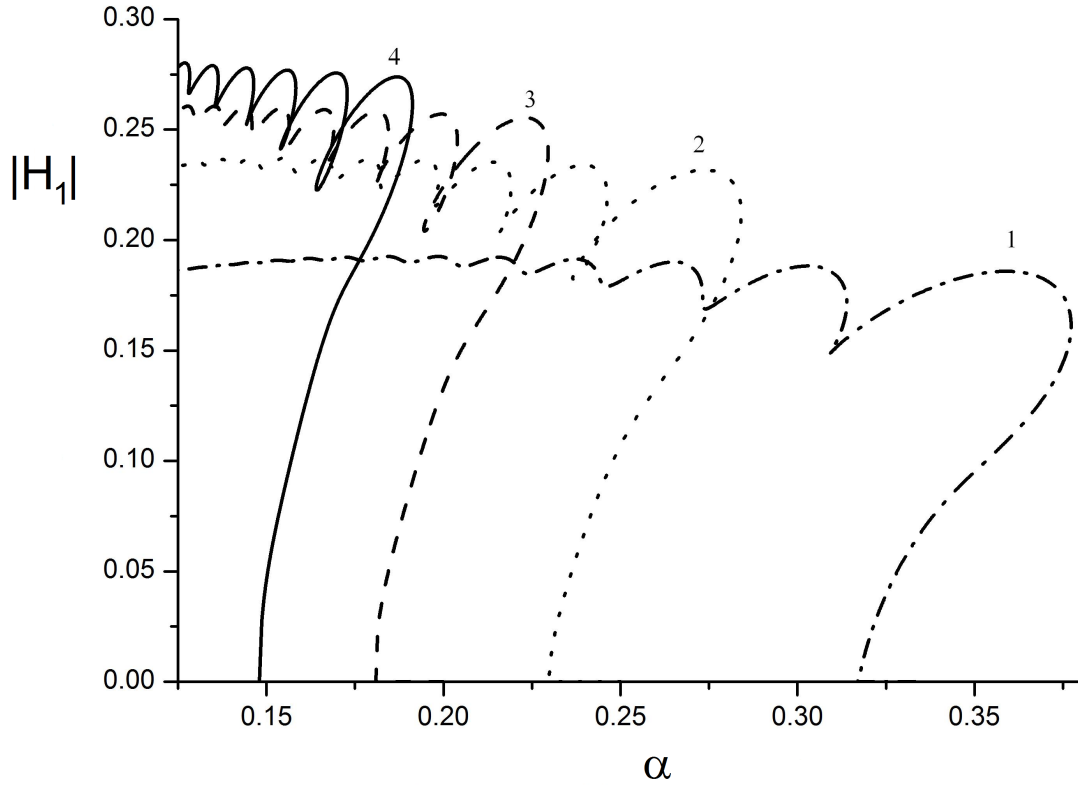


Рис. 3.5. Зависимость амплитуды первой гармоники решений, переходящих в положительный солитон от волнового числа при различных числах Рейнольдса

3.2. Вывод новой математической модели методом взвешенных невязок

Минимально необходимое число членов, учитываемых в галеркинских подходах, нужное для хорошей аппроксимации решений, существенно зависит от того, насколько удачно выбраны базисные функции. А в контексте обнаруженной симметрии вопрос о применении метода Галеркина к получению модельных уравнений для стекающих пленок жидкости звучит по новому. То есть, тот факт, что рассмотренные решения задачи (3.2)-(3.5) симметричны относительно координаты η' позволяет сократить количество базисных функций вдвое, что в свою очередь приведет к сокращению и общего числа модельных уравнений. В качестве базисных функций выберем полиномы Чебышева. Во-первых, этот выбор обусловлен удобством применения их в методе Галеркина, который предполагает проектирование исходных уравнений на элементы базиса, а полиномы Чебышева имеют простые правила применения их в данной операции. Во-вторых, поскольку мы рассматриваем задачу о течении вязкой жидкости по твердой стенке, профиль скорости будет иметь наибольшие градиенты вблизи границы расчетной области, а полиномы Чебышева, как известно, являются оптимальными для аппроксимации таких функций.

Для получения новой модельной системы воспользуемся системой (3.12). Построим ортогональный базис, состоящий из 2-х базисных функций P_0 и P_1 . Он сконструирован из четных полиномов Чебышева таким образом, чтобы автоматически удовлетворять граничным условиям на стенке и свободной поверхности:

$$\begin{aligned} P_0 &= 2\eta^2 - 2 = T_2 - T_0 \\ P_1 &= 12\eta^4 - 14\eta^2 + 2 = \frac{3}{2}T_4 - T_2 - \frac{1}{2}T_0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

При этом выборе использовались свойства полиномов Чебышева:

$$\begin{aligned} T_0 &= 1, \quad T_1 = \eta \\ T_{n+1} &= 2\eta T_n - T_{n-1} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\int T_n d\eta = \frac{1}{2} \left(\frac{T_{n+1}}{n+1} - \frac{T_{n-1}}{n-1} \right) \quad (3.20)$$

$$(T_n, T_m) = \int_{-1}^1 W_T T_n T_m d\eta \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & n = m \neq 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

Здесь W_T Весовая функция:

$$W_T = \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \quad (3.22)$$

$$T_n T_m = \frac{1}{2} (T_{n+m} + T_{|n-m|}) \quad (3.23)$$

Производные полиномов:

$$\frac{dT_n}{d\eta} = 2n \sum_{i-\text{нечетное}}^{n-1} T_i \quad (3.24)$$

Вторые производные полиномов:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_2}{d\eta^2} &= 4T_0 \\ \frac{d^2 T_4}{d\eta^2} &= 48T_2 + 32T_0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Используя полученные полиномы разложим поле скорости:

$$Q = uh = -(Q_0 P_0 + Q_1 P_1) = - \left(Q_0 (T_2 - T_0) + Q_1 \left(\frac{3}{2} T_4 - T_2 - \frac{1}{2} T_0 \right) \right) \quad (3.26)$$

Проинтегрировав второе уравнение системы (3.12) по поперечной координате, получим:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \equiv \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{4}{3} \frac{\partial Q_0}{\partial x} + \frac{4}{15} \frac{\partial Q_1}{\partial x} = 0 \quad (3.27)$$

Для получения V выразим ее из второго уравнения системы (3.12):

$$V = vh = \frac{1}{6} (T_3 - T_1) \frac{\partial Q_0}{\partial x} + \left(\frac{3}{20} T_5 - \frac{5}{12} T_3 + \frac{4}{15} T_1 \right) \frac{\partial Q_1}{\partial x} \quad (3.28)$$

Поочередно проектируем уравнение сохранения импульса на элементы базиса P_0 и P_1 , соответственно:

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon Re \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{Q^2}{h} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{QV}{h} \right), P_0 \right) &= \varepsilon^2 Re Wh \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2} + 3h, P_0 \\ \left(\varepsilon Re \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{Q^2}{h} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{QV}{h} \right), P_1 \right) &= \varepsilon^2 Re Wh \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2} + 3h, P_1 \end{aligned}$$

Вычислим проекции почленно:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Q}{\partial t}, P_0 \right) &= -\frac{\partial}{\partial t} (Q_0 P_0 + Q_1 P_1, P_0) = -\frac{\partial Q_0}{\partial t} (T_2 - T_0, T_2 - T_0) = \\ &= -\frac{3}{2} \pi Q_{0t} \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Q}{\partial t}, P_1 \right) &= -\frac{\partial}{\partial t} (Q_0 P_0 + Q_1 P_1, P_1) = \\ &= -\frac{\partial Q_1}{\partial t} \left(\frac{3}{2} T_4 - T_2 - \frac{1}{2} T_0, \frac{3}{2} T_4 - T_2 - \frac{1}{2} T_0 \right) = -\frac{15}{8} \pi Q_{1t} \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{h} \right) &= \left(\frac{Q_0^2}{h} \right)_x P_0^2 + 2 \left(\frac{Q_0 Q_1}{h} \right)_x P_0 P_1 + \left(\frac{Q_1^2}{h} \right)_x P_1^2 = \\ &= \left(\frac{Q_0^2}{h} \right)_x \left(\frac{1}{2} T_4 - 2T_2 + \frac{3}{2} T_0 \right) + 2 \left(\frac{Q_0 Q_1}{h} \right)_x \left(\frac{3}{4} T_6 - 2T_4 + \frac{5}{4} T_2 \right) + \\ &\quad + \left(\frac{Q_1^2}{h} \right)_x \left(\frac{9}{8} T_8 - \frac{3}{2} T_6 - T_4 - \frac{1}{2} T_2 + \frac{15}{8} T_0 \right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{h} \right), P_0 \right) = -\frac{5}{2} \pi \left(\frac{Q_0^2}{h} \right)_x + \frac{5}{4} \pi \left(\frac{Q_0 Q_1}{h} \right)_x - \frac{17}{8} \pi \left(\frac{Q_1^2}{h} \right)_x \quad (3.32)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{h} \right), P_1 \right) = \frac{5}{8} \pi \left(\frac{Q_0^2}{h} \right)_x - \frac{17}{4} \pi \left(\frac{Q_0 Q_1}{h} \right)_x - \frac{23}{16} \pi \left(\frac{Q_1^2}{h} \right)_x \quad (3.33)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{QV}{h} \right), P_0 \right) = \frac{1}{h} (Q_\eta V, P_0) + \frac{1}{h} (QV_\eta, P_0) \quad (3.34)$$

Первый член:

$$\begin{aligned}
& (Q_\eta V) = \\
& = - \left(Q_0 T_{2\eta} + Q_1 \left(\frac{3}{2} T_{4\eta} - T_{2\eta} \right) \right) \left(\frac{1}{6} (T_3 - T_1) Q_{0x} + \left(\frac{3}{20} T_5 - \frac{5}{12} T_3 + \frac{4}{15} T_1 \right) Q_{1x} \right) = \\
& = \left(\frac{2}{3} (T_1^2 - T_3 T_1) Q_0 Q_{0x} + \frac{2}{3} (2T_1^2 + T_3 T_1 - 3T_3^2) Q_1 Q_{0x} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{15} (25T_3 T_1 - 9T_5 T_1 - 16T_1^2) Q_0 Q_{1x} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{15} (75T_3^2 + 2T_3 T_1 - 27T_5 T_3 - 18T_5 T_1 - 32T_1^2) Q_1 Q_{1x} \right) = \\
& = \left(\frac{1}{3} (T_0 - T_4) Q_0 Q_{0x} + \frac{1}{3} (-3T_6 + T_4 + 3T_2 - T_0) Q_1 Q_{0x} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{30} (-9T_6 + 16T_4 + 9T_2 - 16T_0) Q_0 Q_{1x} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{30} (-27T_8 + 57T_6 - 16T_4 - 57T_2 + 43T_0) Q_1 Q_{1x} \right) \quad (3.35)
\end{aligned}$$

$$(Q_\eta V, P_0) = -\frac{1}{3} \pi Q_0 Q_{0x} + \frac{5}{6} \pi Q_1 Q_{0x} + \frac{41}{60} \pi Q_0 Q_{1x} - \frac{143}{60} \pi Q_1 Q_{1x} \quad (3.36)$$

$$(Q_\eta V, P_1) = -\frac{5}{12} \pi Q_0 Q_{0x} - \frac{1}{12} \pi Q_1 Q_{0x} + \frac{31}{60} \pi Q_0 Q_{1x} - \frac{1}{6} \pi Q_1 Q_{1x} \quad (3.37)$$

Второй член:

$$QV_\eta = Q(-h_t - Q_x) = -h_t Q - \frac{1}{2} \frac{\partial (Q^2)}{\partial x} \quad (3.38)$$

$$(QV_\eta, P_0) = \frac{1}{2} \pi Q_0 Q_{0x} - \frac{41}{40} \pi Q_0 Q_{1x} - \frac{5}{8} \pi Q_1 Q_{0x} + \frac{17}{8} \pi Q_1 Q_{1x} \quad (3.39)$$

$$(QV_\eta, P_1) = -\frac{5}{8} \pi Q_0 Q_{0x} = \frac{17}{8} \pi Q_0 Q_{1x} - \frac{3}{8} \pi Q_1 Q_{0x} + \frac{15}{16} \pi Q_1 Q_{1x} \quad (3.40)$$

$$\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2}, P_0\right) = -Q_0 P_{0\eta\eta} - Q_1 P_{1\eta\eta} = -4Q_0 T_0 - Q_1(72T_2 + 44T_0) \quad (3.41)$$

$$\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2}, P_0\right) = 4\pi Q_0 + 8\pi Q_1 \quad (3.42)$$

$$\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2}, P_1\right) = 2\pi Q_0 + 58\pi Q_1 \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon^2 ReWh \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + 3h, P_0\right) &= (\varepsilon^2 ReWh h_{xxx} + 3h) (T_0, T_2 - T_0) = \\ &= -\pi (\varepsilon^2 ReWh h_{xxx} + 3h) \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\left(\varepsilon^2 ReWh \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + 3h, P_1\right) = -\frac{1}{2}\pi (\varepsilon^2 ReWh h_{xxx} + 3h) \quad (3.45)$$

В итоге мы получим 2 уравнения:

$$\begin{aligned} \varepsilon Re \left(q_t + \frac{6}{5} \left(\frac{q^2}{h} \right)_x + \frac{51}{50} \frac{q Q_1 h_x}{h^2} - \frac{111}{100} \frac{Q_1 q_x}{h} - \frac{537}{500} \frac{q Q_{1x}}{h} - \right. \\ \left. - \frac{57}{25} \frac{Q_1^2 h_x}{h^2} + \frac{2949}{625} \frac{Q_1 Q_{1x}}{h} \right) = \\ = \frac{72}{25} h - \frac{72}{25} \frac{q}{h^2} - \frac{1824}{125} \frac{Q_1}{h^2} + \frac{24}{25} \varepsilon^2 ReWh h_{xxx} \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon Re \left(Q_{1t} + \frac{3}{16} \frac{q^2 h_x}{h^2} - \frac{1}{16} \frac{q q_x}{h} + \frac{33}{50} \frac{q Q_{1x}}{h} + \frac{19}{10} \frac{Q_1 q_x}{h} - \frac{9}{5} \frac{q Q_1 h_x}{h^2} + \right. \\ \left. + \frac{111}{250} \frac{Q_1 Q_{1x}}{h} - \frac{3}{10} \frac{Q_1^2 h_x}{h^2} \right) = \\ = \frac{4}{5} h - \frac{4}{5} \frac{q}{h^2} - \frac{768}{25} \frac{Q_1}{h^2} + \frac{4}{15} \varepsilon^2 ReWh h_{xxx} \end{aligned} \quad (3.47)$$

В итоге задача (3.12) сводиться к рассмотрению системы уравнений (3.27), (3.46)-(3.47).

3.3. Сравнительный анализ моделей волнового пленочного течения

3.3.1. Линейный анализ

Решение линейной задачи (3.27), (3.46)-(3.47) показало, что невозмущенное течение

$$h_0 = 1, \quad q_0 = 1, \quad Q_{1,0} = 0$$

неустойчиво относительно линейных возмущений вида:

$$[h', q', Q'_1] = [1, q'_a, Q'_{1,a}] (\eta') h'_a \exp(i\alpha(x - ct)) + c.c.$$

на интервале волновых чисел $0 < \alpha < \alpha_n$.

Для представления результатов линейной задачи масштаб длины волны был выбран так, чтобы для задачи Orr-Зоммерфельда в длинноволновом приближении (на рисунках решения этой задачи обозначены как "длинноволновое приближение") волновое число нейтральных возмущений α_n равнялось единице. Для сравнение приведены решения задачи линейной устойчивости плоско-параллельного течения по модели Шкадова.

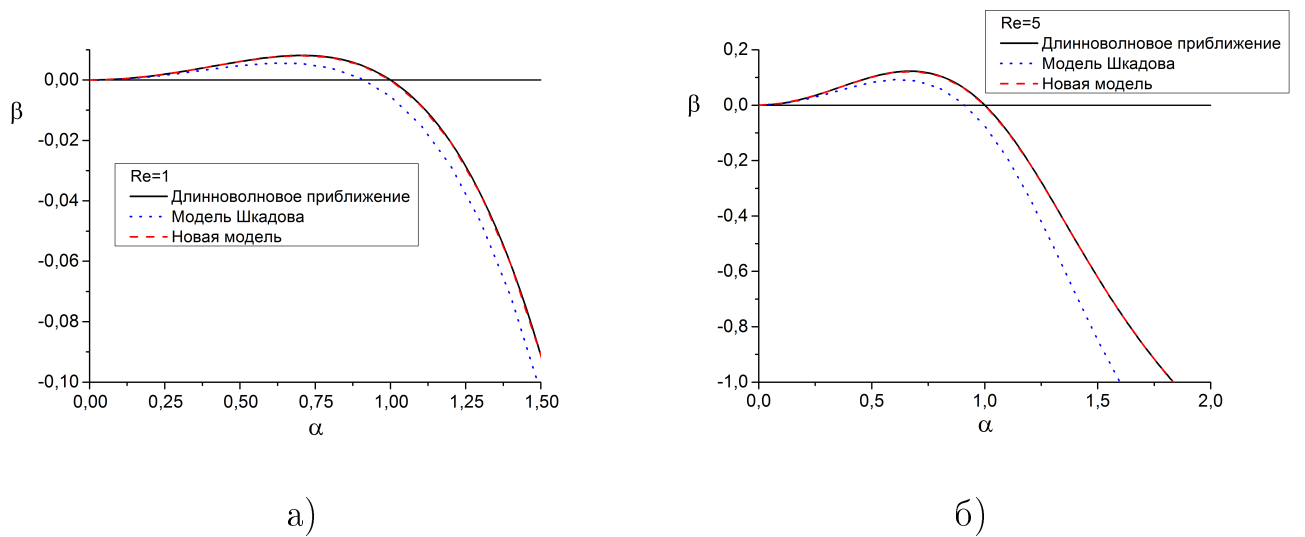


Рис. 3.6. Зависимость инкремента роста от волнового числа для различных моделей. а - $Re = 1$, б - $Re = 5$

На рисунке 3.6 представлены сравнения инкремента роста линейных возмущений $\beta = \alpha c_i$ в зависимости от длины волны этих возмущений при числах Рейнольдса $Re = 1$ (а) и $Re = 5$ (б). Видно, что при малых числах Рейнольдса результаты, полученные по новой модели (базис состоит из 2 функций P_0 и P_1), с графической точностью совпали с результатами решения задачи Орра-Зоммерфельда в длинноволновом приближении. Также можно видеть, что результаты, полученные по модели Шкадова (1 базисная функция), значительно отличаются от аналитического решения.

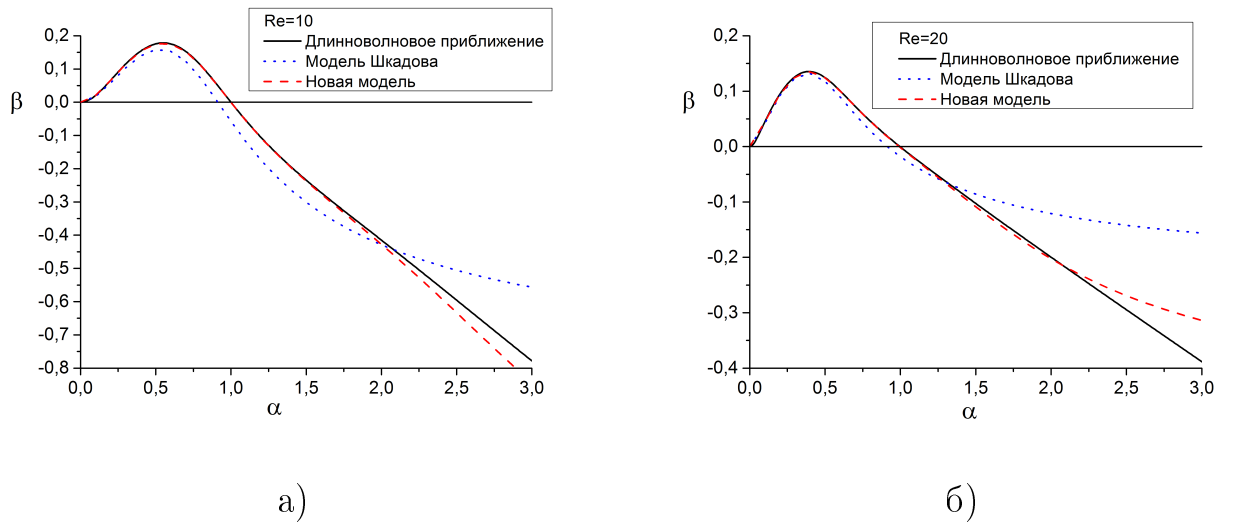


Рис. 3.7. Зависимость инкремента роста от волнового числа для различных моделей. а - $Re = 10$, б - $Re = 20$

На рисунке 3.7 представлены зависимости инкремента роста линейных возмущений от длины волны этих возмущений при числах Рейнольдса $Re = 10$ и $Re = 20$. Видно, что даже при увеличении числа Рейнольдса до 20, в длинноволновой устойчивой области результаты по новой модели (2 базисных функции) все еще хорошо совпадают с задачей Орра-Зоммерфельда в длинноволновом приближении, однако, в коротковолновой области наблюдается небольшое отклонение. В то же время, результаты по модели Шкадова (1 базисная функция) при таких числах Рейнольдса значительно отличаются от аналитического решения в сторону уменьшения абсолютного значения инкремента. Это может приводит к неправильному перераспределению энергии по спектру и возбужде-

нию все более старших гармоник, что в свою очередь искажает итоговый сигнал (форму волны).

3.3.2. Стационарно-бегущие решения

Рост неустойчивых линейных возмущений со временем может быть остановлен за счет действия нелинейных эффектов, в результате чего могут формироваться установившиеся нелинейные режимы. Поэтому при исследовании волновых течений пленок жидкостей большое внимание уделяется стационарно-бегущим волнам. В данной работе мы также ограничимся рассмотрением периодических стационарно-бегущих решений системы (3.46)-(3.47):

$$[h, q, Q_1] = [h, q, Q_1](\tilde{x}), \quad \tilde{x} = \alpha(x - ct)$$

При численном исследовании задачи нами использовался метод, в котором функции, зависящие от продольной координаты, разлагались в ряд Фурье:

$$h(\tilde{x}) = \sum H^k e^{ik\tilde{x}} \quad (3.48a)$$

$$q(\tilde{x}) = \sum q^k e^{ik\tilde{x}} \quad (3.48b)$$

$$Q_1(\tilde{x}) = \sum Q_1^k e^{ik\tilde{x}} \quad (3.48c)$$

Вследствие вещественности функций: $q^{-k} = q^{*k}$, $Q_1^{-k} = Q_1^{*k}$, $H^{-k} = H^{*k}$. Знак $*$ означает операцию комплексного сопряжения.

Ограничиваясь первыми N гармониками в (3.48) и подставляя выражения в систему (3.46)-(3.47), приходим к конечномерной системе нелинейных алгебраических уравнений для коэффициентов q^k, Q_1^k, H^k, c . Полученная таким образом задача решалась итерационным методом Ньютона-Канторовича:

$$[h, q, Q_1, c, \alpha]_{n+1} = [h, q, Q_1, c, \alpha]_n + [\delta h, \delta q, \delta Q_1, \delta c, \delta \alpha]$$

Здесь символ δ означает вариацию соответствующей величины. После линеаризации относительно вариаций задача сводится к решению системы линей-

ных алгебраических уравнений:

$$A_0(x)\delta b(x) = \sum A_{k-k'}\delta b_{k'} = C_0$$

С помощью описанного выше алгоритма была проведена серия расчетов стационарно-бегущих решений системы (3.27), (3.46)-(3.47). Параметр εRe менялся в пределах $[0.03 \div 8]$. Для воды это означает изменение числа Рейнольдса в диапазоне $[1 \div 30]$.

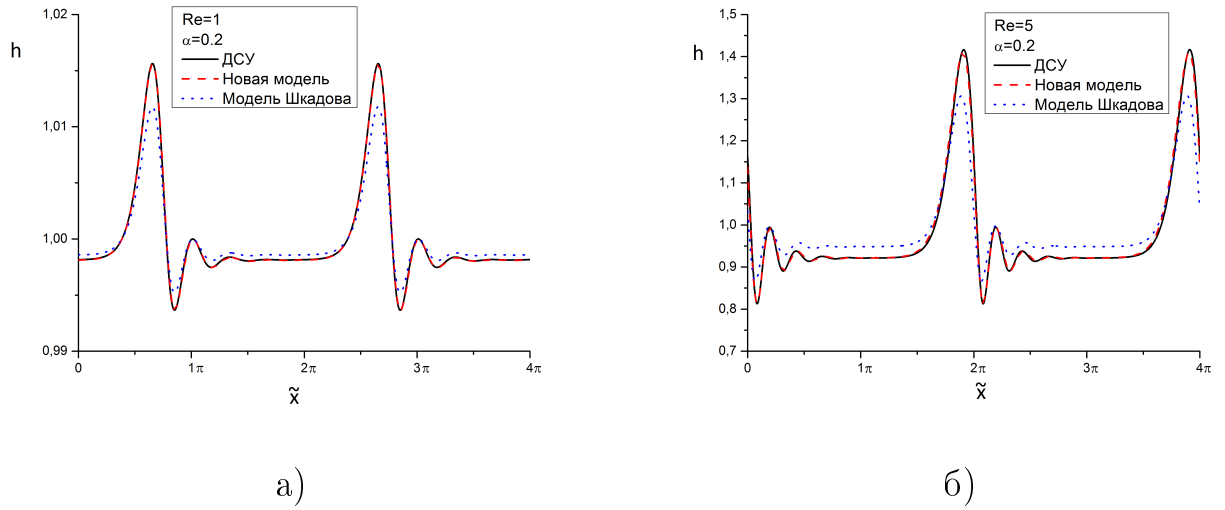
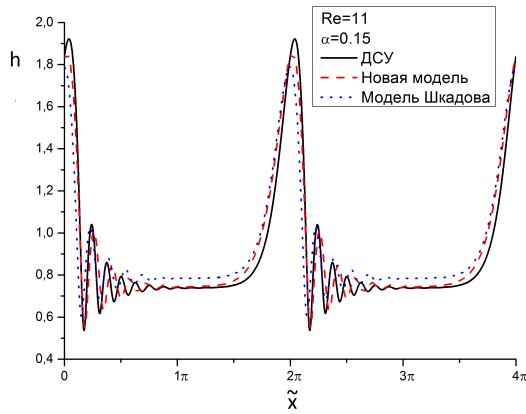


Рис. 3.8. Сравнение стационарно-бегущих решений, полученных по различным моделям. а - $Re = 1$, б - $Re = 5$

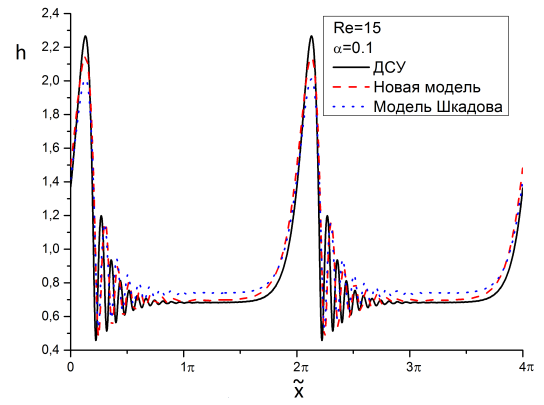
В качестве примера для воды на рисунках 3.8 - 3.9 приведены формы волновых поверхностей, рассчитанных при различных значениях числа Рейнольдса Re и волнового числа α . Проведенные расчеты по модели (3.27), (3.46)-(3.47) показали, что они хорошо согласуются с результатами, полученными в [69] для задачи (3.12), в которой при решении используется базис из 12 полиномов Чебышева (на рисунках - ДСУ). Для сравнения на рисунках также приведены результаты расчета по модели Шкадова.

3.4. Выводы к третьей главе

Обнаружена инвариантность в модельных уравнениях стекающей пленки жидкости. С использованием установленной симметрии решений в расширен-



а)



б)

Рис. 3.9. Сравнение стационарно-бегущих решений, полученных по различным моделям. а - $Re = 11$, б - $Re = 15$

ной полосе разработана оригинальная методика нахождения стационарных решений стекающей пленки жидкости. Предложен метод построения низкоразмерных модельных систем галеркинского типа для описания стекающих пленок жидкости с использованием укороченного базиса, составленного из полиномов Чебышева. Для полученной модели проведено сравнение результатов решения линейной задачи и стационарно-бегущих решений при различных числах Рейнольдса. Показано, что результаты по новой модели хорошо согласуются с результатами аналитического решения линейной задачи, а также с результатами расчета стационарно-бегущих решений, полученных на базисе с большим количеством полиномов.

Глава 4

Волновые режимы течения пленки жидкости под воздействием газового потока

4.1. Математическая постановка задачи

Настоящая глава посвящена моделированию динамики нелинейных волн на пленке жидкости, стекающей под действием силы тяжести и градиента давления, в известном поле напряжений на границе раздела фаз. Течение газа является турбулентным и происходит в вертикальном канале. Если исключить из рассмотрения эффекты уноса капель и осушения твердой поверхности, то область течения жидкости является односвязной. Наличие поверхностного натяжения обеспечивает отсутствие острых кромок на поверхности пленки. В этих условиях функция, определяющая положение точек границы области, часто является однозначной. В этом случае мы можем воспользоваться преобразованием координат (3.1):

$$x = x, \quad \eta = y/h(x, t), \quad t = t$$

Для случая пленки, свободно стекающей по вертикальной плоскости в поле тяжести, в приближении длинноволновости возмущений в работе [39] была получена система (3.2)-(3.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2h)}{\partial x} + \frac{\partial(uvh)}{\partial \eta} &= -\frac{h}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho h} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + gh \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial \eta} &= 0 \end{aligned}$$

На гиперповерхности $\eta = 0$:

$$u(x, 0, t) = 0, \quad v(x, 0, t) = 0$$

На гиперповерхности $\eta = 1$:

$$v \equiv \frac{d\eta}{dt} = 0, \quad v(x, 1, t) = 0$$

Одно из преимуществ системы (3.2)-(3.5) состоит в простоте ее обобщений на случаи сложных граничных условий. Так, в [70] рассматривалось совместное течение тонкой пленки жидкости и турбулентного потока газа в условиях микрогравитации. Было показано, что проектируя тензор вязких напряжений на вектор нормали к гиперповерхности $\eta = 1$, в длинноволновом приближении получаем:

$$\tau^{1j} n_j(x, 1, t) \equiv \frac{\mu}{h} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x, 1, t) = T_g(x, t) \equiv T_0 \left(1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(k) k h_k(k, t) e^{ikx} dk \right) \quad (4.1)$$

Здесь T_g – распределение касательных напряжений газа на поверхности пленки, T_0 – невозмущенная составляющая T_g , $\tau(k)$ – Фурье-компоненты касательных напряжений газа, обусловленные криволинейностью границы раздела, h_k – Фурье-компоненты разложения формы поверхности:

$$h_k(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, t) e^{-ikx} dx \quad (4.2)$$

Учитывая наличие скачка нормального напряжения на поверхности раздела, имеем:

$$p = P_g(x, t) - 2\sigma H \equiv P_0(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} p(k) k h_k(k, t) e^{ikx} dk - 2\sigma H \quad (4.3)$$

Здесь $P_g(x, t)$ – распределение пульсаций давления газа на поверхности пленки, $P_0(x)$ – давление газа в отсутствие возмущений поверхности пленки жидкости, σ – коэффициент поверхностного натяжения, H – средняя кривизна поверхности, в приближении длинноволновости имеет вид:

$$H = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (4.4)$$

Используя уравнения (4.3), (4.4) приводим систему (3.2)-(3.5) к виду:

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2h)}{\partial x} + \frac{\partial(uvh)}{\partial \eta} = \frac{\sigma}{\rho} h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{\mu}{\rho h} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + gh - \frac{\chi}{\rho} h - \frac{h}{\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} ik^2 p(k) h_k(k, t) e^{ikx} dk \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial \eta} = 0 \quad (4.6)$$

Здесь $\chi \equiv dP_0/dx$. Часто $\chi = \text{const}$, поэтому, практически без ограничения общности, в дальнейшем четвертое слагаемое в правой части уравнения (11) будем опускать, считая, что оно включено в состав третьего, т.е. в (11) на месте g стоит $g_{eff} = g - \chi\rho$. В дальнейшем, индекс у g_{eff} будем опускать. Кроме того, заметим, что в случаях, когда рассматривается течение газа в широких каналах, обычно справедливо соотношение $\chi \ll \rho g$, поэтому слагаемым, содержащим этот коэффициент можно просто пренебречь.

4.2. Вывод эволюционного уравнения при малых числах Рейнольдса

4.2.1. Обезразмеривание

Выберем характерные масштабы скорости – u_0 , длины – l_0 , толщины – h_0 , времени – l_0/u_0 , напряжений P_g , $T_g - \rho u_0^2$ и перепишем систему уравнений (4.5) - (4.6) в безразмерных переменных (поемим их знаком $\tilde{}$):

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{u}{u_0}, \tilde{v} = \frac{l_0 v}{u_0}, \tilde{x} = \frac{x}{l_0}, \\ \tilde{t} &= \frac{u_0 t}{l_0}, \tilde{h} = \frac{h}{h_0}, \tilde{h}_k = \frac{\hat{h}_k}{h_0 l_0}, \\ \tilde{k} &= k l_0, \tilde{\tau}_0 = \frac{T_0}{\rho u_0^2}, \varepsilon = \frac{h_0}{l_0}. \end{aligned}$$

$$\frac{u_0^2 h_0}{l_0} \frac{\partial(\tilde{u}\tilde{h})}{\partial \tilde{t}} + \frac{u_0^2 h_0}{l_0} \frac{\partial(\tilde{u}^2 \tilde{h})}{\partial \tilde{x}} + \frac{u_0^2 h_0}{l_0} \frac{\partial(\tilde{u}\tilde{v}\tilde{h})}{\partial \tilde{\eta}} = \frac{h_0^2}{l_0^3} \frac{\sigma}{\rho} \tilde{h} \frac{\partial^3 \tilde{h}}{\partial \tilde{x}^3} -$$

$$-\frac{\rho u_0^2 h_0^2}{l_0^2} \frac{\tilde{h}}{\rho} \int \hat{h}_k i \tilde{k}^2 \tilde{p}(\tilde{k}) e^{i \tilde{k} \tilde{x}} d\tilde{k} + \frac{u_0}{h_0} \frac{\mu}{\rho \tilde{h}} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + g h_0 \tilde{h} \quad (4.7)$$

$$\frac{u_0 h_0}{l_0} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \frac{u_0 h_0}{l_0} \frac{\partial(\tilde{u} \tilde{h})}{\partial \tilde{x}} + \frac{u_0 h_0}{l_0} \frac{\partial(\tilde{v} \tilde{h})}{\partial \eta} = 0 \quad (4.8)$$

Введем безразмерные параметры: число Рейнольдса $Re = \rho h_0 u_0 / \mu$, число Вебера $W = \sigma / \rho l_0 u_0^2$, число Фруда $Fr = u_0^2 / g h_0$ и отношение толщины пленки к характерной длине волны $\varepsilon = h_0 / l_0$

В безразмерном виде уравнения (4.5) - (4.6) принимают вид (здесь и далее знак обезразмеривания опускается):

$$\begin{aligned} \varepsilon Re \left(\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2 h)}{\partial x} + \frac{\partial(uv h)}{\partial \eta} \right) = \varepsilon^2 Re W h h_{xxx} - \\ - \varepsilon^2 Re h i \int h_k k^2 p(k) e^{i k x} dk + \frac{u_{\eta\eta}}{h} + \frac{Re}{Fr} h \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial \eta} = 0 \quad (4.10)$$

С граничными условиями:

$$u(x, 0, t) = 0 \quad (4.11)$$

$$v(x, 0, t) = 0 \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x, 1, t) = h Re \tau_0 (1 + \varepsilon \int h_k k \tau(k) e^{i k x} dk) \quad (4.13)$$

$$v(x, 1, t) = 0 \quad (4.14)$$

В настоящей работе ограничимся случаем спутного течения газа, поэтому $\tau_0 > 0$.

4.2.2. Нулевой порядок малости по ε

Известно, что для пленки, свободно стекающей по вертикальной плоскости, в случае малых расходов ($Re \sim 1$) задача сводится к одному эволюционному уравнению на возмущение толщины пленки. Для пленки, увлекаемой газом,

аналогичный результат можно получить из системы (4.9)-(4.10). Вследствие малости толщины пленки по сравнению с длиной волны решение системы представляется в виде рядов по малому параметру ε : $u = u^0 + \varepsilon u^1 + \dots$, $v = v^0 + \varepsilon v^1 + \dots$. Кроме этого, введем в рассмотрение медленное и быстрое времена: $t_0 = t$, $t_1 = \varepsilon t$.

В нулевом порядке по ε приходим к задаче:

$$u_{\eta\eta}^0 + \frac{Re}{Fr}(h^0)^2 = 0 \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial h^0}{\partial t} + \frac{\partial(u^0 h^0)}{\partial x} + \frac{\partial(v^0 h^0)}{\partial \eta} = 0 \quad (4.16)$$

Для выбора h_0 и l_0 рассмотрим безволновое течение пленки жидкости, т.е. $h = 1$:

$$\frac{\partial u^0}{\partial \eta} = -\frac{Re}{Fr}\eta + c_1 \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial u^0}{\partial \eta}(x, 1, t) = Re\tau_0 \Rightarrow c_1 = \frac{Re}{Fr} + Re\tau_0 \quad (4.18)$$

$$u^0 = -\frac{Re}{Fr} \frac{\eta^2}{2} + \left(\frac{Re}{Fr} + Re\tau_0 \right) \eta + c_2 \quad (4.19)$$

$$u^0(x, 0, t) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \quad (4.20)$$

Находим профиль скорости для гладкой пленки, обдуваемой газовым потоком:

$$u^0 = \frac{Re}{Fr} \left(\eta - \frac{\eta^2}{2} \right) + Re\tau_0 \eta \quad (4.21)$$

Из уравнения неразрывности найдем v :

$$\frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{\partial v^0}{\partial \eta} = 0 \Rightarrow v^0 = const \quad (4.22)$$

$$v(x, 0, t) = 0 \Rightarrow v^0 = 0 \quad (4.23)$$

Зная профиль скорости можно найти расход:

$$Q^0 = \int_0^1 u^0 d\eta \quad (4.24)$$

Положим безразмерный расход равным единице, тогда получим связь между числами Фруда и Рейнольдса:

$$Q^0 = 1 \Rightarrow Fr = \frac{2Re}{3(2 - Re\tau_0)} \quad (4.25)$$

В итоге получим характерные масштабы толщины:

$$h_0 = \left(\frac{3\nu^2 Re(2 - Re\tau_0)}{2g} \right)^{1/3} \quad (4.26)$$

и скорости:

$$u_0 = \left(\frac{2\nu Re^2 g}{3(2 - Re\tau_0)} \right)^{1/3} \quad (4.27)$$

Отметим здесь, что при таком выборе характерных масштабов безразмерное значение касательного напряжения τ_0 на невозмущенной границе раздела фаз ограничено сверху: $\tau_0 < \tau^* = 2/Re$. Критическое значение параметра τ^* достигается в условиях невесомости ($Fr = \inf$), когда профиль скорости вырождается в линейный (течение Куэтта).

Теперь рассмотрим когда $h = h(x, t)$:

$$\frac{\partial u^0}{\partial \eta} = -\frac{Re}{Fr} h^2 \eta + c_1 \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial u^0}{\partial \eta}(x, 1, t) = Re\tau_0 h \Rightarrow c_1 = \frac{Re}{Fr} h^2 + Re\tau_0 h \quad (4.29)$$

$$u^0 = -\frac{Re}{Fr} h^2 \frac{\eta^2}{2} + \left(\frac{Re}{Fr} h^2 + Re\tau_0 h \right) \eta + c_2 \quad (4.30)$$

$$u^0(x, 0, t) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \quad (4.31)$$

Находим профиль скорости u :

$$u^0 = \frac{Reh^2}{Fr} \left(\eta - \frac{\eta^2}{2} \right) + Re\tau_0 h \eta \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial v^0}{\partial \eta} = \frac{-h_t - (u^0 h)_x}{h} \quad (4.33)$$

и профиль скорости v :

$$v^0 = -\frac{\eta}{h} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{3hRe}{2Fr} \left(\eta^2 - \frac{\eta^3}{3} \right) \frac{\partial h}{\partial x} - Re\tau_0 \eta^2 \frac{\partial h}{\partial x} \quad (4.34)$$

Тогда в нулевом порядке по ε приходим к уравнению на толщину пленки:

$$h_t + \frac{Re}{Fr} h^2 h_x + Re\tau_0 h h_x = 0 \quad (4.35)$$

4.2.3. Первый порядок малости по ε

Для первого порядка разложения по параметру ε из уравнений (4.9)-(4.10) имеем:

$$\varepsilon Re \left(\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2 h)}{\partial x} + \frac{\partial(uvh)}{\partial \eta} \right) = \varepsilon^2 Re W h h_{xxx} + \frac{u_{\eta\eta}}{h} + \frac{Re}{Fr} h \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial \eta} = 0 \quad (4.37)$$

$$u = u^0 + \varepsilon u^1$$

$$v = 0 + \varepsilon v^1$$

$$Re \left(\frac{\partial(u^0 h)}{\partial t} + \frac{\partial((u^0)^2 h)}{\partial x} + \frac{\partial(u^0 v^0 h)}{\partial \eta} \right) = \varepsilon Re W h h_{xxx} + \frac{u_{\eta\eta}^1}{h} \quad (4.38)$$

Подставив в уравнение значения скоростей, полученных в нулевом порядке по малости, получим:

$$\frac{Re^2}{Fr} \eta h^2 h_t + \frac{1}{2} \frac{Re^3}{Fr^2} \eta^2 h^4 h_x + \frac{1}{2} \frac{Re^3}{Fr} \eta^2 h^3 \tau_0 h_x = \varepsilon Re W h h_{xxx} + \frac{u_{\eta\eta}^1}{h} \quad (4.39)$$

$$u_{\eta\eta}^1 = \frac{Re^2}{Fr} \eta h^3 h_t + \frac{1}{2} \frac{Re^3}{Fr^2} \eta^2 h^5 h_x + \frac{1}{2} \frac{Re^3}{Fr} \eta^2 h^4 \tau_0 h_x - \varepsilon Re W h^2 h_{xxx} \quad (4.40)$$

$$u_{\eta}^1 = \frac{Re^2}{Fr} \frac{\eta^2}{2} h^3 h_t + \frac{1}{2} \frac{Re^3}{Fr^2} \frac{\eta^3}{3} h^5 h_x + \frac{1}{2} \frac{Re^3}{Fr} \frac{\eta^3}{3} h^4 \tau_0 h_x - \varepsilon Re W h^2 h_{xxx} \eta + c_1 \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial u^1}{\partial \eta}(x, 1, t) = h Re \tau_0 \int \hat{h}_k k \tau(k) e^{ikx} dk \Rightarrow \quad (4.42)$$

$$c_1 = h Re \tau_0 \int \hat{h}_k k \tau(k) e^{ikx} dk - \left(\frac{1}{2} \frac{Re^2}{Fr} h^3 h_t + \frac{1}{6} \frac{Re^3}{Fr^2} h^5 h_x + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} \frac{Re^3}{Fr} h^4 \tau_0 h_x - \varepsilon Re W h^2 h_{xxx} \right) \quad (4.43)$$

Найдем скорость u^1 :

$$u^1 = -\varepsilon Re W h^2 h_{xxx} \left(\frac{\eta^2}{2} - \eta \right) + \frac{1}{2} \frac{Re^2}{Fr} h^3 h_t \left(\frac{\eta^3}{3} - \eta \right) + \\ + \frac{1}{6} \frac{Re^3}{Fr^2} h^5 h_x \left(\frac{\eta^4}{4} - \eta \right) + \frac{1}{6} \frac{Re^3}{Fr} \tau_0 h^4 h_x \left(\frac{\eta^4}{4} - \eta \right) + Re \tau_0 h \eta \int \hat{h}_k k \tau(k) e^{ikx} dk \quad (4.44)$$

Используя уравнение неразрывности и граничные условия на v , получим уравнение на толщину пленки:

$$h_t + \frac{Re}{Fr} h^2 h_x + Re \tau_0 h h_x + \\ + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3} \varepsilon Re W h^3 h_{xxx} + \frac{2}{15} \frac{Re^3}{Fr^2} h^5 h_x (h + \tau_0 Fr) + \frac{1}{2} Re h^2 \tau_0 \int \hat{h}_k k \tau(k) e^{ikx} dk \right) = 0 \quad (4.45)$$

Напомним здесь, что при выводе уравнения (4.45) использовалось приближение малых чисел Рейнольдса ($Re \sim 1$), кроме того, при выводе системы (4.9-4.10) полагалось, что число Вебера велико - $W\varepsilon \sim 1$. Уравнение (4.45) с точностью до обозначений совпадает с уравнением, полученным в работе [71]. В случае, когда рассматриваются пространственные периодические решения уравнения (4.45), интегральное слагаемое заменяется соответствующим рядом.

Если ограничиться рассмотрением возмущений малой, но конечной амплитуды, и снова ввести в рассмотрение медленное и быстрое времена, то с помощью преобразования:

$$h = 1 + \varepsilon h_1, \quad t_0 = t, \quad t_1 = \varepsilon t$$

из уравнения (4.45) получаем:

$$\frac{\partial h_1}{\partial t_0} + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} (1 + \text{Fr} \tau_0) \frac{\partial h_1}{\partial x} = 0 \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial t_1} + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} (2 + \text{Fr} \tau_0) h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\text{We} \text{Re} \varepsilon}{3} \frac{\partial^4 h_1}{\partial x^4} + \frac{2 \text{Re}^3}{15 \text{Fr}^2} \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} (1 + \tau_0 \text{Fr}) + \\ + \frac{1}{2} \text{Re} \tau_0 \int i h_{1k} k^2 \tau(k) e^{ikx} dk = 0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

Из уравнения (4.46) следует, что в первом приближении (на быстрых временах) возмущения малой, но конечной амплитуды, распространяются с характерной постоянной скоростью:

$$c_0 = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} (1 + \text{Fr} \tau_0)$$

В этом приближении движение происходит без изменения начальной формы возмущений. Уравнение (4.47) описывает нелинейную эволюцию возмущений на больших временах. Уточним выбор характерного продольного масштаба l_0 следующим образом – потребуем, чтобы коэффициенты при второй и четвертой производных в уравнении (4.47) были одинаковы. Из этого следует, что для соотношения на ε имеем:

$$\varepsilon = \frac{2 \text{Re}^2}{5 \text{W Fr}^2} (1 + \text{Fr} \tau_0)$$

С учетом этого выбора, после замены:

$$\tau = b t_1, \quad h_1 = A H, \quad b = \frac{\text{W Re} \varepsilon}{3}, \quad A = \frac{2 \text{Fr} b}{\text{Re} (2 - \text{Fr} \tau_0)}$$

уравнение (4.47) перепишется в виде:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + 2H \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 H}{\partial x^4} + B \int_{-\infty}^{\infty} ik^2 \tau(k) H_k(k, t) e^{ikx} dk = 0 \quad (4.48)$$

Здесь $B = Re\tau_0/2b \equiv 3\tau_0/2W\varepsilon$

Уравнение (4.48) является интересным примером модельных уравнений, возникающих при исследовании эволюции возмущений в активно-диссипативных средах. За неустойчивость линейных возмущений отвечают его слагаемые со второй производной и член, содержащий интеграл (последний обусловлен учетом возмущений трения на границе раздела пленка – газ), а диссипацию обеспечивает четвертая производная, моделирующая капиллярные эффекты. Действительно, если пренебречь в (4.48) нелинейным членом и представить его решение в виде $H \sim \exp[ik(x - ct)]$, то придем к следующему дисперсионному соотношению:

$$c = i(k - k^3) + Bk\tau(k) \quad (4.49)$$

Возмущения будут неустойчивы, если мнимая часть фазовой скорости c будет больше нуля. Используя то, что для нейтрального возмущения мнимая часть фазовой скорости $c_i = 0$, из (4.49) для нейтрального волнового числа k_n имеем:

$$1 - k_n^2 + B\tau_{im}(k_n) = 0 \quad (4.50)$$

Как ясно из (4.50), описанный выше выбор характерного продольного масштаба l_0 , сделан так, чтобы в случае свободно стекающей пленки ($B = 0$) нейтральное волновое число $k_n = 1$.

Таким образом, в случае малых чисел Рейнольдса задача исследования возмущений на поверхности горизонтальной пленки жидкости, увлекаемой потоком газа, сводится к рассмотрению решений одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения.

Для нахождения периодических по x решений функция представляется в виде пространственного ряда Фурье:

$$H(x, t) = \sum_n H_n(t) \exp(iknx) \quad (4.51)$$

Так как H - вещественная функция, то $\bar{H}_{-n} = H_n$. Черта означает операцию комплексного сопряжения. После подстановки (4.51) в уравнение (4.48) получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений на Фурье-гармоники $H_n(t)$. Полагая, что все $H_n(t)$ с индексами $|n| \geq N$ равны нулю, приходим к ее конечномерному аналогу. При исследовании эволюции периодических возмущений в качестве условия нормировки будем полагать, что среднее отклонение толщины от невозмущенного уровня равно нулю.

4.3. Линейные модели для вычисления тензора напряжений газового потока

Для определения линейного отклика касательного $\tau(k)$ и нормального $p(k)$ напряжений на возмущения границы раздела фаз рассмотрим течение газа над волнистой поверхностью пленки жидкости. В работах [72], [73] приведены наиболее популярные, из используемых для этой цели, линейные модели турбулентного течения над волнистой стенкой.

Первая модель, основанная на переносе граничных условий на невозмущенный уровень (МПГУ), приводит к уравнению Орра-Зоммерфельда:

$$(v_g U'' - U(v_g'' - v_g)) = i\delta k_g (v_g'''' - 2v_g'' + v_g) \quad (4.52)$$

Здесь $\delta = \nu/u^*$ - толщина пограничного слоя, ν - коэффициент кинематической вязкости газа, $u^* = \sqrt{T_0/\rho_g}$ - динамическая скорость, $k_g = 2\pi/\lambda$, λ - период волнистости стенки.

Модель Бенджамина (МБ) для вычисления тензора напряжений газового

потока, предложенная в работе [74], сводится к рассмотрению уравнения:

$$v_g U'' - U(v_g'' - v_g) = i\delta k_g (v_g'''' - 2v_g'' + v_g + (U'''' - 2U''')e^{-y}) \quad (4.53)$$

При решении уравнений (4.52), (4.53) использовался профиль осредненной скорости течения газа из работы [36]. Он имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{U(\frac{y}{\delta})}{u^*} = & 4.33 \ln(1 + 0.091 \frac{y}{\delta}) - 0.915 \ln(1 - 0.092 \frac{y}{\delta} + 0.0108 \frac{y^2}{\delta^2}) + \\ & + 5.59 \arctan(0.116 \frac{y}{\delta} - 0.492) + 2.56 \end{aligned}$$

Решив данные дифференциальные уравнения, находим соответствующие значения $\tau(\delta k_g)$ и $p(\delta k_g)$. Результаты расчетов касательных напряжений по этим моделям приведены на рисунке 4.1. Здесь представлены значения вещественной (кривые 1, 3) и мнимой (кривые 2, 4) частей амплитуды пульсаций трения на волнистой твердой стенке в зависимости от безразмерного волнового числа стенки $\tilde{k}_g \equiv \delta k_g = k\nu/u^*$, полученные, соответственно, по моделям МПГУ и МБ.

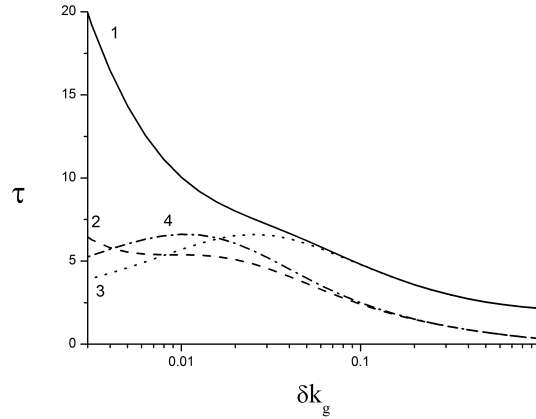


Рис. 4.1. Зависимости инкремента возмущений: 1 - для свободно стекающей пленки, 2 - с учетом только стационарного касательного напряжения со стороны газовой фазы, 3 - с учетом возмущений касательных напряжений в газовой фазе по модели ПГУ и 4 - по модели Бенджамина. $Re = 1$

Эти данные использовались для решения краевой задачи. В результате были получены зависимости $c \equiv c_r + ic_i = c(k)$. Возмущения, для которых

мнимая часть комплексной скорости $c_i > 0$ ($c_i < 0$) неустойчивы (устойчивы) и экспоненциально нарастают (затухают) со временем.

На рисунках 4.2, 4.3 представлены графики инкрементов $\beta_i \equiv kc_i$ в зависимости от волнового числа для двух характерных значений числа Рейнольдса ($Re = 1, Re = 20$) пленки воды, обдуваемой потоком воздуха со среднерасходными скоростями $U = 5$ м/с и $U = 10$ м/с соответственно, в канале с гидравлическим диаметром $d = 1$ см. На этих рисунках показаны результаты для свободно стекающей пленки (кривые 1), для пленки с учетом только стационарного касательного напряжения со стороны газовой фазы (кривые 2), и результаты расчетов по моделям МПГУ (кривые 3) и МБ (кривые 4).

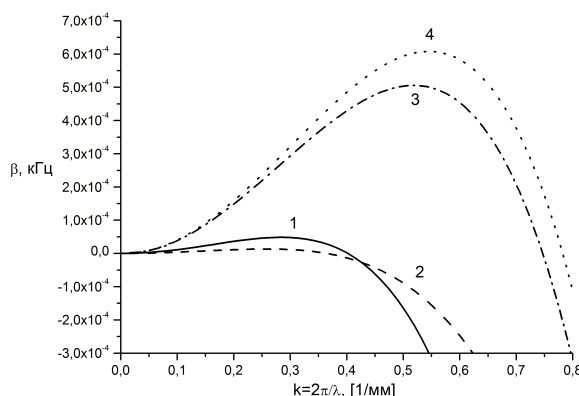


Рис. 4.2. Зависимости инкремента возмущений: 1 - для свободно стекающей пленки, 2 - с учетом только стационарного касательного напряжения со стороны газовой фазы, 3 - с учетом возмущений касательных напряжений в газовой фазе по модели ПГУ и 4 - по модели Бенджамина. $Re = 1$

Видно, что учет влияния стационарной составляющей трения газового потока стабилизирует пленку (см. кривые 1, 2), тогда как учет пульсаций касательного напряжения приводит к обратному эффекту (см. кривые 3, 4). Как можно заметить, графики функций, полученные с помощью модели переноса граничных условий и по модели Бенджамина, качественно похожи. Области неустойчивых возмущений отличаются друг от друга всего на несколько процентов, причем для модели Бенджамина она немного шире. С увеличением числа Рей-

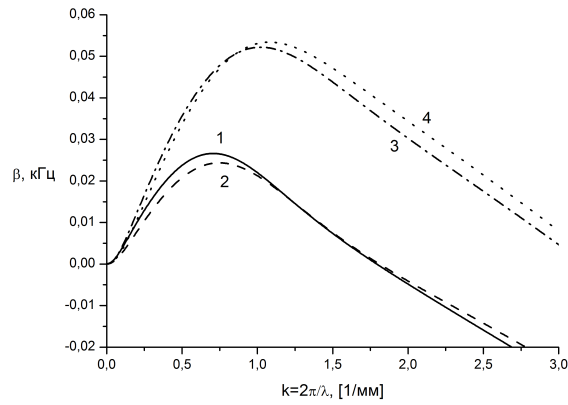


Рис. 4.3. Зависимости инкремента возмущений: 1 - для свободно стекающей пленки, 2 - с учетом только стационарного касательного напряжения со стороны газовой фазы, 3 - с учетом возмущений касательных напряжений в газовой фазе по модели ПГУ и 4 - по модели Бенджамина. $Re = 20$

нольдса пленки, различия в данных, полученных по МПГУ и МБ, уменьшаются (ср. кривые 3, 4 на рисунках 4.2, 4.3). Полученные результаты согласуются с результатами работ [41] и [75]. Там, используя результаты из [73] исследовалась устойчивость пленочных течений, как на основе интегральной модели, так и уравнения Орра-Зоммерфельда.

4.4. Результаты моделирования динамики двухфазной системы

Будем использовать данные по пульсациям трения, полученные по модели Бенджамина. Эти результаты представлены на рисунке 4.1 кривыми 3, 4. Как видно, например, из рис. 4.2, 4.3 (см. кривые 4), область неустойчивых волновых чисел k лежит в интервале $0 \div k_n$. В этом смысле ситуация аналогична той, которая имеет место для широко известного уравнения Курамото-Сивашинского (К-С). У него есть счетное множество стационарно-бегущих решений. Известно, что эволюционное поведение периодических решений этого уравнения существенно зависит от того, сколько имеется стационарно-бегущих решений с

данным волновым числом (см., например [76]). Так как области неустойчивых волновых чисел линейных возмущений у уравнений К-С и (4.48) топологически подобны ($k \in 0 \div k_n$), то можно ожидать, что и у уравнения (4.48) структура стационарно-бегущих решений тоже будет не тривиальна. Понимание этого позволяет разобраться в поведении некоторых типичных сценариев эволюции решений этого уравнения. В настоящей работе приведены результаты, полученные при одном значении параметра $B = 0,0287$. В этом случае нейтральное волновое число $k_n = 1,1$.

Для всех представленных ниже результатов рассматривалась эволюция периодического возмущения, у которого в начальный момент ненулевой задавалась только первая гармоника: $H_{1r} = 0,01, H_{1i} = 0$. Целью проведенных расчетов было продемонстрировать как при фиксированном значении параметра B и одинаковых начальных данных по мере продвижения вглубь области линейной неустойчивости у уравнения (4.48) меняется решение.

Наиболее проста и понятна эволюция возмущений в той области волновых чисел, где существует только одно стационарно-бегущее семейство решений. В этом случае все начальные возмущения эволюционируют к соответствующему стационарно-бегущему решению. Пример такого развития возмущений показан на рисунке 4.4. Здесь волновое число $k = 0,9$. На рисунке 4.4 представлена зависимость модулей первых трех гармоник от времени.

Как видно из рисунка 4.4, модули всех трех гармоник быстро выходят на стационарные значения, причем первая гармоника является преобладающей. Поэтому установившийся стационарно-бегущий режим представляет собой практически чистую синусоиду. Такое поведение гармоник обусловлено тем, что только первая из них лежит в области неустойчивости. Уже вторая гармоника расположена достаточно далеко от границы этой области, поэтому у нее и более высоких гармоник линейное затухание велико. Нелинейные эффекты, обусловленные квадратичной нелинейностью (второе слагаемое в уравнении (4.48)), приводят к тому, что в результате между гармониками устанавливает-

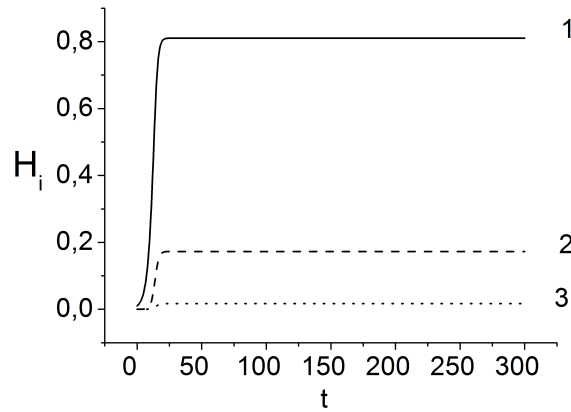


Рис. 4.4. Зависимости модулей первых трех Фурье-гармоник от времени. $k = 0,9$. Начальное значение: $|H_1(0)| = 0,01$. 1 – H_1 , 2 – H_2 , 3 – H_3 .

ся такой баланс, что модуль первой гармоники существенно больше, чем у всех остальных гармоник.

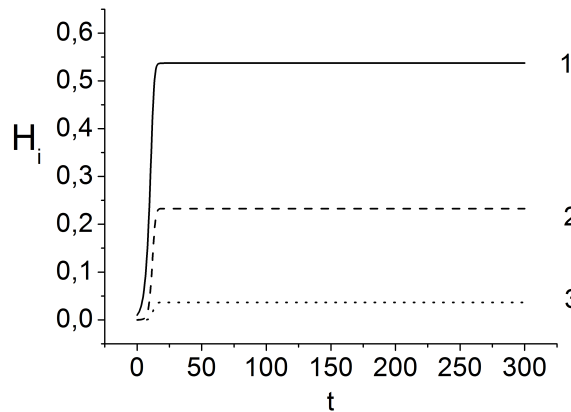


Рис. 4.5. Зависимости модулей первых трех Фурье-гармоник от времени. $k = 0,7$. Начальное значение: $|H_1(0)| = 0,01$. 1 – H_1 , 2 – H_2 , 3 – H_3 .

На рисунках 4.5, 4.6 показан пример развития возмущения с волновым числом $k = 0,7$. Здесь решение также притягивается к стационарно-бегущей волне, но, в отличие от первого примера, и вторая и третья гармоники соизмеримы с первой. В этом случае также только первая гармоника лежит в области неустойчивости, вторая же гармоника, хотя и лежит в области устойчивости, располагается к границе неустойчивости существенно ближе, чем в первом случае, и нелинейные эффекты, при выходе на стационар, обеспечивает ее модулю

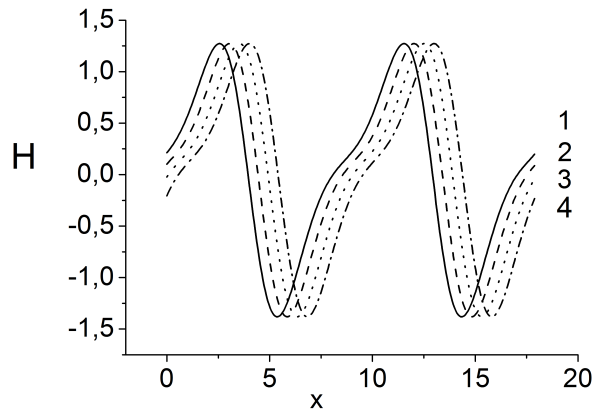


Рис. 4.6. Профили поверхности для четырех различных моментов времени. $k = 0.7$. 1 – $t = 50$, 2 – $t = 100$, 3 – $t = 150$, 4 – $t = 200$

достаточно большую величину. В свою очередь это приводит к тому, что и более высокие гармоники так же достигают больших установившихся значений. Поэтому, как видно из рисунка 4.6, установившаяся волна заметно отличается от чистой синусоиды. Здесь для трех различных моментов времени показаны профили волн. По оси абсцисс отложены две длины волны - 2λ ($\lambda = 2\pi/k$).

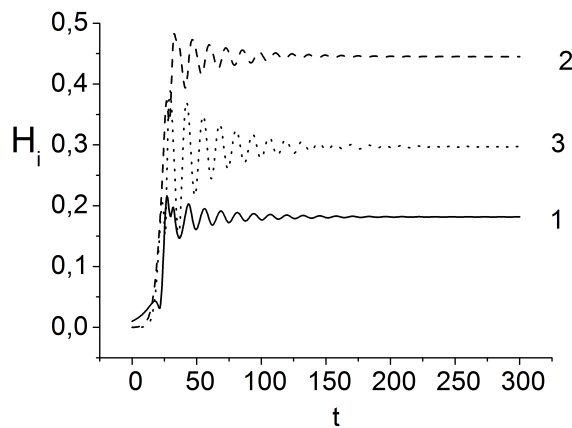


Рис. 4.7. Зависимости модулей первых трех Фурье-гармоник от времени. $k = 0.3$. Начальное значение: $|H_1(0)| = 0.01$. 1 – H_1 , 2 – H_2 , 3 – H_3

Пример развития возмущения с волновым числом $k = 0.3$ представлен на рисунках 4.7, 4.8. Здесь решение также проэволюционировало к некоторому стационарно-бегущему решению, но этот пример существенно отличается от приведенных выше. В этом случае на больших временах доминирует 2-я гар-

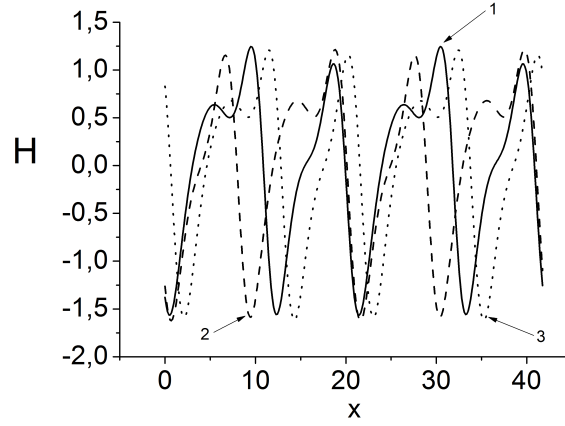


Рис. 4.8. Профили поверхности для трех различных моментов времени. $k = 0,3$. 1 – $t = 50$, 2 – $t = 150$, 3 – $t = 300$

моника, поэтому на этих временах на длине волны наблюдается два основных экстремума.

4.5. Вывод интегральной модели с учетом членов до второго порядка малости

При увеличении числа Рейнольдса рассуждения о малости амплитуды возмущений оказываются неприменимы и возникает потребность в новом подходе к моделированию волнистых пленок жидкости. Полная постановка задачи для жидкости включает уравнения Навье-Стокса и неразрывности с соответствующими кинематическими и динамическими граничными условиями, которые в безразмерной записи имеют вид [77]:

$$\varepsilon \text{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\varepsilon \text{Re} \frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\text{Re}}{Fr} \quad (4.54)$$

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\varepsilon^3}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.56)$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad v(x, 0, t) = 0 \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, h, t) = \text{Re}\tau + \frac{4\varepsilon^2 h_x}{1 - \varepsilon^2 h_x^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.58)$$

$$v(x, h, t) = \frac{\partial h}{\partial t} + u(x, h, t) \frac{\partial h}{\partial x} \quad (4.59)$$

$$p = P_g - \frac{We\varepsilon^2 h_{xx}}{(1 + \varepsilon^2 h_x^2)^{3/2}} - \frac{2\varepsilon}{\text{Re}} \frac{1 - \varepsilon^2 h_x^2}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.60)$$

Здесь h – мгновенная локальная толщина, Re – число Рейнольдса, Fr – число Фруда, $W = \frac{Fi^{1/3}}{Re^{4/3} Fr^{1/3}}$, ε – параметр длинноволновости, h_0 – характерный поперечный масштаб, l_0 – характерный продольный масштаб, Fi – пленочное число, τ и P_g – касательные и нормальные напряжения на границе раздела фаз, соответственно.

Пленочное течение жидкости, в большинстве случаев, характеризуется малостью отношения характерного возмущения поверхности h_0 к длине волны этого возмущения l_0 . Это отношение обычно обозначают и называют параметром длинноволновости. Учитывая малость некоторых членов в уравнениях (4.54)-(4.60), их можно исключить из рассмотрения. Такой подход был назван длинноволновым приближением – впервые в задаче о течении сплошной среды он был применен Прандтлем в 1904 году [20] и развит Шлихтингом [21]. В этом приближении система уравнений (4.54)-(4.60) принимает вид:

$$\varepsilon \text{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\varepsilon \text{Re} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\text{Re}}{Fr} \quad (4.61)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.62)$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad v(x, 0, t) = 0 \quad (4.63)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, h, t) = \text{Re}\tau \quad (4.64)$$

$$v(x, h, t) = \frac{\partial h}{\partial t} + u(x, h, t) \frac{\partial h}{\partial x} \quad (4.65)$$

$$p = P_g - W\varepsilon^2 h_{xx} \quad (4.66)$$

Использование длинноволнового приближения значительно упрощает задачу, однако по-прежнему остается проблема изменяющейся и неизвестной заранее области течения. Одним из плодотворных путей решения этой проблемы в свое время стал интегральный подход, который впервые применил Капица [22]. Дальнейшее развитие метод получил в работах Левича [23], Маурина [32] и Шкадова [33]. Для вертикальной свободно стекающей пленки жидкости из системы (4.61)-(4.66) в 1967 году Шкадовым было получено уравнение вида:

$$q_t + \frac{6}{5} \left(\frac{q^2}{h} \right)_x = \frac{h}{\varepsilon Fr} - \frac{3q}{\varepsilon Re h^2} + We \varepsilon^2 h h_{xxx}$$

Здесь q – расход жидкости в сечении пленки. При получении этого уравнения использовалась гипотеза об автомодельном полупараболическом профиле продольной скорости в пленке, хорошо согласующаяся с множеством экспериментов:

$$u = \frac{y}{h} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{h} \right)^2$$

В 1996 году в работе [75] интегральный подход Шкадова был обобщен на случай совместного течения тонкой пленки жидкости, взаимодействующей с турбулентным потоком газа. В итоге была получена система уравнений:

$$q_t + \frac{6}{5} \left(\frac{q^2}{h} \right)_x + \frac{Re \tau}{20} (qh)_x + \frac{Re^2 \tau^2}{120} (h^3)_x = \frac{h}{\varepsilon Fr} - \frac{3q}{\varepsilon Re h^2} + \frac{3\tau}{2\varepsilon} + We \varepsilon^2 h h_{xxx} \quad (4.67)$$

$$h_t + q_x = 0$$

При этом автомодельный профиль скорости имеет вид:

$$u = \frac{3q}{h} \left(\frac{y}{h} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right) - \frac{Re \tau h}{2} \left(\frac{y}{h} - \frac{3}{2} \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right) \quad (4.68)$$

В работах Ruyer-Quil и Manneville [34], [35], [78] была разработана так называемая "упрощенная модель второго порядка" (simplified second order model), учитывающая эффекты вязкости во втором порядке по параметру длинноволновости. Эта модель содержит только две переменных (толщина и расход), что

позволяет относительно просто оценить влияние коротковолновой диссипации на форму волновых профилей. Пространственная эволюция решений с использованием упрощенной модели неплохо согласуется с экспериментальными данными и результатами прямого численного моделирования при умеренных числах Рейнольдса жидкости. В настоящей работе мы воспользуемся аналогичным подходом для модификации системы уравнений (4.67). Перепишем исходные уравнения (4.54)-(4.60) оставляя в ней члены до ε^2 включительно:

$$\varepsilon \text{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\varepsilon \text{Re} \frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\text{Re}}{Fr} \quad (4.69)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (4.70)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.71)$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad v(x, 0, t) = 0 \quad (4.72)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, h, t) = \text{Re}\tau + 4\varepsilon^2 h_x \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.73)$$

$$v(x, h, t) = \frac{\partial h}{\partial t} + u(x, h, t) \frac{\partial h}{\partial x} \quad (4.74)$$

$$p = P_g - We\varepsilon^2 h_{xx} - \frac{2\varepsilon}{\text{Re}} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.75)$$

В результате интегрирования (4.69)-(4.71) с учетом (4.68) получается новая система уравнений [79]:

$$\begin{aligned} q_t + \frac{6}{5} \left(\frac{q^2}{h} \right)_x + \frac{\text{Re}\tau}{20} (qh)_x + \frac{\text{Re}^2 \tau^2}{120} (h^3)_x &= \frac{h}{\varepsilon Fr} - \frac{3q}{\varepsilon \text{Re} h^2} + \frac{3\tau}{2\varepsilon} + We\varepsilon^2 h h_{xxx} - \\ &- \frac{\varepsilon}{\text{Re}} \left(q_{xx} - \frac{9}{2} h \left(\frac{q}{h} \right)_{xx} - \text{Re}\tau h_x^2 + \frac{1}{4} \text{Re}\tau h h_{xx} \right) \\ h_t + q_x &= 0 \end{aligned} \quad (4.76)$$

4.5.1. Методика моделирования

Для численного моделирования волновых режимов на стекающей пленке жидкости были использованы системы уравнений (4.67) и (4.76). В начальный момент времени в расчетной области задается локализованное возмущение малой амплитуды, имеющее следующий вид:

$$h(x, 0) = 1 + 0.1 \exp(-(x - L/2)^2/2\sigma^2)$$

Здесь L – длина расчетной области, σ – характерная длина возмущения. В результате линейного анализа решения ($h = 1, q = 1$) системы (4.67) были получены зависимости комплексной скорости $c = c_r + ic_i$. Длину волны возмущений l_0 , для которых величина мнимой части комплексной скорости $c_i = 0$ будем называть нейтральной длиной волны. В настоящем исследовании размер расчетной области L равнялся 20 нейтральным длинам волн l_0 . Нейтральная длина волны рассчитывается каждый раз для заданных параметров пленки жидкости и потока газа.

Для нахождения решений систем уравнений (4.67) и (4.76) функции h и q представляются в виде пространственного ряда Фурье, что соответствует периодическим по x решениям:

$$h(x, t) = \sum_n h_n(t) \exp(iknx) \quad (4.77)$$

$$q(x, t) = \sum_n q_n(t) \exp(iknx) \quad (4.78)$$

Так как h и q – вещественные функции, то $\bar{h}_{-n} = h_n$, а $\bar{q}_{-n} = q_n$. Верхняя черта означает операцию комплексного сопряжения. После подстановки (4.77), (4.78) в системы уравнений (4.67) и (4.76) получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений на Фурье-гармоники $h_n(t)$ и $q_n(t)$. Полагая, что все $h_n(t)$ и $q_n(t)$ с индексами $n > N$ равны нулю, приходим к ее конечномерному аналогу. Получившуюся систему обыкновенных диф-

ференциальных уравнений решаем методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Таким образом мы отслеживаем на протяжении определенного временного отрезка эволюцию каждой гармоники функций h и q .

Заметим, что эволюционное исследование решений позволяет обнаружить описанную во введении двухволновую структуру, возникающую в двухфазной системе пленка-газ. В тоже время методы поиска стационарно-бегущих решений для этой задачи оказываются неприменимы, поскольку различные типы волн движутся с разными скоростями.

4.5.2. Экспериментальные данные

В настоящей работе используются экспериментальные данные, полученные в работе [46]. В этой работе дано детальное описание экспериментов, здесь будут лишь кратко описаны ключевые моменты.

Эксперименты проводились в вертикальном опускном газожидкостном течении в цилиндрической трубе с внутренним диаметром $d = 15$ мм. Жидкость подавалась на стенки канала в виде пленки через кольцевой щелевой зазор толщиной 0.5 мм. Поток газа подавался в канал через соосную с основным каналом тонкостенную трубу с внутренним диаметром 13.4 мм. Рабочей жидкостью служила дистиллированная вода с растворенным в небольшой концентрации (30 мг/л) флюорофором Родамин 6Ж. Измерения проводились при помощи метода лазерно-индуцированной флюоресценции на расстоянии 500 – 600 мм от точки первичного контакта фаз в продольном сечении канала длиной 100 мм и шириной 0.1 мм. Для возбуждения флюоресценции эта область освещалась лазерным ножом, сформированным из пучка непрерывного лазера мощностью 50 мВт с длиной волны излучения 532 нм. Мгновенные распределения локальной яркости переизлученного флюоресцентного света измерялись цифровой камерой со светофильтром, пропускающим свет с длиной волны более 550 нм. Частота опроса камеры составляла 2 кГц; пространственное разрешение – 0.1 мм/пиксель. Полученные распределения яркости пересчитывались в

локальную толщину пленки жидкости по формуле, приведенной в [46]. В качестве режимных параметров использовались число Рейнольдса жидкости Re и среднерасходная скорость газа V_g . Число Рейнольдса определялось по формуле $Re = q/\pi d\nu$, где q – объемный расход жидкости, ν – кинематическая вязкость жидкости.

Информативной формой представления экспериментальных данных являются матрицы пространственно-временной эволюции толщины пленки, $h(x, t)$, составленные из мгновенных профилей толщины пленки вдоль продольной координаты. Мы будем использовать эту форму для представления как экспериментальных, так и расчетных данных. На рисунках 4.9-4.14 такие матрицы будут даны в графическом представлении, т.е. в виде картинок, где яркость каждого пикселя прямо пропорциональна толщине пленки жидкости в соответствующем элементе матрицы. Пример такого представления для экспериментальных данных при $Re = 20$ и $V_g = 18$ м/с дан на рисунке 4.9. Белый цвет на этом рисунке соответствует толщинам пленки 0.5 мм и выше. Белый параллелограмм обозначает границы области, представленной на рисунке 1.2. Волны движутся в плоскости $x - t$ вдоль характеристических линий; тангенс угла наклона линии к оси t пропорционален скорости волны. Первичные волны выделяются большей амплитудой и скоростью. По участкам пленки между первичными волнами движутся более медленные вторичные волны. Характеристическая линия вторичной волны начинается на заднем склоне порождающей ее первичной волны и заканчивается на переднем склоне следующей первичной волны.

При внимательном рассмотрении рисунка 4.9 очевидно, что волновая картина значительно сложнее упрощенного описания, данного выше. Так, скорости первичных и вторичных волн не постоянны. Имеет место сложное взаимодействие волн. Так, вторичная волна может, набрав амплитуду и скорость, начать генерировать вторичные волны и, таким образом, перейти в класс первичных волн. Первичная волна может, наоборот, существенно снизить скорость и ам-

плитуду и в итоге поглотиться следующей первичной волной. Тем не менее, упрощенное описание в достаточной мере адекватно. Оно и будет использоваться в дальнейшем для сравнения с результатами моделирования.

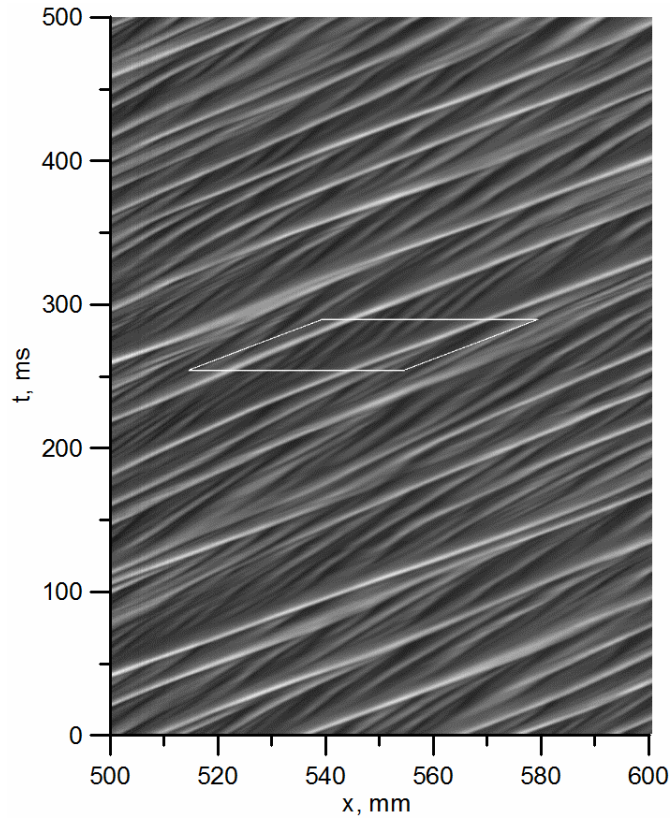


Рис. 4.9. Графическое представление фрагмента матрицы $h(x, t)$. $Re = 20$, $V_g = 18$ м/с. Эксперимент.

4.5.3. Результаты расчета

Метод введения начальных возмущений в модели отличается от того, что происходит в эксперименте. В эксперименте пленка начинает взаимодействовать с газом в точке $x = 0$, в течение всего времени эксперимента. В рамках $x-t$ -представления можно сказать, что начальные возмущения в эксперименте задаются на оси t и развиваются вниз по потоку с движением по оси x . Кроме того, эксперименты проводятся достаточно далеко (500 мм) от входа в канал, где волновая картина уже не чувствует эффектов начальных возмущений. По крайней мере, никакой тенденции изменения параметров волн вниз по потоку в пределах области измерений выявлено не было.

В модели же возмущения задаются на оси x и развиваются с движением по оси t . Тем не менее, использование $x - t$ -представления позволяет проследить эволюцию отдельного начального возмущения и дальнейшего взаимодействия волн в протяженной временной области. Благодаря использованию периодических граничных условий по x , пространственный размер области также достаточно велик. На рисунке 4.10 представлена пространственно-временная эволюция толщины пленки, рассчитанная по модели Шкадова с моделью переноса граничных условий (МПГУ) для возмущений в газовой фазе. На рисунке приведены два расчетных периода. Начальное возмущение (заданное в точке $t = 0$, $x = 25$ мм) распространяется со сравнительно низкой скоростью и, с развитием нелинейности, трансформируется в сложную волновую систему, компоненты которой взаимодействуют между собой. В частности, у исходного возмущения быстро развивается капиллярный предвестник большой амплитуды.

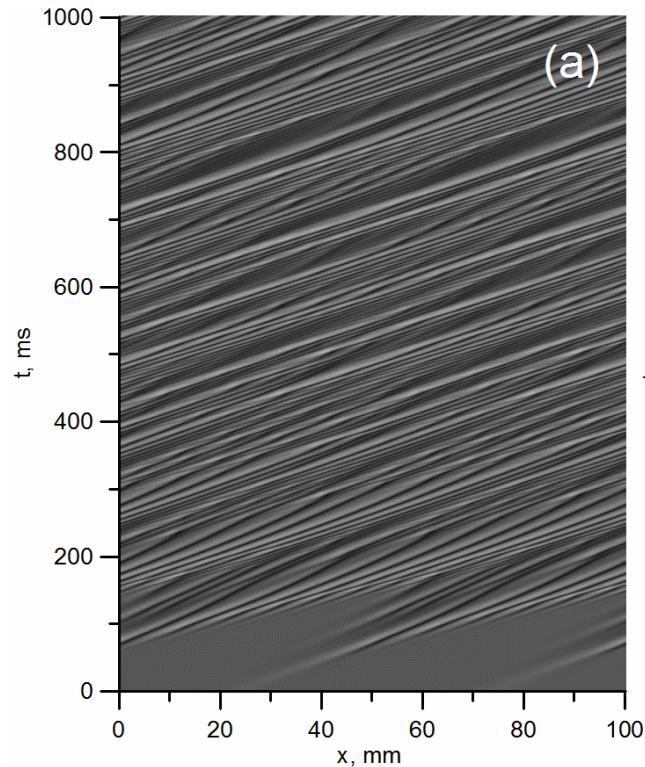


Рис. 4.10. Графическое представление фрагмента матрицы $h(x, t)$. $Re = 20, V_g = 18$ м/с. Модель Шкадова с моделью переноса граничных условий.

На первый взгляд, в интервале между 150 и 500 мс волновая картина весьма напоминает картину, наблюдаемую в эксперименте: в ней также выде-

ляются быстрые волны большой амплитуды, разделенные участками более тонкой пленки, покрытой более медленными волнами. Однако при внимательном рассмотрении выясняется (рисунок 4.11а), что формирование медленных волн происходит иначе. С распространением волны вниз по потоку происходит рост амплитуды первого горба капиллярного предвестника, в то время как основной пик волны теряет амплитуду. В результате основной пик замедляется и отстает от своего предвестника, и в итоге поглощается следующей быстрой волной. Первый пик предвестника при этом занимает место основного пика волны и далее ситуация повторяется достаточно большое количество циклов. Хотя в эксперименте также существуют явления замедления и поглощения быстрых волн, как правило, медленные волны формируются без развала основного пика (рисунок 4.11б), а сам основной пик значительно более стабилен. Более того, при достаточно больших скоростях газа сам капиллярный предвестник в эксперименте практически не наблюдается.

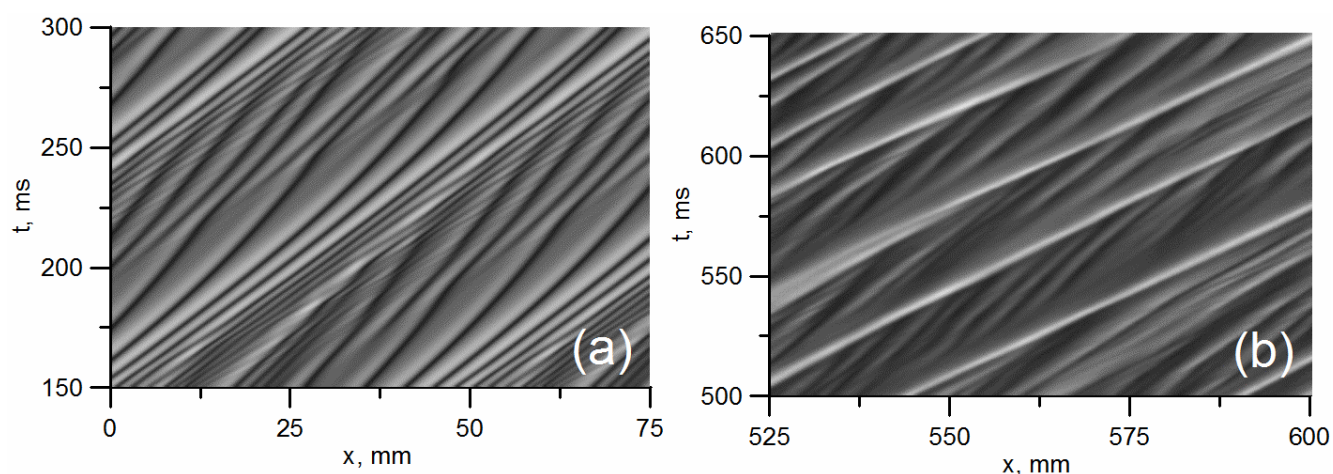


Рис. 4.11. а) Увеличенный фрагмент рисунка 4.10. б) Увеличенный фрагмент рисунка 4.9.

Таким образом, использование модели Шкадова без подавления предвестника приводит к перестройке волновой структуры, выражающейся в коротком времени жизни длинных высокоамплитудных волн. Вниз по потоку развившийся капиллярный предвестник полностью подавляет длинные волны (см. Рис. 4.10 начиная с $t = 700$ мс), и исчезает даже кажущееся сходство с экспериментом.

На рисунке 4.12 представлен расчет по новой модели второго порядка с той же моделью для возмущений в газовой фазе. Предвестник подавляется не полностью, и явление переноса энергии от основного пика волны к первому пика предвестника по-прежнему существует. Однако подавление предвестника дает очевидный эффект: индивидуальные пики длинных высокоамплитудных волн значительно более стабильны. На больших временах волновая картина не подавляется предвестником так, как это происходит в модели Шкадова. И, что наиболее важно, на отдельных участках пространственно-временной траектории таких пиков наблюдается генерация вторичных волн.

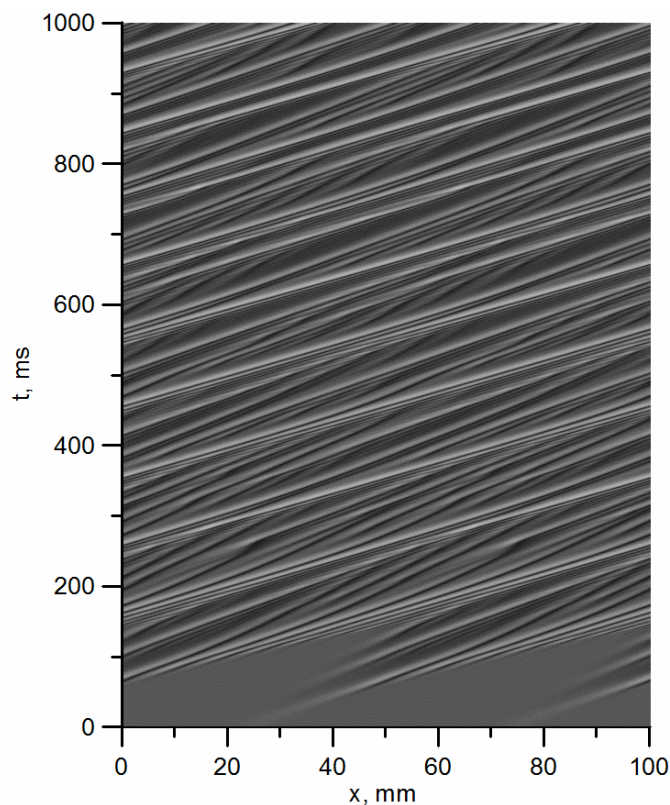


Рис. 4.12. Графическое представление фрагмента матрицы $h(x, t)$. $Re = 20$, $V_g = 18$ м/с. Модель второго порядка малости с МПГУ.

Подробно этот процесс представлен на рисунке 4.13. Вторичные волны на этом рисунке указаны стрелками. Хотя вторичные волны при подходе к следующей первичной волне сильно возмущены влиянием ее предвестника, наблюдается качественное соответствие моделируемой волновой картины и эксперимента. Первичная волна генерирует вторичные волны на протяжении фазы ее ста-

бильного существования. После того, как она начинает замедляться вследствие описанного выше эффекта предвестника, генерация вторичных волн прекращается. Таким образом, в модели второго порядка с моделью переноса граничных условий наблюдается локальное качественное соответствие с экспериментом.

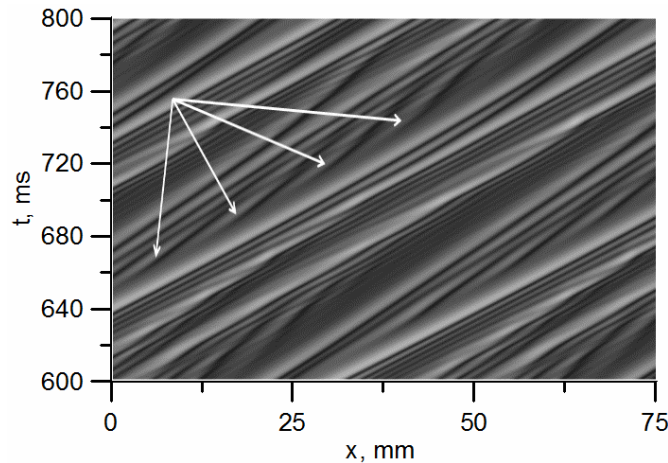


Рис. 4.13. Увеличенный фрагмент рисунка 4.12. Стрелками указаны вторичные волны.

При расчете по модели второго порядка с моделью Бенджамина для возмущений в газовой фазе процесс распада первичных волн выглядит иначе (Рис. 4.14). Во-первых, частота актов замедления таких волн меньше, чем при использовании модели второго порядка с МПГУ и близка к частоте, наблюдаемой в модели Шкадова-МПГУ. Во-вторых, после начальной фазы замедления такие волны вновь ускоряются (показано стрелкой на рисунке 4.14). В результате одновременной генерации новых первичных волн из горбов предвестника и сохранения старых пиков происходит существенный рост частоты первичных волн. Такие волны распространяются с малым расстоянием друг от друга, что, скорее всего, и препятствует генерации и развитию вторичных волн. Таким образом, модель второго порядка с МПГУ лучше всего подавляет негативное нефизичное влияние предвестника и лучше всего описывает происходящее в эксперименте. Представляет интерес провести количественное сравнение профилей волн, наблюдаемых в эксперименте с профилями, рассчитанными по этой модели. Такое сравнение представлено на рисунке 4.15 для мгновенных профилей, выбранных из рисунка 1.2 и рисунка 4.13. Первичные волны в экспериментальной записи

обозначены римскими цифрами; первичные волны в моделируемом сигнале обозначены латинскими буквами.

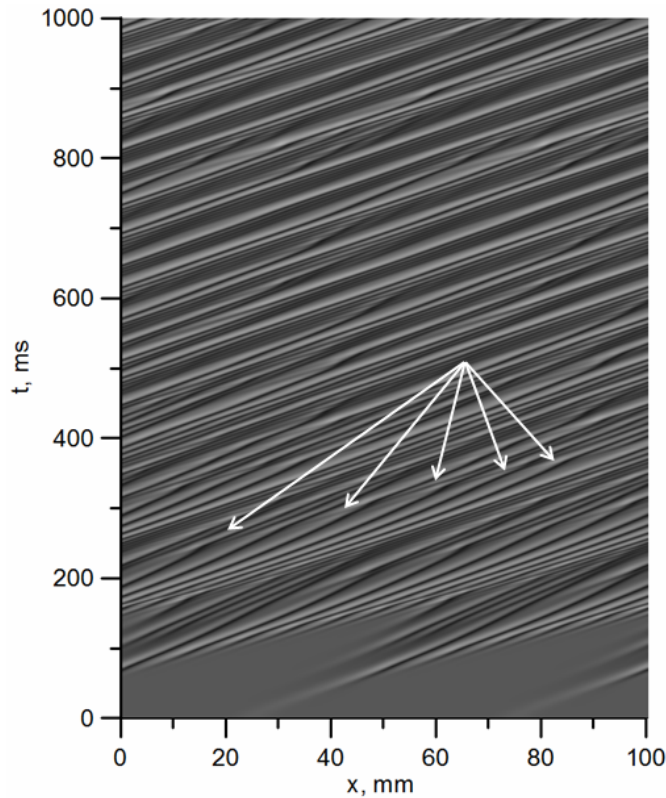


Рис. 4.14. Графическое представление фрагмента матрицы $h(x, t)$. $Re = 20$, $V_g = 18$ м/с. Модель второго порядка с моделью Бенджамина.

Сходство модели с экспериментом проявляется в одинаковом продольном размере первичных волн, подобии формы профиля первичной волны и положении области генерации вторичных волн (для волн I и A можно наблюдать вторичную волну, возникающую примерно в 5 мм позади гребня). Тем не менее, наблюдаются и существенные различия. Первое, что бросается в глаза, это различие в амплитуде первичных волн: в эксперименте она в полтора-два раза больше, чем в модели. Во-вторых, расстояние между первичными волнами в эксперименте также превышает расчетное в 2-3 раза. В-третьих, если в эксперименте мелкие волны перед первичными представляют собой медленные вторичные волны, которые вскоре будут поглощены первичной волной, то в модели это, как правило, капиллярный предвестник первичной волны, движущийся с той же скоростью, что и сама волна.

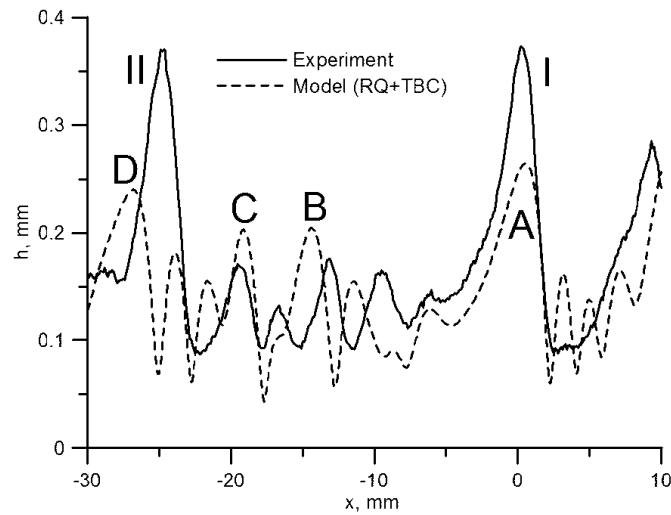


Рис. 4.15. Сравнение экспериментального и расчетного (модель второго порядка с МПГУ) профилей толщины пленки жидкости.

Логично предположить, наличием мощного предвестника объясняются не только качественные расхождения между моделируемой и экспериментальной волновой структурой, описанные выше, но и основные количественные различия в характеристиках моделируемых и экспериментальных волн. Так, генерация предвестника может приводить к замедлению роста амплитуды первичных и к увеличению количества первичных волн на единицу длины благодаря наблюдаемому в модели росту пиков предвестника и их трансформации в первичные волны.

Также было проведено сравнение скоростей первичных и вторичных волн в модели и эксперименте. Для каждого типа волн в каждом из случаев были отмечены координаты двух точек прямолинейного участка их траектории для десяти произвольно взятых волн, и на основе этих данных рассчитаны среднее значение и стандартное отклонение скорости волн. Данные по скоростям приведены в таблице:

Тип данных	Тип волн	Средняя скорость, м/с	Стандартное отклонение, м/с
Эксперимент	Первичные	0.70	0.065
Эксперимент	Вторичные	0.39	0.034
Модель	Первичные	0.45	0.023
Модель	Вторичные	0.29	0.031

Скорость первичных волн в эксперименте более чем в полтора раза превы-

шает скорость в модели. С учетом того, что скорость нелинейных волн прямо пропорциональна их амплитуде, различие в скорости может объясняться описанной ранее разницей в амплитуде. Логично ожидать, что скорость вторичных волн зависит от скорости порождающих их первичных волн. Поэтому наличие разницы в скоростях вторичных волн не удивительно. При этом соотношение скорости вторичных волн к скорости первичных в модели несколько выше, чем в эксперименте (0.64 против 0.56). Возможно, это различие связано с меньшим расстоянием между первичными волнами и наличием в этой области капиллярного предвестника. Можно предположить, что в модели вторичные волн уже на начальном этапе их эволюции начинают взаимодействовать со следующей за ними первичной волной и ее предвестником.

4.6. Выводы к четвертой главе

Получено одно эволюционное уравнение на толщину пленки, стекающей под действием спутного газового потока в приближении малых чисел Рейнольдса. Проведен анализ различных моделей трения пленки с газовым потоком.

Во второй части работы был проведен анализ различных моделей трения пленки с газом, проведен расчет типичных сценариев эволюция пленки, стекающей под действием спутного газового потока, проведено сопоставление с экспериментальными данными в результате чего были выявлены сильные и слабые стороны квазистационарных моделей трения пленки с газом, а также выработаны рекомендации по использованию этих моделей при расчете эволюции.

Согласно экспериментальным данным, при течении тонких пленок жидкости, обдуваемых высокоскоростным потоком газа, имеет место неустойчивость задних склонов нелинейных уединенных волн, называемых первичными волнами. В результате этой неустойчивости развиваются медленные вторичные волн сравнительно небольшой амплитуды, которые распространяются по поверхности тонкого остаточного слоя между первичными волнами.

В настоящей работе была проведена попытка воспроизвести наличие такой неустойчивости методами численного моделирования. Моделирование проводилось при помощи моделей Шкадова и второго порядка с использованием моделей турбулентности Бенджамина и модели переноса граничных условий. Для обнаружения волн различных типов, движущихся с различными скоростями, проводилось эволюционное исследование решений. Анализ полученных решений проводился в $x - t$ -представлении.

В используемых интегральных моделях сильно переоценивается роль капиллярного предвестника, который, взаимодействуя с первичными волнами, существенно искажает их характеристики и вызывает распад индивидуальных первичных волн. Полностью избежать такого явления в рамках данной работы не удалось, однако при подавлении предвестника в модели второго порядка с МПГУ явление генерации вторичных волн первичными было обнаружено. Генерация имеет место в тех случаях, когда первичная волна распространяется в течение длительного времени с примерно постоянной скоростью на достаточном удалении от следующей первичной волны. Такая ситуация наиболее близка к наблюдаемой в эксперименте. Обнаружение генерации вторичных волн в рамках используемых моделей сужает круг возможных гипотез, объясняющих природу вторичной неустойчивости задних склонов первичных волн. Так, в модели генерация происходит в двумерной системе при автомоделном профиле скорости в пленке и сравнительно простой структурой турбулентности. Это означает, что наличие, например, поперечной неустойчивости первичных волн (см. гипотезу 4 во Введении) или взрывов турбулентности в жидкой фазе (гипотеза 5) не необходимо для генерации вторичных волн, хотя эти явления и могут усиливать генерацию.

По итогам данной работы могут быть сформулированы следующие рекомендации для будущих исследований. Для исследования пространственно-временной эволюции волн различных типов в рассматриваемой системе полезно эволюционное исследование решений и анализ результатов в $x - t$ -представлении.

Для адекватного воспроизведения пространственно-временной эволюции первичных волн рекомендуется использовать модели, в которых при наличии высокоскоростного потока газа не происходит генерация капиллярного предвестника, поскольку данный факт не подтвержден экспериментально.

Заключение

В первой главе представлен обзор литературы, посвященный исследованию течения расплава в реакторах типа БН. Для этих реакторов характерны высокие удельные энерговыделения и низкие рабочие давления. Такие условия эксплуатации приводят к тому, что при закипании теплоносителя в процессе развития аварии с потерей расхода скорость течения паров натрия может достигать сотен метров в секунду, что оказывает значительное влияние на динамику течения расплава материалов твэл. Кроме этого течение расплава твэл в начале аварии имеет пленочный характер, т.е. расплав движется по твэл в виде тонкой пленки жидкости, которая включена в процесс теплопереноса внутри реактора, поэтому чрезвычайно важно предсказывать ее поведение. Далее в этой главе проведен анализ литературы, посвященный вопросу гидродинамических процессов происходящих в тонких пленках жидкости, поскольку эти процессы оказывают значительное влияние на тепловые процессы, происходящие в самой пленке. В конце главы приведен обзор работ, в которых изучалось влияние газового потока на динамику тонких пленок жидкости.

Во второй главе разработаны и внедрены в расчетный код СОКРАТ-БН модели, позволяющие описывать плавление и перемещение расплавленных оболочек ТВЭЛ реакторов типа БН. Описания динамики расплава использовалась упрощенная модель, которая предполагает пленку локально равновесной в каждый момент времени во всех расчетных точках. Это приближение справедливо в самом начале аварии, когда пленка расплава чрезвычайно тонка. Также в этой главе проведено тестирование представленных моделей на задачах, имеющих аналитическое решение, выполнена кросс-верификация с кодом SAS4A на эксперименте серии R реактора TREAT. В описанной модели пренебрегается волновыми процессами, возникающими вследствие неустойчивости, возникающей на границе раздела фаз жидкость-газ. Дальнейшие главы были посвящены изучению именно этого вопроса.

В третьей главе проведено исследование свободно стекающей изотермической пленки жидкости. В этой главе внимание акцентируется на изучении гидродинамических механизмов связанных с процессами волнообразования. Обнаружено, что для дивергентной системы уравнений в длинноволновом приближении существует преобразование, относительно которого модельная система уравнений инвариантна. Проведено численное исследование свойств решений этой модельной системы и показано, что они также обладают свойством симметрии в расширенной по поперечной координате области. Также в этой главе обнаруженная симметрия применена для построения низкоразмерных моделей галеркинского типа. Проведен сравнительный анализ новой системы уравнений и дивергентной системы уравнений в длинноволновом приближении. Представлены результаты линейного анализа как в длинноволновой, так и в коротковолновой области в сравнении с результатами задачи Орра-Зоммерфельда. Отмечено, что для малых чисел Рейнольдса ($Re \sim 1$) результаты совпадают с графической точностью, а для умеренных чисел Рейнольдса ($Re \sim 1/\varepsilon$) новая модель находит хорошее согласие. Представлены результаты сравнения нелинейных решений как для малых, так и для умеренных чисел Рейнольдса.

Четвертая глава посвящена исследованию совместного течения пленки жидкости и взаимодействующего с ней газового потока. Для малых чисел Рейнольдса получено одно эволюционное уравнение на толщину пленки жидкости. Рассмотрены и проанализированы квазиламинарные модели турбулентности для описания двухфазного взаимодействия газа с пленкой жидкости. Используя эти модели, были получены стационарно-бегущие решения дивергентной системы уравнений в длинноволновом приближении с учетом влияния газового потока и решения эволюционного уравнения для малых чисел Рейнольдса. Кроме этого проведен расчет типичных сценариев развития возмущения с использованием интегральной модели Шкадова и упрощенной модели второго порядка учитывающих влияние газового потока. Проведено сопоставление результатов расчета с экспериментальными результатами.

Список литературы

1. А.В. Палагин. Физическая модель перемещения расплавленных материалов на начальном этапе разрушения активной зоны АЭС // Известия Академии Наук. Энергетика. – 2002. – Т.4. – С.93–100.
2. B. Adroguer, S. Bourdon, R. Gonzalez. Analysis of fuel-cladding interaction in phebus sfd tests using the icare2 code. – 1993.
3. C.M. Allison J.K. Hohorst. An assessment of relap/scdapsim/mod3. 2 using bundle heating and melting experiments with irradiated fuel. – 2003.
4. M. Mladin, D. Dupleac, I. Prisecaru. Scdap/relap5 application to candu6 fuel channel analysis under postulated lloca/loecc conditions // Nuclear Engineering and Design. – 2009. – Т.239, №2. – С.353–364.
5. И.Г. Кудашов, С.И. Лежнин, В.Н. Семенов, А.Л. Фокин, Р.В. Чалый, Э.В. Усов. Моделирование процессов кипения натрия в одномерном двухжидкостном приближении кодом СОКРАТ-БН // Атомная энергия. – 2011. – Т.111, №3. – С.137–139.
6. A.M. Tentner, K.J. Miles, Kalimullah, D.J. Hill, G. Birgersson. Fuel relocation modeling in the sas4a accident analysis code system // Technical report, Argonne National Laboratory Reactor Analysis and Safety Division. – 1986.
7. H. Yamano, S. Fujita, Y. Tobita. Simmer-iii: A computer program for lmfr core disruptive accident analysis. version 3. a model summary and program description // Technical report, Japan Nuclear Cycle Development Inst., Tokai, Ibaraki (Japan). – 2003.
8. Ю.М. Ашурко, А.В. Волков, К.Ф. Раскач. Разработка программных модулей для расчета запроектных аварий в быстрых реакторах с учетом пространственно-временной кинетики // Атомная энергия. – 2013. – Т.114, №2. – С.63–67.
9. D.B. Ingham, I. Pop. Transport phenomena in porous media. Oxford, Pergamon. – 2002.

10. Р.И. Нигматулин. Динамика многофазных сред. – 1987.
11. H.W. Zhang, W.Q. Tao, Y.L. He, W. Zhang. Numerical study of liquid film cooling in a rocket combustion chamber // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2006. – Т.49, №1. – С.349–358.
12. K. Takeishi, S. Aoki, T. Sato, K. Tsukagoshi. Film cooling on a gas turbine rotor blade. // Journal of turbomachinery. – 1992. – Т.114, №4. – С.828–834.
13. G.L. Shires, A.R. Pickering, P.T. Blacker. Film cooling of vertical fuel rods // Technical report, United Kingdom Atomic Energy Authority, Reactor Group, Winfrith (United Kingdom). – 1964.
14. S. Schilling. Method of producing an atomized liquid to be conveyed in a stream of carrier gas and apparatus for implementing the method // US Patent 5,261,949. – 1993.
15. E.B. Norman, Ch.T. Angell, P.A. Chodash. Observations of fallout from the fukushima reactor accident in san francisco bay area rainwater // PLoS One. – 2011. – Т.6, №9. – С.24330.
16. W. Nusselt. The surface condensation of water vapour // VDI Z. – 2016. – Т.60. – С.541–546.
17. M. Jakob, S. Erk, H. Eck. Verbesserte messungen und berechnungen des wärmeüberganges beim kondensieren strömenden dampfes in einem vertikalen rohr // Phys. Z. – 1935. – Т.36, №3. – С.73–84.
18. С.С. Кутателадзе. Теплопередача при кипении и конденсации // М.: Машгиз. – 1949.
19. O. Reynolds. On the theory of lubrication and its application to mr. beauchamp tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil // Proceedings of the Royal Society of London. – 1886. – Т.40. – С.191–203.
20. L. Prandtl. On fluid motions with very small friction // Verhldg. – 1904. – Т.3. – С.484–91.
21. Г. Шлихтинг. Теория пограничного слоя. – М., 1956. С.512.

22. П.Л. Капица , С.П. Капица. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1948. – Т.18, №1. – С.3–28.
23. В.Г. Левич. Физико-химическая гидродинамика. – 1959.
24. D.J. Benney. Long waves on liquid films // Journal of mathematics and physics. – 1966. – Т.45, №2. – С.150.
25. B. Gjevik. Occurrence of finite-amplitude surface waves on falling liquid films // Physics of Fluids. – 1970. – Т.13, №8. – С.1918–1925.
26. S.P. Lin. Finite amplitude side-band stability of a viscous film // Journal of fluid mechanics. – 1974. – Т.63, №3. – С.417–429.
27. C. Nakaya. Long waves on a thin fluid layer flowing down an inclined plane // Physics of Fluids. – 1975. – Т.18, №11. – С.1407–1412.
28. R.W. Atherton , G.M. Homsy. On the derivation of evolution equations for interfacial waves // Chemical Engineering Communications. – 1976. – Т.2, №2. – С. 57–77.
29. А.А. Непомнящий. Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1974. – Т.9, №3. – С.28–34.
30. A. Pumir, P. Manneville, Y. Pomeau. On solitary waves running down an inclined plane // Journal of fluid mechanics. – 1983. – Т.135. – С.27–50.
31. A. Oron , O. Gottlieb. Nonlinear dynamics of temporally excited falling liquid films // Physics of Fluids. – 2002. – Т.14, №8. – С.2622–2636.
32. Л.Н. Маурин , В.С. Сорокин. О волновом течении тонких слоев вязкой жидкости // ПМТФ: Журнал прикладной механики и технической физики. – 1962. – С.60.
33. В.Я. Шкадов. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Известия АН СССР. МЖГ. – 1967. – Т.1.
34. Ch. Ruyer-Quil, P. Manneville. Modeling film flows down inclined planes // The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems. – 1998.

- Т.6, №2. – С. 277–292.
35. Ch. Ruyer-Quil, P. Manneville. Improved modeling of flows down inclined planes // The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems. – 2000. – Т.15, №2. – С.357–369.
 36. П.И. Гешев. Препринт №73-81. Институт теплофизики СО АН СССР. – 1981. Новосибирск.
 37. Yu.Ya. Trifonov. Viscous liquid film flows over a periodic surface. // International journal of multiphase flow. – 1999. – Т.24, №7. – С.1139–1161.
 38. Г.С. Хакимзянов, Ю.И. Шокин, В.Б. Барахнин, Н.Ю. Шокина. Численное моделирование течений жидкости с поверхностными волнами – Новосибирск: изд-во СО РАН. – 2001. – Т.394.
 39. С.В. Алексеенко, Д.Г. Архипов, О.Ю. Цвелодуб. Дивергентная система уравнений для пленки жидкости, стекающей по вертикальной плоскости // Доклады Академии Наук. – 2011. – Т.436, №1. – С.43-46.
 40. H. Chang, E.A. Demekhin, S.S. Saprikin. Noise-driven wave transitions on a vertically falling film. // Journal of Fluid Mechanics. – 2002. – Т.462. – С.255–283.
 41. S.V. Alekseenko, S.P. Aktershev, A.V. Cherdantsev, S.M. Kharlamov, D.M. Markovich. Primary instabilities of liquid film flow sheared by turbulent gas stream // International Journal of Multiphase Flow. – 2009. – Т.35, №7. – С.617–627.
 42. K. Suzuki, Y. Hagiwara, T. Sato. Heat transfer and flow characteristics of two-phase two-component annular flow // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1983. Т.26, №4. – С.597–605.
 43. J.C. Asali, T.J. Hanratty. Ripples generated on a liquid film at high gas velocities // International journal of multiphase flow. – 1993. – Т.19, №2. – С.229–243.
 44. K. Ohba, K. Nagae. Characteristics and behavior of the interfacial wave on the liquid film in a vertically upward air-water two-phase annular flow // Nuclear engineering and design. – 1993. – Т.141, №1. – С.17–25.

45. S. Alekseenko, V. Antipin, A. Cherdantsev, S. Kharlamov, D. Markovich. Two-wave structure of liquid film and wave interrelation in annular gas-liquid flow with and without entrainment // *Physics of Fluids*. – T.21, №6. – C.061701.
46. S.V. Alekseenko, A.V. Cherdantsev, O.M. Heinz, S.M. Kharlamov, D.M. Markovich. Application of the image-analysis method to studies of the space-time wave evolution in an annular gas-liquid flow // *Pattern recognition and image analysis*. – 2013. – T.23, №1. – C.35.
47. D.E. Woodmansee, T.J. Hanratty. Mechanism for the removal of droplets from a liquid surface by a parallel air flow // *Chemical Engineering Science*. – 1969. – T.24, №2. – C.299–307.
48. N. Brauner, D.M. Maron. Modeling of wavy flow in inclined thin films // *Chemical Engineering Science*. – 1983. – T.38, №5. – C.775–788.
49. G.F. Hewitt, N.S. Hall Taylor. *Annular Two-Phase Flow* // Pergamon. – 1970.
50. M. Gorokhovski, M. Herrmann. Modeling primary atomization. // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 2008. – T.40. – C.343–366.
51. S.H. Pham, Z. Kawara, T. Yokomine, T. Kunugi. Detailed observations of wavy interface behaviors of annular two-phase flow on rod bundle geometry // *International Journal of Multiphase Flow*. – 2014. – T.59. – C.135–144.
52. S.V. Alekseenko, V.A. Antipin, A.V. Bobylev, D.M. Markovich. Application of piv to velocity measurements in a liquid film flowing down an inclined cylinder // *Experiments in Fluids*. – 2007. – T.43, №2-3. – C.197–207.
53. I. Zadrazil, Ch.N. Markides. An experimental characterization of liquid films in downwards co-current gas-liquid annular flow by particle image and tracking velocimetry. // *International Journal of Multiphase Flow*. – 2014. – T.67. – C.42–53.
54. C.E. Dickerman, A.B. Rothman, A.E. Klickman, B.W. Spencer, A. DeVolpi. Summary of treat experiments on oxide core-disruptive accidents // *Technical report, Argonne National Lab., IL (USA)*. – 1979.
55. S.A. Wright, G. Schumacher, P.R. Henkel. Investigation of fuel and clad

- relocation during lmfbr initiation phase accidents: the star experiment program // Technical report, Sandia National Labs., Albuquerque, NM (USA); Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH (Germany, FR). – 1985.
56. ANL/NE-12/4. Cladding motion model clap: The sas4a/sassys-1 safety analysis code system // Technical report, Nuclear Engineering Division, Argonne National Laboratory. – 2012.
 57. M. Ishii, W.L. Chen, M.A. Grolmes. Molten clad motion model for fast reactor loss-of-flow accidents // Nuclear Science and Engineering. –1976. – Т.60, №4. – С.435–451.
 58. Г.Н. Власичев. Расчетная модель расплавления твэла с учетом перемещения расплавленной оболочки в активной зоне реактора БН при запроектной аварии // Известия вузов. Ядерная энергетика. – 2001. – Т.3. – С.20.
 59. D.E. Kataoka , S.M. Troian. A theoretical study of instabilities at the advancing front of thermally driven coating films // Journal of colloid and interface science. – 1997. – Т.192, №2. – С.350–362.
 60. Г. Уоллис. Одномерные двухфазные течения. – 1972.
 61. V. Alexiades. Mathematical modeling of melting and freezing processes // CRC Press. – 1992.
 62. А.В. Лыков. Теория теплопроводности. – 1967.
 63. С.Е. Dickerman, А.В. Rothman, А.Е. Klickman, B.W. Spencer, А. DeVolpi. Status and summary of treat in-pile experiments on lmfbr response to hypothetical core disruptive accidents // Thermal and hydraulic aspects of nuclear reactor safety. – Т.2. – 1977.
 64. Ch. Ruyer-Quil, P. Manneville. Further accuracy and convergence results on the modeling of flows down inclined planes by weighted-residual approximations // Physics of Fluids. – 2002. – Т.14, №1. – С.170–183.
 65. D.G. Arkhipov , O.Yu. Tsvlodub. Investigation of the conservative system of equations for a vertically flowing liquid film // Microgravity Science and Technology. – 2011. – Т.23, №1. – С.123–128.

66. D.G. Arkhipov, D.I. Kachulin, O.Yu. Tselodub. Comparison of models for wave regimes of liquid film downflow in the linear approximation // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2012. – T.53, №5. – С.647–656.
67. Yu.Ya. Trifonov, O.Yu. Tselodub. Nonlinear waves on the surface of a falling liquid film. Part 1. Waves of the first family and their stability // Journal of Fluid Mechanics. – 1991. – T.229. – С.531–554.
68. H.C. Chang, E.A. Demekhin, D.I. Kopelevich. Nonlinear evolution of waves on a vertically falling film // Journal of Fluid Mechanics. – 1993. – T.250. – С.433–480.
69. D. Arkhipov, I. Vozhakov, D. Markovich, O. Tselodub. Symmetry in the problem of wave modes of thin viscous liquid layer flow // European Journal of Mechanics-B/Fluids. – 2016. – T.59. – С.52–56.
70. O. Tselodub, D. Arkhipov. Nonlinear wave simulation on a surface of liquid film entrained by turbulent gas flow at weightlessness // Microgravity Science and Technology. – 2013. – T.25, №3. – С.179–186.
71. D. Tseluiko, S. Kalliadasis. Nonlinear waves in counter-current gas–liquid film flow // Journal of Fluid Mechanics. – 2011. – T.673. – С.19–59.
72. S.V. Alekseenko, D.G. Arkhipov, O.Yu. Tselodub. Modelling of the shear stresses produced by the turbulent gas flow over the wavy liquid film // Fortschritt-Berichte, VDI, Dusseldorf. – 2007. – T.3, №883. – С.222–231.
73. Е.А. Демехин. Нелинейные волны в пленке жидкости, увлекаемой турбулентным газовым потоком // Изв. АН СССР, МЖГ. – 1981. – Т.2. – С.37.
74. T.B. Benjamin. Shearing flow over a wavy boundary // Journal of Fluid Mechanics. – 1959. – T.6, №2. – С.161–205.
75. S.P. Aktershev, S.V. Alekseenko. Interfacial instabilities in an annular two-phase flow // Russ. J. Eng. Thermophys. – 1996. – T.6, №4. – С.307–320.
76. О.Ю. Цвелодуб. Моделирование волновых режимов на пленке вязкой жидкости, стекающей по вертикальной плоскости // Теплофизика и аэромеханика. – 2012. – Т.19, №2. – С.183.

- 77. S.V. Alekseenko, V.E. Nakoryakov, B.G. Pokusaev, T. Fukano. Wave flow of liquid films // Begell House New York. – 1994.
- 78. S. Kalliadasis, Ch. Ruyer-Quil, B. Scheid, M.G. Velarde. Falling liquid films. – 2011. – T.176.
- 79. I. Vozhakov, A. Cherdantsev, D. Arkhipov. Modelling secondary instability of co-current gas-sheared thin film // Fluid Dynamics Research. – 2016. – T.48, №6. – C.061420.