

ФАНО России

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе

Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи



Мулляджанов Рустам Илхамович

**Устойчивость и когерентные структуры в струйных и
отрывных течениях жидкости**

01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Содержание

Введение	4
Глава 1. Методы и инструменты исследования	17
1.1. Уравнения Навье – Стокса	17
1.2. Основные подходы для моделирования турбулентных потоков	19
1.3. Способы замыкания осредненных уравнений	23
1.4. Численные методы решения уравнений Навье – Стокса	31
1.5. Разложение поля скорости по эмпирическому базису	37
1.6. Локальный анализ устойчивости линеаризованных уравнений	42
Глава 2. Дальнее поле затопленной струи	48
2.1. Введение	48
2.2. Ламинарная струя	53
2.3. Линейная устойчивость струи Ландау	57
2.4. Турбулентная струя	77
2.5. Выводы по главе	86
Глава 3. Когерентные структуры в турбулентной струе	88
3.1. Введение	88
3.2. Незакрученная турбулентная струя	92
3.3. Слабозакрученная турбулентная струя	121
3.4. Импульсная слабозакрученная турбулентная струя	135
3.5. Выводы по главе	154
Глава 4. Особенности моделирования и когерентные структуры в задаче обтекания цилиндра	156
4.1. Введение	156
4.2. Тройная декомпозиция, моделирование и когерентные структуры	159
4.3. Выводы по главе	188
Глава 5. Вторичные течения в квазидвумерных струйных и отрывных потоках	190
5.1. Введение	190

5.2. Квазидвумерная струя	192
5.3. Квазидвумерный след	200
5.4. Выводы по главе	207
Заключение	209
Публикации по теме диссертации	211
Литература	216
Приложение А. Аналитические решения линейной задачи устойчивости для струи Ландау	251

Введение

Режимы течения жидкостей и газов делятся на ламинарные и турбулентные. Первый режим с характерными локально-параллельными линиями тока сменяется вторым при достаточном увеличении скорости потока. Граница ламинарно-турбулентного перехода зачастую может быть определена при помощи некоторых критических значений безразмерных критериев подобия, содержащихся в уравнениях движения. В отличие от ламинарного упорядоченного движения при отсутствии перемешивания соседних слоев потока в турбулентных течениях реализуются сильные беспорядочные пульсации поля скорости и давления. Очевидно, что из-за широкого спектра характерных масштабов и частот пульсационного движения статистический подход до сих пор является основным при изучении свойств турбулентности. Интересно, что эти идеи о смене режимов течения, а также об использовании некоторого осреднения гидродинамических полей были высказаны Рейнольдсом (1883, 1895) [1, 2] при изучении потока жидкости в круглой трубе еще более 100 лет назад.

Можно выделить ряд достижений, которые представляют собой основы современной теории устойчивости, описывающей условия, при которых в потоке начинают расти некоторые возмущения, приводящие к смене режима [3–6]. Первые теоретические результаты были получены Гельмгольцем (1868) [7], Кельвином (1871) [8] и Рэлеем (1879, 1880) [9, 10] для невязких течений, в честь которых, в частности, названы неустойчивость Кельвина–Гельмгольца и критерий устойчивости Рэлея. Мотивированные экспериментами Рейнольдса и полученными результатами предшественников, Опп (1907) [11] и Зоммерфельд (1908) [12] сформулировали линейную задачу устойчивости для бесконечно малых возмущений и плоскопараллельного течения вязкой жидкости. Этот подход, основанный на Фурье-декомпозиции поля скорости и давления малого возмущения вдоль однородных координат и решении задачи на собственные значения, был успешно использован Тейлором (1923) [13] и Рэлеем (1916) [14] для объяснения экспериментально наблюдаемой неустойчивости в течении между двумя противовращающимися концентрическими цилиндрами (течение Тейлора–Куэтта), а также между двумя нагретыми до разной температуры параллельными стенками (течение Рэлея–Бенара). Толлмин (1929) [15] и Шлихтинг (1933) [16] теоретически предсказали наличие так называемых волн Толлмина–Шлихтинга в пристенных течениях, экспериментально обнаруженных позже Клебановым и др. (1962) [17]. Гастер (1962) [18] расширил теорию на пространственно развивающиеся возмущения. В свою очередь, Ёрр и Монкевиц (1985, 1990) [19, 20] вывели критерий абсолютной неустойчивости, когда возмущение увеличивается в пространстве с ростом времени вверх и вниз по течению.

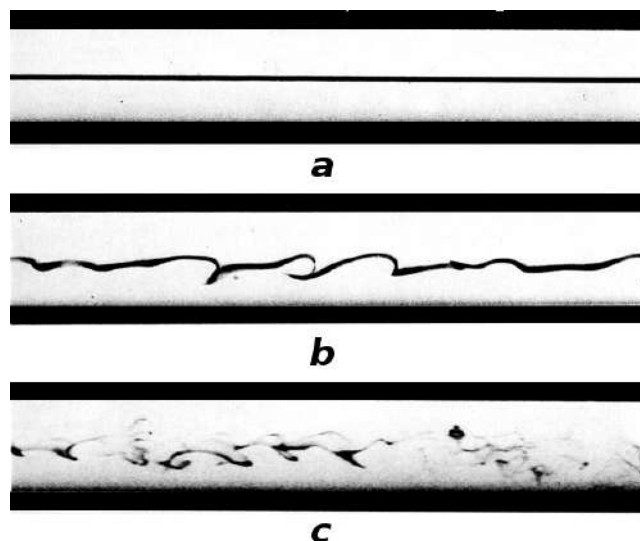


Рисунок 1. Слева: портрет Осборна Рейнольдса. Справа: экспериментально наблюдаемые режимы течения жидкости в круглой трубе при последовательном увеличении скорости потока: *a* – ламинарный, *b* – переходный, *c* – турбулентный. Заметны различия в поведении подкрашенного слоя жидкости в середине трубы, указывающие на появление пульсаций скорости при достаточно высоких скоростях

Несмотря на существенные успехи (линейной) теории устойчивости, многие вопросы оставались открытыми, такие как неудовлетворительное согласование теоретических и экспериментальных значений критических параметров для многих, например, пристенных течений. Так, согласно линейной теории течение Пуазейля в круглой трубе является устойчивым к бесконечно малым возмущениям при любых скоростях потока. Этот вывод делается на основе получаемых отрицательных собственных значений для всего дискретного спектра, что указывает на экспоненциальное затухание амплитуды возмущения в пространстве или времени при больших временах эволюции. Часто этот классический подход называется *модальным* или методом *нормальных мод*, потому что вывод об устойчивости потока делается на основе величины собственного значения наиболее опасного возмущения. Однако, некоторое время назад было указано на ограниченность этого подхода, на смену которому быстро пришёл так называемый *немодальный* метод, существенно развитый в течение последних 30 лет [5, 6, 21–26]. Оказалось, что важную роль играют свойства матрицы эволюции малого возмущения. Если она неэрмитова (несамосопряженная), тогда собственные векторы не являются попарно ортогональными. Это приводит к возможности кратковременного многократного роста амплитуды возмущения по сравнению с начальными условиями, несмотря на то, что все собственные решения (базис), из которых составлено начальное возмущение, могут затухать со временем. Такой подход позволил ответить на ряд важных вопросов, которые

прежде считались недоступны для линейной теории.

Сразу после того, как основное развитие линейного немодального подхода для анализа устойчивости было закончено, в 1990-ых активное развитие получила его альтернатива – полностью нелинейный подход, основанный на знаниях из области динамических систем [27, 28]. Необходимость такого подхода, в частности, для течения Пуазейля обоснована линейной устойчивостью рассматриваемого потока, где, однако, амплитуда начального малого возмущения может многократно расти, далее асимптотически затухая. Таким образом, становится очевидным, что ламинарно-турбулентный переход в такой системе может быть вызван только возмущениями конечной амплитуды. С теоретической точки зрения данную задачу представляется возможным изучать по большей части при помощи прямого численного моделирования полных уравнений движения. Прогресс в этой области как раз совпал с мощным развитием современных вычислительных технологий.

Вигнански и др. (1973, 1975) [29, 30] исследовал свойства локализованных турбулентных образований, распространяющихся в течении Пуазейля. Эти результаты в конечном итоге привели к прорыву в данной области. При помощи численных методов [31, 32] и экспериментов [33] удалось показать, что в области параметров ламинарно-турбулентного перехода могут распространяться нелинейные бегущие волны с различными свойствами и характеристиками [34–46]. Несмотря на то, что эти исследования посвящены переходным режимам течения, часто эти структуры рассматриваются как некоторый скелет динамики даже полностью развитого турбулентного течения [47]. Эти идеи являются дальнейшим развитием теории (или теорий) когерентных структур, которая начала активно развиваться после того, как Кляйн и др. (1967) [48] экспериментально обнаружил предсказанное Таунсендом (1951) [49] организованное движение в пристенной турбулентности. С тех пор, различные формы крупномасштабной организации наблюдались в широком спектре сдвиговых потоков, среди которых можно выделить продольные вихревые структуры пристенной турбулентности [48, 50, 51], их более крупномасштабную организацию (так называемые суперструктуры) [52–54], неустойчивость и вихревые структуры Кельвина–Гельмгольца, формирующиеся на границе раздела двух параллельных потоков газа, движущихся с разной скоростью [55], некоторое волновое движение в турбулентных струях [56], вихревую дорожку Кармана, порождающую структуры, распространяющиеся в шахматном порядке [57] и другие примеры.

Несмотря на некоторые концептуальные вопросы [60], механизм каскадного переноса энергии при достаточно больших скоростях потока, описанный Колмогоровым (1941) [61], дает возможность количественно вычислять и параметризовать характеристики мелкомасштабной турбулентности. В свою очередь, характеристики основных крупномасштабных вихрей

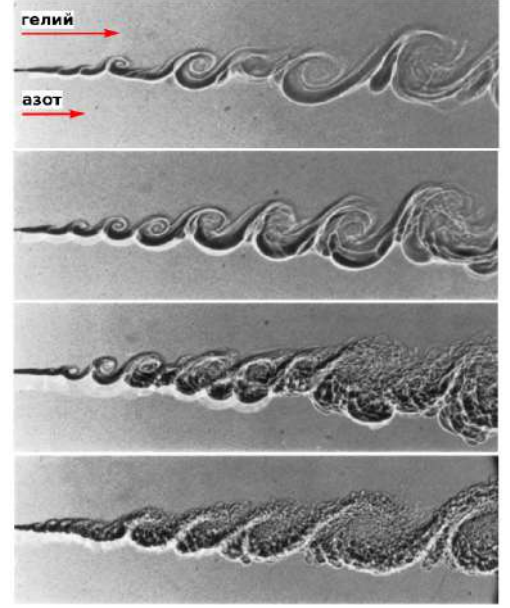
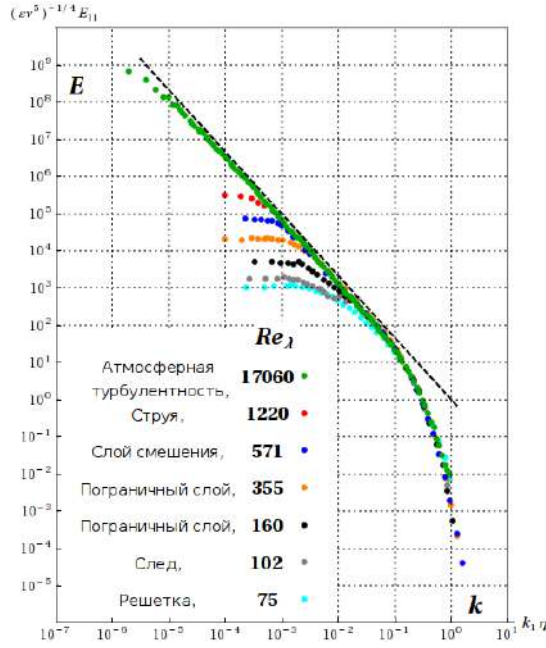


Рисунок 2. Слева: продольные спектры энергии турбулентности E в зависимости от безразмерного волнового числа k . Черная штриховая линия соответствует функции $E \propto k^{-5/3}$ (закон Колмогорова). Данные взяты из работ [58, 59]. Справа: мгновенная визуализация вихревого движения в плоском слое смешения гелия и азота при последовательном увеличении скорости потока (сверху вниз). Иллюстрации взяты из работы [55].

(когерентных структур¹), определяющих общие свойства потока, сильно зависят от конкретной геометрии течения и граничных условий в целом. Это стало ясно почти сразу после того, как были проведены первые оценки доли турбулентной кинетической энергии, содержащейся в крупномасштабных образованиях, см. табл. 1. Из этого следует, что едва ли будет возможным разработать некоторую единую теорию, содержащую основные количественные характеристики этих объектов. Полезен был бы общий принцип для расчета или определения тех или иных параметров крупномасштабных вихрей. Здесь возможно использовать несколько методов, встречающихся в литературе, некоторые из которых будут описаны и активно использованы и в данной работе.

Традиционным теоретическим способом исследования когерентных структур является линейный анализ устойчивости, используя осредненный по времени профиль скорости рассматриваемого турбулентного течения, который получен из эксперимента или численного расчета. Основой для такого подхода является так называемая тройная декомпозиция

¹ Когерентные вихревые структуры в широком смысле обычно определяются как некоторые области потока с концентрированной и когерентной завихренностью, где имеется вполне конкретная и регулярно наблюдаемая структура с существенным временем жизни этого образования [62, 63].

Таблица 1. Оценки энергии детерминированного движения основных классов течений, указанных в обзорной работе Фидлера (1988) [71]. Информация для ближней области круглой струи соответствует переходным струям с формированиям вихрей Кельвина–Гельмгольца†

Тип течения	Работы	Доля энергии, %
Слой смешения	[72, 73]	20
Ближняя область струи†	[74]	50
Дальняя область струи	[75, 76]	10
Ближний след	[77]	25
Дальний след	–	20
Пристенная турбулентность	–	10

гидродинамических полей, впервые систематически введенная Хуссейном и Рейнольдсом (1970) [64]. При помощи этой декомпозиции поля скорости и давления представляются в виде суммы трёх слагаемых: осредненное по времени поле, вклад когерентного движения и стохастических мелкомасштабных пульсаций. В результате можно получить линеаризованные уравнения на амплитуду возмущения, соответствующую когерентному движению. Этот подход, обоснованность которого изначально активно обсуждалась в литературе, показал хорошие результаты для многих течений, включая турбулентный поток в канале. Следуя пионерским работам Малкуса (1956) [65] и Ландаля (1967) [66], ряду авторов [67, 68] при помощи немодального подхода удалось идентифицировать как продольные структуры (вихри Кляйна), так и более крупномасштабные образования. Успешное использование этого метода не ограничивается пристенными течениями и активно используется для моделирования неустойчивостей в свободных сдвиговых течениях даже в рамках модального подхода [56, 69, 70].

Вторым методом исследования вихревых образований является метод декомпозиции по некоторому эмпирическому базису. Ламли (1967) [78] впервые предложил применить метод собственного ортогонального разложения, хорошо известный в других областях науки, для исследования турбулентных потоков. Смысл этого подхода заключается в том, что используя информацию о мгновенных полях скорости и соответствующих двухточечных корреляциях, можно представить поле скорости как сумму некоторых пространственных собственных функций, умноженных на временные коэффициенты. Собственные функции в данном случае дают информацию о форме соответствующей “когерентной структуры”, временной коэффициент – о ее динамике, а значимость или конкретная доля турбулентной кинетиче-

ской энергии этой вихревой единицы определяется в соответствие с величиной собственного значения.

Сображения о когерентных структурах стали тесно связаны с идеями автомодельности, которые часто используются в теоретических подходах к задачам гидродинамики. Во многих классических учебниках первое знакомство со свободными сдвиговыми потоками, среди которых центральное место занимают слои смешения, струи и следы, происходит именно при помощи автомодельных подходов [79–81]. Эти мысли развивались параллельно с идеями о том, что турбулентный поток “забывает” о своих начальных или граничных условиях и становится универсальным при достижении некоторого времени или расстояния [82]. Так, например, согласно этим соображениям все затопленные струи должны расширяться с увеличением расстояния от источника с одной и той же скоростью, а след за телом обтекания не должен зависеть от конкретных деталей этого тела. Однако, накопленные экспериментальные данные [83, 84] позволили Джорджу (1989) [85] теоретически обосновать, что дальнейшее поле затопленных струй описывается не одним, а целым семейством автомодельных решений, содержащих скорость ее расширения в качестве параметра, которая в свою очередь зависит от данных ближнего поля. Таким образом, было впервые показано, что турбулентный поток имеет “память”, которая несет информацию о спектре турбулентных пульсаций в ближней области, где динамика определяется характерным вихревыми структурами.

В данной работе исследуются некоторые аспекты струйных и отрывных течений, актуальность исследования которых объясняется множественными технологическими приложениями. Подводя итог краткому введению, подходы к исследованию устойчивости потока тесно связаны с когерентными структурами, которые во многом определяют динамические характеристики потока и играют существенную роль в процессах тепло- и массопереноса. Таким образом, актуальным является дальнейшая разработка основ теории (теорий) когерентных структур анизотропных течений и гидродинамической устойчивости в целом.

Целью данной работы является теоретическое и численное исследование структуры струйных и отрывных течений жидкости и газа, изучение гидродинамической устойчивости и определение характеристик основных наиболее энергонесущих когерентных структур, а также выявление важнейших факторов, влияющих на характеристики течения и процессы тепломассопереноса.

Для достижения поставленной цели решались следующие **задачи**:

- развитие теории затопленных ламинарных неосесимметричных закрученных струйных течений, вызванных точечным источником массы, импульса и момента импульса;
- теоретическое исследование устойчивости классической затопленной струи Ландау к бес-

конечно малым возмущениям;

- численное исследование динамики и свойств когерентных структур в турбулентном струйном течении, а также анализ влияния граничных условий, включая закрутку потока и резкое изменение расхода жидкости или газа, на характеристики ближнего поля струи;
- численное исследование взаимодействия когерентных и стохастических пульсаций в отрывном потоке за круглым цилиндром;
- численный анализ роли вторичных течений и когерентных структур в струйных и отрывных потоках в щелевой геометрии.

Научная новизна данной работы подтверждается следующими результатами:

- представлено аналитическое решение линеаризованных уравнений для дальнего поля струи, соответствующее возмущению точного решения Ландау, которое определяется поперечными компонентами вектора момента импульса и соответствует неосесимметричной струе;
- решена линейная задача устойчивости для затопленной ламинарной струи, соответствующей точному решению Ландау, которая позволила предложить критерий оценки местоположения ламинарно-турбулентного перехода и впервые получить хорошее количественное соответствие между линейной теорией и экспериментальными данными;
- на основе собственного ортогонального разложения и численного моделирования систематически показано, что спиральные бегущие волны являются наиболее энергонесущими вихревыми структурами в дальнем поле затопленной турбулентной струи, характеристики которых могут быть предсказаны в рамках задачи линейной теории устойчивости, сформулированной для турбулентного течения;
- посредством численного моделирования исследованы механизмы интенсификации процессов перемешивания, вовлечения сторонней жидкости в ядро потока слабозакрученной струи, которое совершает небольшие колебания относительно оси симметрии, что приводит к наблюдаемому явлению противовращающегося вихревого ядра;
- на основе численного моделирования в соосной кольцевой закрученной струе исследованы переходные процессы при резком изменении расхода жидкости, что позволило выявить, что наблюдаемый гистерезис режимов в случае реагирующего потока может быть связан с формированием вторичной зоны рециркуляции около кромки сопла;
- при помощи численного моделирования рассчитаны смешанные корреляции когерентных и стохастических компонент поля скорости в отрывном течении при наличии крупномасштабных пульсаций в зоне рециркуляции, при этом впервые показано, что их значение не растёт с увеличением числа Рейнольдса;
- на основе численного моделирования обнаружено, что в щелевых струйных и отрывных

течениях помимо крупномасштабного квазидвумерного течения присутствуют продольные вихри и впервые показано, что эти структуры ответственны за интенсивный тепломассоперенос поперек узкой щели.

Теоретическая и практическая значимость данной работы заключается в том, что полученные результаты способствуют более глубокому пониманию вопросов, связанных с гидродинамической устойчивостью струйных течений, а также с влиянием когерентных вихревых структур в струях и следах на нестационарную динамику и интенсивность турбулентного тепломассопереноса. Опираясь на полученное количественное согласие положения ламинарно-турбулентного перехода в затопленной струе, можно оптимизировать процессы смешения в ряде практических приложений. Выявленные наиболее энергонесущие когерентные структуры могут быть использованы для построения низкоразмерных моделей струйного течения. Новые результаты о взаимодействии когерентной и стохастической компоненты пульсаций скорости разрешают некоторые вопросы, связанные с подходом осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, которые являются основным инструментом для расчетов турбулентных течений в практических приложениях. Полученные данные об интенсивности процессов смешения и вовлечения сторонней жидкости в ядро потока в зависимости от параметра закрутки, а также о влиянии обнаруженных продольных вихревых структур на тепломассоперенос поперек канала в струйных и отрывных щелевых течениях могут быть полезными при проектировании соответствующего энергетического оборудования.

Достоверность полученных результатов обусловлена использованием проверенных методик численного и аналитического решения, совпадением полученных решений как качественно, так и во многих случаях количественно с достоверными экспериментальными или расчетными данными, согласием полученных результатов в предельных случаях с известными и апробированными результатами других авторов.

Положения, выносимые на защиту:

- результаты теоретического анализа течения в дальнем поле затопленной ламинарной струи, вызванной локализованным источником массы, импульса и момента импульса;
- результаты теоретического анализа устойчивости течения в дальнем поле затопленной ламинарной струи, соответствующего точному решению уравнений Навье–Стокса;
- результаты численного исследования структуры и динамики течения незакрученных и слабозакрученных турбулентных струй, влияния степени закрутки потока на процессы перемешивания, а также резкого изменения входных условий на формирование когерентных структур;
- результаты численного исследования динамики течения при обтекании круглого цилиндра

однородным потоком в докритическом режиме и взаимодействия когерентных флуктуаций со стохастическими;

– результаты численного исследования щелевых струйных и отрывных потоков, формирования обнаруженных продольных вихревых структур в ограниченной геометрии течения и их связи с интенсивностью тепломассопереноса поперек щели.

Личный вклад автора

Научные результаты и выводы, послужившие основой диссертации и выносимые на защиту, получены соискателем самостоятельно. Постановка решаемых задач проводилась диссертантом как лично, так и совместно с проф. Н.И. Яворским и проф. К. Ханъяlichem. Автор проводил лично или непосредственно участвовал в теоретическом анализе, отладке вычислительных кодов, проведении численных расчетов, обработке и анализе полученных данных, а также подготовке результатов исследований к публикации.

Апробация работы

Результаты диссертационной работы обсуждались на международных симпозиумах: на ежегодном съезде Американского физического сообщества APS Division of Fluid Dynamics (Денвер, США, 2017), “Turbulence and Shear Flow Phenomena” (Пуатье, Франция, 2013), “Direct and Large-Eddy Simulation” (Дрезден, Германия, 2013; Кипр, Греция, 2015), “Turbulence, Heat and Mass Transfer” (Сараево, Босния и Герцеговина, 2015), “European Fluid Mechanics Conference” (Севилья, Испания, 2016); на Международной конференции по методам аэрофизических исследований (Новосибирск, 2014; Пермь, 2016); на международном коллоквиуме сообщества EUROMECH “Dynamics of Concentrated Vortices” (Новосибирск, 2016); научной школе “Нелинейные волны - 2018” (Нижний Новгород, 2018); всероссийской конференции “Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики” (Новосибирск, 2014; 2016); Сибирском теплофизическом семинаре (Новосибирск, 2015; 2017); Азиатском симпозиуме по визуализации (Новосибирск, 2015). Результаты диссертации обсуждались на семинарах Института теплофизики СО РАН (рук. акад. Алексеенко С.В., чл.-корр. Маркович Д.М.), Института гидродинамики СО РАН (рук. чл.-корр. Пухначев В.В.), Вычислительного центра СО РАН (рук. проф. Глинский Б.М.), Института теоретической и прикладной механики СО РАН (рук. проф. Козлов В.В.), Центрального аэрогидродинамического института (рук. проф. Копьев В.Ф.), Института Пола Шеррера в г. Виллиген, Швейцария (рук. проф. Ничено Б.), а также видеосеминаре ЦАГИ – ИТПМ СО РАН – СПбПУ – НИИМ МГУ – ОИВТ РАН. Результаты, послужившие основой для данной диссертации, вошли в перечень важнейших результатов фундаментальных исследований Института теплофизики СО РАН в 2014–2016 годах.

Публикации

Результаты работы опубликованы в 39 работах в трудах отечественных и международных конференций и рецензируемых периодических изданиях. В журналах из списка, рекомендованного ВАК, по теме диссертации опубликовано 16 статей (из них 10 в международных изданиях).

Объем и структура диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, 5 глав, заключения, списка публикаций по теме диссертации и списка цитируемой литературы, а также одного приложения. Работа содержит 253 страниц, включая 111 рисунков и 15 таблиц. Список литературы состоит из 422 наименований.

Содержание работы

Первая глава содержит описание методов исследования, использованных в данной работе. Для анализа когерентных структур в дальнем поле затопленной турбулентной струи использовалась база данных, полученная при помощи прямого численного моделирования уравнений Навье–Стокса (Direct numerical simulations, DNS), основанного на конечно-разностной дискретизации четвертого порядка вдоль двух пространственных направлений, в то время как по однородной координате использовалось разложение Фурье. Кроме того, в работе активно использовался метод крупных вихрей (Large-eddy simulations, LES), который позволяет существенно снизить необходимые численные ресурсы по сравнению с DNS. Этот подход реализован в вычислительном коде, основанном на методе конечных объемов второго порядка аппроксимации по пространству и времени, который использовался для расчетов остальных рассматриваемых струйных и отрывных течений. При исследовании задачи обтекания цилиндра однородным потоком жидкости помимо LES использовались результаты численных расчетов нестационарных уравнений Навье–Стокса, осредненных по Рейнольдсу (Unsteady Reynolds-averaged Navier–Stokes, URANS), модели замыкания которых также приведены в этой главе. Далее изложена стандартная постановка линейной задачи устойчивости для струйных течений в плоскопараллельном приближении и реализация алгоритма расчета дисперсионных кривых для локального пространственного анализа. При анализе когерентных структур в струйных и отрывных течениях применялся метод разложения скорости по ортогональному базису (Proper orthogonal decomposition, POD). Приводятся основные соотношения и численная реализация этого метода, который позволяет получить пространственный базис, соответствующий наиболее энергетичным когерентным структурам в потоке.

Во **второй главе** теоретически рассматривается связь между законами сохранения массы, импульса, момента импульса и характеристиками неограниченного струйного тече-

ния при достаточном удалении от источника движения (в дальней области). Найдено новое точное решение линеаризованной задачи, которое соответствует второму члену асимптотического разложения поля скорости по обратным степеням расстояния от точечного источника движения. Данное решение определяется значениями поперечных к направлению течения струи компонент вектора момента импульса источника, что физически соответствует истечению струи из неосесимметричного сопла. Это позволило доказать, что эффект “памяти” дальнего поля ламинарной струи о характеристиках ближней к соплу области сохраняется во втором члене упомянутого асимптотического разложения, который соответствует закону сохранения массы.

Рассмотрен вопрос гидродинамической устойчивости ламинарной струи к бесконечно малым возмущениям с полным учётом расширения потока. Было получено, что при увеличении скорости потока неустойчивыми становятся осесимметричные возмущения, которые не могут быть обнаружены в рамках плоскопараллельного подхода. Далее устойчивость теряют и синусоидальные возмущения, которые вскоре становятся самыми быстрорастущими. Показано, что полученные неустойчивые моды растут в пространстве степенным образом, инкремент роста которых зависит от числа Рейнольдса. Кроме того, зависимость от времени не является экспоненциальной, что не позволяет классифицировать данный анализ как модальный. На основе этих результатов проведено сравнение с экспериментальными данными, которое впервые позволило получить хорошее согласие для места ламинарно-турбулентного перехода, отсчитываемой от начала координат.

Проведен обзор литературы о свойствах дальнего поля турбулентного струйного течения, который позволил указать на различия эффекта “памяти” для ламинарных и турбулентных струй. Используя автомодельные соображения, получена модифицированная система дифференциальных уравнений, где были использованы соображения, эмпирически подтвержденные далее при помощи данных прямого численного моделирования.

В **третьей главе** исследуется ближняя и дальняя область затопленной струи при помощи данных численного моделирования при числе Рейнольдса порядка 5.0×10^3 , построенное по среднерасходной скорости в подводящей трубе и ее диаметру. Имеющаяся база данных DNS позволила применить метод POD к трехмерным полям скорости с хорошим пространственным и временным разрешением. Впервые систематически показано, что в круглой струе основные крупномасштабные когерентные структуры имеют спиральную форму и сносятся потоком вниз по течению. Получены их характеристики на различном расстоянии от сопла. Показано хорошее совпадение с результатами стандартного линейного анализа устойчивости осредненного по времени профиля скорости турбулентной струи, используя

плоскопараллельное приближение. Несмотря на то, что первые две наиболее энергетичные зеркально-симметричные POD моды с азимутальным числом $m = 1$, представляющие собой спиральные бегущие волны, содержат в себе всего лишь около 5% турбулентной кинетической энергии потока, низкоразмерная модель, составленная на их основе, достаточно хорошо описывает основные пульсации мгновенного поля скорости в слое смешения.

Исследовано влияние закрутки трубы вокруг своей оси, из которой истекает жидкость в затопленное пространство, на характеристики струи в ближней области. Показано, что даже высокая скорость вращения трубы по сравнению со среднерасходной скоростью жидкости не приводит к сильнозакрученному струйному течению в ближней области, поскольку профиль тангенсальной скорости меняется с радиальной координатой почти параболически. Таким образом, жидкость в ядре струи остается слабозакрученной, при этом вращение в слое смешения быстро затухает с продольной координатой. Тем не менее, относительно небольшой закрутки хватает, чтобы дестабилизировать поток и наблюдать так называемое явление противовращающегося струйного ядра при удалении от сопла примерно на шесть калибров. Удалось объяснить это явление в терминах когерентных структур, впервые обнаруженное экспериментально и не имевшего до сих пор должного обоснования. Кроме того, проанализировано влияние закрутки на процессы перемешивания и вовлечения сторонней жидкости в ядро потока.

Изучены переходные гидродинамические процессы в ближней области двойной (соосной) кольцевой закрученной струи, для которой при наличии горения в экспериментах был зафиксирован гистерезис режимов течения. Проведены аналогичные экспериментам численные расчеты для нереагирующего случая. Показано, что при резком изменении скорости истечения газа из сопла в одном из случаев образуется дипольный вихрь, который и является гидродинамическим предвестником гистерезиса в реагирующем потоке.

В **четвертой главе** изложены результаты исследования задачи обтекания цилиндра потоком жидкости. В случае бесконечно длинного цилиндра и однородного натекающего потока рассматриваются два числа Рейнольдса (3.9×10^3 и 1.4×10^5), которые соответствуют докритическому режиму течения с ламинарным отрывом пограничного слоя. При помощи LES показано, что в рассматриваемом отрывном течении помимо периодического срыва вихрей имеются низкочастотные квазипериодические пульсации зоны рециркуляции, соответствующие флуктуациям длины зоны возвратного течения. При помощи тройной декомпозиции получены URANS-уравнения для случая квазипериодического течения. Показано, что помимо напряжений Рейнольдса, в уравнениях возникают корреляции когерентной и стохастической компоненты поля скорости. Эти корреляции впервые вычислены при помощи данных

расчета и показано, что смешанные корреляции становятся незначительными по сравнению с напряжениями Рейнольдса при достаточно больших скоростях потока, что подтверждает применимость стандартных уравнений URANS в практических приложениях. Исследована справедливость гипотезы Буссинеска, при помощи которой моделируются напряжения Рейнольдса. Показано, что при высоких числах Рейнольдса это предположение выполняется удовлетворительно. Проведены расчеты при помощи двух современных URANS-моделей первого и второго порядка замыкания, которые также показали хорошее согласие с LES и экспериментальными данными при высоких числах Рейнольдса.

Пятая глава содержит результаты численных расчетов целевых струйных и отрывных течений. Рассмотрена задача о струе, вытекающей из прямоугольного канала в затопленный объем, заключенный между двух параллельных стенок, а также задача обтекания цилиндра, расположенного поперек в узком зазоре. Показано, что в рассматриваемых квазидвумерных потоках реализуются крупномасштабные поперечные колебания ядра потока, которые приводят к формированию вихревых структур, сродни вихревой дорожке Кармана. Несмотря на то, что компонента напряжений Рейнольдса, соответствующая корреляции вертикальной относительно стенок узкого канала компоненты скорости, убывает вниз по потоку, приводя к квазидвумерному характеру струи и следа, впервые обнаружено наличие существенного трехмерного течения в форме вытянутых вдоль потока вихрей. Исследована их связь с интенсивностью вовлечения сторонней жидкости в поток, которая и приводит к выстраиванию этих вихрей в определенной форме зигзага в слоях смешения. Показана связь этих вихревых структур с процессами теплопереноса у твердых стенок.

В **заключении** представлены основные результаты и выводы работы, а также приведен список публикаций автора.

Благодарности

Автор выражает большую благодарность своим соавторам (Ханъялич К., Маркович Д.М., Илюшин Б.Б., Яворский Н.И., Шестаков М.В., Токарев М.П., Хадзиабдич М., Палкин Е.В., Абдуракипов С.С., Иващенко В.А.) и многочисленным коллегам.

Методы и инструменты исследования

1.1. Уравнения Навье – Стокса

Уравнения движения несжимаемой жидкости имеют следующий вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{u}$, p есть вектор скорости и скалярное поле давления, ρ , ν есть плотность и кинематическая вязкость жидкости. Полагается, что свойства среды постоянны. Закон сохранения импульса (1.1) представляет собой второй закон Ньютона, выражающий связь между ускорением жидкого элемента $D_t \mathbf{u} := \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ и суммой сил, действующей на этот объем со стороны соседних элементов, в то время как (1.2) представляет собой закон сохранения массы, когда плотность жидкости есть постоянная величина. Эти уравнения были впервые сформулированы Навье в 1822 г., исследовались Коши и Пуассоном и получили окончательный вид благодаря Сен – Венану и Стоксу в 1845 г. Если применить операцию дивергенции к уравнению (1.1), получим выражение

$$\Delta p = -\rho \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (1.3)$$

где последний переход получен при помощи условия соленоидальности поля скорости (1.2). Получившееся уравнение Пуассона свидетельствует об эллиптических свойствах рассматриваемых уравнений и означает, что величина давления в некоторой точке пространства определяется мгновенным полем скорости во всем рассматриваемом объеме. Действительно, решение уравнения Пуассона может быть явно выписано через функцию Грина [81]:

$$p(\mathbf{x}, t) = p_h(\mathbf{x}, t) + \frac{\rho}{4\pi} \int_V \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)(\mathbf{y}, t) \frac{d\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad (1.4)$$

где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ означают некоторые радиус-векторы. Стоит отметить, что гармоническая часть функции давления p_h , удовлетворяющая уравнению Лапласа, находится согласно соответствующим граничным условиям. При наличии некоторой массовой силы, действующей на жидкий объем, необходимо добавить ее в правую часть (1.1). Так, к примеру, учитывается влияние гравитации, действие электромагнитных сил в случае проводящей среды и прочее.

Известно, что с увеличением скорости потока жидкости или газа ламинарный режим течения, который характеризуется упорядоченным движением при отсутствии перемешивания соседних слоев потока, сменяется турбулентным. Как уже отмечалось во Введении, первые эксперименты Рейнольдса (1883) [1] по определению ламинарно-турбулентного перехода течения в круглой трубе позволили сформулировать критерий подобия между течениями с различной скоростью и вязкостью жидкости [2]. Если U и L есть характерная скорость потока и характерный размер системы, тогда безразмерные скорость $\mathbf{u}^*$, давление p^* , координаты $\mathbf{x}^*$ и время t^* будут иметь следующий вид

$$\mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad p^* = \frac{p}{\rho U^2}, \quad \mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad t^* = \frac{t}{L/U}. \quad (1.5)$$

Обезразмерим уравнения (1.1) и (1.2) при помощи (1.5):

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \Delta^* \mathbf{u}^*, \quad (1.6)$$

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0, \quad (1.7)$$

где в правой части закона сохранения импульса появляется безразмерный параметр $Re = UL/\nu$ – число Рейнольдса, который характеризует отношение конвективного и вязкого слагаемого. В дальнейшем мы будем опускать верхний индекс $*$, который обозначает соответствующие безразмерные величины.

Уравнения (1.6), (1.7) в случае ламинарных течений имеют небольшое количество точных решений для относительно простых геометрических конфигураций (некоторые решения приведены в [80], гл. 3). Однако, для турбулентного режима течения такие решения отсутствуют. Это связано с интенсивными флуктуациями гидродинамических полей в пространстве и времени как результат нелинейного взаимодействия вихревых образований различных масштабов. Присутствие в потоке подобных сложных структур оказывает влияние практически на все его свойства, которые значительно различаются для случаев ламинарного и турбулентного движения. У турбулентных течений способность к передаче импульса, пассивных примесей, тепла, к переносу частиц, взвешенных в потоке, и к катализации химических реакций (горения) оказывается выше, чем у ламинарных. Кроме того, благодаря присутствию в турбулентном потоке неоднородностей, у таких течений наблюдается способность к рассеиванию звуковых и электромагнитных волн, проходящих сквозь среду. Перечисленные выше свойства турбулентных течений играют ключевую роль в понимании механизмов физических явлений и развитии многих отраслей промышленности.

1.2. Основные подходы для моделирования турбулентных потоков

Аналитическое исследование турбулентного режима течения зачастую затруднено, однако, некоторые закономерности на статистические характеристики потока могут быть получены в частных случаях как, например, в случае однородной изотропной турбулентности или при течении жидкости около твердой поверхности (закон стенки). Полная информация о турбулентном потоке жидкости или газа содержится в мгновенном поле скорости и давления, которые являются функциями пространства и времени. Эта информация может быть получена численно путем решения известных уравнений движения.

Метод прямого численного моделирования

Наиболее ресурсозатратным подходом с точки зрения вычислений является метод прямого численного моделирования (Direct numerical simulation, DNS), при котором все масштабы пространственных и временных пульсаций должны быть “разрешены” (далее кавычки будут опущены), то есть рассчитаны напрямую [86]. Если L и T обозначают интегральный пространственный и временной масштаб турбулентности, а η и τ_η соответствуют масштабу Колмогорова по пространству и времени, характеризующие наименьшие вихри в диссипативной области спектра, то известно соотношение [80]:

$$L/\eta = O(Re^{3/4}), \quad T/\tau_\eta = O(Re^{1/2}). \quad (1.8)$$

Это означает, что дискретизация задачи о трехмерном турбулентном течении потребует порядка

$$(L/\eta)^3 \times (T/\tau_\eta) = O(Re^{11/4}) \quad (1.9)$$

вычислительных узлов и шагов по времени. Таким образом, спектр пульсаций быстро растет с увеличением, например, скорости потока, поэтому на данный момент DNS доступен только для умеренных чисел Рейнольдса порядка $O(10^4 - 10^5)$.

Уравнения Навье – Стокса, осредненные по Рейнольдсу

Для инженерных приложений важной информацией являются статистические характеристики потока, а не мгновенные поля скорости и давления, что таким образом приводит к формулировке уравнений Навье – Стокса, осредненных по Рейнольдсу (Reynolds-averaged Navier – Stokes equations, RANS). Идея заключается в представлении поля скорости в виде

суммы осредненной по ансамблю (на практике – времени) и пульсационной компоненты [87], т.е.

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}', \quad p = \bar{p} + p'. \quad (1.10)$$

Подставляя декомпозицию Рейнольдса (1.10) в уравнения (1.1), (1.2), после дополнительного осреднения по ансамблю получим

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}, \quad (1.11)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0, \quad (1.12)$$

где

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \overline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}'} \quad (1.13)$$

есть симметричный тензор второго ранга, который называется *напряжениями Рейнольдса*. Физически он соответствует влиянию пульсаций на осредненные величины скорости и давления, согласно уравнению Рейнольдса (1.11). Стоит отметить, что если в подходе DNS все имеющиеся флуктуации скорости и давления необходимо рассчитывать напрямую, то в RANS весь спектр пульсаций содержится в $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ и, таким образом, моделируется. В зависимости от определения осреднения по ансамблю в уравнениях может остаться производная по времени, см. (1.11). Этот подход называется нестационарным (unsteady) и имеет аббревиатуру URANS. В общем случае URANS имеет достаточно низкие требования к разрешению по времени и пространству, потому что после осреднения поле скорости и давление не имеет сильных пространственно-временных флуктуаций.

Метод моделирования крупных вихрей

Необходимость моделирования напряжений Рейнольдса (тензора $\bar{\boldsymbol{\tau}}$) приносит существенные трудности для получения достоверной информации. Одной из проблем является наличие организованных крупномасштабных пульсаций в сдвиговых потоках (когерентных структур), универсальное моделирование которых вряд ли возможно. На сегодняшний день компромиссом с точки зрения достоверности результатов и относительно низких вычислительных затрат является метод крупных вихрей (Large-eddy simulations, LES). В основе этого подхода лежит идея разделения пульсаций на мелкомасштабные и крупномасштабные. Математически это реализуется при помощи операции пространственной низкочастотной фильтрации, которая применяется к (1.1), (1.2) и приводит к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p} + \nu \Delta \tilde{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}, \quad (1.14)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad (1.15)$$

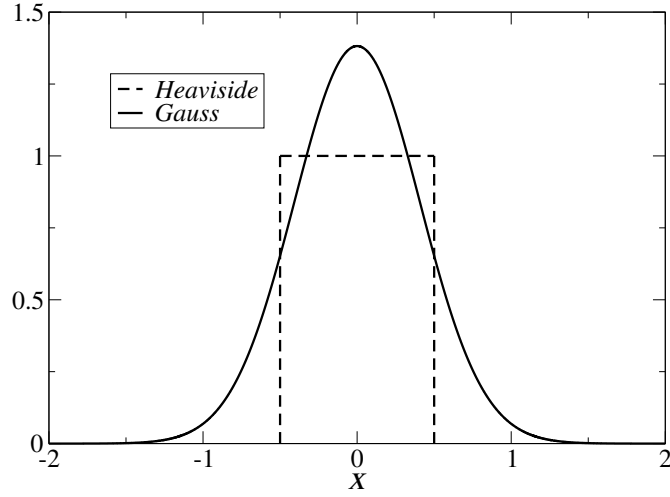


Рисунок 1.1. Фильтр Гаусса и суперпозиция функций Хевисайда для ширины фильтра $\Delta = 1$

где волна сверху над символом соответствует отфильтрованной величине, а

$$\tilde{\tau} = \widetilde{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \quad (1.16)$$

называется тензором подсеточных напряжений и характеризует влияние мелкомасштабной турбулентности на разрешенное (отфильтрованное) поле скорости. Формально уравнения (1.14), (1.15) идентичны уравнениям Рейнольдса (1.11), (1.12).

Операция фильтрации, применяемая к уравнениям Навье–Стокса, определяется следующим образом:

$$\tilde{\phi}(\mathbf{x}) = \int \phi(\mathbf{x}') \tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad (1.17)$$

где ϕ – это некоторая пробная функция, $\tilde{G}$ – ядро интегрального оператора (функция фильтра). Интегрирование проводится в близкой окрестности точки $\mathbf{x}$, что зависит от выбора конкретного G . На рис. 1.1 показаны два типичных фильтра, используемые в литературе. Стоит отметить, что явный вид функции фильтра в основном используется для валидации разработанных подсеточных моделей. Для этого обычно рассматриваются результаты DNS расчетов, которые фильтруются явным образом, согласно (1.17), и сравниваются с аналогичным LES расчетом. Если к уравнениям Навье–Стокса применить операцию фильтрации, то помимо неизвестного тензора $\tilde{\tau}$ появляются незамкнутые слагаемые, которые возникают из-за того, что оператор пространственного дифференцирования не коммутирует с оператором фильтрации. Величина этих слагаемых связана с шагом дискретизации, который пропорционален ширине фильтра, и обычно игнорируется, при условии что шаг сетки достаточно мал [88]. В данной работе как и в большинстве статей в литературе рассматривается так называемый неявный LES подход, при котором конкретный вид фильтрующей функции не используется. Численное решение находится для уравнений (1.14), (1.15) и соответствующей

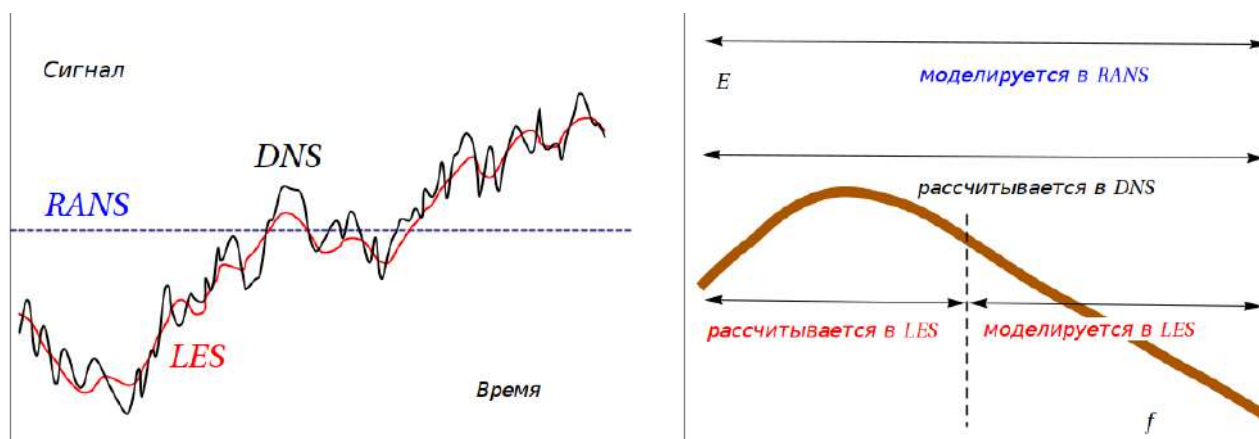


Рисунок 1.2. Слева схематически показан мгновенный сигнал, полученный при помощи DNS, LES и RANS. Справа изображен спектр турбулентных пульсаций и его части, которые рассчитываются напрямую или моделируются в зависимости от выбранного подхода

подсеточной модели для $\tilde{\tau}$.

Некоторые общие замечания

Подводя итоги краткого описания трех используемых в данной работе подходов, стоит еще раз отметить, что DNS разрешает весь спектр турбулентных пульсаций и ничего не моделирует. В RANS весь спектр моделируется, в то время как численное решение дает только статистические характеристики. С точки зрения вычислительных ресурсов, LES находится посередине, потому что крупномасштабное движение разрешается напрямую, учитывая влияние малых масштабов при помощи некоторой модели, что позволяет использовать более грубые расчетные сетки и больший шаг по времени по сравнению с DNS. На рис. 1.2 слева схематически показано различие в мгновенном сигнале скорости в некоторой точке в пространстве, в то время как справа показан спектр турбулентных пульсаций $E(f)$. Если для DNS мгновенный сигнал представляет собой существенно осциллирующую функцию во времени, то для LES эти пульсации имеют более плавный характер, что как раз связано с используемой операцией фильтрации. Сигнал для расчета при помощи RANS представляет собой постоянную линию, потому что решение не меняется во времени (если не используется URANS). Полезно также обсудить разрешение спектральных характеристик в пространстве частот. Если DNS численно разрешает весь спектр, то в LES ширина фильтра будет определять предельную частоту пульсаций, которая разрешена на выбранной сетке, до которой все движение будет рассчитано. Правая (высокочастотная) часть спектра в LES параметризуется при помощи подсеточной модели. При помощи RANS возможно получить только осредненное по времени значение пульсаций в той или иной точке пространства, т.е. значение

интеграла от $E(f)$ по всем частотам.

1.3. Способы замыкания осредненных уравнений

Для расчета уравнений Навье – Стокса при помощи метода прямого численного моделирования уравнения (1.1), (1.2) необходимо дополнить соответствующими граничными и начальными условиями. Совместное решение четырех уравнений определяет четыре неизвестных – вектор скорости $\mathbf{u}$ и давление p , таким образом, система уравнений является замкнутой. Системы уравнений (1.11), (1.12) и (1.14), (1.15), полученные для URANS и LES подходов, соответственно, не являются замкнутыми из-за дополнительного слагаемого, появляющегося в ходе осреднения. Очевидно, что в уравнениях (1.11) и (1.14) тензоры напряжений Рейнольдса и подсеточных напряжений, соответственно, должны быть выражены при помощи некоторых дополнительных гипотез. Далее мы изложим некоторые используемые в литературе способы замыкания осредненных уравнений, а также подробно опишем модели, которые используются в данной работе.

Гипотеза Буссинеска

В недавней исторической заметке [89] обсуждается гипотеза Буссинеска, которая лежит в основе большинства современных URANS- и LES-моделей. Интересно отметить, что работа самого Буссинеска (1877) [90] содержала в себе результаты доклада, представленного на встрече Французской академии наук в 1872 году, в то время как тензор $\bar{\tau}$ был введен Рейнольдсом (1894) [2] более 20 лет спустя. В общем виде эта гипотеза имеет следующий вид:

$$\bar{\tau}_{ij} - \frac{1}{3}\bar{\tau}_{kk}\delta_{ij} = -2\nu_t\bar{S}_{ij}, \quad (1.18)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Выписанное выражение связывает бесследовую часть тензора напряжений Рейнольдса $\bar{\tau}_{ij}$ и осредненный по времени тензор скоростей деформации $\bar{S}_{ij} = (\partial\bar{u}_i/\partial x_j + \partial\bar{u}_j/\partial x_i)$ при помощи некоторой величины ν_t – турбулентной вязкости, которая является функцией пространственных координат, а также времени в нестационарной постановке задачи. Аналогичное выражение можно выписать для подхода LES, где подсеточные напряжения $\tilde{\tau}_{ij}$ связаны с тензором скоростей деформации $\tilde{S}_{ij}$, построенном по “отфильтрованному” полю скорости $\tilde{\mathbf{u}}$. Зачастую в литературе этот класс моделей называется классом, основанном на гипотезе турбулентной вязкости (гипотезе Буссинеска). В рассмотренном простейшем случае линейная связь между двумя тензорами делает их сонаправленными, что в общем случае неверно, однако, понятная концепция и простота в численной ре-

лизации таких моделей обеспечили им широкую популярность. Стоит отметить, что URANS и LES уравнения в таком случае совпадают с уравнениями Навье–Стокса, в которых вместо молекулярной вязкости используется так называемая эффективная вязкость, которая является суммой молекулярной и турбулентной части. Кроме того, для того чтобы уравнения Навье–Стокса не изменили вид, в градиент давления необходимо включить слагаемое пропорциональное $\bar{\tau}_{kk}$, имеющееся в (1.18). Существует также множество моделей, которые учитывают следующие члены разложения тензора $\bar{\tau}$ по степеням пространственных производных от осредненной скорости, что приводит к классу нелинейных моделей, основанных на гипотезе турбулентной вязкости, которые в данной работе не используются.

Линейные URANS-модели, основанные на гипотезе турбулентной вязкости

В линейных моделях шесть неизвестных независимых компонент в симметричном тензоре второго ранга $\bar{\tau}$ заменяются одним неизвестным скалярным полем ν_t , которое надо моделировать. Размерность величины турбулентной вязкости совпадает с молекулярной ($[\nu] = \text{м}^2/\text{с}$) и может быть представлена как произведение характерной величины пульсаций скорости на линейный размер [80]. В контексте URANS простейшими являются так называемые алгебраические модели типа моделей пути смещения, которые показывают хорошее согласие расчетов и экспериментов в случае некоторых простейших пристенных и свободных сдвиговых течений [91]. Помимо алгебраического замыкания, возможно сформулировать одно транспортное (дифференциальное) уравнение на неизвестную величину. Таким примером является популярная модель Спаларта–Аллмараса [92], представляющая собой дополнительное уравнение переноса ν_t , которое, однако, при этом содержит большое количество эмпирической информации (параметры модели).

Следующей ступенью по сложности являются модели, которые дополнены двумя транспортными уравнениями. Первая формулировка принадлежит Колмогорову (1942) [93], который выписал уравнения переноса на величину турбулентной кинетической энергии k и “среднюю частоту” турбулентного движения ω (модель $k - \omega$). Однако, одной из самых распространенных является так называемая модель $k - \epsilon$, где рассматривается турбулентная кинетическая энергия k и ее диссипация ϵ . Опираясь на работы предыдущих исследователей, эта модель была сформулирована в работе Джонса и Лаундера (1972) [94], а также Лаундера и Шармы (1974) [95]. Из этих двух величин может быть составлена турбулентная вязкость:

$$\nu_t = C_\mu k^{1/2} \frac{k^{3/2}}{\epsilon} = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}, \quad (1.19)$$

где $k^{1/2}$ характеризует масштаб пульсаций скорости, $k^{3/2}/\epsilon$ – пространственный масштаб тур-

булентности, $C_\mu = 0.09$ – один из пяти эмпирических параметров модели. Значение этих параметров зачастую выбирается из соображений совпадения экспериментальных и численных результатов соответствующей модели для некоторых канонических турбулентных течений.

Очевидно, что спектр турбулентности и анизотропные эффекты не могут быть определены достаточно универсально при помощи лишь одного масштаба. Создание различных моделей было направлено на то, чтобы добавить дополнительные уравнения, характеризующие многомасштабность явления. В частности, интересной новизной обладает так называемая $\overline{v'^2} - f$ модель Дурбина (1991) [96], в которой учитывается анизотропия некоторых тензорных величин около твердых поверхностей, а также эллиптические свойства, связанные с полем давления. Этот подход позволяет избавиться от пристеночных функций типа функций, введенных Ван Дристом (1956) [97], чтобы обеспечить правильное поведение турбулентной вязкости около стенки. Дальнейшей модификацией этой модели является модель $\zeta - f$, предложенная Ханъяlichem и др. (2004) [98], в которой помимо прочего переформулированы некоторые уравнения Дурбина так, чтобы обеспечивалась численная устойчивость решения. Таким образом, помимо уравнений Рейнольдса решаются четыре дополнительных уравнения:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla k = P_k - \epsilon + \nabla \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right], \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \epsilon = C_{\epsilon 1} \frac{P_k}{\tau} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon}{\tau} + \nabla \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right], \quad (1.21)$$

$$l^2 \nabla^2 f - f = \frac{1}{\tau} \left(c_1 + C'_2 \frac{P_k}{\epsilon} \right) \left(\zeta - \frac{2}{3} \right), \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \zeta = f - \frac{\zeta}{k} P_k + \nabla \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\zeta} \right) \nabla \zeta \right], \quad (1.23)$$

при этом имеется 11 параметров модели C_μ , $C_{\epsilon 1}$, $C_{\epsilon 2}$, c_1 , C'_2 , σ_k , σ_ϵ , σ_ζ , C_τ , C_l и C_η , определенных в табл. 1.1. Производство турбулентной кинетической энергии дается формулой:

$$P_k = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = 2\nu_t S_{ij} S_{ij}, \quad (1.24)$$

где было использована гипотеза Буссинеска (1.18). Переменная f моделирует корреляции пульсаций давления и скорости и используется в дополнительном уравнении на $\zeta = \overline{v'^2}/k$, величина которой позволяет записать турбулентную вязкость в виде, отличном от (1.19):

$$\nu_t = C_\mu \zeta k \tau, \quad (1.25)$$

при этом характерное время τ и масштаб l выражаются следующим образом:

$$\tau = \max \left[\min \left(\frac{k}{\epsilon}, \frac{a}{\sqrt{6} C_\mu |S| \zeta} \right), C_\tau (\nu/\epsilon)^{1/2} \right], \quad (1.26)$$

$$l = C_l \max \left[\min \left(\frac{k^{3/2}}{\epsilon}, \frac{k^{1/2}}{\sqrt{6} C_\mu |S| \zeta} \right), C_\eta (\nu^3/\epsilon)^{1/4} \right], \quad (1.27)$$

Таблица 1.1. Значения параметров модели $\zeta - f$, использованных в данной работе

C_μ	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	c_1	C'_2	σ_k	σ_ϵ	σ_ζ	C_τ	C_l	C_η
0.22	$1.4(1 + 0.012/\zeta)$	1.9	0.4	0.65	1	1.3	1.2	6.0	0.36	85.0

где коэффициент $a \leq 1$ (рекомендованное значение $a = 0.6$). Дополнительную информацию и некоторые тонкости постановки граничных условий можно найти в работе [98].

Замыкание уравнений Рейнольдса второго порядка

Стратегия замыкания следующего уровня сложности заключается в формулировке транспортных уравнений на компоненты тензора напряжений Рейнольдса. Если вычесть из уравнений Навье – Стокса (1.1) уравнение Рейнольдса (1.11), получим транспортное уравнение на пульсационную компоненту скорости:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} = -u'_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} - u'_i u'_k + \overline{u'_i u'_k} \right]. \quad (1.28)$$

Умножая уравнение (1.28) на u'_j и осредняя, сложим его с аналогичным уравнением, где индексы i и j поменены местами, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} = & - \underbrace{\left(\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right)}_{P_{ij}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \left(\overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \right)}_{\Pi_{ij}} - \\ & - \underbrace{2\nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_i}}_{\epsilon_{ij}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} - \overline{u'_i u'_j u'_k} \right]}_{D_{ij}^\nu + D_{ij}^t}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Первое слагаемое в правой части обозначает производство напряжений Рейнольдса при наличии градиента средней скорости, P_{ij} , и является источником членом. Физическое значение следующего слагаемого, включающего корреляции пульсаций скорости и градиентов пульсаций давления, Π_{ij} , не так очевидно. Полезно представить его в виде суммы двух слагаемых:

$$\underbrace{-\frac{1}{\rho} \left(\overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \right)}_{\Pi_{ij}} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{\rho} \overline{p' (u'_i \delta_{jk} + u'_j \delta_{ik})} \right)}_{D_{ij}^p} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \overline{p' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)}}_{\Phi_{ij}}. \quad (1.30)$$

Слагаемое D_{ij}^p соответствует диффузии напряжений Рейнольдса благодаря пульсациям давления. Таким образом, в уравнении (1.29) за диффузию отвечают три слагаемых: D_{ij}^ν , D_{ij}^t и D_{ij}^p . Первые два слагаемых (D_{ij}^ν и D_{ij}^t) соответствуют диффузии напряжений Рейнольдса за счет действия молекулярной вязкости и пульсаций скорости, соответственно, а слагаемое D_{ij}^p соответствует диффузии напряжений Рейнольдса за счет корреляций пульсаций скорости и

давления. Стоит отметить, что D_{ij}^ν обычно мало почти во всей области течения кроме непосредственной близости от твердой поверхности. Слагаемое Φ_{ij} , порождаемое корреляциями пульсаций давления и производными от пульсаций скорости (тензором скоростей деформации), не является источником или стоком для турбулентной кинетической энергии, поскольку зануляется при свертке $i = j$. Таким образом, оно отвечает за перераспределение энергии между различными компонентами напряжений Рейнольдса. И, наконец, тензор диссипации турбулентной кинетической энергии ϵ_{ij} является стоком в уравнении (1.30) из-за действия молекулярной вязкости.

В данной работе используется так называемая модель Ханъялича и Якирлича (1998) [99] для низких чисел Рейнольдса с традиционными модификациями для учета пристенных и вязких эффектов, но с учетом ϵ_{ij}^h (определен ниже) вместо ϵ_{ij} :

$$\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} = - \left(\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \right) + \Phi_{ij} - \epsilon_{ij}^h + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\frac{1}{2} \nu \delta_{kl} + C_s \frac{k}{\epsilon^h} \right) \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l} \right], \quad (1.31)$$

где коэффициент $C_s = 0.22$, при этом корреляции пульсаций давления и производных скорости моделируются следующим образом:

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij,1} + \Phi_{ij,1}^w + \Phi_{ij,2} + \Phi_{ij,2}^w, \quad (1.32)$$

$$\Phi_{ij,1} = -C_1 \epsilon^h a_{ij}, \quad \Phi_{ij,2} = -C_2 (P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij}), \quad (1.33)$$

$$\Phi_{ij,1}^w = C_1^w f_w \frac{\epsilon^h}{k} (\overline{u'_k u'_m} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u'_i u'_k} n_k n_j - \frac{3}{2} \overline{u'_k u'_j} n_k n_i), \quad (1.34)$$

$$\Phi_{ij,2}^w = C_2^w f_w (\Phi_{km,2} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \Phi_{ik,2} n_k n_j - \frac{3}{2} \Phi_{kj,2} n_k n_i), \quad (1.35)$$

где n_i – компоненты вектора нормали к твердой поверхности, при этом

$$C_1 = C + \sqrt{A} E^2, \quad C = 2.5 A F^{1/4} f, \quad F = \min[0.6; A_2], \quad (1.36)$$

$$f = \min \left[\left(\frac{Re_t}{150} \right)^{3/2}; 1 \right], \quad Re_t = \frac{k^2}{\nu \epsilon}, \quad f_w = \min \left[\frac{k^{3/2}}{2.5 \epsilon^h x_n}; 1.4 \right], \quad (1.37)$$

$$C_2 = 0.8 A^{1/2}, \quad C_1^w = \max[1 - 0.7 C; 0.3], \quad C_2^w = \min[A; 0.3]. \quad (1.38)$$

Здесь и далее используются инварианты тензоров

$$a_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij}, \quad e_{ij} = \frac{\epsilon_{ij}}{\epsilon} - \frac{2}{3} \delta_{ij}, \quad (1.39)$$

которые имеют вид

$$A_2 = a_{ji} a_{ij}, \quad A_3 = a_{ij} a_{jk} a_{ki}, \quad A = 1 - \frac{9}{8} (A_2 - A_3), \quad (1.40)$$

$$E_2 = e_{ji} e_{ij}, \quad E_3 = e_{ij} e_{jk} e_{ki}, \quad E = 1 - \frac{9}{8} (E_2 - E_3). \quad (1.41)$$

Главная особенность заключается в решении уравнения на “однородную” часть диссипации ϵ^h , которая описана в модели Якирича и Ханъялича (2002) [100] и имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon^h}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \epsilon^h}{\partial x_k} = & -C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon^h}{k} \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - 2\nu \left(\frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_l} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_l} + C_{\epsilon 3} \frac{k}{\epsilon^h} \frac{\partial \overline{u'_k u'_l}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_l} \right) - \\ & -C_{\epsilon 2} f_\epsilon \frac{\epsilon^h \tilde{\epsilon}^h}{k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\frac{1}{2} \nu \delta_{kl} + C_\epsilon \frac{\epsilon^h}{k} \overline{u'_k u'_l} \right) \frac{\partial \epsilon^h}{\partial x_l} \right], \end{aligned} \quad (1.42)$$

где

$$C_\epsilon = 0.18, \quad C_{\epsilon 1} = 1.44, \quad C_{\epsilon 2} = 1.80, \quad C_{\epsilon 3} = 0.32, \quad f_\epsilon = 1 - \frac{C_{\epsilon 2} - 1.4}{C_{\epsilon 2}} e^{-(\frac{Re_t}{6})^2}. \quad (1.43)$$

“Однородная” часть диссипации связана с полной величиной соотношением:

$$\epsilon^h = \epsilon - \frac{1}{2} D_k^\nu. \quad (1.44)$$

Тензор диссипации восстанавливается следующим образом:

$$\epsilon_{ij}^h = (1 - f_\epsilon) \frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon^h + f_\epsilon \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} \epsilon^h, \quad \text{где } f_\epsilon = 1 - \sqrt{AE^2}, \quad (1.45)$$

который далее подставляется в уравнение (1.31). Таким образом, эта модель включает в себя семь дополнительных транспортных уравнений на шесть независимых компонент напряжений Рейнольдса и уравнение на диссипацию. Дополнительные детали изложены в работах [99, 100].

Подсеточные LES-модели, модель Смагоринского и динамическая процедура

Как и в подходе RANS, существует большое множество различных способов моделирования подсеточных напряжений, возникающих при пространственной фильтрации уравнений Навье–Стокса. Очевидно, что как и для уравнений Рейнольдса возможно проводить замыкание, привлекая дополнительные транспортные уравнения для подсеточных напряжений. Однако, ограничимся здесь описанием только моделей, основанных на гипотезе турбулентной вязкости. Сразу стоит отметить, что турбулентная вязкость в RANS и LES имеет принципиальное отличие. Как уже было сказано, в RANS моделируется весь спектр, поэтому турбулентная вязкость характеризует полную турбулентную кинетическую энергию, см. рис. 1.2. Величина ν_t может достигать нескольких сотен ν . В отличие от этого в LES обычно моделируется только до 20% энергии [81], поэтому турбулентная вязкость для расчета с хорошим пространственным и временным разрешением составляет от нескольких единиц (или даже доли) до десятка ν .

В монографии Саго (2006) [88] и в других источниках подробно обсуждаются используемые в литературе различные подсеточные модели. Однако, ввиду относительной простоты

наибольшую популярность получила модель Смагоринского [101], в которой турбулентная вязкость выражается следующим образом:

$$\nu_t = (C_s \tilde{\Delta})^2 |\tilde{S}|, \quad |\tilde{S}| = \sqrt{2 \tilde{S}_{ij} \tilde{S}_{ij}}, \quad (1.46)$$

где C_s – константа Смагоринского, а $\tilde{\Delta}$ – ширина фильтра, связанная с локальным размером вычислительной сетки. Таким образом, влияние мелких масштабов на крупные выражается опять же через характеристики разрешенного (отфильтрованного) поля скорости $\tilde{\mathbf{u}}$, т.е. крупных масштабов. При этом если вычислительная сетка достаточно подробна, то $\tilde{\Delta}$ по отношению, например, к интегральному масштабу турбулентности является малой величиной. Это значит, что и ν_t будет мало по сравнению с ν , а расчет будет соответствовать прямому численному моделированию.

Стандартная модель Смагоринского имеет несколько недостатков. Во-первых, значение константы Смагоринского, выбираемое из соображений хорошего совпадения результатов LES с DNS или экспериментом, имеет некоторый разброс в значении для различных потоков ($C_s \approx 0.1$). Во-вторых, эта модель слишком диссипативна и, к примеру, для потоков с областью ламинарно-турбулентного перехода подавляет развитие гидродинамических возмущений, переоценивая ν_t . Действительно, если представить, что исследуемое движение жидкости соответствует ламинарному режиму течения, турбулентная вязкость все равно не будет равна нулю согласно (1.46). Кроме того, легко показать, что в пристенной турбулентности ν_t должна стремиться к нулю около стенки как куб расстояния от нее, что в случае (1.46) также не выполняется. Эти недостатки мотивировали Германо и др. (1991) [102] предложить интересную процедуру динамического определения константы Смагоринского, которая исправляет указанные недостатки стандартной модели. Суть этого метода заключается в том, чтобы получить два разных выражения для подсеточных напряжений для двух фильтров разной ширины, которые содержат коэффициент Смагоринского. Это позволит получить выражение для C_s , используя только информацию, получаемую в ходе расчета.

Подействуем фильтром $\tilde{G}$ и тестовым фильтром $\hat{\tilde{G}} = \hat{G}\tilde{G}$ на уравнения Навье – Стокса, что даст нам два выражения для подсеточных напряжений для каждого случая:

$$\tilde{\tau}_{ij} = \widetilde{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j, \quad (1.47)$$

$$\hat{\tilde{\tau}}_{ij} = \widehat{\widetilde{u_i u_j}} - \hat{\tilde{u}}_i \hat{\tilde{u}}_j. \quad (1.48)$$

Воспользуемся моделью Смагоринского (1.18) и (1.46), чтобы получить связь бесследовых частей тензоров подсеточных напряжений для каждого фильтра с соответствующим тензором

скоростей деформации:

$$\tilde{\tau}_{ij} - \frac{1}{3}\tilde{\tau}_{kk}\delta_{ij} = -2C_d\tilde{\Delta}^2|\tilde{S}|\tilde{S}_{ij}, \quad (1.49)$$

$$\widehat{\tau}_{ij} - \frac{1}{3}\widehat{\tau}_{kk}\delta_{ij} = -2C_d\widehat{\Delta}^2|\widehat{S}|\widehat{S}_{ij}, \quad (1.50)$$

где коэффициент C_d равен квадрату константы Смагоринского, использованной в формуле (1.46), $\widehat{\Delta}$ – ширина тестового фильтра, которая обычно принимается равной $2\tilde{\Delta}$. Теперь подействуем фильтром $\widehat{G}$ на $\tilde{\tau}_{ij}$ (1.47) и вычтем из $\widehat{\tau}_{ij}$, откуда получим выражение для C_d вида

$$L_{ij} = C_d M_{ij}, \quad (1.51)$$

где

$$L_{ij} = \widehat{u_i u_j} - \widehat{u_i} \widehat{u_j} - \frac{1}{3}\delta_{ij}(\widehat{u_k u_k} - \widehat{u_k} \widehat{u_k}), \quad (1.52)$$

$$M_{ij} = -2\widehat{\Delta}^2|\widehat{S}|\widehat{S}_{ij} + 2\tilde{\Delta}^2|\tilde{S}|\tilde{S}_{ij}. \quad (1.53)$$

Правую и левую часть этой формулы можно свернуть с другим тензором, например, $\tilde{S}_{ij}$ и выразить отсюда C_d :

$$C_d = \frac{L_{ij}\tilde{S}_{ij}}{M_{ij}\tilde{S}_{ij}} = \frac{(\widehat{u_i u_j} - \widehat{u_i} \widehat{u_j} - \frac{1}{3}\delta_{ij}(\widehat{u_k u_k} - \widehat{u_k} \widehat{u_k}))\tilde{S}_{ij}}{(-2\widehat{\Delta}^2|\widehat{S}|\widehat{S}_{ij} + 2\tilde{\Delta}^2|\tilde{S}|\tilde{S}_{ij})\tilde{S}_{ij}}, \quad (1.54)$$

При свертке знаменателя с тензором $\tilde{S}_{ij}$ получается знакопеременный скаляр, поэтому знаменатель может обращаться в нуль, что приведет к неопределенности. Для того, чтобы этого избежать Лилли (1992) [103] предложил свернуть (1.51) с тензором M_{ij} , тогда знаменатель $|M_{ij}|^2$ всегда положителен, и особенности не возникает. Именно этот подход обычно используется в литературе под названием динамической модели Смагоринского, которая опирается на процедуру Германно – Лилли.

Для численной реализации этой модели необходимо обсудить две ее особенности [88]. Во-первых, C_d может (локально) принимать отрицательные значения, что соответствует передаче энергии от мелкомасштабной (моделируемой) турбулентности крупномасштабному (разрешенному) полю скорости. Во-вторых, значение C_d также не ограничено сверху. Численные тесты показали, что значение параметра может оставаться отрицательным довольно продолжительное время, что приводит к экспоненциальному росту высокочастотных пульсаций $\tilde{u}$. Таким образом, требуется некоторая процедура, которая бы гарантировала численную устойчивость расчета. Существует несколько различных способов, среди которых можно

выделить осреднение значения C_d вдоль однородных переменных [102, 104], локальное осреднение по времени или пространству [105], искусственное ограничение значения в некотором интервале (clipping) [105] или комбинацией этих методов [104, 105].

1.4. Численные методы решения уравнений Навье – Стокса

Далее будут описаны основные принципы двух вычислительных программ, результаты численных расчетов которых используются в данной работе. Первый вычислительный код называется HiPSTAR (high-performance solver for turbulence and aeroacoustics research), разрабатываемый Р. Сандбергом (Университет Мельбурна, Австралия) [106, 107] и соавторами. Этот код использовался для получения DNS результатов затопленной турбулентной струи в спутном потоке, анализ которых изложен в пункте 3.2.2. Второй вычислительный код называется T-FlowS и был изначально написан Б. Ничено (Институт Пола Шеррера, Швейцария) [108, 109], позже дополнялся и поддерживался различными исследователями, включая автора диссертации. Эта программа использовалась для проведения LES-расчетов струйных и отрывных течений, а также исследования задачи обтекания цилиндра однородным потоком жидкости и возможности управления при помощи вращательных колебаний в рамках подхода URANS.

Описание кода HiPSTAR

Эта программа решает систему уравнений Навье – Стокса для сжимаемой среды, а именно, закон сохранения массы, импульса и энергии в цилиндрической системе координат (x, r, ϕ) с компонентами вектора скорости $\mathbf{u} = (u, v, w)$. Уравнения, обезразмеренные при помощи характерных величин, взятых в некоторой точке пространства (обозначено индексом ∞), содержат три безразмерных критерия:

$$Re = \frac{\rho_\infty U L}{\mu_\infty}, \quad M = \frac{U}{a_\infty}, \quad Pr = \frac{\mu_\infty c_p}{\kappa_\infty}. \quad (1.55)$$

Число Рейнольдса Re было определено в начале этой главы для случая постоянной плотности по кинематической вязкости, которая связана с динамической вязкостью μ соотношением $\nu = \mu/\rho$. Здесь как и прежде U и L обозначают характерную скорость и линейный размер в задаче. Число Маха M есть отношение характерной скорости к скорости звука a_∞ и в рассматриваемых случаях имеет малое значение ($M < 0.3$), что позволяет игнорировать эффекты, связанные с сжимаемостью среды. Число Прандтля определяется как отношение диффузионных коэффициентов (коэффициента кинематической вязкости к температуропро-

водности). Здесь c_p – удельная теплоёмкость среды при постоянном давлении, κ – коэффициент теплопроводности.

Уравнения движения в цилиндрической системе координат могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r} F_s = 0, \quad (1.56)$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad (1.57)$$

$$F_x = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u u + p - \tau_{xx} \\ \rho u v - \tau_{xr} \\ \rho u w - \tau_{x\phi} \\ \rho u H + q_x - \\ -u\tau_{xx} - v\tau_{xr} - w\tau_{x\phi} \end{pmatrix}, \quad F_r = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v u - \tau_{rx} \\ \rho v v + p - \tau_{rr} \\ \rho v w - \tau_{r\phi} \\ \rho v H + q_r - \\ -u\tau_{rx} - v\tau_{rr} - w\tau_{r\phi} \end{pmatrix}, \quad (1.58)$$

$$F_\phi = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho w u - \tau_{\phi x} \\ \rho w v - \tau_{\phi r} \\ \rho w w + p - \tau_{\phi\phi} \\ \rho w H + q_\phi - \\ -u\tau_{\phi x} - v\tau_{\phi r} - w\tau_{\phi\phi} \end{pmatrix}, \quad F_s = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v u - \tau_{rx} \\ \rho v v - \rho w w - \tau_{rr} + \tau_{\phi\phi} \\ 2\rho v w - 2\tau_{\phi r} \\ \rho v H + q_r - \\ -u\tau_{rx} - v\tau_{rr} - w\tau_{\phi r} \end{pmatrix}, \quad (1.59)$$

где полная энергия определена как $E = T/[\gamma(\gamma - 1)M^2] + u_i u_i/2$, при этом $\gamma = 1.4$, T – температура, а энтальпия имеет вид $H = E + p/\rho$. Тензор вязких напряжений и вектор потока тепла имеют следующий вид:

$$\tau_{ij} = \frac{\mu}{Re} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right), \quad q_i = -\frac{\mu}{Pr(\gamma - 1)M^2 Re} \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (1.60)$$

где в выражении для τ_{ij} появляется третье слагаемое, которое равно нулю в несжимаемом случае. В данной работе число Прандтля принимается постоянным $Pr = 0.72$. Зависимость

динамической вязкости от температуры рассчитывается согласно закону Сазерленда [110]. Система дополняется уравнением состояния для идеального газа в безразмерном виде

$$p = \frac{\rho T}{\gamma M^2}. \quad (1.61)$$

Для пространственной дискретизации используется компактная конечно-разностная схема четвертого порядка [111] для внутренних точек, которая может быть записана следующим образом

$$\beta \bar{\phi}'_{i-2} + \alpha \bar{\phi}'_{i-1} + \bar{\phi}'_i + \alpha \bar{\phi}'_{i+1} + \beta \bar{\phi}'_{i+2} = \frac{1}{\Delta} \sum_{m=1}^3 a_m (f_{i+m} - f_{i-m}), \quad 2 \leq i \leq N-2, \quad (1.62)$$

где ϕ_i и ϕ'_i обозначают некоторую функцию и ее производную $\partial\phi/\partial x$, при этом черта сверху ($\bar{\phi}'_i$) обозначает численную производную в отличие от точной. Здесь для простоты выписана формула для постоянного шага $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ вдоль направления x . Коэффициенты приведены в табл. 1.2. В случае разделения расчетной области на подобласти (domain decomposition),

Таблица 1.2. Коэффициенты, используемые в формуле (1.62)

α	0.5862704032801503
β	0.0954953355501705
a_1	0.6431406736919156
a_2	0.2586011023495066
a_3	0.0071409534797973

индекс пробегает значения $0 \leq i \leq N$ внутри каждой подобласти, где $i = 0$ и N представляют собой границы подобласти. Индексы $i \leq -1$ и $i \geq N+1$ соответствуют фиктивным точкам (halo/ghost points), которые хранят информацию из соседней подобласти. В точках с $i = 2$ или $i = N-2$ уравнение (1.62) включает одну фиктивную точку (f_{-1} или f_{N+1}). Для граничных точек ($i = 0$ и 1) используются две дополнительные схемы, процедура которых использует некоторую экстраполяцию и последующую оптимизацию этих значений. Подробная информация представлена в [111]. Крайне важным является использование эффективных численных фильтров для прямого численного моделирования уравнений Навье–Стокса особенно при использовании конечно-разностных схем высокого порядка. Для того, чтобы обеспечить численную устойчивость и убрать нефизические осцилляции в численном решении, которые обычно возникают из неразрешенной высокочастотной части спектра, компактные конечно-разностные схемы дополнены использованием дискретного фильтра, построенного по 11 расчетным точкам [112].

В азимутальном направлении применяется разложение Фурье при помощи библиотеки FFTW3, что позволяет использовать парное граничное условие на оси симметрии для отдельных Фурье-гармоник [113]. Для дискретизации уравнений по времени используется оптимизированная схема Рунге–Кутты четвертого порядка [114]. Стоит упомянуть также использование специальной декомпозиции конвективного слагаемого [115] и неотражающие граничные условия [116]. Для расчета на параллельных многопроцессорных системах использовалась декомпозиция области, а также OpenMP и MPI для обмена информацией между процессорами. Результаты расчетов при помощи изложенных алгоритмов тестировались на ряде задач [106, 107].

Описание кода T-FlowS

¹Если проинтегрировать уравнения Навье – Стокса для несжимаемой среды по некоторому объему в пространстве, то, используя теорему Остроградского – Гаусса, для некоторых слагаемых можно перейти от интегрирования по объему к интегралам по поверхности. Модельное транспортное уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \phi dV + \int_S \phi \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \gamma \nabla \phi \cdot d\mathbf{S} + \int_S q_S d\mathbf{S} + \int_V q_V dV, \quad (1.63)$$

где ϕ – некоторая пробная функция, которая может представлять собой либо одну из компонент вектора скорости, либо, к примеру, некоторое скалярное поле. Вектор $d\mathbf{S}$ равен $\mathbf{n}dS$, где dS – площадь элемента поверхности рассматриваемого контрольного объема, и направлен вдоль нормали к этой поверхности $\mathbf{n}$. Коэффициент γ обозначает соответствующий диффузионный коэффициент, q_S и q_V – поверхностные и объемные источниковые члены. Дискретизация интегрированных по объему уравнений составляет суть метода конечных объемов, который в используемом вычислительном коде реализован на неструктурированных расчетных сетках. Расчетные сетки могут состоять из призм, пирамид и шестигранников, а также составлять их комбинацию.

В вычислительном коде реализовано три схемы интегрирования по времени: метод дробных шагов, схема Кранка – Николсона и полностью неявная схема. Однако, в описанных расчетах мы используем исключительно неявную схему, при этом производная по времени представляется в виде конечных разностей, используя формулу дифференцирования назад третьего порядка аппроксимации:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{3}{2}\phi^{n+1} - 2\phi^n + \frac{1}{2}\phi^{n-1}\right), \quad (1.64)$$

¹ См. работы [11,27] в разделе “Публикации по теме диссертации”

где Δt обозначает постоянный шаг по времени, индекс ' $n+1$ ' соответствует следующему шагу по времени, на котором ищется решение, а ' n ' и ' $n-1$ ' – предыдущие. Уравнения на давление и скорость решаются с использованием итеративной процедуры SIMPLE [117], которая заключается в следующем. В качестве первого шага решаются дискретизованные уравнения на некоторую пробную функцию скорости, при этом в качестве градиента давления используются значения с предыдущего шага по времени. Однако, вектор скорости, соответствующий найденной пробной функции, не удовлетворяет уравнению неразрывности. Далее решается уравнение Пуассона на поправку к полю давления, из которой находится соответствующая поправка к полю скорости. Теперь вектор скорости, состоящий из найденных пробной функции и поправки, удовлетворяет уравнению неразрывности. Важно отметить, что дискретизованные дифференциальные уравнения в частных производных сводятся к алгебраическим уравнениям. Получающиеся матричные уравнения решаются итеративно с помощью метода сопряженных градиентов.

Покажем как из дифференциального уравнения (1.64) получается алгебраическое уравнение, которое можно записать в матричном виде. Рассмотрим некоторый контрольный объем с центром в некоторой точке с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$, координаты которого определяются следующим образом:

$$\int_V (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = 0. \quad (1.65)$$

Все зависимые переменные (компоненты скорости и давление) дискретизируются в центре контрольного объема, таким образом, используется так называемая совмещенная расчетная сетка. Полагается, что все переменные меняются линейно внутри контрольного объема:

$$\phi = \phi_0 + \nabla \phi \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (1.66)$$

Дискретизация уравнений заключается в дискретизации нескольких объемных и поверхностных интегралов. Из последнего условия имеем:

$$\int_V \phi(\mathbf{x}) dV = \phi_0 \Delta V, \quad (1.67)$$

где ΔV есть объем рассматриваемой подобласти. Далее для простоты индекс ' 0 ' опущен у величин, относящихся к центру контрольных объемов. Таким же образом запишем интеграл по поверхности (через грань) контрольного объема:

$$\int_S \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{S} = \phi_j S_j \mathbf{n}_j, \quad (1.68)$$

где индекс ‘ j ’ обозначает некоторую грань контрольного объема, а S_j и $\mathbf{n}_j$ – ее площадь и вектор нормали, соответственно. Значения искомых величин рассчитываются с помощью линейной интерполяции:

$$\phi_j = \frac{1}{2} \left(\phi_{1,j} + (\nabla \phi)_{1,j} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{1,j}) + \phi_{2,j} + (\nabla \phi)_{2,j} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{2,j}) \right), \quad (1.69)$$

где индексы ‘ $1, j$ ’ и ‘ $2, j$ ’ обозначают контрольные объемы соприкасающиеся с гранью с индексом ‘ j ’. Далее ‘ $1, j$ ’ и ‘ $2, j$ ’ заменены на ‘ 1 ’ и ‘ 2 ’ для удобства. Градиенты искомых величин рассчитываются в центрах контрольных объемов и считаются постоянным внутри них. Градиенты на гранях контрольных объемов рассчитываются как

$$(\nabla \phi)_j = \frac{1}{2} \left((\nabla \phi)_1 + (\nabla \phi)_2 \right), \quad (1.70)$$

где $(\nabla \phi)_j$ обозначает величину градиента на грани ‘ j ’, $(\nabla \phi)_1$ и $(\nabla \phi)_2$ есть значения градиентов в контрольных объемах ‘ 1 ’ и ‘ 2 ’. Градиенты в контрольных объемах вычисляются при помощи метода наименьших квадратов, используя значения ϕ в центрах всех соседних ячеек, которые имеют общие грани с рассматриваемой.

Дискретизация конвективного слагаемого проводится следующим образом:

$$\int_S \phi \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \sum_j \phi_j F_j, \quad (1.71)$$

где F_j обозначает объемный расход жидкости через рассматриваемую грань и имеет следующий вид:

$$F_j = \left((\mathbf{u} + \Delta t \frac{\nabla p}{\rho})_j + \frac{\Delta t}{\rho} \frac{(p_1 - p_2)}{d_j} \right) S_j \mathbf{n}_j, \quad (1.72)$$

Последнее равенство является реализацией техники Ри и Чоу (1983) [118] на произвольной расчетной сетке для устранения нежелательных осцилляций, возникающих из-за использования совмещенных расчетных сеток. Дискретизация диффузионного слагаемого приводит к следующему выражению:

$$\int_S \gamma \nabla \phi \cdot d\mathbf{S} = \sum_j \gamma (\nabla \phi)_j S_j \mathbf{n}_j, \quad (1.73)$$

где используются значения градиента, определенного на грани. Слагаемое, соответствующее поверхностному источниковому члену аппроксимируется следующим образом:

$$\int_S \mathbf{q}_S d\mathbf{S} = \mathbf{q}_{Sj} S_j \mathbf{n}_j. \quad (1.74)$$

Аналогично, объемный источниковый член записывается как

$$\int_V q_V dV = q_V dV. \quad (1.75)$$

Подводя итоги краткого описания используемого вычислительного кода, нужно также явно отметить особенности хранения данных. Структура хранения данных в реализованном подходе опирается на индексированный массив граней контрольных объемов. Для каждой грани хранятся индексы двух контрольных объемов, которым принадлежит эта грань. В массиве же самих контрольных объемов элементы могут располагаться не по порядку, при этом конкретный контрольный элемент не имеет информации о своих соседях. Стоит также отметить, что используется декомпозиция области. Каждая подобласть обрабатывается отдельным процессором, которые в свою очередь взаимодействуют при помощи протокола MPI. Код верифицировался на ряде точных решений ламинарных потоков, а также проводилось сравнение статистических характеристик некоторых турбулентных потоков с результатами, полученными при помощи других вычислительных программ и экспериментов [108, 109].

1.5. Разложение поля скорости по эмпирическому базису

Собственное ортогональное разложение (Proper orthogonal decomposition, POD) является основным статистическим методом, наиболее часто применяющимся при анализе турбулентных потоков. Ламли (1967) [78] впервые предложил использовать POD для анализа турбулентных потоков, который также известен как метод главных компонент (Principal component analysis, PCA) и преобразование Кархунена–Лоэва (Karhunen–Loeve transform, KLT). Дальнейшее изложение проводится согласно монографии Холмса и др. (2012) [119].

Задача нахождения оптимального эмпирического базиса, описывающего наблюдаемые реализации функции $u(x)$, сводится к отысканию некоторого набора функций η_i , заданных в Гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, где скалярное произведение двух функций f и g определяется как

$$(f, g) = \int f(\mathbf{x}) g^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (1.76)$$

при этом $*$ означает комплексное сопряжение (и транспонирование в случае матриц). Оптимальность базиса означает, что сумма

$$u_N(x) = \sum_{i=1}^N a_i \eta_i(x), \quad (1.77)$$

наиболее близка к точному выражению $u(x)$ по сравнению с результатами, полученными при помощи суммирования N слагаемых любого другого базиса. Коэффициенты a_i как будет показано далее вычисляются как проекции функции u на базис η . Математически это утверждение об оптимальности базиса говорит о том, что мы должны выбрать такие функции η , чтобы минимизировать следующее выражение

$$\min_{\eta \in \mathcal{H}} \langle \|u - \frac{(u, \eta)}{\|\eta\|^2} \eta\|^2 \rangle, \quad (1.78)$$

где норма определена как $\|f\| = (f, f)^{1/2}$, а $\langle \cdot \rangle$ обозначает осреднение по ансамблю (реализациям величины u). Выражение (1.78) можно представить в виде задачи максимизации

$$\max_{\eta \in \mathcal{H}} \frac{\langle |(u, \eta)|^2 \rangle}{\|\eta\|^2}. \quad (1.79)$$

Таким образом, задача свелась к максимизации $\langle |(u, \eta)|^2 \rangle$ при условии $\|\eta\|^2 = 1$. Соответствующий функционал для сформулированной вариационной задачи имеет вид

$$J[\eta] = \langle |(u, \eta)|^2 \rangle - \sigma(\|\eta\|^2 - 1), \quad (1.80)$$

где σ является множителем Лагранжа. Необходимым условием найденного минимума соответствующего функционала при рассмотрении базиса $\eta + \delta\psi$ является условие

$$\frac{d}{d\delta} J[\eta + \delta\psi]|_{\delta=0} = 0, \quad (1.81)$$

где ψ – некоторая произвольная функция, а δ – параметр. Подставляя в (1.81) выражение (1.80), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\delta} J[\eta + \delta\psi]|_{\delta=0} &= \frac{d}{d\delta} \left(\langle |(u, \eta + \delta\psi)|^2 \rangle - \sigma(\|\eta + \delta\psi\|^2 - 1) \right)|_{\delta=0} = \\ &= 2\text{Real} \left(\langle (u, \psi)(\eta, u) \rangle - \sigma(\eta, \psi) \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.82)$$

где Real обозначает действительную часть комплексного числа. Поскольку ψ – произвольная функция, то последнее выражение в скобках должно быть равно нулю. Тогда после следующей цепочки преобразований

$$\left(\langle (\eta, u)u \rangle, \psi \right) - \sigma(\eta, \psi) = 0, \quad (\mathcal{R}\eta - \sigma\eta, \psi) = 0, \quad (1.83)$$

это выражение принимает вид

$$\mathcal{R}\eta = \sigma\eta, \quad (1.84)$$

где

$$\mathcal{R}\eta = \langle (\eta, u)u \rangle. \quad (1.85)$$

Таким образом, функции η являются собственными функциями оператора $\mathcal{R}$, который можно получить из наблюдаемых значений функции u . Эти функции называются эмпирическими собственными функциями или POD модами. Здесь мы рассмотрели вывод спектральной задачи (1.84) для скалярного поля u как функции одного аргумента x , однако, аналогичный вывод можно проделать и для векторного поля от нескольких аргументов, к примеру, поля скорости в трехмерном пространстве.

Метод кадров

Метод кадров (Method of snapshots) был предложен Сировичем (1987) [120] для того, чтобы снизить использование вычислительных ресурсов при решении задачи (1.84) на собственные значения. Однако, полезно сперва переписать определение оператора $\mathcal{R}$ для N -мерных векторов $\mathbf{u}^k$, которые получаются в результате M шагов по времени из численного решения или эксперимента (индекс $k \leq M$ соответствует реализации вектора во времени). Тогда

$$\mathcal{R} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \mathbf{u}^k (\mathbf{u}^k)^* \quad \text{или} \quad \mathcal{R}_{ij} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M u_i^k u_j^k, \quad (1.86)$$

где $\mathcal{R}$ является действительной симметричной матрицей размерности $N \times N$. Размерность N связана с используемой сеткой дискретизации по пространству, что в случае численного моделирования может представлять довольно большое значение. Идея Сировича заключалась в том, чтобы свести задачу нахождения собственных значений матрицы размерности $N \times N$ к задаче с размерностью $M \times M$, где предполагается, что $N \gg M$. Далее, если $\boldsymbol{\eta}$ – собственный вектор, то

$$\boldsymbol{\eta} = \sum_{k=1}^M a_k \mathbf{u}^k, \quad (1.87)$$

где коэффициенты a_k необходимо определить. Согласно (1.86), задачу на собственные значения (1.84) можно записать как

$$\left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{u}^i (\mathbf{u}^i)^* \right) \sum_{k=1}^M a_k \mathbf{u}^k = \sigma \sum_{k=1}^M a_k \mathbf{u}^k. \quad (1.88)$$

Левая часть выражения переписывается как

$$\sum_{i=1}^M \left(\sum_{k=1}^M \frac{1}{M} (\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^i) a_k \right) \mathbf{u}^i, \quad (1.89)$$

откуда можно заключить, что достаточным условием для нахождения решения является нахождение таких a_k , что

$$\sum_{k=1}^M \frac{1}{M} (\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^i) a_k = \sigma a_i, \quad i = 1, \dots, M. \quad (1.90)$$

Таким образом, мы получили задачу на собственные значения размерности $M \times M$, для которой однако необходимо, чтобы M реализаций $\mathbf{u}^k$ были линейно независимы.

Связь POD Сировича с сингулярным разложением

В дискретном случае POD сводится к сингулярному разложению матрицы, составленной из столбцов-реализаций вектора скорости. Для того, чтобы это показать, составим матрицу $N \times M$ следующим образом

$$X = [\mathbf{u}^1 \ \cdots \ \mathbf{u}^M]. \quad (1.91)$$

После этого задача на собственные значения (1.84) может быть записана в виде

$$\frac{1}{M} X X^* \boldsymbol{\eta} = \sigma \boldsymbol{\eta}, \quad (1.92)$$

при этом разложение (1.87) преобразуется к виду

$$\boldsymbol{\eta} = X \mathbf{a}, \quad (1.93)$$

где $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_M)$. Задача на собственные значения (1.90) принимает вид

$$\frac{1}{M} X^* X \mathbf{a} = \sigma \mathbf{a}. \quad (1.94)$$

Возможно стоит напомнить, что *сингулярное разложение* (Singular value decomposition, SVD) действительной или комплекснозначной прямоугольной матрицы размерности $N \times M$ задается выражением

$$X = U \Sigma V^* = \sum_{j=1}^r \lambda_j \boldsymbol{\eta}_j \mathbf{v}_j^*, \quad (1.95)$$

где $U = [\boldsymbol{\eta}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{\eta}_N]$ и $V = [\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{v}_M]$ являются ортогональными матрицами ($U^* U = E_{N \times N}$ и $V^* V = E_{M \times M}$, где E – единичная матрица), r – ранг матрицы X , а матрица Σ размерности $N \times M$ имеет вид

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad N \geq M, \quad \Sigma = [\Sigma_1, \mathbf{0}], \quad N \leq M, \quad (1.96)$$

где Σ_1 – диагональная матрица с действительными неотрицательными *сингулярными значениями* λ_j , ранжированными по убыванию. Прямыми вычислениями можно убедиться, что если (1.95) определяет SVD-разложение матрицы X , то тогда POD моды соответствуют колонкам матрицы U , а собственные значения в (1.92) выражаются как $\sigma_i = \lambda_i^2 / M$:

$$\frac{1}{M} X X^T \boldsymbol{\eta}_i = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \lambda_j \lambda_k \boldsymbol{\eta}_j \mathbf{v}_j^T \mathbf{v}_k \boldsymbol{\eta}_k^T \boldsymbol{\eta}_i = \frac{1}{M} \lambda_i^2 \boldsymbol{\eta}_i, \quad (1.97)$$

поскольку $\boldsymbol{\eta}_j$ и $\boldsymbol{v}_j$ – ортогональные наборы векторов. Таким образом, колонки $\boldsymbol{\eta}_i$ матрицы U (*левые сингулярные векторы*) являются собственными функциями (POD модами) в (1.92) с собственными значениями λ_i^2/M . В свою очередь, *правые сингулярные векторы* $\boldsymbol{v}_j$ связаны с временными коэффициентами a_j , введенными в (1.77).

Преобразование Фурье и цилиндрическая система координат

Важной особенностью многих модельных задач в турбулентности является однородность некоторых характеристик вдоль одного из направлений в пространстве. Так, к примеру, если рассматривать турбулентное течение в плоском канале, то некоторый тензор двухточечных корреляций $R(x, x')$ будет зависеть только от расстояния между двумя точками вдоль однородной координаты x , т.е. $R(x, x') = R(x - x')$, что определяется трансляционной симметрией в задаче. Тогда выражение (1.84) принимает вид

$$\int R(x - x')\eta(x')dx' = \sigma\eta(x). \quad (1.98)$$

Можно провести замену переменной $\xi = x - x'$ и разделить правую и левую часть на $\eta(x)$ [121], получим

$$\int R(\xi) \left[\frac{\eta(\xi + x)}{\eta(x)} \right] d\xi = \sigma. \quad (1.99)$$

Функция в квадратных скобках не должна зависеть от x , поскольку правая часть уравнения представляет собой константу. Очевидно, что единственной функцией с такими свойствами является зависимость $\eta(x) \propto e^{ikx}$. Таким образом, зависимость от координаты вдоль однородного направления определяется разложением Фурье вдоль этого направления, которое совпадает с POD модами.

В данной работе геометрия струйных течений обладает круговой симметрией относительно азимутального направления ϕ . Если трехмерная постановка задачи (1.84) имеет вид

$$\int_V \langle \boldsymbol{u}(x, r, \phi, t) \boldsymbol{u}(x', r', \phi', t) \rangle \eta(x', r', \phi') dV' = \sigma \eta(x, r, \phi), \quad (1.100)$$

то, используя предварительное преобразование Фурье поля скорости

$$\boldsymbol{u}^m(x, r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{u}(x, r, \phi, t) e^{-im\phi} d\phi, \quad (1.101)$$

получим задачу на собственные значения для азимутального волнового числа m

$$\int_V \langle \boldsymbol{u}^m(x, r, t) \boldsymbol{u}^m(x', r', t) \rangle \eta^m(x', r') r' dx' dr' = \sigma^m \eta^m(x, r). \quad (1.102)$$

Стоит отметить, что под интегралом из-за якобиана преобразования системы координат появляется дополнительный множитель r' , который портит свойство симметрии корреляционной матрицы. Для того чтобы применить описанный выше подход, домножим обе части уравнения (1.102) на $r^{1/2}$:

$$\int_V \langle r^{1/2} \mathbf{u}^m(x, r, t) \mathbf{u}^m(x', r', t) r'^{1/2} \rangle \underbrace{r'^{1/2} \eta^m(x', r')}_{\widetilde{\eta}^m} dx' dr' = \sigma^m \underbrace{r^{1/2} \eta^m(x, r)}_{\widetilde{\eta}^m}. \quad (1.103)$$

Таким образом, если предварительно домножить мгновенные поля скорости на $r^{1/2}$, то подынтегральное выражение снова станет симметричным. Однако, получаемые собственные функции $\widetilde{\eta}^m$ будут также иметь множитель $r^{1/2}$, который необходимо учесть для получения искомым POD мод $\eta^m(x, r)$.

Удобный вид представления результатов POD разложения

Поскольку обычно разложение POD производится от поля пульсаций скорости, тогда информация о кинетической энергии турбулентности в представлении (1.77) заключается во временных коэффициентах a_i . Однако, кажется более удобным использовать непосредственно представление (1.95) для декомпозиции скорости:

$$\mathbf{u}_i^m(r, x) = \mathbf{u}(r, x, m, t_i) = \sum_{q=1}^M a_q^m(t_i) \lambda_q^m \mathbf{v}_q^m(r, x), \quad (1.104)$$

где учтено, что к полю скорости предварительно применяется преобразование Фурье по ϕ (1.101). Помимо условия ортонормированности на собственные функции, применим его и к временным коэффициентам

$$2\pi \int \mathbf{v}_i^m(r, x) \mathbf{v}_j^{m*}(r, x) r dr dx = V \delta_{ij}, \quad \sum_{n=1}^N a_i^m(t_n) a_j^{m*}(t_n) = N \delta_{ij}, \quad (1.105)$$

тогда информация о турбулентной кинетической энергии будет даваться непосредственно собственными значениями λ_q^m . Интегрированная по рассматриваемому объему турбулентная кинетическая энергия соответствующей моды равна $(\lambda_q^m)^2/2$.

1.6. Локальный анализ устойчивости линеаризованных уравнений

В предыдущей секции был описан широко распространенный метод POD для выделения когерентной компоненты движения в турбулентном потоке. Однако, более традиционным подходом является расширение линейного анализа устойчивости на случай турбулентных потоков. Идея заключается в том, что, решая линеаризованные уравнения типа Орра–Зоммерфельда, где в качестве основного течения используется осредненное по времени

поле скорости $\bar{\mathbf{u}}$, можно получить наиболее неустойчивые решения, соответствующие когерентной компоненте скорости. Стоит отметить, что хоть при таком подходе и используются линеаризованные уравнения, информация о нелинейных взаимодействиях между вихревыми структурами с различными частотами и размерами содержится в $\bar{\mathbf{u}}$. Кроме того, обычно используется гипотеза турбулентной вязкости для параметризации мелкомасштабной турбулентности. Однако, изложим для начала постановку задачи для ламинарного течения.

Рассмотрим безразмерную систему уравнений Навье – Стокса для несжимаемой жидкости в цилиндрической системе координат (x, r, ϕ) , где $\mathbf{u} = (u_x, u_r, u_\phi)$:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} = 0, \quad (1.106)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \phi} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u_x, \quad (1.107)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_r}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{u_\phi}{\partial \phi} \right), \quad (1.108)$$

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_\phi}{\partial x} + u_r \frac{u_\phi}{r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} - \frac{u_r u_\phi}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{1}{Re} \left(\nabla^2 u_\phi - \frac{u_\phi}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{u_r}{\partial \phi} \right), \quad (1.109)$$

при этом оператор Лапласа имеет вид

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (1.110)$$

Представим поле скорости и давление в виде суммы “точного” решения и его возмущения:

$$u_x = U + u, \quad u_r = V + v, \quad u_\phi = W + w, \quad p = Q + q. \quad (1.111)$$

Для того, чтобы из системы дифференциальных уравнений в частных производных перейти к обыкновенным дифференциальным уравнениям, стандартным предположением является приближение плоскопараллельного течения, которое предполагает, что характеристики потока очень медленно меняются вдоль продольной координаты x . Это позволяет представить искомые функции возмущений скорости и давления в виде суперпозиции волн:

$$(u, v, w, q) = (F(r), iG(r), H(r), P(r))e^{i(kx+m\phi-\omega t)}. \quad (1.112)$$

Здесь комплексные амплитуды возмущений F, G, H, P зависят только от r , k – комплексное волновое число в продольном направлении, m – вещественное азимутальное волновое число, ω – комплексная угловая частота. После подстановки (1.111) и (1.112) в уравнения движения (1.106)–(1.109) и линеаризации в приближении малости амплитуды возмущения, получим

систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$kF + G' + \frac{G}{r} + \frac{mH}{r} = 0, \quad (1.113)$$

$$-\frac{F''}{Re} + \left(V - \frac{1}{Re} \frac{1}{r}\right)F' + \left(-i\omega + \frac{imW}{r} + ikU + \frac{1}{Re}\left(\frac{m^2}{r^2} + k^2\right)\right)F +$$

$$+ iU'G + ikP = 0, \quad (1.114)$$

$$-\frac{iG''}{Re} + i\left(V - \frac{1}{Re} \frac{1}{r}\right)G' + \left(\omega + iV' - \frac{mV}{r} - kW + \frac{i}{Re}\left(\frac{m^2 + 1}{r^2} + k^2\right)\right)G +$$

$$+ \left(\frac{1}{Re} \frac{2im}{r^2} - \frac{2V}{r}\right)H + P' = 0, \quad (1.115)$$

$$-\frac{H''}{Re} + \left(V - \frac{1}{Re} \frac{1}{r}\right)H' + \left(-i\omega + \frac{imW}{r} + ikU + \frac{V}{r} + \frac{1}{Re}\left(\frac{m^2 + 1}{r^2} + k^2\right)\right)H +$$

$$+ \left(iW' + \frac{1}{Re} \frac{2m}{r^2} + \frac{iW}{r}\right)G + \frac{imP}{r} = 0. \quad (1.116)$$

Функции задачи меняются по r от нуля до бесконечности. Систему уравнений (1.113)–(1.116) необходимо дополнить соответствующими граничными условиями.

$$|m| > 1$$

$$F(\infty) = G(\infty) = H(\infty) = P(\infty) = 0, \quad (1.117)$$

$$F(0) = G(0) = H(0) = P(0) = 0. \quad (1.118)$$

$$|m| = 1$$

$$\begin{cases} F(0) = P(0) = 0, \\ G(0) + mH(0) = 0, \\ 2G'(0) + mH'(0) = 0. \end{cases} \quad (1.119)$$

$$m = 0$$

$$\begin{cases} G(0) = H(0) = 0, \\ F'(0) = P'(0) = 0. \end{cases} \quad (1.120)$$

Для учета турбулентных пульсаций используется гипотеза турбулентной вязкости, при которой число Рейнольдса в приведенных выше уравнениях заменяется некоторым эффективным:

$$\frac{1}{Re_{eff}} = \frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t}, \quad (1.121)$$

при этом турбулентное число Рейнольдса (турбулентная вязкость) определяется согласно гипотезе Буссинеска:

$$\frac{1}{Re_t} = -\overline{u'v'} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^{-1}. \quad (1.122)$$

Метод коллокаций и полиномы Чебышева

Основная идея этого метода заключается в том, чтобы разложить искомые функции задачи (F, G, H, P) по некоторым известным полиномам с неизвестными коэффициентами. Тогда система обыкновенных дифференциальных уравнений превращается в систему алгебраических уравнений на неизвестные коэффициенты, что позволяет искать решения при помощи методов линейной алгебры. В качестве базиса были выбраны полиномы Чебышева, которые задаются выражением

$$T_n(\xi) = \cos \left(n \cos^{-1} \xi \right), \quad (1.123)$$

где T_n – полином порядка n , который зависит от переменной $-1 \leq \xi \leq 1$. Дискретизация производится в так называемых точках Чебышева–Гаусса–Лобатто, задаваемых правилом:

$$\xi_j = \cos \frac{\pi j}{N}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (1.124)$$

где N – это индекс полинома самого высокого порядка. Поскольку областью определения является интервал $-1 \leq \xi \leq 1$, для струйных течений в цилиндрической геометрии обычно делается следующее преобразование координат

$$r(\xi_j) = c_1 \frac{1 - \xi}{c_2 + \xi}, \quad \text{при этом } c_2 = 1 + \frac{2c_1}{r_{\max}}, \quad (1.125)$$

которое переводит отрезок в ξ -пространстве в отрезок $0 \leq r \leq r_{\max}$. Выпишем разложения функций задачи $f = (F, G, H, P)$ в виде

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(\xi). \quad (1.126)$$

Используя известные рекуррентные соотношения для полиномов Чебышева в точках коллокации можно получить соотношения на первые и вторые производные:

$$\left(\frac{df}{d\xi} \right)_j = \sum_{n=0}^N A_{jn} f_n, \quad \left(\frac{d^2 f}{d\xi^2} \right)_j = \sum_{n=0}^N B_{jn} f_n, \quad (1.127)$$

где коэффициенты определяются соотношениями:

$$\begin{cases} A_{jn} = \frac{\bar{C}_j}{\bar{C}_n} \frac{(-1)^{j+n}}{\xi_j - \xi_n}, \\ A_{jj} = \frac{-\xi_j}{2(1-\xi_j^2)}, \\ A_{00} = \frac{2N^2+1}{6} = -A_{NN}, \end{cases} \quad (1.128)$$

при этом

$$\bar{C}_0 = \bar{C}_N = 2, \quad \bar{C}_j = 1, \quad 1 \leq j \leq N-1, \quad (1.129)$$

$$B_{jn} = A_{jn} A_{jn}. \quad (1.130)$$

Подставляя разложения (1.126), (1.127) в систему уравнений (1.113)–(1.116) получим систему алгебраических уравнений:

$$kF_j + \left(\frac{d\xi}{dr}\right)_j \sum_{n=0}^N A_{jn}G_n + \frac{1}{r_j}G_j + \frac{m}{r_j}H_j = 0, \quad (1.131)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2\xi}{dr^2}\right)_j \sum_{n=0}^N B_{jn}F_n + \left(\frac{1}{r_j} - \text{Re}V_j\right)\left(\frac{d\xi}{dr}\right)_j \sum_{n=0}^N A_{jn}F_n + \\ & + \left(i\text{Re}\omega - \frac{i\text{Re}mW_j}{r_j} - \frac{m^2}{r_j^2}\right)F_j - ik\text{Re}U_jF_j - \\ & - ik\text{Re}P_j + i\text{Re}\left(\frac{dU}{dr}\right)_j - k^2F_j = 0, \end{aligned} \quad (1.132)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2\xi}{dr^2}\right)_j \sum_{n=0}^N B_{jn}G_n + \left(\frac{1}{r_j} - \text{Re}V_j\right)\left(\frac{d\xi}{dr}\right)_j \sum_{n=0}^N A_{jn}G_n + \\ & + \left(i\text{Re}\omega - \text{Re}\left(\frac{dV}{dr}\right)_j - \frac{i\text{Re}mW_j}{r_j} - \frac{m^2+1}{r_j^2}\right)G_j - \\ & - \left(\frac{2m}{r_j^2} + \frac{2i\text{Re}W_j}{r_j}\right)H_j + i\text{Re}\left(\frac{d\xi}{dr}\right)_j \sum_{n=0}^N A_{jn}P_n - \\ & - ik\text{Re}U_jG_j - k^2G_j = 0, \end{aligned} \quad (1.133)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2\xi}{dr^2}\right)_j \sum_{n=0}^N B_{jn}H_n + \left(\frac{1}{r_j} - \text{Re}V_j\right)\left(\frac{d\xi}{dr}\right)_j \sum_{n=0}^N A_{jn}H_n + \\ & + \left(i\text{Re}\omega - \frac{i\text{Re}mW_j}{r_j} - \frac{\text{Re}V_j}{r_j} - \frac{m^2+1}{r_j^2}\right)H_j - \\ & - \left(\text{Re}\left(\frac{dW}{dr}\right)_j + \frac{2m}{r_j^2} + \frac{2i\text{Re}W_j}{r_j}\right)G_j - \\ & - \frac{i\text{Re}m}{r_j}P_j - ik\text{Re}U_jH_j - k^2H_j = 0. \end{aligned} \quad (1.134)$$

В данной работе используется только пространственный анализ устойчивости. Поскольку в системе уравнений (1.131)–(1.134) имеются слагаемые пропорциональные k^2 , применяется следующее переобозначение для линеаризации системы:

$$\begin{cases} \tilde{F} = kF, \\ \tilde{G} = kG, \\ \tilde{H} = kH. \end{cases} \quad (1.135)$$

Таким образом, задачу на собственные значения можно записать в виде:

$$D_1X = kD_2X, \quad \text{где } X = [F, G, H, P, \tilde{F}, \tilde{G}, \tilde{H}]^T. \quad (1.136)$$

После дискретизации получаются матрицы коэффициентов D_1 и D_2 , которые имеют размерность $(7 \times (N+1))^2$. При формировании матриц D_1 и D_2 строки, соответствующие алгебраи-

ческим уравнениям в граничных точках, были замены на граничные условия (1.117)–(1.120), таким образом, 14 последних строк матрицы D_1 и D_2 содержали граничные условия. Обобщенная задача на собственные значения решалась с использованием QZ алгоритма. Более подробную информацию о формировании матриц в задаче на собственные значения и о процедуре ее решения можно найти в работах [122, 123]. Этот метод был реализован в среде MATLAB и протестирован на ряде модельных задач [124].

Глава 2

Дальнее поле затопленной струи

2.1. Введение

В данной главе теоретически рассматривается ряд вопросов, касающихся струйных течений жидкости или газа в неограниченном объеме. Такие течения принадлежат к классу свободных сдвиговых потоков и реализуются в широком спектре фундаментальных и практических задач, имеющих принципиальное значение для жизнедеятельности человека. Классическая струйная задача представляет собой задачу об истечении жидкости из локализованного источника (сопла) в неограниченное пространство, затопленное той же жидкостью (см. рис. 2.1). Крайне важной является информация о распределении в пространстве поля скорости, а также температуры или концентрации примеси, индуцированной жидкостью из источника. Область около источника называется ближнем полем струи, характеристики которого зависят от геометрии соплового устройства. Необходимо выделить также дальнюю область струи, где характеристики течения определяются “интенсивностью” (точечного) источника, а именно одним скаляром – количеством массы и двумя векторами – импульсом и моментом импульса, индуцированного истекающей в пространство жидкостью. Данная глава посвящена изучению связи между законами сохранения упомянутых величин и характеристиками струйного течения в дальней области. Полученные результаты позволили впервые указать на различия в эффекте “памяти” дальнего поля струи о характеристиках ближней к соплу области между ламинарным и турбулентным режимом течения. Кроме того, рассмотрен вопрос гидродинамической устойчивости ламинарного режима течения к бесконечно малым возмущениям с полным учётом расширения потока, что позволило впервые получить хорошее согласие с экспериментальными данными, касающееся места ламинарно-турбулентного перехода.

Теория затопленных струй во многом опирается на автомодельные решения как полных уравнений Навье – Стокса, так и полученных в приближении пограничного слоя. Анализ обычно начинается с соображений размерности, из которых следует функциональная зависимость поля скорости или функции тока от вязкости жидкости и расстояния от бесконечно малого источника движения (x в цилиндрической или R в сферической системе координат), поскольку характерный масштаб в такой постановке задачи отсутствует. Шлихтинг (1933) [125] рассмотрел задачу об истечении струи из малого круглого отверстия и малой бесконечно

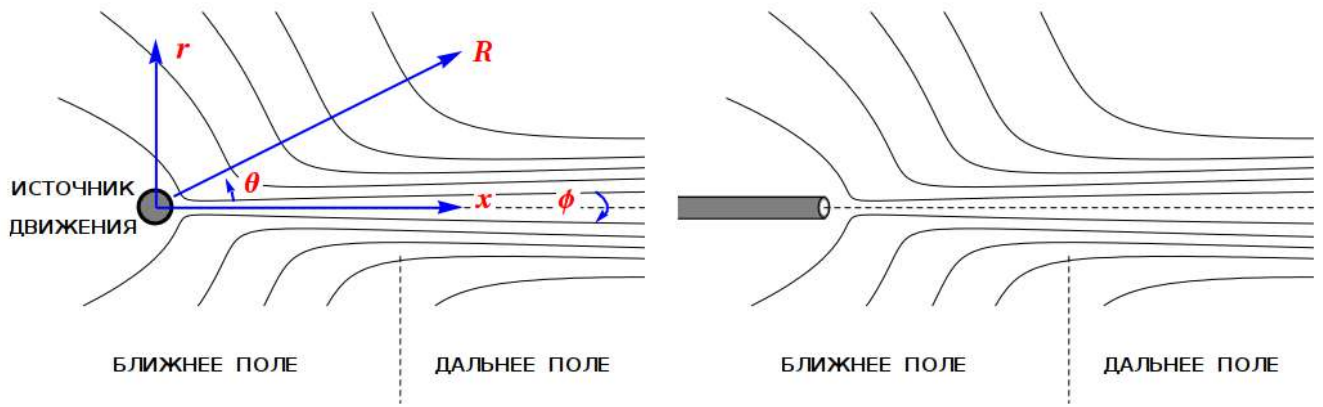


Рисунок 2.1. Слева показано идеализированное представление осесимметричного струйного течения (линии тока), вызванного локализованным источником движения, и система координат (сферическая и цилиндрическая). Справа продемонстрирована одна из реализаций такого течения – струя жидкости, вытекающая из длинной трубы в затопленное пространство

протяженной щели в плоской стенке, что соответствует двум задачам об осесимметричной и плоской струе. Решение для плоской струи носит имя Бикли, поскольку именно он получил аналитическое решение соответствующих уравнений в рамках приближения пограничного слоя (Бикли, 1937 [126]), в то время как Шлихтинг интегрировал обыкновенные дифференциальные уравнения численно. Если для решения Бикли продольная скорость убывает как $x^{-1/3}$, что приводит к постоянному потоку продольной компоненты полного импульса через плоскость, перпендикулярную течению, и возрастанию общей массы жидкости за счет вовлечения, то для родственного класса автомодельных решений Джеффри (1915) [127] и Гамеля (1916) [128] двумерной задачи о течении между двумя плоскими стенками, наклоненными друг к другу под некоторым углом, радиальная скорость падает как r^{-1} в цилиндрической системе координат, что определяется законом сохранения массы. В трехмерной постановке Слезкин (1934) [129] получил обыкновенное дифференциальное уравнение для полных уравнений Навье – Стокса для осесимметричной задачи. Тем не менее, решение, соответствующее струйному течению от точечного источника импульса, обычно ассоциируется с именем Ландау, потому что он получил аналитическое решение и дал его физическое толкование (Ландау, 1944 [130]; Ландау и Лифшиц, 1986 [80]). Чуть позже независимо такое же решение получил Сквайр (1951) [131].

Приведем для удобства систему уравнений Навье – Стокса в сферической системе ко-

ординат (R, θ, ϕ) , где вектор скорости имеет компоненты $\mathbf{u} = (u_R, u_\theta, u_\phi)$:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial(R^2 u_R)}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} = 0, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_R}{\partial t} + u_R \frac{\partial u_R}{\partial R} + \frac{u_\theta}{R} \frac{\partial u_R}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{R \sin \theta} \frac{\partial u_R}{\partial \phi} - \frac{u_\theta^2 + u_\phi^2}{R} = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R} + \nu \left(\nabla^2 u_R - \frac{2u_R}{R^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2u_\theta \cot \theta}{R^2} - \frac{2}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_R \frac{\partial u_\theta}{\partial R} + \frac{u_\theta}{R} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{R \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{u_R u_\theta}{R} - \frac{u_\phi^2 \cot \theta}{R} = \\ & = -\frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{R^2} \frac{\partial u_R}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{R^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cot \theta}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_R \frac{\partial u_\phi}{\partial R} + \frac{u_\theta}{R} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{R \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_R u_\phi}{R} + \frac{u_\theta u_\phi \cot \theta}{R} = \\ & = -\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \nu \left(\nabla^2 u_\phi + \frac{2}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial u_R}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{R^2 \sin^2 \theta} + \frac{2 \cot \theta}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где оператор Лапласа имеет вид:

$$\nabla^2 = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (2.5)$$

Далее для полноты представления мы кратко изложим суть *решения Ландау* (решение Слэзкина – Ландау – Сквайра) и другие уже известные соотношения. Размерность скорости можно получить единственным способом – при помощи комбинации ν/R , потому что в стационарной постановке задачи отсутствует характерная длина, где ν – это кинематическая вязкость жидкости, которая имеет размерность $[m^2/c]$. Для осесимметричного незакрученного струйного ламинарного течения компоненты поля скорости в сферической системе координат можно представить следующим образом:

$$u_R = \frac{\nu}{R} F(\theta), \quad u_\theta = \frac{\nu}{R} f(\theta), \quad u_\phi = 0, \quad (2.6)$$

где F и f есть безразмерные функции только угловой переменной. Подставляя выписанное автомодельное представление поля скорости в уравнение неразрывности (2.1), получим однозначную связь между функциями F и f . Дальнейшая подстановка поля скорости в уравнения Навье – Стокса дает нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение на f четвертого порядка. Стоит отметить, что в ходе алгебраических преобразований исключается функция давления, которая зависит от R как R^{-2} . Таким образом, все слагаемые в уравнении Навье – Стокса пропорциональны R^{-3} , что и позволяет получить обыкновенные дифференциальные уравнения вместо уравнений в частных производных. Имеется аналитическое решение, найденное Ландау, которое удовлетворяет условиям ограниченности поля скорости в области течения (отсутствие особенностей по θ):

$$f = -\frac{2 \sin \theta}{A - \cos \theta}, \quad F = 2 \left(\frac{A^2 - 1}{(A - \cos \theta)^2} - 1 \right), \quad (2.7)$$

где параметр $A > 1$ характеризует “интенсивность” струи и будет определен ниже. В начале координат ($R = 0$) поле скорости (2.6) имеет особенность, которая и определяет решение. Тогда закон сохранения массы для стационарного течения можно выписать в следующем виде:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = Q\delta(R), \quad (2.8)$$

где Q характеризует величину источника массы (объемный расход) в начале координат, δ обозначает дельта-функцию. Интегрируя выражение (2.8) по некоторому объему, ограниченному сферой произвольного радиуса R с центром в начале координат, получим

$$\int_V \frac{\partial u_j}{\partial x_j} dV = \int_S u_j n_j dS = Q, \quad (2.9)$$

где мы перешли от интегрирования по объему к интегрированию по поверхности при помощи теоремы Остроградского – Гаусса. Для сферы радиуса R с центром в начале координат площадь поверхности выражается как $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$ и имеется только одна компонента вектора нормали n_R . Выражение (2.9) преобразуется как

$$\int_S u_j n_j dS = \int_S u_R n_R R^2 \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi \nu R \int_0^\pi 2 \left(\frac{A^2 - 1}{(A - \cos \theta)^2} - 1 \right) \sin \theta d\theta = Q, \quad (2.10)$$

где интегрирование по углу θ (выделено синим) дает тождественный нуль. Таким образом, решению Ландау соответствует течение с нулевым источником массы Q в начале координат. Отметим, что согласно выражению (2.10) до подстановки решения Ландау видно, что радиальная компонента скорости должна убывать как R^{-2} для того, чтобы Q не имела зависимость от радиуса, а выражалась только через интеграл по углу. *Ненулевое значение Q получается при учёте неавтономной поправки к решению Ландау как будет описано ниже.*

Аналогично можно определить величину источника импульса $\mathbf{P}$, заданного в начале координат:

$$\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} = P_i \delta(R), \quad (2.11)$$

где уравнение в левой части соответствует закону сохранения импульса в стационарной постановке, а

$$\Pi_{ij} = \rho u_j u_i + p \delta_{ij} - \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.12)$$

есть компоненты тензора полного потока импульса, p обозначает поле давления. Тогда

$$\int_V \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} dV = \int_S \Pi_{ij} n_j dS = P_i. \quad (2.13)$$

Очевидно, что вследствие осевой симметрии $\mathbf{P}$ имеет только одну ненулевую компоненту вдоль оси x . Вспоминая, что интегрирование происходит по поверхности сферы, получим

$$\int_S \Pi_{xj} n_j dS = \int_S \Pi_{xR} n_R dS = P_x. \quad (2.14)$$

Используя соотношение $\Pi_{xR} = \Pi_{RR} \cos \theta - \Pi_{\theta R} \sin \theta$ и то, что для решения Ландау $\Pi_{\theta R} = 0$, запишем

$$\int_S \Pi_{xR} n_R dS = 2\pi R^2 \int_0^\pi \Pi_{RR} \cos \theta \sin \theta d\theta = P_x. \quad (2.15)$$

При подстановке решения Ландау в рассматриваемую компоненту тензора имеем

$$\Pi_{RR} = \frac{4\rho\nu^2}{R^2} \left(\frac{(A^2 - 1)^2}{(A - \cos \theta)^4} - \frac{A}{A - \cos \theta} \right), \quad (2.16)$$

что приводит после интегрирования к

$$P_x = 16\pi\rho\nu^2 A \left(1 + \frac{4}{3(A^2 - 1)} - \frac{A}{2} \ln \frac{A + 1}{A - 1} \right). \quad (2.17)$$

Как уже отмечалось ранее, параметр A меняется от ∞ до 1, что соответствует монотонному изменению P_x от 0 до ∞ . Таким образом, решение Ландау соответствует струйному течению вызванному точечным источником нулевой массы и ненулевого импульса. Линии тока для решения с параметром $A = 1.01$ изображены на рис. 2.1.

Как отмечено Ландау и Лифшицем в [80]: “Полученное здесь решение является точным для струи, рассматриваемой как бьющая из точечного источника. Если учитывать конечные размеры отверстия трубки, то это решение представляет собой первый член разложения по степеням отношения размеров отверстия к расстоянию R от него. С этим обстоятельством связан тот факт, что если вычислить по полученному решению полный поток жидкости, проходящий через замкнутую поверхность вокруг начала координат, то он окажется равным нулю (см. выражение (2.10)). Отличный от нуля поток получился бы при учёте следующих членов разложения по указанному отношению [132]”. Согласно вышесказанному, асимптотическое разложение поля скорости и давления при $R \rightarrow \infty$ можно выписать в следующем виде:

$$\mathbf{u} = \underbrace{\frac{\nu}{R} \mathbf{u}_L(\theta)}_{P_x} + \underbrace{\frac{\nu R_0}{R^2} \mathbf{u}_{Ru}(\theta)}_Q + o(R^{-2}), \quad \frac{p}{\rho} = \frac{\nu^2}{R^2} p_L(\theta) + \frac{\nu^2 R_0}{R^3} p_{Ru}(\theta) + o(R^{-3}), \quad (2.18)$$

где $\mathbf{u}_L$ и p_L – безразмерные функции переменной θ , которые соответствуют решению Ландау, а $\mathbf{u}_{Ru}$ и p_{Ru} – решению Румера (1952) [132] (выделено синим), R_0 – размер отверстия трубки, из которой истекает струя, что делает данный подход неавтомоделным. Неавтомоделные

члены разложения по степеням R_0/R определяются из уравнений Навье – Стокса, *линеаризованных* около точного решения в предположении $R_0 \ll R$. Однако, решение этих уравнений для выражения (2.18), полученное Румером, содержит особенность на оси симметрии в случае $Q \neq 0$. Данное противоречие было устранено Гольдштиком и Яворским (1986) [133] (смотри также [134, 135]), которые показали, что радиальная компонента вектора скорости должна также включать слагаемое пропорциональное $R^{-2} \ln R$ (выделено синим):

$$\mathbf{u} = \underbrace{\frac{\nu}{R} \mathbf{u}_L(\theta)}_{P_x} + \underbrace{\frac{\nu R_0}{R^2} \mathbf{u}_{Ru}(\theta)}_Q + \underbrace{\frac{\nu R_0}{R^2} \mathbf{u}_Y(\theta) \ln \frac{R}{R_0}}_Q + o(R^{-2}), \quad (2.19)$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\nu^2}{R^2} p_L(\theta) + \frac{\nu^2 R_0}{R^3} p_{Ru}(\theta) + \frac{\nu^2 R_0}{R^3} p_Y(\theta) \ln \frac{R}{R_0} + o(R^{-3}), \quad (2.20)$$

что следует из решения соответствующей спектральной задачи для возмущения решения Ландау с произвольной степенной зависимостью от R . Аналогичные результаты были позже получены в работе [136].

Стоит отметить, что до сих пор мы обсуждали только закон сохранения массы и импульса. Существует также независимый закон сохранения момента импульса, который можно получить из (2.11) при помощи свойств симметрии тензора Π_{ij} , который выражается следующим образом:

$$\frac{\partial K_{ij}}{\partial x_j} = L_i \delta(R), \quad K_{ij} = \epsilon_{ikm} x_k \Pi_{mj}, \quad (2.21)$$

где K_{ij} – компоненты тензора потока момента импульса, ϵ_{ikm} – компоненты тензора Леви – Чивиты, $\mathbf{L}$ – вектор момента количества движения, заданного в начале координат. Очевидно, что, к примеру, закрученная струя имеет $L_x \neq 0$, для чего требуется дополнительное слагаемое в представлении (2.19) в виде $\nu R_0 \mathbf{u}_Z(\theta)/R^2$, которое имеет ненулевую азимутальную компоненту скорости. Такое решение было найдено Цуккером (1955) [137] для полных уравнений и Лойцянским (1953) [138] в приближении пограничного слоя. Общее решение в виде бесконечного ряда для неосесимметричных струй было выписано Яворским (1988) [139]. В данной главе ищется представление поля скорости и давления, соответствующее ненулевым значениям L_y и L_z .

2.2. Ламинарная струя

¹Рассмотрим течение, вызванное $\mathbf{P} \neq 0$ в начале координат, направленным вдоль оси x , $Q \neq 0$ и вектором $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$, имеющим в декартовой системе координат все три ненулевые компоненты. В соответствии с результатами, описанными в предыдущем параграфе,

¹ См. работу [15] в разделе “Публикации по теме диссертации”

будем искать поле скорости и давление с учётом неосесимметричных слагаемых (выделены синим), содержащих азимутальный угол ϕ , в следующем виде:

$$\mathbf{u} = \underbrace{\frac{\nu}{R}\mathbf{u}_L(\theta)}_{P_x} + \underbrace{\frac{\nu R_0}{R^2}\mathbf{u}_{Ru}(\theta)}_Q + \underbrace{\frac{\nu R_0}{R^2}\mathbf{u}_Y(\theta) \ln \frac{R}{R_0}}_Q + \underbrace{\frac{\nu R_0}{R^2}\mathbf{u}_Z(\theta)}_{L_x} + \underbrace{\frac{\nu R_0}{R^2}\mathbf{u}_M(\theta, \phi)}_{L_y, L_z} + o(R^{-2}), \quad (2.22)$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\nu^2}{R^2}p_L(\theta) + \frac{\nu^2 R_0}{R^3}p_{Ru}(\theta) + \frac{\nu^2 R_0}{R^3}p_Y(\theta) \ln \frac{R}{R_0} + \frac{\nu^2 R_0}{R^3}p_Z(\theta) + \frac{\nu^2 R_0}{R^3}p_M(\theta, \phi) + o(R^{-3}), \quad (2.23)$$

где безразмерные функции для скорости и давления с нижними индексами соответствуют описанным в предыдущем параграфе решениям. Исследуются слагаемые $\mathbf{u}_M(\theta, \phi)$ и $p_M(\theta, \phi)$, которые физически соответствуют струе, вытекающей из неосесимметричного сопла.

Компоненты поля скорости и давление удобно представить в следующем виде:

$$u_r = -\frac{\nu}{R_0} \left(\underbrace{y'(\psi) \frac{R_0}{R}}_{\text{Ландау}} + \underbrace{v'(\psi) \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \ln \frac{R}{R_0}}_{\text{Яворский и Румер}} + \underbrace{w'(\psi) \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 + f(\psi) \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \cos(\phi - \phi_0)}_{\text{данная работа}} \right) \quad (2.24)$$

$$u_\theta = -\frac{\nu}{R_0 \sqrt{1 - \psi^2}} \left(\underbrace{y(\psi) \frac{R_0}{R}}_{\text{Ландау}} + \underbrace{v(\psi) \left(\frac{R_0}{R} \right)^2}_{\text{Яворский и Румер}} + \underbrace{F(\psi) \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \cos(\phi - \phi_0)}_{\text{данная работа}} \right), \quad (2.25)$$

$$u_\phi = \frac{\nu}{R_0 \sqrt{1 - \psi^2}} \left(\underbrace{\gamma(\psi) \left(\frac{R_0}{R} \right)^2}_{\text{Цуккер}} + \underbrace{F'(\psi) \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \sin(\phi - \phi_0)}_{\text{данная работа}} \right), \quad (2.26)$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\nu^2}{R_0^2} \left(g(\psi) \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 + h(\psi) \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \ln \frac{R}{R_0} + q(\psi) \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 + \underbrace{s(\psi) \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \cos(\phi - \phi_0)}_{\text{данная работа}} \right), \quad (2.27)$$

где используется переменная $\psi = \cos \theta$. Функции $y, v, w, f, F, g, h, q, s$ зависят только от ψ и будут определены ниже. Решение Слезкина–Ландау–Сквайра имеет следующий вид:

$$y(\psi) = 2 \frac{1 - \psi^2}{A - \psi}, \quad g(\psi) = 4 \frac{A\psi - 1}{(A - \psi)^2}, \quad (2.28)$$

где параметр A однозначно определяет величину импульса струи P_x , см. (2.17).

В следующем порядке разложения известны решения [132]:

$$v(\psi) = b_0 v_0(\psi), \quad v_0(\psi) = (1 - \psi^2) \frac{1 - A\psi}{A(A - \psi)^2}, \quad (2.29)$$

где параметр b_0 связан с величиной Q , но не посредством функции $v(\psi)$, потому что интеграл

$$\int_S u_j n_j dS = \int_S u_R n_R R^2 \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi \nu R_0 b_0 \ln \frac{R}{R_0} \int_1^{-1} v'(\psi) d\psi = 0, \quad (2.30)$$

так как, согласно (2.29), $v(\pm 1) = 0$. Ненулевой расход задается функцией $w(\psi)$ [133], которая определяется уравнением

$$\left((1 - \psi^2)(A - \psi)^2 w''(\psi) \right)' + 6(A^2 - 1)w'(\psi) = (A - \psi)^2 f_0(\psi), \quad (2.31)$$

где функция $f_0(\psi)$ появляется вследствие нелинейности уравнений Навье – Стокса и членов асимптотического разложения поля скорости пропорциональных R^{-1} и $R^{-2} \ln R$:

$$f_0(\psi) = b_0 \left(a - 2 \frac{3A^2 - 1}{A(A - \psi)} + 3 \frac{A^2 - 1}{(A - \psi)^2} - 8A \frac{A^2 - 1}{(A - \psi)^3} + 6 \frac{(A^2 - 1)^2}{(A - \psi)^4} \right). \quad (2.32)$$

Параметр a для удобства обозначает следующее выражение

$$a = - \frac{(5A^2 - 3) \left(4 - 6A^2 + 3A(A^2 - 1) \ln((A + 1)/(A - 1)) \right)}{A \left(10A - 6A^3 + 3(A^2 - 1)^2 \ln((A + 1)/(A - 1)) \right)}. \quad (2.33)$$

Таким образом, расход жидкости Q будет определяться интегралом

$$Q = \int_S u_j n_j dS = \int_S u_R n_R R^2 \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi \nu R_0 \int_1^{-1} w'(\psi) d\psi, \quad (2.34)$$

где последнее выражение можно получить, проинтегрировав уравнение (2.31) от -1 до 1 . Первое слагаемое в (2.31) даст нулевой вклад из-за множителя $(1 - \psi^2)$. В результате получим

$$Q = \frac{2\pi R_0 \nu b_0}{3(A^2 - 1) \left(7 - 3A^2 - a \left(A^2 + \frac{1}{3} \right) + 4A(A^2 - 1) \ln((A + 1)/(A - 1)) \right)}. \quad (2.35)$$

Выражение для расхода было получено без фактического решения уравнения (2.31). Однако, решение для $w(\psi)$ может быть найдено в виде квадратуры [133], обозначенной ниже $w_0(\psi)$, к которой необходимо прибавить нетривиальное решение полученного Румером однородного уравнения, содержащего произвольную постоянную c_0 :

$$w(\psi) = w_0(\psi) + c_0 v_0(\psi) \quad (2.36)$$

Параметр c_0 , вероятно, определяется интегралом сохранения недивергентного вида, что позволяет интерпретировать его как зависимость характеристик дальнего поля струи от ближайшей к источнику области. Мы вернемся к этому вопросу при обсуждении сравнения эффекта “памяти” ламинарных и турбулентных струй в дальнем поле.

Решение Цуккера [137] для ненулевой азимутальной скорости выглядит как

$$\gamma(\psi) = d_0 \frac{1 - \psi^2}{(A - \psi)^2}, \quad (2.37)$$

которое связано с L_x параметром d_0 . Интегрируя выражение (2.21), получим

$$L_x = \int_S K_{xR} n_R dS = \int_S (K_{RR} \cos \theta - K_{\theta R} \sin \theta) n_R dS. \quad (2.38)$$

Очевидно, что $K_{RR} = \epsilon_{Rkm} x_k \Pi_{mR}$ равно 0, потому что в сферической системе координат существует только $x_R = R$, поэтому $\epsilon_{RRm} = 0$. Компонента $K_{\theta R}$ равна $\epsilon_{\theta km} x_k \Pi_{mR} = \epsilon_{\theta R\phi} R \Pi_{\phi R}$.

Стоит обратить внимание, что $RdS \propto R^3$, в то время как компонента $\Pi_{\phi R} \propto R^{-3}$, линеаризованная на решении Ландау. Это позволяет получить интеграл

$$L_x = R^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Pi_{\phi R} \sin^2 \theta d\theta d\phi = 4\pi R_0 \rho \nu^2 d_0 \left(\frac{4}{3(A^2 - 1)} - 2 + A \ln \frac{A+1}{A-1} \right), \quad (2.39)$$

не зависящий от R .

Перейдем к компонентам L_y и L_z вектора момента импульса. Разложения (2.24)-(2.27) позволяют получить решение с ненулевыми тремя компонентами вектора $\mathbf{L}$ благодаря слагаемым пропорциональным функциям $f(\psi)$, $F(\psi)$ и $s(\psi)$ и первой гармонике Фурье по азимутальному углу ϕ . Некоторая фаза ϕ_0 , как будет показано ниже, задает соотношение между L_y и L_z . Уравнения, описывающие $f(\psi)$, $F(\psi)$ и $s(\psi)$, имеют следующий вид:

$$(1 - \psi^2)f'' - 2\psi f' - yf' - 3y'f - \frac{f + 2yF}{1 - \psi^2} - y''F + 3s = 0, \quad (2.40)$$

$$(1 - \psi^2)(F'' + s' - 2f') - 2\psi F' + 2F - yF' - 2y'F - \frac{F + 2\psi yF}{1 - \psi^2} = 0, \quad (2.41)$$

$$(1 - \psi^2)^2 F''' - (1 - \psi^2)(4\psi F'' + y'F' + yF'') + 2\psi yF' - F' - \frac{2\psi F}{1 - \psi^2} - 2f + s = 0. \quad (2.42)$$

Эта система имеет аналитическое решение

$$f(\psi) = \lambda_0 \sqrt{1 - \psi^2} \left(\frac{1}{A - \psi} + \frac{A^2 - 1}{(A - \psi)^2} - \frac{2(A^2 - 1)}{(A - \psi)^3} \right), \quad (2.43)$$

$$F(\psi) = \lambda_0 \frac{\sqrt{1 - \psi^2}}{A(A - \psi)}, \quad (2.44)$$

$$s(\psi) = 2\lambda_0 \sqrt{1 - \psi^2} \left(\frac{1}{A - \psi} + \frac{A}{(A - \psi)^2} - \frac{2(A^2 - 1)}{(A - \psi)^3} \right), \quad (2.45)$$

где λ_0 есть некоторый параметр, который будет определен ниже. Аналогично соотношениям (2.38) и (2.39), можно записать следующее

$$L_y = R^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\Pi_{\theta R} \sin \phi + \Pi_{\phi R} \cos \theta \cos \phi) \sin \theta d\theta d\phi, \quad (2.46)$$

$$L_z = - R^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\Pi_{\theta R} \cos \phi - \Pi_{\phi R} \cos \theta \sin \phi) \sin \theta d\theta d\phi, \quad (2.47)$$

что приводит к

$$L_y = -\Lambda \sin \phi_0, \quad L_z = \Lambda \cos \phi_0, \quad (2.48)$$

где

$$\Lambda = 8\pi R_0 \rho \nu^2 \lambda_0 \left(1 + 4 \left[3(A^2 - 1) - \frac{A}{2} \ln \frac{A+1}{A-1} \right]^{-1} \right). \quad (2.49)$$

Введем единичный вектор $\boldsymbol{\tau} = (-\sin \phi_0, \cos \phi_0, 0)$, лежащий в плоскости, ортогональной вектору $\boldsymbol{P}$. Вектор момента количества движения можно представить в компактном виде:

$$\boldsymbol{L} = \underbrace{\Lambda \boldsymbol{\tau}}_{\text{данная работа, } \phi_0, \lambda_0} + \underbrace{L_x \boldsymbol{e}_x}_{\text{Цуккер, } d_0}, \quad (2.50)$$

где $\boldsymbol{e}_x$ – единичный вектор, направленный вдоль оси x . Параметры ϕ_0 , λ_0 и d_0 полностью определяют амплитуду и направление вектора $\boldsymbol{L}$.

В данном пункте диссертации был исследован вопрос о роли законов сохранения и их связи с представлением поля скорости и давления для ламинарной затопленной струи от точечного источника. Найдена новая неавтономная поправка к точному решению Ландау, соответствующая ненулевым значениям L_y , L_z компонент вектора момента импульса. Физически это решение описывает струю, вытекающую из неосесимметричного сопла. И хотя практическая значимость найденного решения (и неавтономных поправок в целом) не является высокой, эти знания позволяют указать на тот факт, что дальнейшее поле ламинарной затопленной струи “помнит” о характеристиках ближней области посредством параметра c_0 (2.36), который появляется во *втором* порядке асимптотического разложения поля скорости в окрестности бесконечно удаленной точки ($R \rightarrow \infty$). В последней части данной главы подробно обсуждается, что характеристики потока около сопла определяют основной параметр дальнего поля турбулентной струи – угол ее раскрытия. Таким образом, эффект “памяти” проявляется уже в *первом* порядке ($\propto 1/R$) асимптотического разложения для турбулентного случая, на что указывает современная теория турбулентных струй, изложенная далее.

Отдельным вопросом является ламинарно-турбулентный переход и устойчивость ламинарной струи. Известны экспериментальные работы, в которых показано, что она теряет устойчивость при относительно низких числах Рейнольдса, однако, исчерпывающего ответа пока нет. Используя решение Ландау в качестве хорошего приближения дальнего поля реальных неавтономных затопленных струй в безграничном пространстве, в следующем пункте как раз исследуется вопрос гидродинамической устойчивости к бесконечно малым возмущениям.

2.3. Линейная устойчивость струи Ландау

²Различные аспекты теории гидродинамической устойчивости рассмотрены в классических монографиях Лина (1955) [3], Чандрасекхара (1961) [140], Бетчова и Криминале (1967) [141], Джозефа (1971) [142], Гершуни и Жуховицкого (1972) [143], Гольдштика

² См. работы [3,39] в разделе “Публикации по теме диссертации”

и Штерна (1977) [144], Дразина и Рейда (1981) [4], Юдовича (1984) [145], Шмида и Хеннингсона (2001) [5], Бойко и др. (2013) [146] помимо прочих. В теории устойчивости исследуется эволюция возмущений $\mathbf{v}$ некоторого ламинарного поля скорости $\mathbf{U}$, которое само является решением уравнений Навье – Стокса:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{v}, \quad (2.51)$$

тогда уравнение эволюции на возмущение скорости имеет вид:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + U_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \chi}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 v_i, \quad (2.52)$$

где χ обозначает возмущение давления. Можно получить уравнение на энергию возмущения

$$E_d = \frac{1}{2} \int_V v_i v_i dV, \quad (2.53)$$

если умножить уравнение (2.52) на v_i и проинтегрировать по некоторому объему V с соответствующими граничными условиями. Так называемое уравнение Рейнольдса – Орра выглядит следующим образом:

$$\frac{dE_d}{dt} = - \int_V \left[v_i v_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 \right] dV, \quad (2.54)$$

где первое слагаемое в правой части уравнения представляет собой обмен энергией между средним потоком и возмущением, а второе – вязкую диссипацию. Очевидно, что для роста некоторого возмущения, т.е. $\partial E_d / \partial t > 0$, необходимо, чтобы, помимо прочего, слагаемые под интегралом были разных знаков (в “среднем” по объему). Кроме того, стоит отметить, что скорость роста энергии возмущения $E_d^{-1} \partial E_d / \partial t$ не зависит от амплитуды возмущения [142]. Это наблюдение означает, что скорость роста возмущения с конечной амплитудой может в каждый момент времени быть найдено из эволюции бесконечно малого возмущения такой же формы. Таким образом, имеет смысл рассматривать линеаризованные относительно среднего потока уравнения (*линейный анализ*) и пренебречь вторым слагаемым в (2.52), что существенно упростит саму процедуру нахождения решения. Этот подход уже обсуждался во Введении и Главе 1 (пункт 1.6), где сформулирована стандартная математическая постановка задачи устойчивости в приближении плоскопараллельного течения. В данной же работе предлагается использовать глобальный автомодельный подход при полном учете расширения струи.

В классическом модальном (согласно терминологии, использованной во Введении) линейном невязком анализе устойчивости струйного осесимметричного течения Бэтчелора и

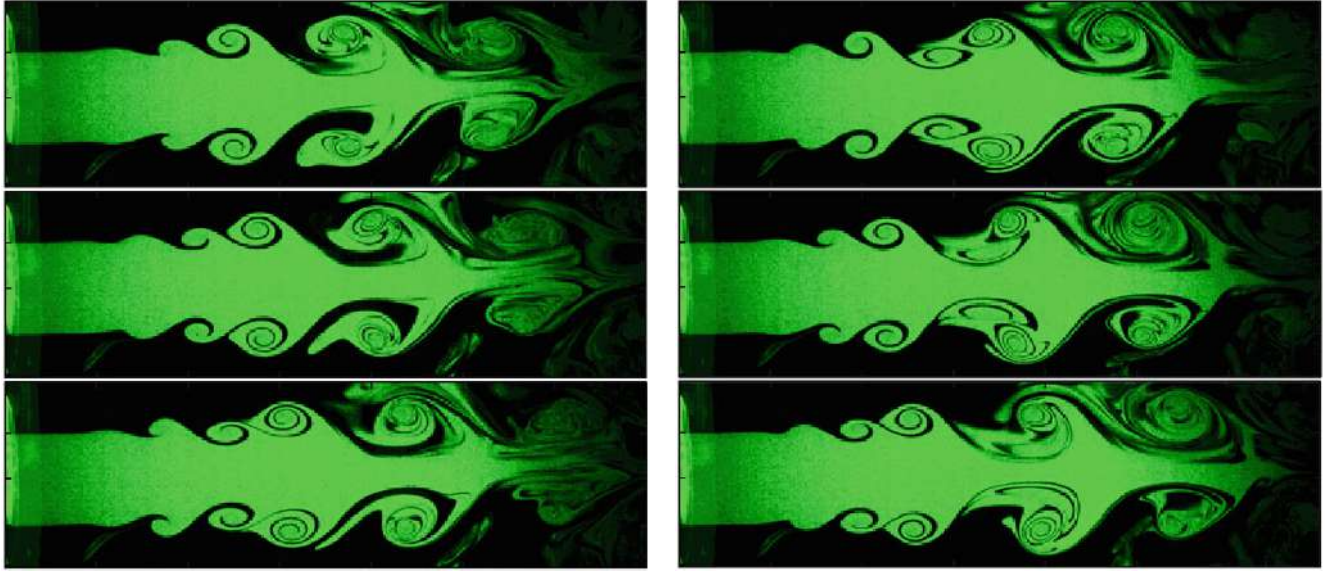


Рисунок 2.2. Визуализация осесимметричного потока воздуха, вытекающего из профилированного сопла при числе Рейнольдса 5000, построенном по его диаметру D ($= 25.4$ мм). Временной интервал между кадрами составляет 5 мс. Иллюстрации взяты из работы [147]

Гилла (1962) [148] было использовано предположение о плоскопараллельности стационарного основного течения $\mathbf{U}$. Это означает, что ламинарное поле скорости, устойчивость которого исследуется, имеет только одну продольную компоненту, которая зависит только от поперечной координаты. Для осесимметричного струйного течения в цилиндрических координатах поток направлен вдоль оси x , причем профиль скорости $\mathbf{U} = U_x(r)\mathbf{e}_x$ меняется только с r . С такими предположениями логично рассматривать любое возмущение как суперпозицию соответствующих гармоник Фурье. Возмущение имеет следующий вид:

$$\mathbf{v} = \left(v_x(r), v_r(r), v_\phi(r) \right) e^{ikx - i\omega t + im\phi}, \quad \chi = q(r) e^{ikx - i\omega t + im\phi}, \quad (2.55)$$

где k и m – это продольное и азимутальное волновое число, соответственно, ω – угловая частота. В такой постановке задача устойчивости сводится к задаче на собственные значения k и ω , для которых необходимо найти нетривиальное решение $\mathbf{v}$ и χ , удовлетворяющее соответствующим граничным условиям. Часто при анализе пространственно развивающихся потоков полагают действительное ω и комплексное $k = k_{re} + ik_{im}$. Тогда критерий неустойчивости течения сводится к отысканию решений линеаризованных уравнений для заданного ω с $k_{im} < 0$, что приведет к экспоненциальному росту амплитуды возмущения с ростом координаты x . Этот подход называется *пространственным* анализом устойчивости, аналогично можно рассмотреть комплексные значения частоты и действительные значения волнового числа, что соответствует *временному* анализу устойчивости. Связь двух подходов была показана Гастером (1962) [18].

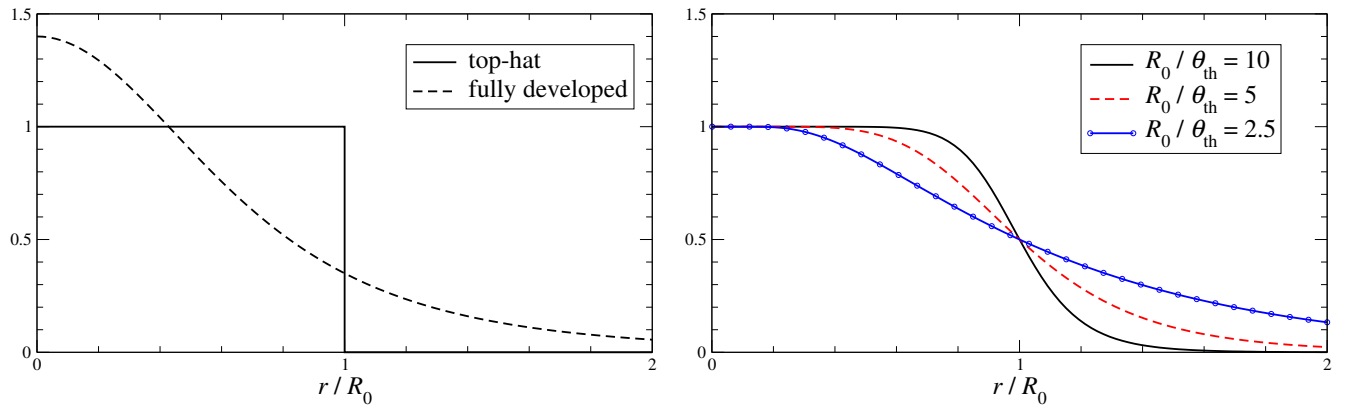


Рисунок 2.3. Слева показаны нормированные распределения скорости, исследованные Бэтчелором и Гиллом [148], соответствующие ‘ступенчатому’ и полностью развитому профилю скорости (дальнее поле струи). Справа показано влияние параметра θ_{th} на профили скорости, рассмотренные в работе Мишалке и Германна [152]

Бэтчелор и Гилл [148] показали, что “ступенчатый” (однородный) профиль скорости (от англ. “top-hat”) не устойчив к осесимметричным возмущениям с $m = 0$. В результате в осесимметричном слое смешения растут тороидальные вихри (вихри Кельвина–Гельмгольца), эволюция которых показана на рис. 2.2. Мишалке (1964, 1965) [149, 150] исследовал устойчивость плоского слоя смешения при помощи временного и пространственного анализа, используя модельный профиль скорости в виде функции гиперболического тангенса. В работе [151] показано, что для наиболее неустойчивого возмущения число Струхала $St = f\theta_{th}/\bar{U} = 0.032$, где $f = \omega/(2\pi)$, $\bar{U} = (U_1 + U_2)/2$ – средняя скорость двух потоков, θ_{th} – толщина потери импульса, которая определяет ширину области, где скорость довольно резким образом меняется от U_1 до U_2 . Аналогичная задача об осесимметричном слое смешения была рассмотрена Мишалке и Германном (1982) [152]. На самом деле “ступенчатый” профиль скорости не устойчив для довольно широкого интервала значений азимутальных волновых чисел (см., к примеру, работу [153]).

При увеличении θ_{th} , т.е. при более плавном изменении скорости в слое смешения, наиболее неустойчивыми становятся возмущения с $m = 1$ вместо $m = 0$. Бэтчелор и Гилл [148] показали это, рассмотрев помимо “ступенчатого” профиля скорости также распределение, соответствующее дальней области струи (см. рис. 2.3). Похожие результаты были позже получены рядом авторов, которые учли также влияние вязкости и прочих факторов [154–156]. Однако, стоит обратить внимание на сноску в конце статьи [148], которая указывает на то, что авторы ожидали, что учёт расширения струи может существенно повлиять на конечные

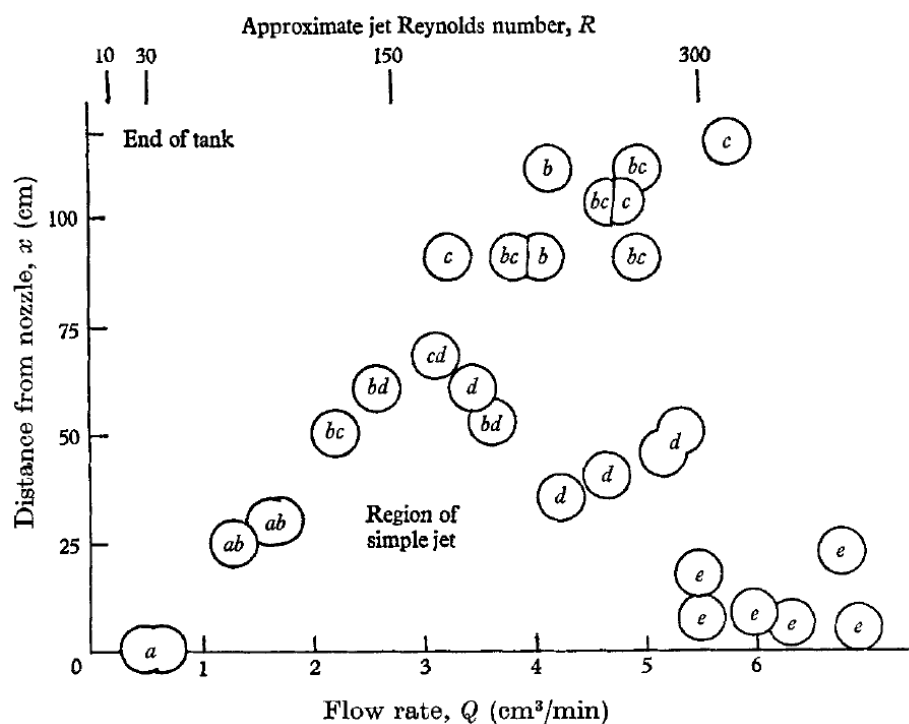


Рисунок 2.4. Диаграмма устойчивости из работы Рейнольдса [157]. По оси x снизу отложена величина объемного расхода жидкости через входное сопло (в см³/мин), сверху – приближительное значение числа Рейнольдса. По оси y указано расстояние от сопла, на котором происходит развитие неустойчивости (a)-(e)

результаты³. Разными авторами были предприняты некоторые попытки учесть непараллельность потока при анализе устойчивости, которые мы обсудим чуть ниже.

Прежде полезно сделать небольшой обзор литературы по экспериментальным работам, которых относительно немного. В работе [148] упоминаются результаты экспериментов, проведенных Шаде в 1958 году, которые указывали на то, что возможно получить устойчивое струйное течение при числах Рейнольдса в несколько сотен. Далее Виилу (1962) [158] получил несколько противоречащий Шаде результат. Согласно его экспериментам критическое число Рейнольдса лежит в диапазоне 10.5 – 11.8. В том же году результаты аналогичных экспериментов опубликовал Рейнольдс (1962) [157], которые качественно были подтверждены экспериментами МакНотом и Синклером (1966) [159], хоть и в небольшом резервуаре. Приведем некоторые детали эксперимента и описание наблюдаемых режимов (см. рис. 2.4). В прозрачный цилиндрический контейнер диаметром 30 см и высотой 120 см сверху была

³ “The correspondence between observations of growing disturbances and the theory of small disturbances to unidirectional flow is complicated by the fact that the diameter of a real jet increases with distance downstream, thereby changing the effective non-dimensional wave-number of a disturbance of given absolute frequency, and is beset by difficulties not discussed here”

подведена стеклянная трубка с соплом диаметром примерно 0.32 мм ($= D$). Контейнер был заполнен водой так, что подведенная трубка оказывалась чуть ниже свободной поверхности, т.е. немного погруженной в жидкость. Через сопло подавался поток подкрашенной воды, таким образом, исследование устойчивости проводилось методом визуализации как и в прочих работах. Перечислим здесь основные режимы течения (вольная интерпретация автора диссертации):

(a) Shearing puffs (сдвиговые пульсации). Такие возмущения были обнаружены около 10 см ($\approx 300D$) от сопла, которые далее затухают, и струя становится стационарной.

(b) Symmetric condensations (симметричные пульсации). Эти возмущения формируются спонтанно на достаточном удалении от сопла с длиной волны примерно 3-5 см ($\approx 100 - 150D$) и диаметром 5-10 мм ($\approx 15 - 30D$), что в 2-4 раза шире, чем окрашенная область (ширина струи) в стационарном режиме.

(c) Sinuous undulations (синусоидальные волны). Характерная длина волны таких возмущений составляет примерно 25 см ($\approx 800D$, при окрашенной ширине струи в 3 мм $\approx 10D$), которые проявляются в дальней области струи. Аналогичные коротковолновые возмущения (2-3 см $\approx 10D$) проявляются и в ближней области струи при внесении некоторого искусственного возмущения в поток (ширина струи – 1.5 мм $\approx 5D$).

(d) Pedal breakdown (ступнеобразные возмущения). Развитие так называемых ступнеобразных возмущений (от англ. foot-shaped) визуализируется в виде некоторых скоплений окрашенной жидкости диаметром в 2 см ($\approx 60D$) и толщиной – 1 см ($\approx 30D$).

(e) Confused breakdown (беспорядочные возмущения). При относительно высоких расходах жидкости струя становится неустойчивой уже около сопла, где проявляются беспорядочные возмущения. При более низких числах Рейнольдса внешнее возмущение также может привести к подобному явлению, однако, после этого область с беспорядочными возмущениями сносится вниз по течению, которое опять становится стационарным.

В данном эксперименте описаны различные режимы, варьирующиеся от стационарного струйного течения различной длины до нестационарных режимов с отчетливым развитием осесимметричных или синусоидальных возмущений. Стоит отметить, что вопрос об устойчивости струйного течения (обычно понимая под этим устойчивость дальнего поля) тесно связан с устойчивостью плоскопараллельного слоя смешения, который реализуется около сопла. Возмущения, возникшие в слое смешения с относительно малым значением θ_{th} , далее сносятся вниз по потоку. Таким образом, очевидно, что карта режимов, аналогичная рис. 2.4, может выглядеть разным образом для различных входных условий. Развитие неустойчивостей в ближнем поле струи сильно зависит от профиля скорости, организован-

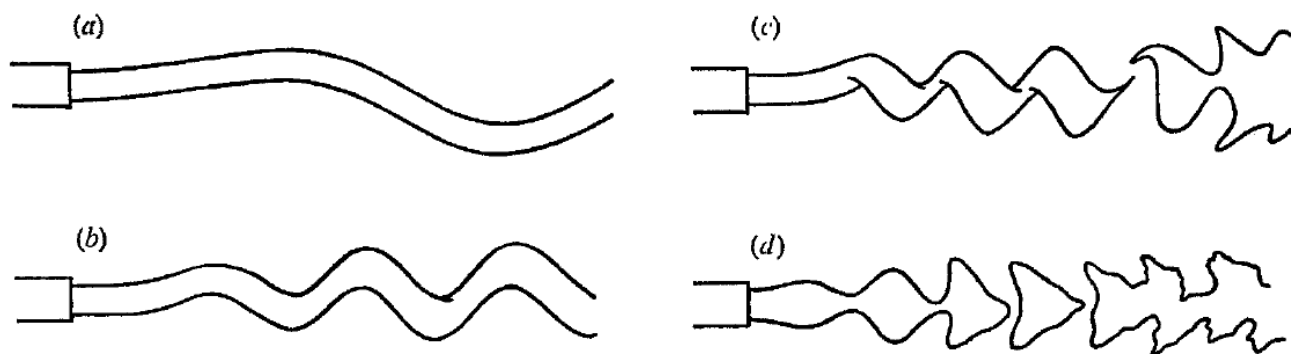


Рисунок 2.5. Эволюция неустойчивости струи с увеличением числа Рейнольдса. Иллюстрации (а) - (d) соответствуют диапазону чисел Рейнольдса $10^2 - 10^3$ согласно работе [56]

ного конкретной геометрией сопла. В экспериментах входные условия часто реализуются при помощи длинной трубы, профиль скорости на выходе из которой должен быть близок к параболическому профилю Пуазейля. Однако, выходные характеристики сильно зависят от длины подводящей трубки. Так, например, в эксперименте Рейнольдса [157] не сказано какой длины была использована подводящая трубка. В то же время в экспериментальной установке Виилу [158] длина была равна примерно 50 диаметрам трубки, что вряд ли является достаточным для установления профиля Пуазейля на выходе из сопла.

Среди других экспериментальных работ можно отметить исследования Кроу и Шампань (1971) [56], которые в основном были сконцентрированы на турбулентной струе. Тем не менее, авторы описывают и некоторые результаты, касающиеся устойчивости потока. Подводящая трубка диаметром около 0.6 см имела длину около 23 см. Таким образом, вполне возможно, что при увеличении скорости (расхода поступающей жидкости) профиль на выходе был достаточно далек от параболического. Тем не менее, авторы наблюдали как при числе Рейнольдса порядка 100 струя теряет устойчивость по отношению к синусоидальным возмущениям, рис. 2.5. При числе Рейнольдса 10^3 в потоке доминируют осесимметричные возмущения, что как раз, вероятно, связано с формированием ударного профиля скорости на выходе из сопла. В промежутке между 100 и 10^3 синусоидальные возмущения принимают вид спиральных волн, что имеет прямое отношения к результатам исследования турбулентной струи в следующей главе.

Относительно недавняя серия экспериментов, проведенных в Институте теоретической и прикладной механики СО РАН [160, 161], отличается аккуратным исследованием выходного профиля скорости. Измерения показали, что длина подводящей трубки около 200 диаметров канала является достаточной, чтобы сформировать параболический профиль скорости вплоть до чисел Рейнольдса порядка 6700, рис. 2.6 (сверху). Напомним, что лами-

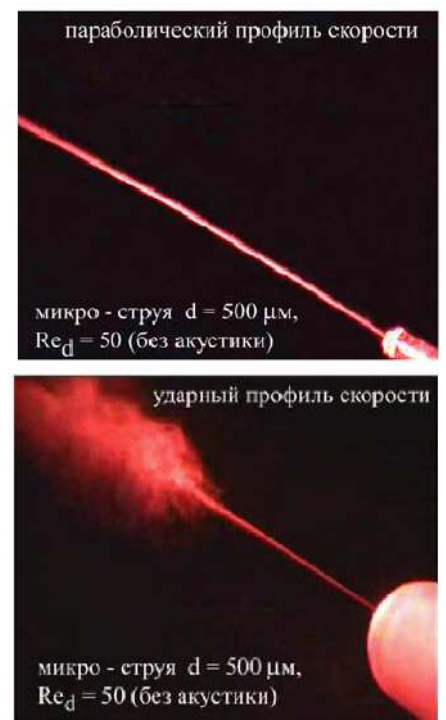
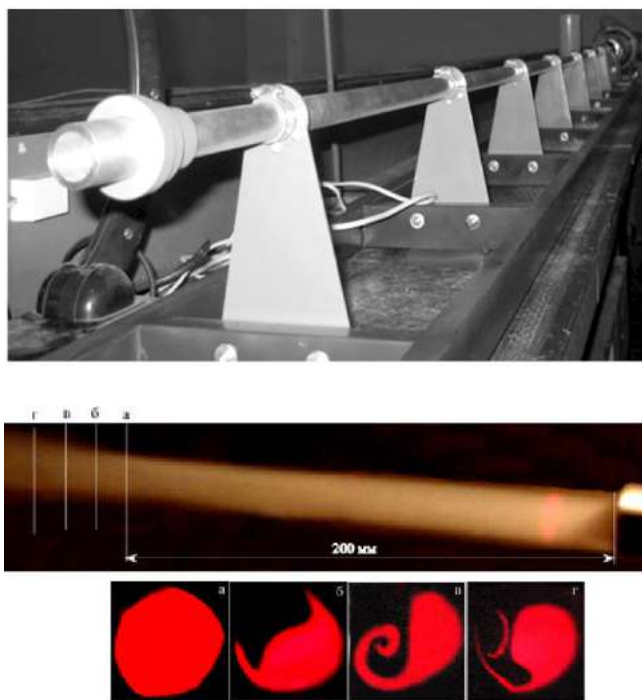


Рисунок 2.6. Слева продемонстрирован общий вид струйной установки с каналом длиной 400 см и диаметром 20 мм (иллюстрация взята из [160]) и дымовая визуализация при числе Рейнольдса 6667 (взято из [161]), которая демонстрирует развитие неосесимметричных возмущений 200 мм вниз по течению от сопла (диаметр подводящей трубки составляет 20 мм). Справа показаны аналогичные эксперименты с микроструями. Влияние начального профиля скорости (параболический против ударного) на устойчивость течения. Показана визуализация для числа Рейнольдса равного 50 (диаметр сопла составляет 0.5 мм)

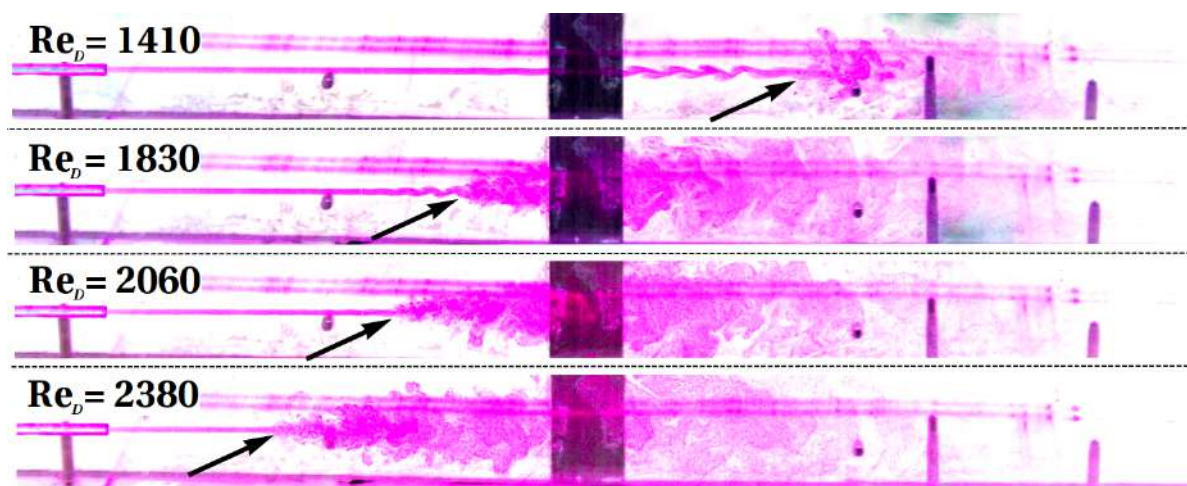


Рисунок 2.7. Визуализация струйного течения при различных числах Рейнольдса [162]. Стрелкой показано место турбулизации потока

нарное течение Пуазейля является устойчивым к возмущениям бесконечно малой амплитуды [5], таким образом, даже при числе Рейнольдса большем, чем 1700 – 2300, которое обычно указывается в литературе как область ламинарно-турбулентного перехода, возможно получить ламинарный режим течения⁴. При числе Рейнольдса порядка 6700 уровень пульсаций скорости на выходе из подводящей трубы, нормированный на среднерасходную скорость, не превышал 0.3% [160]. На рис. 2.6 (снизу слева) показано, что при таком относительно высоком числе Рейнольдса неосесимметричные возмущения начинают достаточно резко развиваться на расстоянии приблизительно 200 мм или 10 диаметров сопла ($D = 20$ мм).

В экспериментах Леманова и др. (2013) [162] из Института теплофизики СО РАН исследовались затопленные струи воздуха, вытекающие из подводящей трубки диаметром $100D$, где диаметр трубки варьировался от 0.5 мм до 8 мм. Кроме того, была проведена визуализация течения. Показано, что при увеличении числа Рейнольдса область устойчивого ламинарного течения сокращается, рис. 2.7. При недостаточно больших Re_D (число Рейнольдса, построенное по среднерасходной скорости и диаметру трубы) видно, что перед тем как струя окончательно турбулизуется, растут синусоидальные возмущения. Данные этой работы будут далее использоваться для качественного и количественного сравнения с развитой ниже теорией.

Возвращаясь к обсуждению подходов анализа устойчивости ламинарных потоков жидкости, вспомним замечание Бэтчелора и Гилла в работе [148] о том, что учёт расширения

⁴ Отмеченные во Введении недавние исследования показали, что критическое число Рейнольдса в длинной трубе составляет 2040 ± 10 , при котором скорость роста локализованных турбулентных областей в ламинарном потоке компенсирует вероятность их затухания (см. работу [40] и соответствующие ссылки)

струи вниз по потоку может изменить выводы, полученные при помощи плоскопараллельного приближения (см. сноску выше). Татсуми и Какутани (1958) [163] отмечают, что анализ устойчивости непараллельных потоков недостаточно развит в теории гидродинамической устойчивости⁵, в рамках которой даже такие течения как струи и следы рассматриваются как квазипараллельные. Линг и Рейнольдс (1973) [164] развили подход, при котором помимо функции тока учитываются также поправки к собственному значению и частоте благодаря расширению потока. Гарг (1981) [165] использовал более общий подход, который применялся только к (двумерной) струе Бикли. В отличие от двумерного случая, где характеристики возмущений меняются с продольной координатой неавтомодельным образом и необходимо использовать некоторые приближения (см. [166, 167]), в трехмерном случае общий вид возмущений может быть выписан при помощи соображений автомодельности. Впервые такой анализ был выполнен Лихачёвым (1990) [168] для струи Шлихтинга. Помимо неустойчивых возмущений с $m = 1$ были обнаружены решения с $m = 0$. И хотя осесимметричные возмущения оказались неустойчивы только в небольшом диапазоне довольно малых чисел Рейнольдса (поскольку при относительно больших Re наиболее опасными становятся возмущения с $m = 1$) это позволило объяснить экспериментально наблюдаемые осесимметричные пульсации, описанные Рейнольдсом [157]. В данном анализе использовано решение Шлихтинга, которое является аналогом точного решения Ландау в приближении пограничного слоя. Штерн и Хуссейн (2003) [169] провели аналогичный анализ для струи Ландау. В отличие от зависимости возмущения от продольной координаты вида

$$\mathbf{v} \propto e^{ik(x)x}, \quad (2.56)$$

где x – это продольная координата, $k(x)$ – волновое число, максимальное значение которого уменьшается вниз по течению, Штерн и Хуссейн рассмотрели возмущения вида

$$\mathbf{v} \propto e^{ik \ln R}, \quad (2.57)$$

где R – это сферический радиус, опираясь на предыдущие работы для двумерного случая [166, 167]. Таким образом, авторы исследовали возмущения со степенной зависимостью от R и получили схожие с Лихачёвым результаты, однако, рассмотрели только нейтральные решения (мнимая часть $k = 0$). Степенная зависимость возмущений довольно подробно обсуждается и обоснована в данной работе. Помимо нестандартной зависимости от пространственной координаты, возмущения также не будут иметь (чисто) экспоненциальную зависимость от

⁵ “To treat the stability problem of the non-parallel flow in a more satisfactory manner seems to be beyond the scope of the existing theory of hydrodynamical stability”

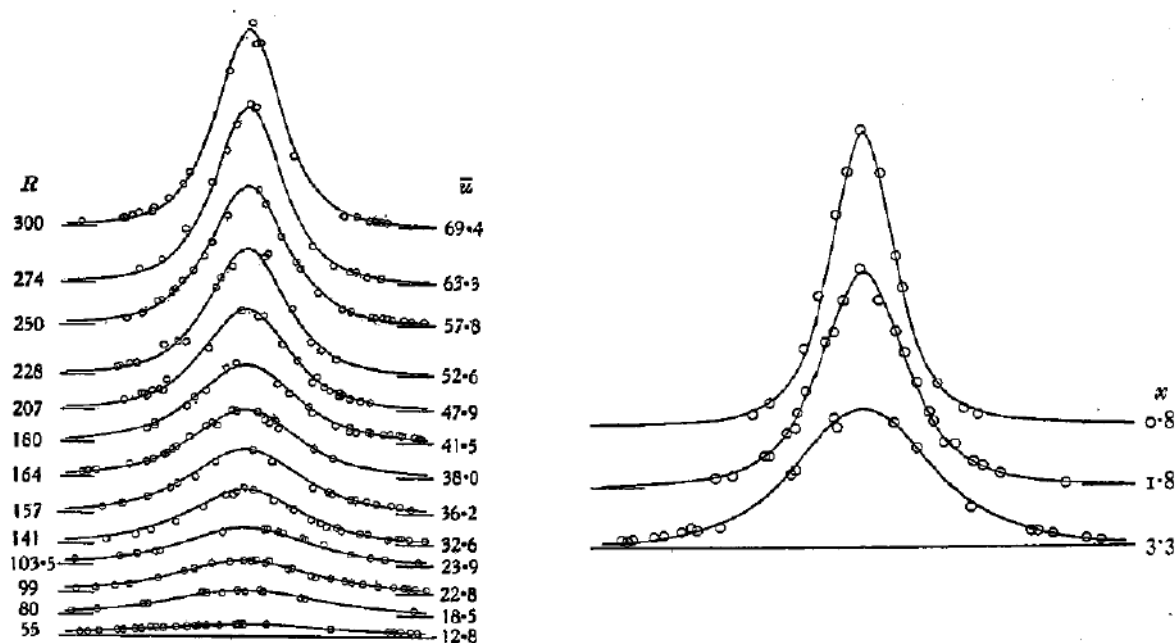


Рисунок 2.8. Слева: радиальные профили скорости, измеренные в экспериментах [172] для различных чисел Рейнольдса (здесь обозначено как R), построенных по среднерасходной скорости в трубе ($\bar{u}$, см/сек) и её радиусу ($D = 0.91$ мм), на расстоянии примерно $36.3D$ вниз по течению от сопла. Справа: радиальные профили скорости для числа Рейнольдса ≈ 200 ($\bar{u} = 46.7$ см/сек) на расстоянии от сопла в 0.8, 1.8 и 3.3 см (8.8 , 19.8 и $36.3D$, соответственно)

времени. Таким образом, анализ устойчивости не является *модальным*, что следует из того факта, что характерное время в струйной задаче увеличивается как $(R/|u| \propto) R^2$ вниз по течению. Вместе с основным течением, эволюционируют и возмущения, длина волны и характерное время колебания которых также растет с R (Гарг [165]). Используя слова из статьи [168] можно заключить: “Если же необходимо рассмотреть пространственную эволюцию малого возмущения фиксированной частоты ω_0 , то нейтральная кривая $\omega_0(Re)$ и масштабное подобие ($\omega_0 \propto R^{-2}$) определяют диапазон изменения R , в котором это возмущение будет расти для данного Re ”. Это подтверждается трехмерными расчетами задачи устойчивости [170]. Кроме того, отмечается, что расчеты задачи устойчивости в неограниченных областях сильно осложняются численными трудностями из-за “выходных” граничных условий, которые могут существенно исказить получаемые результаты [171]. Очевидно, что учёт автомодельного вида возмущений позволяет избежать упомянутый численных трудностей, что является дополнительным аргументом в пользу этого подхода к линейному анализу устойчивости струйных течений.

Измеренные Андраде и Тсиеном (1937) [172] профили скорости в ламинарной струе отлично согласуются с решением Шлихтинга [125], которое является приближением точного

решения Ландау в рамках теории пограничного слоя (см. рис. 2.8). Аналогичное сравнение было сделано и рядом других авторов [173, 174]. Таким образом, для исследования устойчивости дальнего поля ламинарной струи логично рассмотреть поле скорости и давления как суперпозицию решения Ландау и бесконечно малых возмущений $\mathbf{v}$ и χ :

$$\mathbf{u} = \frac{\nu}{R} \mathbf{u}_L(\theta) + \mathbf{v}, \quad p = \frac{\rho \nu^2}{R^2} p_L(\theta) + \chi. \quad (2.58)$$

Поскольку в постановке задачи отсутствует характерная размерность длины, из соображений размерности будем искать возмущения в следующем классе:

$$v_r = \frac{\nu}{R} f(\psi, \eta) e^{im\phi}, \quad v_\theta = -\frac{\nu}{R\sqrt{1-\psi^2}} g(\psi, \eta) e^{im\phi}, \quad (2.59)$$

$$v_\phi = -\frac{\nu}{R\sqrt{1-\psi^2}} i h(\psi, \eta) e^{im\phi}, \quad \chi = \frac{\rho \nu^2}{R^2} q(\psi, \eta) e^{im\phi}, \quad (2.60)$$

где ψ , как и прежде, обозначает $\cos \theta$, в то время как переменная $\eta = R/\sqrt{\nu t}$. Стоит отметить, что такие переменные были также использованы при анализе двумерных [166, 167, 175, 176] и трехмерных [177–179] конических течений. При помощи метода разделения переменных можно показать, что в случае $\mathbf{u}_L = 0$ решение выражается аналитически через полиномы Лежандра по переменной ψ и через гипергеометрические функции по переменной η (Мулладжанов, 2012 [180]; см. также Приложение А). Фактически, это означает, что решение имеет степенную зависимость от η , что неудивительно, потому что сам вид возмущений, мотивированный соображениями размерности, имеет степенную зависимость R^{-1} . Далее преобразуем степенную зависимость с неким показателем n следующим образом:

$$\eta^n = \left(\frac{R}{R_0}\right)^n \left(\frac{\nu t}{R_0^2}\right)^{-n/2} = e^{n \log \frac{R}{R_0} - \frac{n}{2} \log \frac{\nu t}{R_0^2}}, \quad (2.61)$$

где R_0 , как и прежде, есть некоторая постоянная размерности длины (радиус подводящей трубки). Видно, что в случае $\mathbf{u}_L \neq 0$ логично рассмотреть задачу устойчивости к возмущениям в виде волн в терминах новых переменных:

$$\mathbf{v} = \frac{\nu}{R} \mathbf{v}_0(\psi) e^{ik\xi - i\omega \log \tau + im\phi}, \quad \xi = \log \frac{R}{R_0}, \quad \tau = \frac{\nu t}{R_0^2}, \quad (2.62)$$

где $\mathbf{v}_0$ есть безразмерный вектор, зависящий только от угла. Параметр k является радиальным безразмерным волновым числом, ω – безразмерная частота, m – азимутальное волновое число. Тогда компоненты возмущения поля скорости и давления имеют вид:

$$v_r = \frac{\nu}{R} f(\psi) e^{ik\xi - i\omega \log \tau + im\phi}, \quad v_\theta = -\frac{\nu}{R\sqrt{1-\psi^2}} g(\psi) e^{ik\xi - i\omega \log \tau + im\phi}, \quad (2.63)$$

$$v_\phi = \frac{\nu}{R\sqrt{1-\psi^2}} i h(\psi) e^{ik\xi - i\omega \log \tau + im\phi}, \quad \chi = \frac{\rho \nu^2}{R^2} q(\psi) e^{ik\xi - i\omega \log \tau + im\phi}, \quad (2.64)$$

где f, g, h, q – безразмерные функции только угловой переменной ψ . Подставляя (2.58), (2.63), (2.64) в уравнения Навье–Стокса, после линеаризации и некоторых преобразований получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$i\Omega f + \frac{2mh}{1-\psi^2} + (2-ik)q - 2g' + y''g + \frac{2yg}{1-\psi^2} - (2+ik+k^2 + \frac{m^2}{1-\psi^2})f - (2-ik)y'f - yf' - 2\psi f' + (1-\psi^2)f'' = 0, \quad (2.65)$$

$$i\Omega g + mh' + (1-\psi^2)\left(2f - (1+ik)f'\right) - (ik+k^2 - \frac{m^2}{1-\psi^2})g - (1-ik)y'g - \frac{2\psi yg}{1-\psi^2} - yg' - (1-\psi^2)q' = 0, \quad (2.66)$$

$$i\Omega h - mq + 2mf - \frac{2m\psi g}{1-\psi^2} - (ik+k^2 + \frac{m^2}{1-\psi^2})h +iky'h - yh' + (1-\psi^2)h'' = 0, \quad (2.67)$$

$$(1+ik)f + g' - \frac{mh}{1-\psi^2} = 0, \quad (2.68)$$

где

$$\Omega = \omega \frac{r^2}{\nu t} \quad (2.69)$$

рассматривается как некоторый постоянный параметр, играющий роль обобщенной частоты, и включает в себя зависимость от радиуса и времени (пропорционально переменной η^2). В уравнении (2.66) понижен порядок производной функции g со второго до первого при помощи уравнения неразрывности (2.68). Стоит отметить, что уравнения (2.65)–(2.68) оказываются идентичны уравнениям, полученным Штерном и Хуссейном (2003) [169], где, однако, рассматривалась экспоненциальная зависимость возмущения от времени (точнее от $1/\eta^2$). При выводе потребовалось использовать приближение дальнего поля ($\eta \rightarrow \infty$, что эквивалентно $\tau \rightarrow 0$) и отбросить ряд слагаемых с высокими степенями τ . В данной работе не делается никаких приближений при выводе уравнений кроме того, что Ω считается постоянным параметром в уравнениях (2.65)–(2.68).

Для полной постановки задачи система уравнений (2.65)–(2.68) должна быть замкнута подходящими граничными условиями. Из представления (2.63), (2.64) вытекают следующие требования на поле скорости:

$$g(\pm 1) = 0, \quad h(\pm 1) = 0, \quad (2.70)$$

которые соответствуют требованиям ограниченности функций g и h .

Процедура численного решения полученной системы уравнений схематически изображена на рис. 2.9. Поскольку точки $\psi = \pm 1$ являются особыми, необходимо найти асимптотическое разложение функций задачи в их окрестности и сместить начало численного

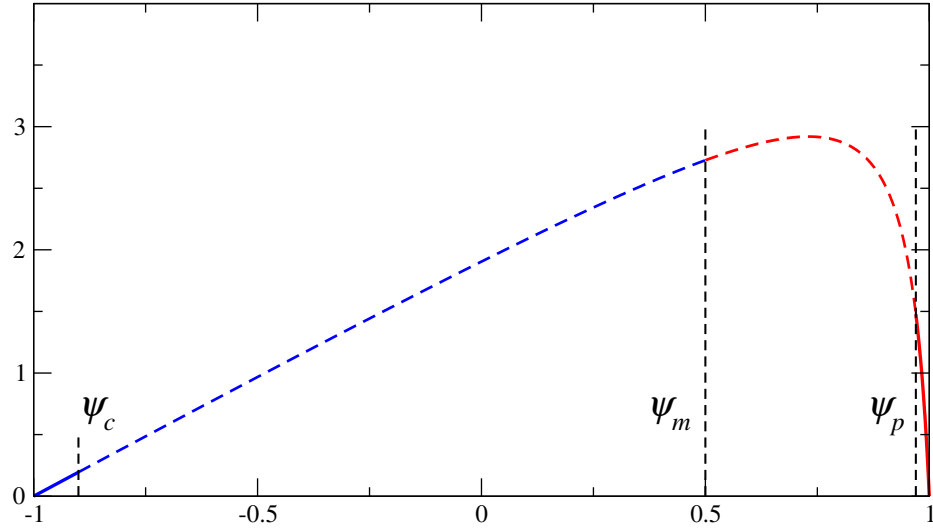


Рисунок 2.9. Схема используемого численного алгоритма. В диапазоне $\psi \in [-1, \psi_c]$ и $[\psi_p, 1]$ (отмечены сплошной синей и красной линией) используются асимптотические разложения некой пробной функции Ψ в окрестности особых точек $\psi = \pm 1$, см. выражение (2.71). Далее строятся два решения уравнений (2.65)–(2.68) численным интегрированием от ψ_c до ψ_m и от ψ_p до ψ_m (отмечены пунктирной синей и красной линией). В точке ψ_m необходимо обеспечить непрерывность значений функции Ψ и ее производных согласно порядку системы дифференциальных уравнений, см. условия (2.72), (2.73)

интегрирования. Можно показать [181], что для уравнений типа Лежандра функции задачи пропорциональны множителю $(1 - x^2)^{m/2}$ и определенной аналитической в окрестности $\psi = \pm 1$ функции, которую, в свою очередь, можно представить в виде ряда Тейлора. Таким образом, некоторую пробную функцию Ψ (f , g , h или q) в окрестности точки $\psi = 1$ можно представить в виде:

$$\Psi = (1 - \psi^2)^{m/2} \left(\Psi_0 + \Psi_1(1 - \psi) + \Psi_2(1 - \psi)^2 + \Psi_3(1 - \psi)^3 + \dots \right), \quad (2.71)$$

где комплекснозначные коэффициенты разложения $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$ определяются при подстановке в систему уравнений (2.65)–(2.68). Некоторые параметры остаются неопределенными (*свободными*), которые находятся уже при непосредственном решении спектральной задачи. Разложение, аналогичное выражению (2.71), можно выписать и в окрестности точки $\psi = -1$. Далее для выбранных значений A (в функции y), Ω и набора свободных параметров строится два численных решения, при этом интегрирование уравнений (2.65)–(2.68) начинается из точек $\psi_c = -1 + \epsilon_c$ и $\psi_p = 1 - \epsilon_p$, где ϵ_c и ϵ_p – малые параметры (в диапазоне $10^{-5} - 10^{-3}$). В некоторой точке ψ_m ($= 0.9$ для найденных ниже решений), выбор которой не влияет на результат, необходимо удовлетворить условиям непрерывности функций задачи и их производных согласно порядку системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

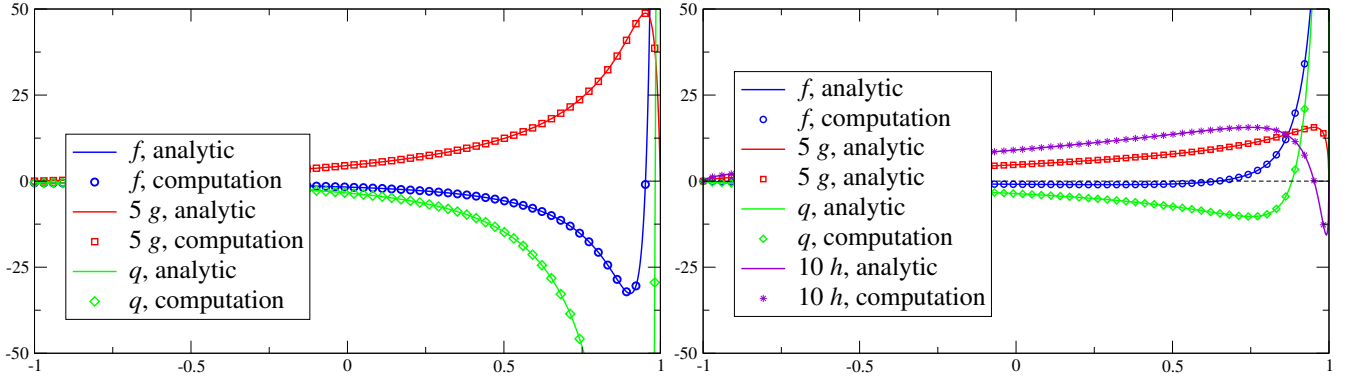


Рисунок 2.10. Сравнение численного и аналитического решения для верификации численной процедуры, описанной в тексте, при $A = 1.05$, $\Omega = 0$. Слева: $m = 0$, $k = 0$. Справа: $m = 1$, $k = i$

Конкретнее, необходимо выполнить следующие условия:

$$f_{-}(\psi_m) = f_{+}(\psi_m), \quad f'_{-}(\psi_m) = f'_{+}(\psi_m), \quad g'_{-}(\psi_m) = g'_{+}(\psi_m), \quad (2.72)$$

$$h_{-}(\psi_m) = h_{+}(\psi_m), \quad h'_{-}(\psi_m) = h'_{+}(\psi_m), \quad q'_{-}(\psi_m) = q'_{+}(\psi_m), \quad (2.73)$$

где '+' и '-' соответствуют решениям, полученным при интегрировании системы уравнений из точек ψ_p и ψ_c , соответственно. Условия (2.72), (2.73) достигаются варьированием свободных параметров и волнового числа $k = k_{re} + ik_{im}$ при помощи метода Ньютона. Аналогичная схема расчета была использована нами в работе [182].

Численные решения удобно сравнить с аналитическими, чтобы убедиться в правильной реализации алгоритма. Для случая $\Omega = 0$, $m = 0$ с постоянным значением волнового числа $k = 0$ для всех чисел Рейнольдса (или A) имеет место решение:

$$f = \frac{2(A^2 - 1)}{(A - \psi)^3} - \frac{2A}{(A - \psi)^2}, \quad g = \frac{1 - \psi^2}{(A - \psi)^2}, \quad (2.74)$$

$$q = \frac{4(A^2 - 1)}{(A - \psi)^3} - \frac{6A}{(A - \psi)^2} + \frac{2}{A - \psi}. \quad (2.75)$$

Аналогично для случая $\Omega = 0$, $m = 1$ существует аналитическое решение с $k = i$:

$$f = \sqrt{1 - \psi^2} \left(\frac{2A(A^2 - 1)}{(A - \psi)^3} - \frac{A^2 - 1}{(A - \psi)^2} - \frac{A}{A - \psi} \right), \quad (2.76)$$

$$g = \frac{\sqrt{1 - \psi^2}}{A - \psi}, \quad (2.77)$$

$$h = \sqrt{1 - \psi^2} \left(-\frac{A^2 - 1}{(A - \psi)^2} + \frac{A}{A - \psi} \right), \quad (2.78)$$

$$q = \sqrt{1 - \psi^2} \left(\frac{4A(A^2 - 1)}{(A - \psi)^3} - \frac{2A^2}{(A - \psi)^2} - \frac{2A}{A - \psi} \right). \quad (2.79)$$

На рис. 2.10 показано сравнение функций f , g , h и q для $m = 0$ (слева) и $m = 1$ (справа), демонстрирующее отличное согласие. Видно, что собственные функции имеют высокие зна-

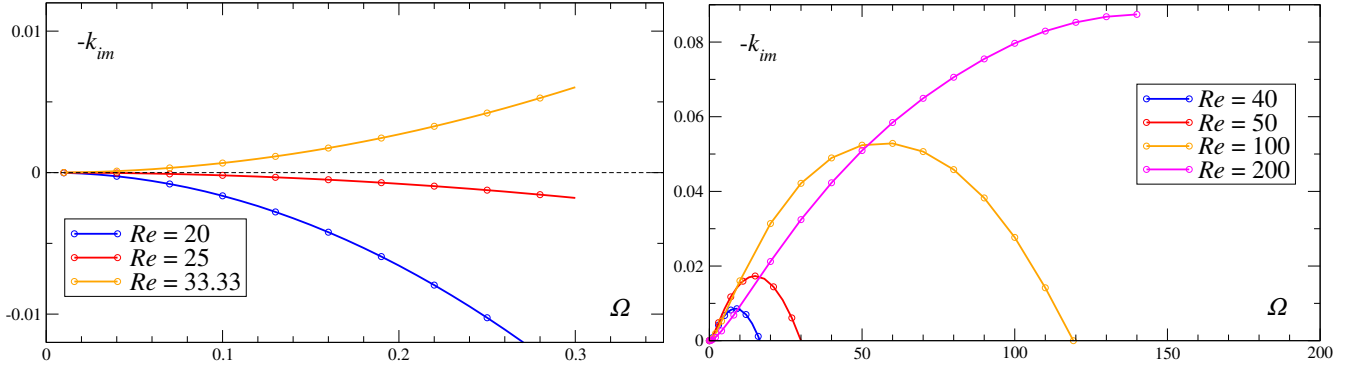


Рисунок 2.11. Дисперсионные кривые $-k_{im}(\Omega)$ при разных числах Рейнольдса для самого неустойчивого решения при $m = 0$

чения производных около точки $\psi = 1$ (в слое смешения струи), которые увеличиваются и далее при возрастании числа Рейнольдса (или уменьшении A). Достоверность приведенных ниже результатов расчетов гарантируется отличным совпадением расчетов с полученными выше аналитическими выражениями для всего исследуемого диапазона параметров.

Растущие возмущения (с $-k_{im} > 0$) были обнаружены только для азимутальных волновых чисел $m = 0$ и $m = 1$ как и в работе [169], в которой однако исследовались только нейтральные возмущения ($k_{im} = 0$). Таким образом, зависимость $k_{im}(Re)$ не была проанализирована, что как раз позволяет провести полноценное сравнение с экспериментальными данными как будет показано ниже. В данной задаче удобно использовать число Рейнольдса, построенное по скорости на оси и расстоянию от начала координат:

$$Re = \frac{u_R R}{\nu} \Big|_{\psi=1} = -y'(1) = -\frac{4}{A-1}, \quad (2.80)$$

согласно (2.6) и (2.7). На рис. 2.11 показаны дисперсионные кривые $-k_{im}(\Omega)$ для различных Re и $m = 0$. Поскольку мы показали ранее, что существует аналитическое решение при $\Omega = 0$ и $k = 0$, то все кривые на рис. 2.11 начинаются из нуля. При увеличении числа Рейнольдса выше критического $Re_{crit}^{m=0} = 26.20$ появляется диапазон значений Ω , для которых существуют решения с $-k_{im} > 0$. Стоит отметить, что в работе [181] указано, что $Re_{crit}^{m=0} = 28.1$. Небольшое отличие можно объяснить недостаточно аккуратным алгоритмом расчета спектральной задачи, используемого в [181], где не были использованы асимптотические разложения функций задачи в окрестности точек $\psi = \pm 1$.

Текущая постановка задачи позволяет исследовать эволюцию возмущений во всем пространстве благодаря автомодельности основного течения и рассматриваемых возмущений и, таким образом, является глобальной. Отношение амплитуды скорости возмущения на оси

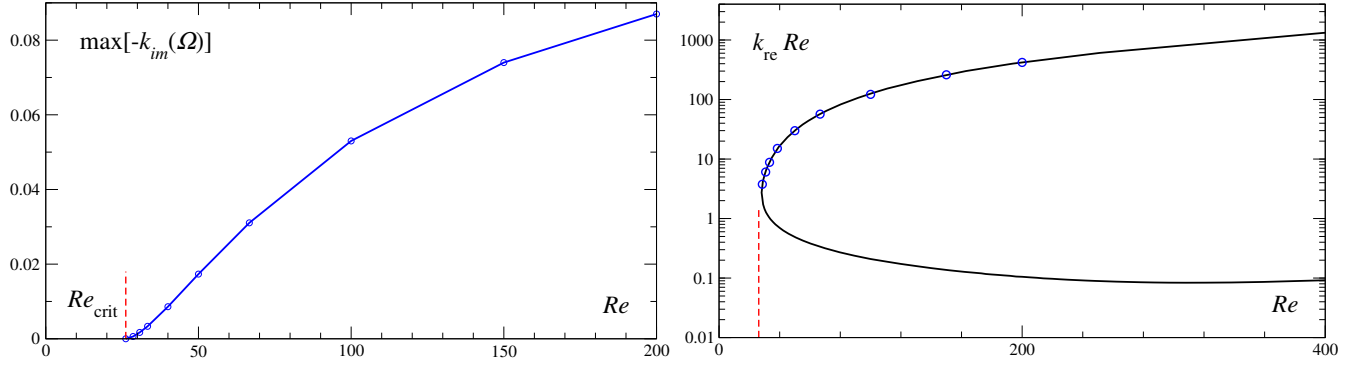


Рисунок 2.12. Слева: Максимальное значение $-k_{im}(\Omega)$ как функция числа Рейнольдса для самого неустойчивого решения при $m = 0$. Справа: Сравнение действительной части волнового числа (k_{re}), полученной в текущих расчетах (символами) и в работе [181] (черная линия). Отличительной особенностью является отсутствие нижней ветви, что аккуратно продемонстрировано на рис. 2.11. Вертикальная красная штриховая линия обозначает $Re_{crit}^{m=0}$

к скорости основного потока имеет следующую зависимость:

$$\left| \frac{v_r}{u_r} \right| = \left| \left(\frac{\nu}{R} f(1) e^{-k_{im}(Re)\xi} \right) \left(-\frac{\nu}{R} y'(1) \right)^{-1} \right| \propto \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-k_{im}(Re)}. \quad (2.81)$$

Амплитуда возмущения растет (затухает) вниз по потоку относительно основного течения алгебраически с расстоянием от начала координат, при этом скорость роста определяется мнимой частью волнового числа и зависит от числа Рейнольдса. Очень важным оказывается абсолютное значение $-k_{im}(Re)$. На рис. 2.12 показана зависимость максимального значения $-k_{im}(\Omega)$, полученного для каждой дисперсионной кривой, при различных Re . Видно, к примеру, что хоть положительные значения $-k_{im}$ для $Re \leq 40$ и существуют, однако, $-k_{im}$ не превышает 0.01. Это означает, что отношение амплитуды возмущения к скорости основного потока на оси вырастет всего примерно на 7% на расстоянии $R/R_0 = 10^3$ по сравнению с $R = R_0$. При $Re = 200$ пик значения $-k_{im}(\Omega)$ на дисперсионной кривой достигается для $-k_{im} = 0.087$. Для этих параметров возмущение на расстоянии $R/R_0 = 10^3$ вырастет на 82%. Таким образом, можно заключить, что хоть в рассматриваемом течении и имеет место механизм роста осесимметричных возмущений, скорость роста крайне низка, что дает основания характеризовать осесимметричные возмущения как нейтрально устойчивые. Вероятно, именно благодаря слабовыраженному эффекту возмущения с $m = 0$ имеют только устойчивые решения в плоскопараллельном приближении. На рис. 2.12 также показано сравнение $k_{re} Re$ в зависимости от Re в текущих расчетах и в работе [181]. Отличительной особенностью является отсутствие нижней ветви, что аккуратно продемонстрировано на рис. 2.11.

На рис. 2.13 показаны зависимости $-k_{im}$ от Ω для различных чисел Рейнольдса и $m = 1$. Видно, что при увеличении Re до величины порядка 100, дисперсионные кривые

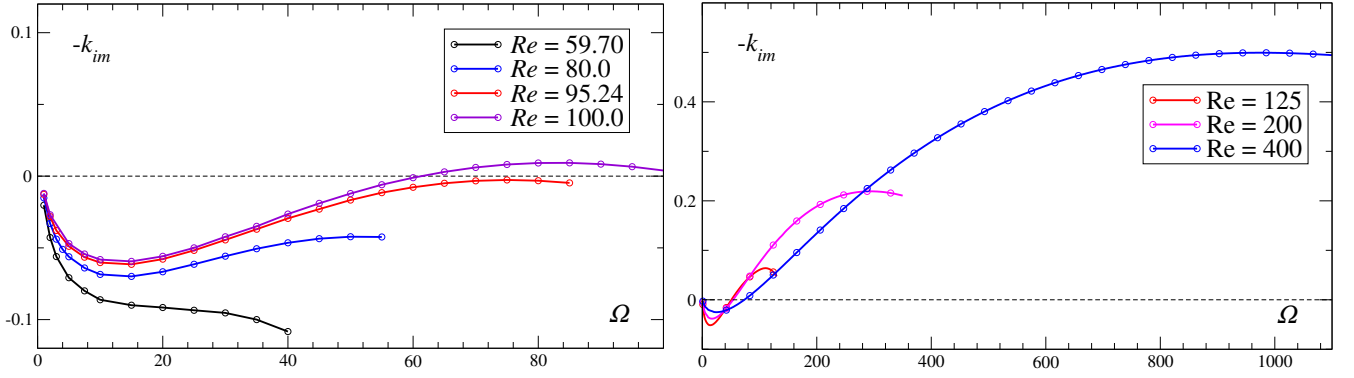


Рисунок 2.13. Дисперсионные кривые $-k_{im}(\Omega)$ при разных числах Рейнольдса для самого неустойчивого решения при $m = 1$

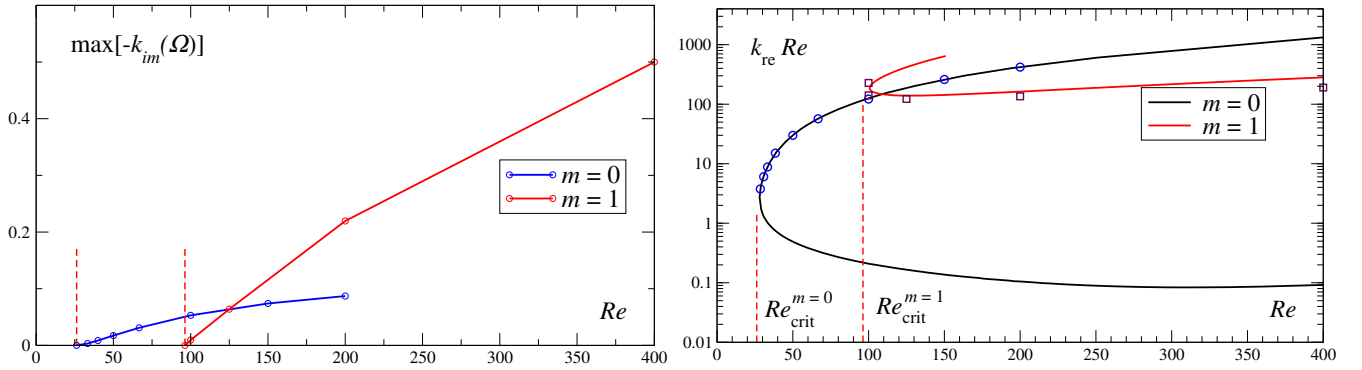


Рисунок 2.14. Слева: Максимальное значение $-k_{im}(\Omega)$ как функция числа Рейнольдса для самого неустойчивого решения при $m = 0$ и $m = 1$. Справа: Сравнение действительной части волнового числа (k_{re}), полученной в текущих расчетах (символами) и в работе [181] (сплошные линии). Вертикальная красная штриховая линия обозначает $Re_{crit}^{m=0}$ и $Re_{crit}^{m=1}$

стремятся пересечь нулевое значение при достаточно высоких Ω . Полученное критическое число Рейнольдса равно $Re_{crit}^{m=1} = 96.29$, что несколько меньше, чем данные работы [181] ($Re_{crit}^{m=1} = 101$). Сравнение функций максимального значения $-k_{im}(\Omega)$ от Re для $m = 0$ и $m = 1$ показано на рис. 2.14. Важно отметить, что скорость роста возмущений с $m = 1$ существенно превышает $m = 0$, при этом максимальные значения $-k_{im}$ примерно одинаковы при $Re \approx 120 - 130$.

Следующий этап – сравнение результатов описанного выше линейного анализа устойчивости и данных из литературы. Определим связь числа Рейнольдса, которая выражается формулой (2.80), и числа Рейнольдса, используемое в экспериментах и численных расчетах. Число Рейнольдса, построенное по диаметру выходного сопла $D = 2R_0$ и среднерасходной скорости U_b , имеет вид:

$$Re_D = U_b D / \nu. \quad (2.82)$$

Таблица 2.1. Сравнение результатов анализа линейной устойчивости струи Ландау для $m = 1$. В статье [181] был рассмотрен такой же подход как и в данной работе. Моррис [183] исследовал устойчивость профиля скорости в плоскопараллельном приближении, используя решение Шлихтинга

Авторы	Re_{crit}	$Re_{D,crit}$	$k_{re,crit}$	Ω_{crit}
Штерн и Хуссейн [181]	101	27.77	1.85	84.0
Моррис [183]	177.1	37.64	2.12	86.66
Лихачёв [168]	94.46	27.49	1.55	59.72
данная работа	96.29	27.10	1.78	76.93

Обычно в литературе рассматриваются два профиля скорости на выходе из сопла: “ступенчатый” (однородный) и параболический. В цилиндрических координатах (x, r, ϕ) с центром в середине выходного сечения ($x = 0$) эти профили скорости будут иметь вид:

$$U(r) = U_b, \quad U(r) = 2U_b \left(1 - \frac{r^2}{R_e^2}\right). \quad (2.83)$$

Полный поток импульса через выходное сечение определяется соотношением:

$$P_x = \int \rho U(r)^2 dS = 2\pi\rho \int_0^R U(r)^2 r dr. \quad (2.84)$$

Подставляя (2.83) в (2.84), получим:

$$P_x = \pi\rho\nu^2 Re_D^2, \quad P_x = \frac{1}{3}\pi\rho\nu^2 Re_D^2. \quad (2.85)$$

Тогда для параболического профиля, для которого будут производиться все сравнения далее, имеем:

$$Re_D = \sqrt{\frac{3P_x}{\pi\rho\nu^2}}. \quad (2.86)$$

Для удобства воспроизведем здесь еще раз выражение для P_x , соответствующее решению Ландау:

$$P_x = 16\pi\rho\nu^2 A \left(1 + \frac{4}{3(A^2 - 1)} - \frac{A}{2} \ln \frac{A+1}{A-1}\right). \quad (2.87)$$

Таким образом, имеется однозначная связь между Re_D и A (или $Re = -4/(A - 1)$). При больших Re можно выписать следующую асимптотику:

$$Re_D = \sqrt{8Re} + \sqrt{2}(8 + \ln 8 - 3 \ln Re) Re^{-1/2} + O(Re^{-3/2} \ln^2 Re), \quad Re \rightarrow \infty, \quad (2.88)$$

где первое слагаемое часто используется в литературе ($Re_D = \sqrt{8Re}$).

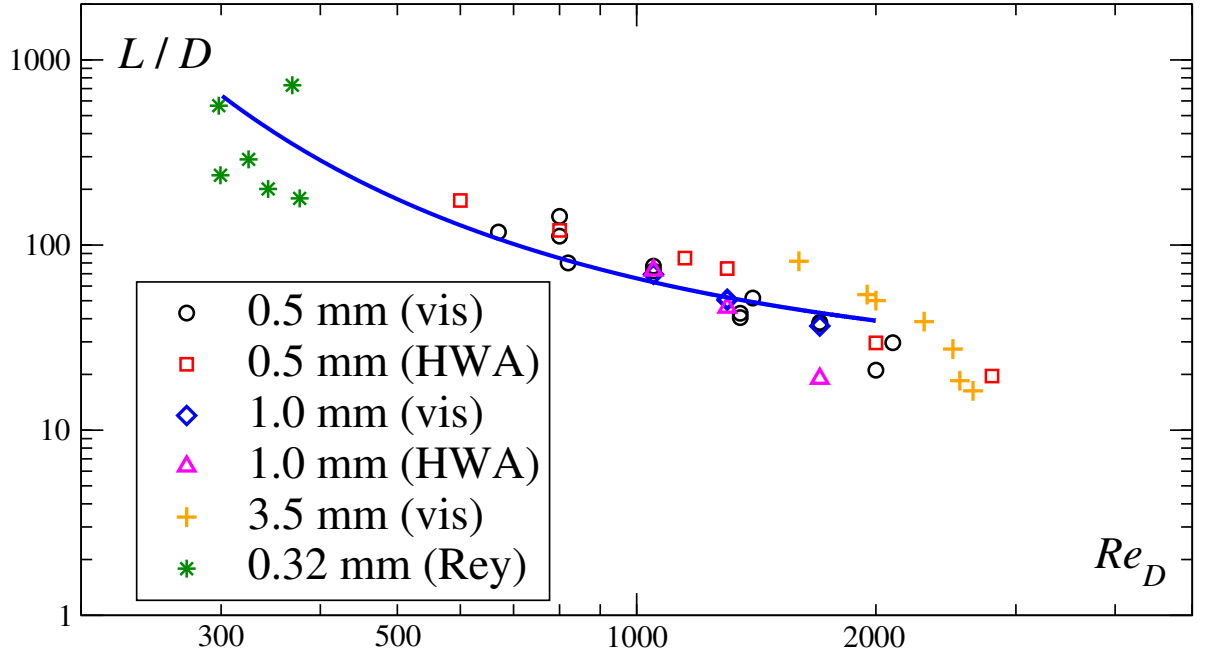


Рисунок 2.15. Зависимость расстояния, на котором струя турбулизируется, от числа Рейнольдса в трубе. Величины 0.32 – 3.5 мм соответствуют диаметру подводящей трубки, использованных в эксперименте. Звездочками показаны экспериментальные данные Рейнольдса [157], полученные из его диаграммы на рис. 2.4 (точки, отмеченные буквой ‘e’). Остальные символы соответствуют данным Леманова и др. [162], полученным при помощи измерений пульсаций скорости термоанемометром (HWA) на оси струи, а также при помощи визуализации (vis) как показано на рис. 2.7. Стоит отметить, что при $Re_D > 2000$ поток, вытекающий из трубы, был не ламинарный. Синяя линия соответствует теоретическим результатам согласно формуле (2.81), а именно, что отношение скорости возмущения к основному потоку достигает некоторого существенного постоянного значения, $|v_r/u_r| \propto (L/D)^{-k_{im}(Re)}$. Полученное выражение имеет вид $L/D = 20 \times 10^{1/(0.0081Re_D^{0.8}-0.11)}$ и показано синей линией

В Таблице 2.1 показано сравнение результатов анализа для $m = 1$, полученных в данной работе, Штерном и Хуссейном [181], а также в плоскопараллельном приближении Моррисом (1976) [183]. Стоит отметить, что критическое число Рейнольдса Re_{crit} существенно ниже при учёте расширения струи, однако, число Рейнольдса $Re_{D,crit}$ отличается меньше. Также, чуть ниже оказываются значения действительной части волнового числа и обобщенной частоты. Тем не менее, данные, полученные Штерном и Хуссейном, а также Лихачевым, находятся в хорошем согласии с результатами текущих расчетов.

Далее производится попытка оценить расстояние L от источника струи, на котором амплитуда возмущения достигает некоторого критического значения, для того чтобы течение турбулизовалось как показано на рис. 2.7. Для этого будем полагать, что возмущение рас-

тет по формуле (2.81) согласно рассмотренному линейному механизму. Важно определить *критерий* ламинарно-турбулентного перехода. Будем полагать, что турбулизация происходит, когда в некоторой точке амплитуда возмущения достигает существенного значения по сравнению с локальным значением скорости. Фиксируя это значение можно получить зависимость L от Re , используя найденные зависимости для $-k_{im}(Re)$ и формулу (2.81). На рис. 2.15 показано сравнение экспериментальных данных Рейнольдса [157] и Леманова и др. [162] с теоретической кривой, полученной из результатов текущей работы. Несмотря на то, что в действительности турбулизация происходит гораздо более сложным образом, включая этап нелинейного роста возмущения, сравнение теории и эксперимента дает хорошее *количественное* согласие. Стоит отметить, что при $Re_D > 2000$ вытекающий поток из трубы уже имел турбулентные пульсации (согласно информации, полученной от Леманова В.В.), что ограничивает область сравнения теории и эксперимента до $Re_D < 2000$.

2.4. Турбулентная струя

⁶В предыдущем параграфе было показано, что при помощи правильно сформулированной линейной задачи устойчивости с учётом расширения струи можно идентифицировать неустойчивые осесимметричные возмущения при относительно малых числах Рейнольдса и синусоидальные при бóльших числах Рейнольдса, которые будут соответствовать глобальным модам неустойчивости благодаря автомодельной постановке. Интересно отметить, что рассмотренные возмущения растут (затухают) алгебраически с расстоянием от сопла в отличие от стандартного модального подхода в плоскопараллельном приближении. Недавние экспериментальные данные (Козлов и др. [160], Леманов и др. [162]) показывают, что при числе Рейнольдса порядка нескольких тысяч ($\approx 4000 - 7000$) струя турбулизуется около сопла на расстоянии порядка десяти диаметров подводящей трубки даже при аккуратном организованном параболическом выходном профиле скорости с низкими турбулентными пульсациями ($< 0.3\%$ в эксперименте у Козлова и др. при $Re \approx 6700$). Ламинарно-турбулентный переход сменяется областью потока, где реализуется полностью развитая турбулентность, которая также может быть описана в рамках некоторого автомодельного подхода.

Круглая затопленная турбулентная струя в литературе обычно рассматривается в цилиндрических координатах (x, r, ϕ) , где (u_x, u_r, u_ϕ) есть соответствующие компоненты скорости (см. рис. 2.16). Аналогично решению Шлихтинга [125] для ламинарной струи можно получить автомодельное решение и для турбулентного случая. В приближении пограничного

⁶ См. работу [2] в разделе “Публикации по теме диссертации”

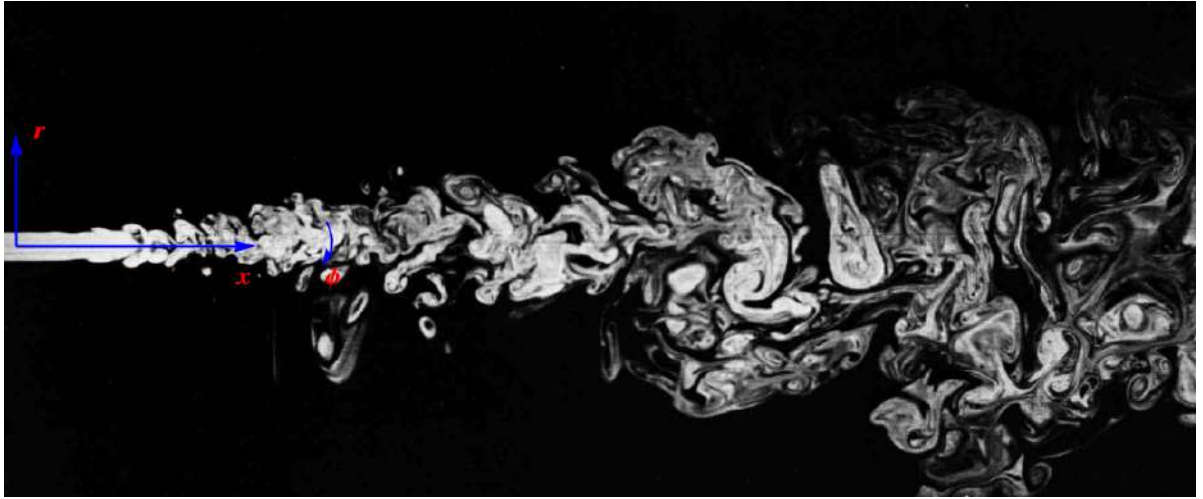


Рисунок 2.16. Мгновенное поле концентрации в круглой затопленной турбулентной струе, визуализированное в эксперименте при помощи методики лазерно-индуцированной флуоресценции. Число Рейнольдса примерно 2300. Взято из альбома Ван Дайка [184], см. работу [185]. Также показана цилиндрическая система координат (x, r, ϕ)

слоя уравнение переноса продольной компоненты импульса, осредненное по времени, имеет вид (пренебрегая вязкими слагаемыми)

$$\bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{u'_x u'_r}), \quad (2.89)$$

где $\overline{u'_x u'_r}$ – это компонента Рейнольдсовых напряжений. Черта сверху означает осреднение по времени, штрих – пульсации соответствующей величины. Простейший вариант – использовать гипотезу о связи Рейнольдсовых напряжений и турбулентной вязкости ν_t при помощи приближения Буссинеска, предполагая также ν_t постоянной. Тогда можно получить решение Шлихтинга для струи заменой кинематической вязкости ν на ν_t . Толлмин (1926) [186]⁷ использовал формулу Прандтля

$$\overline{u'_x u'_r} = l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} \right| \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} \quad (2.90)$$

для замыкания уравнений движения. Здесь $l \propto r$ есть длина пути смешения, которая связана с r через некоторую константу. Используя также уравнение неразрывности можно получить решение аналитически. Сравнение результатов теории и эксперимента приведено на рис. 2.17. Видно, что эксперимент и теория находятся в отличном согласии в ядре струи. Однако, предположение о постоянстве ν_t дает решение со слишком высокими значениями в “хвостах” распределения скорости, что естественно является результатом переоцененной эффективной

⁷ Интересно отметить, что Толлмин получил решение для турбулентной струи раньше, чем Шлихтинг для ламинарной

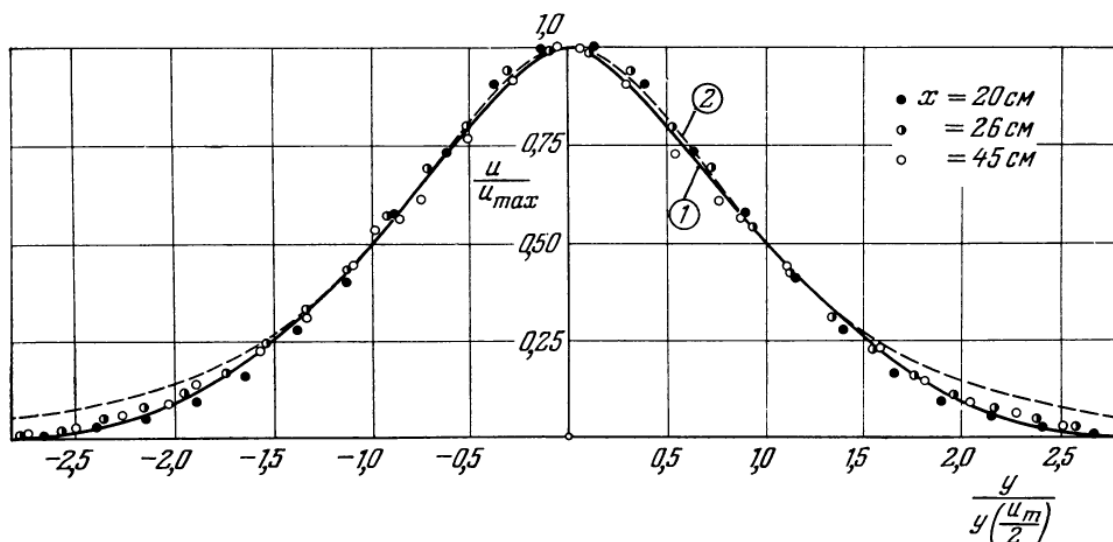


Рисунок 2.17. Профиль скорости осредненной по времени продольной компоненты скорости. Символы соответствуют экспериментам Райхардта, линия '1' – решение согласно формуле (2.90), '2' – решение при постоянной ν_t . Иллюстрация взята из книги Шлихтинга [79]. Поперечная координата (здесь y) нормирована на полуширину струи, продольная – на значение осредненной по времени продольной скорости на оси

вязкости в этой области, где турбулентные пульсации отсутствуют. В это же время теория Толлмина отлично ложится на экспериментальные данные.

Может показаться, что задача об *автономном* режиме течения в дальней области турбулентной струи решена. В литературе часто используется этот термин для обозначения течения, которое “забывает” о своих начальных/граничных условиях⁸. Для струй это означает, что детали ближней области струи не важны при рассмотрении характеристик дальнего поля. Струи, истекающие из различных сопловых устройств, имеющие различные выходные профили скорости и уровень пульсаций, все равно должны стремиться к некоторому *единому* асимптотическому автономному решению. Тем не менее, накопленные экспериментальные данные показывают, что это не так. Эксперименты Букреева и др. (1972) [187], Вигнанского и др. (1986) [84], Черепанова и Дмитренко (1988) [188] показали, что характеристики тела обтекания влияют на автономный режим течения в дальней области двумерного следа. Результаты были подтверждены последующими исследованиями [189–192]. Аналогичные численные [174] и экспериментальные результаты [193] были получены и для осесимметричных струй, для которых из законов сохранения (аналогично ламинарному случаю) можно выписать соотношения на осредненную по времени осевую скорость $\bar{u}_c$ и полуширину струи

⁸ Как уже указывалось ранее, ламинарные струи в отличие от турбулентных действительно забывают о характеристиках потока у сопла, что отражается в асимптотическом разложении решения по степеням $1/R$

Таблица 2.2. Использованная литература в хронологическом порядке публикации: WL – Вигнанский и Фидлер (1969) [194], BP – Богуславски и Попиель (1979) [197], PL – Панчапакесан и Ламли (1993) [195], HCG – Хуссейн, Капп и Джордж (1994) [196], WL – Вайсграбер и Липманн (1998) [198], FOK – Фердман, Отюген и Ким (2000) [199], ХА – Ксу и Антониа (2002) [200], Q – Куинн (2006) [201], FBP – Феллуа, Бол и Поллард (2009) [202], VP – Воурос и Панадис (2013) [203], МАН – Мулляджанов, Абдуракипов и Ханъялич (2017) [204]

Авторы	сопло	Re	x/D	x_0/D	K	K_δ
WF [194]	сужение	5.0×10^5	< 50	3.0	5.7	–
		5.0×10^5	> 50	7.0	5.0	–
BP [197]	труба	$(5.1–12.5) \times 10^4$	< 12	0.5	5.9	0.08
PL [195]	сужение	5.0×10^5	30 – 160	0.0	6.07	0.096
HCG [196]	сужение	5.0×10^5	30 – 120	2.7	5.9	0.094
WL [198]	сужение	5.0×10^5	17 – 27	–	6.7	–
FOK [199]	труба	2.4×10^4	≥ 15	2.5	6.7	0.09
ХА [200]	сужение	8.6×10^5	20 – 75	3.7	5.6	0.095
	труба	8.6×10^4	20 – 75	2.6	6.5	0.086
Q [201]	отверстие	1.84×10^5	15 – 31	2.15	5.99	0.096
	сужение	1.84×10^5	15 – 31	3.65	6.1	0.098
FBP [202]	сужение	5.0×10^5	15 – 29	3.0	5.59	–
VP [203]	труба	5.5×10^3	< 60	2.7	5.7	0.078
МАН [204]	труба	5.3×10^3	≤ 15	–1.4	5.88	0.08

δ :

$$\frac{\bar{u}_c^0}{\bar{u}_c} = \frac{1}{K} \left(\frac{x}{D} - \frac{x_0}{D} \right), \quad \frac{\delta}{D} = K_\delta \left(\frac{x}{D} - \frac{x_\delta}{D} \right), \quad (2.91)$$

где $\bar{u}_c^0$ – значение скорости на оси около сопла, D – его диаметр, K и K_δ – соответствующие коэффициенты затухания скорости и роста ширины струи, x_0 и x_δ – значения так называемого “виртуального” источника. В табл. 2.2 показаны некоторые значения этих параметров для экспериментальных данных из литературы, среди которых ставшие уже классическими работы Вигнанского и Фидлера (1969) [194], Панчапакесана и Ламли (1993) [195], Хуссейна, Каппа и Джорджа (1994) [196] и других. Видно, что существует большой разброс значений x_0 , K и K_δ , который вряд ли можно объяснить только лишь погрешностью в эксперименте.

Некоторое время назад Джордж (1989) [85] впервые показал аналитически, что справедлива гипотеза о том, что автомодельное решение при достаточном удалении от начала

координат не универсально (см. также [205]). Согласно этой теории существует множество автомодельных решений, параметром в которых являются характеристики ближнего участка струи. Схематически покажем, как можно прийти к этому выводу. Как и ранее рассмотрим осредненное по времени уравнение на продольную компоненту импульса в приближении пограничного слоя (при больших числах Рейнольдса), а также уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{u}_r) = 0, \quad (2.92)$$

$$\bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{u'_x u'_r}). \quad (2.93)$$

Будем использовать безразмерную переменную $\eta = r/\delta(x)$, где δ – полуширина струи как функция продольной координаты. Продольная компонента скорости и сдвиговые напряжения Рейнольдса ищутся в следующем виде:

$$\bar{u}_x(x, r) = U_s(x) f(\eta), \quad (2.94)$$

$$\overline{u'_x u'_r}(x, r) = R_s(x) g(\eta), \quad (2.95)$$

где f и g – безразмерные функции переменной η . Зависимость от продольной координаты выражается через функции U_s и R_s . Из уравнения неразрывности можно выразить радиальную компоненту скорости через продольную:

$$\bar{u}_r = -\frac{1}{r} \int_0^r \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} r' dr' = -\frac{\delta}{\eta} \int_0^\eta \left(\frac{dU_s}{dx} f - \frac{U_s}{\delta} \frac{d\delta}{dx} \eta' \frac{df}{d\eta'} \right) \eta' d\eta', \quad (2.96)$$

где было использовано соотношение

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\eta}{\delta} \frac{d\delta}{dx}. \quad (2.97)$$

Уравнение (2.95) после подстановки (2.96) и некоторых алгебраических упрощений примет следующий вид:

$$\left[U_s \frac{dU_s}{dx} \right] \left(f^2 - \frac{1}{\eta} \frac{df}{d\eta} \int_0^\eta f \eta' d\eta' \right) - \left[2 \frac{U_s^2}{\delta} \frac{d\delta}{dx} \right] \frac{1}{\eta} \frac{df}{d\eta} \int_0^\eta f \eta' d\eta' = - \left[\frac{R_s}{\delta} \right] \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} (\eta g). \quad (2.98)$$

Переменные можно разделить, если множители при каждом слагаемом, зависящие только от x (в квадратных скобках), пропорциональны друг другу. Если это условие выполняется, тогда:

$$U_s \frac{U_s}{dx} \propto \frac{U_s^2}{\delta} \frac{d\delta}{dx} \propto \frac{R_s}{\delta}. \quad (2.99)$$

Самое время отметить, что коэффициенты пропорциональности могут зависеть от деталей начальных/граничных условий. Первое соотношение дает следующее условие:

$$\frac{1}{U_s} \frac{dU_s}{dx} \propto \frac{1}{\delta} \frac{d\delta}{dx}, \quad (2.100)$$

которое после интегрирования сводится к равенству

$$U_s(x) = U_s(x_0) \left[\frac{\delta(x)}{\delta(x_0)} \right]^n \propto \delta(x)^n, \quad (2.101)$$

причем показатель n ($= -1$) должен определиться из закона сохранения полного потока импульса поперек струи (см. Приложение 1 в [196]). Отметим, что если в осредненном уравнении на продольную компоненту импульса учесть также вязкие слагаемые, то тогда n необходимо положить равным -1 немедленно. Отсюда вытекают известные соотношения на осредненную осевую скорость и полуширину струи в дальней автомодельной области:

$$U_s(x) \propto \delta^{-1}, \quad \delta \propto x. \quad (2.102)$$

Важным является соотношение на Рейнольдсовы напряжения, полученное в (2.99):

$$R_s \propto U_s^2 \frac{d\delta}{dx}. \quad (2.103)$$

Этот результат был впервые получен в работе [85], а именно, что сдвиговые Рейнольдсовы напряжения определяются не просто квадратом масштаба скорости U_s^2 [82, 206], но содержат также информацию о ближнем поле, которое и определяет угол раскрытия струи $d\delta/dx$. Если переопределить радиальную функцию Рейнольдсовых напряжений как

$$\tilde{g} = \left[\frac{R_s}{U_s^2 d\delta/dx} \right] g, \quad (2.104)$$

тогда уравнение на продольную компоненту импульса приобретает вид

$$-f^2 - \frac{1}{\eta} \frac{df}{d\eta} \int_0^\eta f \eta' d\eta' = -\frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} (\eta \tilde{g}), \quad (2.105)$$

которое означает, что зависимость от начальных условий на срезе сопла не проявляется в явном виде в правильном образом отнормированных профилях скорости в автомодельной области. Эта зависимость проявляется, как уже было сказано выше, в значении скорости расширения струи $d\delta/dx$.

Стоит отметить, что число Рейнольдса, построенное по локальной скорости и длине, т.е. $Re_s = U_s(x)\delta(x)/\nu$, согласно (2.102), постоянно на любом расстоянии от начала координат. Таким образом, начальные условия, определяющие скорость затухания импульса на оси и расширения струи, приводят к одному из многих возможных автомодельных решений в дальней области. Вместе с тем, интегральный, Колмогоровский масштаб и микромасштаб Тейлора растут вниз по потоку с одинаковой скоростью. Важный результат был получен в работах [207, 208], касающийся статистических характеристик турбулентной струи в продольном направлении. Было показано теоретически и позже подтверждено экспериментально, что

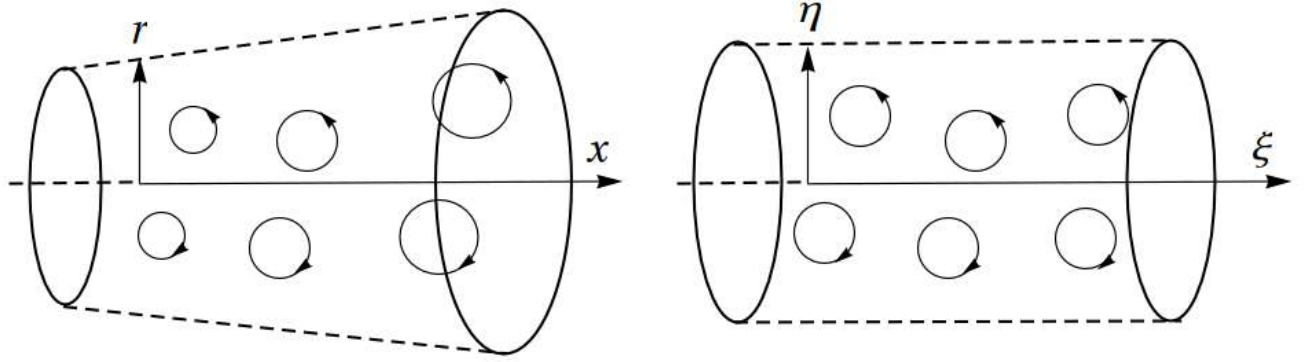


Рисунок 2.18. Схематическое изображение области автомодельного струйного течения в цилиндрических координатах (слева) и в новых модифицированных координатах (справа)

существуют автомодельные решения также и для уравнений на двухточечных корреляций пульсаций скорости. В силу громоздкости уравнений вывод здесь не приводится. Основным результатом является то, что продольная и радиальная переменные разделяются в том случае, если двухточечные корреляции зависят только от разности $\xi_2 - \xi_1$, где $\xi = \log x$, а индексы 1 и 2 соответствуют двум произвольным точкам в пространстве. Таким образом, мы приходим к заключению, что в турбулентной круглой струе помимо азимутального направления существует еще одна однородная координата – логарифм продольной координаты⁹. Основная идея данной главы – получить модифицированные уравнения Навье–Стокса при помощи замены переменных $\eta = r/\delta$ и $\xi = \log x$.

Коническую область в физическом пространстве можно представить в виде цилиндра, если используется переменная η вместо r (см. рис. 2.18). Важно отметить, что в координатах (η, ξ) пространственный масштаб характерных вихрей не меняется в продольном направлении. Очевидно, что угловую переменную преобразовывать не нужно. Последней переменной задачи, которую необходимо модифицировать, является время t . Интуитивно понятно, что характерное время оборота вихря будет меньше, чем ближе вихрь находится к началу координат, где характерные масштабы меньше, а скорости – выше. Опишем эти зависимости математически. Для крупномасштабных структур в струе характерное время определяется

⁹ Известно, что если в задаче есть однородное направление, то соответствующую величину удобно представлять как суперпозицию гармоник Фурье. Однако, если в показателе экспоненты стоит переменная $\xi = \log x$, то эта зависимость эквивалентна степенной по x . Именно этот результат был использован в линейном анализе устойчивости в предыдущей секции

как

$$t \sim \delta(x)/U_s(x) \propto x^2, \quad (2.106)$$

т.е. быстро растет в продольном направлении. Попробуем преобразовать переменную t таким образом, чтобы характерное время оборота вихря определенного масштаба было одинаково вдоль ξ (см. рис. 2.18). Предлагается сперва рассмотреть следующую комбинацию:

$$\tau = t/\delta(x)^2. \quad (2.107)$$

Определим $\delta(x) = \alpha x$ согласно (2.102), где $\alpha = \alpha(\star)$ зависит от условий в ближней области струи, что соответствует функции от $\star$. Используя правило преобразования от $x_i = (t, x, r, \phi)$ к $\xi_i = (\tau, \xi, \eta, \phi)$ производных по координатам

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi_j}, \quad (2.108)$$

получаем следующие соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial}{\partial \tau} = \alpha^{-2} e^{-2\xi} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (2.109)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} = \\ &= -\frac{2t}{\delta^3} \frac{d\delta}{dx} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{r}{\delta^2} \frac{d\delta}{dx} \frac{\partial}{\partial \eta} = \\ &= -2\tau e^{-\xi} \frac{\partial}{\partial \tau} + e^{-\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \eta e^{-\xi} \frac{\partial}{\partial \eta}, \end{aligned} \quad (2.110)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial \tau}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \phi} = \\ &= \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} = \alpha^{-1} e^{-\xi} \frac{\partial}{\partial \eta}, \end{aligned} \quad (2.111)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi} &= \frac{\partial \tau}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial \xi}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \phi}. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Проблема, возникающая с текущим определением переменной τ , состоит в том, что время явным образом появляется в выражении на $\partial/\partial x$, что, очевидно, не является правильным результатом. Физический смысл следующего преобразования будет ясен в конце этой главы. Модифицируем нормализацию:

$$\tau = \log(t/\delta(x)^2). \quad (2.113)$$

Тогда вместо (2.109)–(2.112) получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \alpha^{-2} e^{-2\xi} e^{-\tau} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (2.114)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = -2e^{-\xi} \frac{\partial}{\partial \tau} + e^{-\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - e^{-\xi} \eta \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (2.115)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \alpha^{-1} e^{-\xi} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (2.116)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (2.117)$$

Заметим, что теперь в $\partial/\partial x$ явная зависимость от времени отсутствует, однако, появился множитель $e^{-\tau}$ в производной $\partial/\partial t$. Эту особенность мы обсудим после вывода модифицированных уравнений Навье–Стокса. Далее вместо поля скорости и давления рассмотрим некоторые “приведенные” поля $\mathbf{v}$ и q , где уже учтено затухание в продольном направлении:

$$\mathbf{u}(x, r, \phi, t) = \delta(x) \mathbf{v}(\xi, \eta, \phi, \tau) = \alpha e^{\xi} \mathbf{v}(\xi, \eta, \phi, \tau), \quad (2.118)$$

$$p(x, r, \phi, t) = \delta^2(x) q(\xi, \eta, \phi, \tau) = \alpha^2 e^{2\xi} q(\xi, \eta, \phi, \tau). \quad (2.119)$$

Теперь после обоснованного определения новых координат и “приведенных” полей скорости и давления можно приступить к анализу уравнений Навье–Стокса.

Сперва рассмотрим модифицированное из (1.106) уравнение неразрывности. Для “приведенного” поля скорости в новых пространственно-временных координатах получаем:

$$\frac{\partial v_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial(\eta v_{\eta})}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial v_{\phi}}{\partial \phi} = S_c, \quad (2.120)$$

$$S_c = \frac{\partial v_{\xi}}{\partial \xi} + \alpha(v_{\xi} - \frac{\partial v_{\xi}}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial v_{\xi}}{\partial \eta} + 2 \frac{\partial v_{\xi}}{\partial \tau}), \quad (2.121)$$

где слева в уравнении неразрывности стоит оператор дивергенции, действующий на $\mathbf{v}$, а справа – несколько новых слагаемых, объединенных в источниковый член S_c . Таким образом, формально в новых координатах среда становится сжимаемой.

Закон сохранения импульса в цилиндрических координатах (1.107)–(1.109) в безразмерном виде для “приведенных” полей $\mathbf{v}$ и q в новых координатах имеют вид:

$$\frac{\partial v_{\xi}}{\partial \tau} + (\mathbf{v} \cdot \nabla') v_{\xi} = -\frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{1}{Re} \Delta' v_{\xi} + S_{\xi}, \quad (2.122)$$

$$\frac{\partial v_{\eta}}{\partial \tau} + (\mathbf{v} \cdot \nabla') v_{\eta} - \frac{v_{\phi}^2}{\eta} = -\frac{\partial q}{\partial \eta} + \frac{1}{Re} (\Delta' v_{\eta} - \frac{v_{\eta}}{\eta^2} - \frac{2}{\eta^2} \frac{\partial v_{\phi}}{\partial \phi}) + S_{\eta}, \quad (2.123)$$

$$\frac{\partial v_{\phi}}{\partial \tau} + (\mathbf{v} \cdot \nabla') v_{\phi} + \frac{v_{\eta} v_{\phi}}{\eta} = -\frac{1}{\eta} \frac{\partial q}{\partial \phi} + \frac{1}{Re} (\Delta' v_{\phi} - \frac{v_{\phi}}{\eta^2} + \frac{2}{\eta^2} \frac{\partial v_{\eta}}{\partial \phi}) + S_{\phi}, \quad (2.124)$$

где

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla') = v_{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + v_{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{v_{\phi}}{\eta} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (2.125)$$

$$\Delta' = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta \frac{\partial}{\partial \eta}) + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad (2.126)$$

где штрихи у дифференциальных операторов означают дифференцирование по новым координатам. Источниковые слагаемые S_ξ , S_η и S_ϕ в правой части уравнений (2.122)-(2.124) выражаются как

$$\begin{aligned}
S_\xi = & (1 - e^{-\tau}) \frac{\partial v_\xi}{\partial \tau} + v_\xi \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \alpha (2v_\xi \frac{\partial v_\xi}{\partial \tau} + v_\xi^2 - v_\xi \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \eta v_\xi \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta}) + \\
& + \frac{\partial q}{\partial \xi} + \alpha (2 \frac{\partial q}{\partial \tau} + 2q - \frac{\partial q}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial q}{\partial \eta}) - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\alpha^2}{Re} (2v_\xi + \\
& + 4\eta \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} + \eta^2 \frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \eta^2} - 3 \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} - 2\eta \frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \xi^2} + 6 \frac{\partial v_\xi}{\partial \tau} + \\
& + 4\eta \frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \tau \partial \eta} - 4 \frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \tau \partial \xi} + 4 \frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \tau^2}), \tag{2.127}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_\eta = & (1 - e^{-\tau}) \frac{\partial v_\eta}{\partial \tau} + v_\xi \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} + \alpha (2v_\xi \frac{\partial v_\eta}{\partial \tau} + v_\xi v_\eta - v_\xi \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} + \eta v_\xi \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta}) - \\
& - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_\eta}{\partial \xi^2} + \frac{\alpha^2}{Re} (2v_\eta + 4\eta \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} + \eta^2 \frac{\partial^2 v_\eta}{\partial \eta^2} - 3 \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} - 2\eta \frac{\partial^2 v_\eta}{\partial \xi \partial \eta} + \\
& + \frac{\partial^2 v_\eta}{\partial \xi^2} + 6 \frac{\partial v_\eta}{\partial \tau} + 4\eta \frac{\partial^2 v_\eta}{\partial \tau \partial \eta} - 4 \frac{\partial^2 v_\eta}{\partial \tau \partial \xi} + 4 \frac{\partial^2 v_\eta}{\partial \tau^2}), \tag{2.128}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_\phi = & (1 - e^{-\tau}) \frac{\partial v_\phi}{\partial \tau} + v_\xi \frac{\partial v_\phi}{\partial \xi} + \alpha (2v_\xi \frac{\partial v_\phi}{\partial \tau} + v_\xi v_\eta - v_\xi \frac{\partial v_\phi}{\partial \xi} + \eta v_\xi \frac{\partial v_\phi}{\partial \eta}) - \\
& - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \xi^2} + \frac{\alpha^2}{Re} (2v_\phi + 4\eta \frac{\partial v_\phi}{\partial \eta} + \eta^2 \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \eta^2} - 3 \frac{\partial v_\phi}{\partial \xi} - 2\eta \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \xi \partial \eta} + \\
& + \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \xi^2} + 6 \frac{\partial v_\phi}{\partial \tau} + 4\eta \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \tau \partial \eta} - 4 \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \tau \partial \xi} + 4 \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \tau^2}). \tag{2.129}
\end{aligned}$$

Очевидно, что для стационарного турбулентного режима экспонентой $e^{-\tau}$ можно пренебречь в случае $\tau \rightarrow \infty$. Производные по времени появляются в нескольких других местах. В данной работе не проводится попытки численного решения полученной системы уравнений, однако, основные положения их вывода исследуются в следующей главе на примере базы данных круглой турбулентной струи, полученной при помощи DNS. Будет показано, что, в частности, преобразование времени (2.113) действительно позволяет говорить о том, что характерные времена турбулентного движения при различных ξ идентичны, что подтверждается полным совпадением спектров турбулентных пульсаций. Дальнейшие исследования будут направлены на то, чтобы решить полученную систему уравнений с периодическими граничными условиями, что позволит исследовать асимптотические струйные решения при различных α и Re .

2.5. Выводы по главе

В данной главе теоретически исследовано дальнейшее поле затопленной струи, вызванное точечным источником движения.

Представлено аналитическое решение для дальнего поля ламинарной струи, соответствующее возмущению точного решения Ландау и второму члену асимптотического разложения по обратным степеням расстояния R от источника, которое определяется поперечными компонентами вектора момента импульса. Найденное решение описывает течение неосесимметричных струй далеко от точечного источника движения. Это позволило сравнить эффект “памяти” потока о входных условиях и указать на различия асимптотического поведения ламинарных и турбулентных струй.

Решена задача устойчивости затопленной ламинарной струи, соответствующей точному решению Ландау. Показано, что возмущения растут с R степенным образом. Получены критические значения числа Рейнольдса для возмущений с азимутальным волновым числом $m = 0$ и 1 , равные $Re_{D,crit}^{m=0} = 13.98$ и $Re_{D,crit}^{m=1} = 27.10$. Показано, что при $Re_D \approx 31$ инкремент роста $m = 1$ становится выше, чем для $m = 0$. Предложен критерий оценки местоположения ламинарно-турбулентного перехода, основываясь на отношении скорости возмущения к скорости основного потока. Впервые получено хорошее количественное соответствие между линейной теорией и экспериментальными данными вплоть до чисел Рейнольдса $Re_D \approx 2000$ для значения расстояния от кромки сопла, на котором происходит турбулизация струи.

Получены уравнения для “модифицированного” поля скорости и давления для дальнего поля затопленной струи. Новые функции учитывают, что поле скорости и давления в автомодельной области затухают с R как $1/R$ и $1/R^2$, соответственно. Кроме того, новые пространственные координаты отнормированы при помощи локальной полуширины струи. Переменная, соответствующая физическому времени, также отнормирована на локальные характеристики струи так, что спектральные характеристики турбулентности не меняются вдоль продольной координаты. Предложена идея численного расчета полученных уравнений в цилиндрической области с периодическими граничными условиями, что становится возможным благодаря введенным нормировкам пространственных и временных переменных, а также полей скорости и давления.

Когерентные структуры в турбулентной струе

3.1. Введение

Крупномасштабные организованные (когерентные) вихревые структуры во многом определяют динамические характеристики сдвиговых турбулентных течений. Эти структуры особо ярко выражены в таких потоках как следы, струи, слои смешения [62, 209] и активно участвуют в процессе перемешивания и вовлечение покоящейся жидкости в поток [210], а также при генерации аэроакустического шума [211]. Эти структуры крайне чувствительны к начальным и граничным условиям [56, 83, 193, 200, 212, 213] и во многом определяют асимптотику автомодельного режима течения на больших расстояниях от источника [84, 85, 192, 214, 215]. Поиск оптимальных способов управления характеристиками таких потоков требует глубокого понимания механизмов развития и взаимодействия основных когерентных вихрей.

Как уже обсуждалось в предыдущей главе подавляющее большинство исследований в литературе рассматривает течение из профилированного сопла с “однородным” (или “наполненным”) профилем скорости на выходе. В такой конфигурации удастся получить достаточно тонкий пограничный слой около стенки и низкий уровень турбулентных пульсаций. Динамика ближней области струи помимо числа Рейнольдса определяется также отношением толщины потери импульса θ_{th} , характеризующей профиль скорости, к диаметру сопла D . Третьим важным фактором является уровень турбулентных пульсаций. Эти параметры влияют на развитие неустойчивости Кельвина – Гельмгольца около кромки сопла и формирование крупномасштабных энергонесущих вихревых колец, которые порождаются сдвиговой неустойчивостью в осесимметричном слое смешения. Изначальная скорость роста возмущений хорошо описывается линейной теорией устойчивости, однако, далее при достижении достаточного размера вихревые кольца начинают нелинейно взаимодействовать между собой, что приводит к турбулизации струи. Юль (1978) [216] схематически изобразил эволюцию возмущений около кромки сопла в виде ламинарных вихревых колец, развитие азимутальных неустойчивостей и переход к существенно трехмерному и далее турбулентному струйному течению (см. рис. 3.1).

У кромки сопла частота (и длина волны) наиболее неустойчивых возмущений в слое смешения зависит от θ_{th} . Вниз по течению из-за диффузии локального профиля скорости,

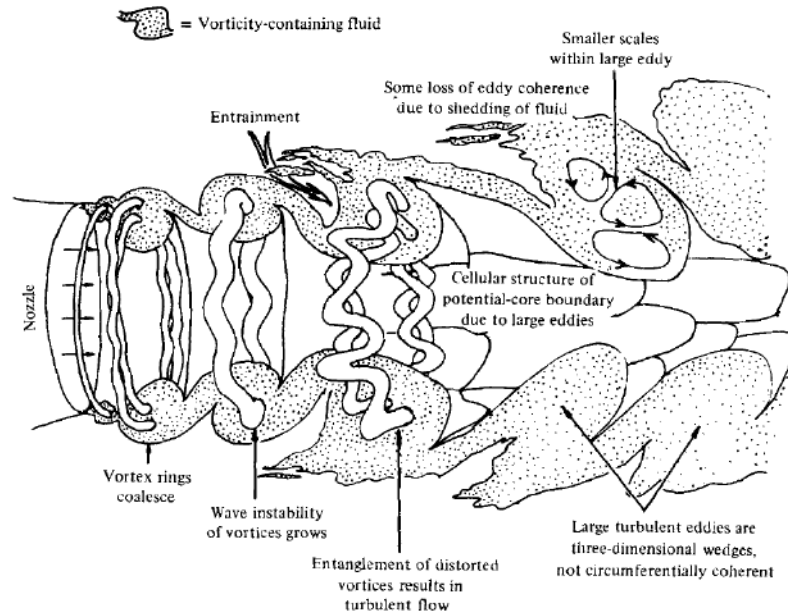


Рисунок 3.1. Иллюстрация ламинарно-турбулентного перехода в ближней области круглой струи [216], вытекающей из профилированного сопла

которая приводит к росту толщины потери импульса, характерным масштабом становится полуширина струи. Кроу и Шампань (1971) [56] впервые обнаружили низкочастотные возмущения на расстоянии $x/D = 4$, которые проявлялись в виде череды крупномасштабных вихревых образований. Характерная безразмерная частота этого низкочастотного движения соответствует числу Струхала $St_D \approx 0.3$, построенному по диаметру сопла D и среднерасходной скорости вытекающей жидкости U_b . Авторы называли это когерентное движение *предпочитаемой модой* (*preferred mode*), которая позже активно изучалась различными исследователями, и было показано, что St_D лежит в некотором диапазоне значений в зависимости от граничных условий (на выходе из сопла) [83]. Недавний глобальный линейный анализ восприимчивости, проведенный Гарно и др. (2013) [217], показал, что область наибольшего отклика потока на вносимые возмущения при $St_D \approx 0.45$ расположена в конце потенциального ядра струи и покрывает также примыкающий слой смешения. Таким образом, существует тесная связь между возмущениями в слое смешения и непосредственно неустойчивостью струи в такой постановке задачи, что усложняет исследование собственных низкочастотных колебаний струйных течений.

В духе исследования Кроу и Шампань [56], которые вносили возмущения в пограничный слой внутри сопла для того, чтобы стимулировать рост азимутальных неустойчивостей на вихрях Кельвина–Гельмгольца и изолировать крупномасштабные вихревые структуры (синусоидальные когерентные движения струи), имеет смысл исследовать каноническую круглую струю, вызванную полностью развитым турбулентным потоком из длинной трубы.

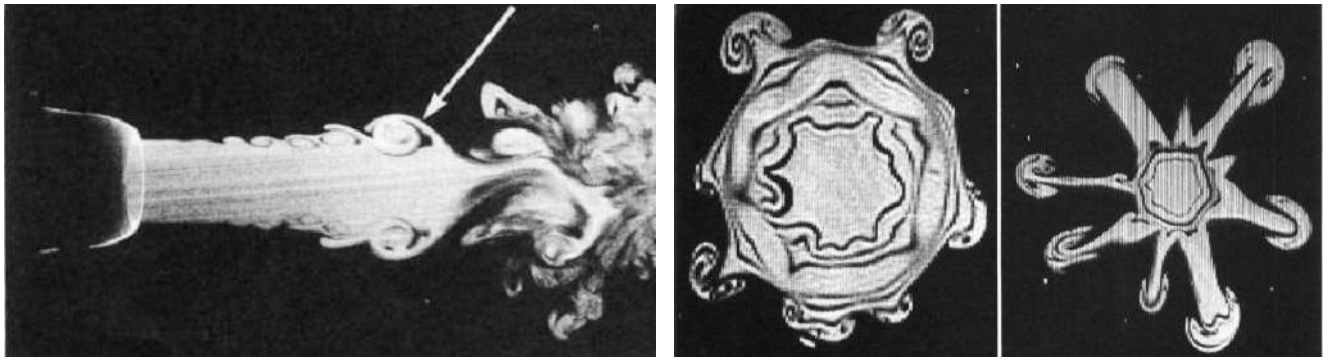


Рисунок 3.2. Визуализация течения струи из сопла с поджатием, полученная в работе [218]. Слева показано течение в плоскости $x - r$, которая проходит через ось симметрии. Справа изображено два последовательных момента времени в плоскости $r - \phi$ при $x/D = 3.5$ (отмечено белой стрелкой на левом рисунке)

В таком случае в задаче имеется только один безразмерный критерий – число Рейнольдса, который полностью определяет выходные граничные условия на срезе трубы. Развитое турбулентное течение из трубы не позволяет образовываться квазиламинарным вихрям Кельвина–Гельмгольца. Таким образом, описанная каноническая задача отлично подходит для исследования низкочастотных пульсаций в струйном течении.

В литературе имеется ряд публикаций [193, 200, 212], в которых исследователи сравнивают средние и спектральные характеристики для различных граничных условий струйных течений, включая поток из трубы. Для канонической струи проводилась визуализация в эксперименте [219], а также проделаны обширные измерения характеристик течения [203, 220, 221] для малых чисел Рейнольдса. В работах [197, 222–224] рассматривались достаточно высокие числа Рейнольдса, при этом изучались также распределения температуры и концентрации пассивной примеси. Для определения когерентной компоненты пульсаций скорости струи обычно используется метод POD, описанный в пункте 1.5. Этот подход часто применяется к двумерным экспериментальным данным как, например, в работах Цинтринити и Джорджа (2000) [225], Юнга и др. (2004) [226], Гамарда и др. (2004) [227], Икбала и Томаса (2007) [228] и многих других. Стоит отметить, что анализ в основном проводился для струй с поджатием (профилированное сопло). Цинтринити и Джордж [225] использовали одновременные измерения продольной скорости массивом термоанемометров на расстоянии $x/D = 3$ от кромки сопла и показали, что необходимо учесть пять гармоник Фурье с азимутальными числами $m = (0, 3, 4, 5, 6)$ для достоверного описания динамики потока. Очевидно, что это связано с вихрями Кельвина–Гельмгольца ($m = 0$), а также неустойчивостью, которая приводит к формированию вторичных течений и продольных вихревых

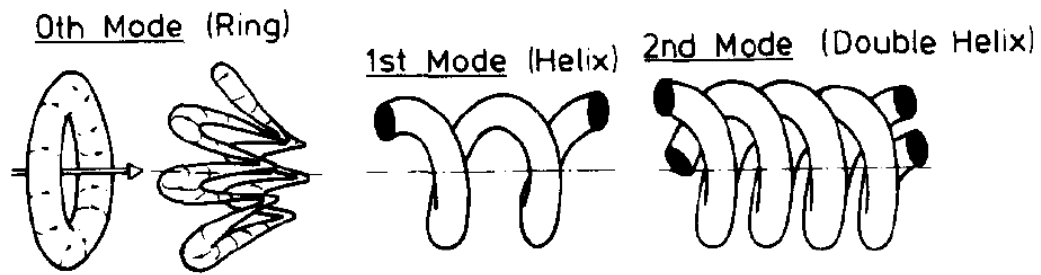


Рисунок 3.3. Основные вихри в круглой турбулентной струе согласно Фидлеру (1988) [71]

структур, исследованных, например, в работе Липманна и Гариба (1992) [218]. На рис. 3.2 показана визуализация течения круглой струи в ближнем поле. На поперечных картинках хорошо видно развитие азимутальной неустойчивости с семью радиальными струйками. Авторы показали, что эта азимутальная неустойчивость имеет прямое отношение к величине интенсивности вовлечения окружающей жидкости в поток. Очевидно, что детали азимутальной неустойчивости будут зависеть как обсуждалось выше от числа Рейнольдса, толщины потери импульса, а также уровня и распределения турбулентных пульсаций, помимо других деталей потока. Юнг и др. [226] и Гамард и др. [227] провели исследование, аналогичное работе Цинтринити и Джорджа, рассмотрев ближнюю и дальнюю область струи в диапазонах $2 \leq x/D \leq 6$ и $15 \leq x/D \leq 69$, соответственно. Они обнаружили, что доля турбулентной кинетической энергии в симметричной моде $m = 0$ быстро падает с расстоянием в ближней области, в то время как $m = 2$ становится наиболее энергетичной в конце потенциального ядра струи (область смыкания слоев смешения). Икбал и Томас [228] показали, что если использовать все три компоненты скорости для POD анализа, тогда в дальнем поле струи $m = 1$ становится более энергетичной по сравнению с $m = 2$. В данной работе используются все три компоненты скорости.

Данные численного моделирования также активно используются совместно с методом POD и линейной теорией устойчивости для идентификации характерных вихревых структур в потоке. Фройнд и Колониус (2009) [229] использовали результаты прямого численного моделирования дозвуковой струи, полученные Фройндом (2001) [230], и показали, что в конце потенциального ядра присутствуют моды $m = 0$ и $m = 1$. Интересно отметить, что для ламинарной струи при помощи прямого численного моделирования Данаила и др. (1997) [231] обнаружили смену моды неустойчивости с $m = 0$ на $m = 1$ при увеличении Re . Аналогичная сменяемость азимутального числа доминирующей неустойчивости наблюдалась экспериментально в турбулентной струе Маттингли и Чангом (1974) [232], Чаном (1977) [233] и другими,

при этом параллельно измерениям обычно использовалась линейная теория устойчивости для интерпретации результатов. Описанные результаты находятся в согласии с линейной теорией устойчивости (первая работа Бэтчелора и Гилла [148]), а также исследовались во множественных последующих экспериментах [185, 234–240]. Тсо и Хуссейн (1981) [234] использовали массив термоанемометров для выявления и восстановления пространственной формы крупномасштабных когерентных структур в дальнем поле турбулентной струи. Авторы показали, что в потоке доминируют спиральные ($m = 1$) и осесимметричные ($m = 0$) возмущения, а также вихри, имеющие форму двойной спирали ($m = 2$), при этом вихри с $m = 1$ наблюдаются чаще всего, см. рис. 3.3. Димотакис и др. (1983) [185] измеряли концентрацию пассивной примеси, что позволило также указать на наличие спиральных крупномасштабных структур в потоке. Вэнстром и др. (2005) [241], Шинииб и др. (2008) [240] и Вэнстром и др. (2012) [242] применили POD анализ к двумерным измерениям дальнего поля струи в плоскости $x - r$. Руи и др. (2014, 2015) [243, 244] использовали результаты расчетов LES и DNS [245, 246] и показали, что наиболее энергетичной модой является спиральный вихрь, однако, его динамические характеристики остались не проанализированы.

3.2. Незакрученная турбулентная струя

В данной работе исследуется вихревая динамика в затопленной круглой струе, вытекающей из длинной трубы с полностью развитым турбулентным профилем скорости. Первая база данных, анализируемая в пункте 3.2.1, получена при помощи LES и содержит только ближнюю область струи $x/D \leq 15$ при числе Рейнольдса $Re_D = 5300$. Струйный поток вытекал в спутный поток очень низкой интенсивности по сравнению со среднерасходной скоростью в трубе ($U_{co} = 0.04U_b$). Эти результаты численного моделирования проанализированы при помощи POD в плоскости $r - \phi$ при различных значениях x как и многие экспериментальные работы, а также применялся линейный анализ устойчивости для правильной интерпретации спектральных характеристик характерных мод. Вторая база данных, описанная в пункте 3.2.2, получена при помощи DNS и включает дальнюю область струи вплоть до $x/D = 40$. Рассматривается близкое число Рейнольдса $Re_D \approx 6000$. Спутный поток имеет более высокое значение скорости $U_{co} \approx 0.3U_b$, по сравнению с первым случаем. Проводится трехмерный анализ при помощи POD, а также решается линейная задачи устойчивости.

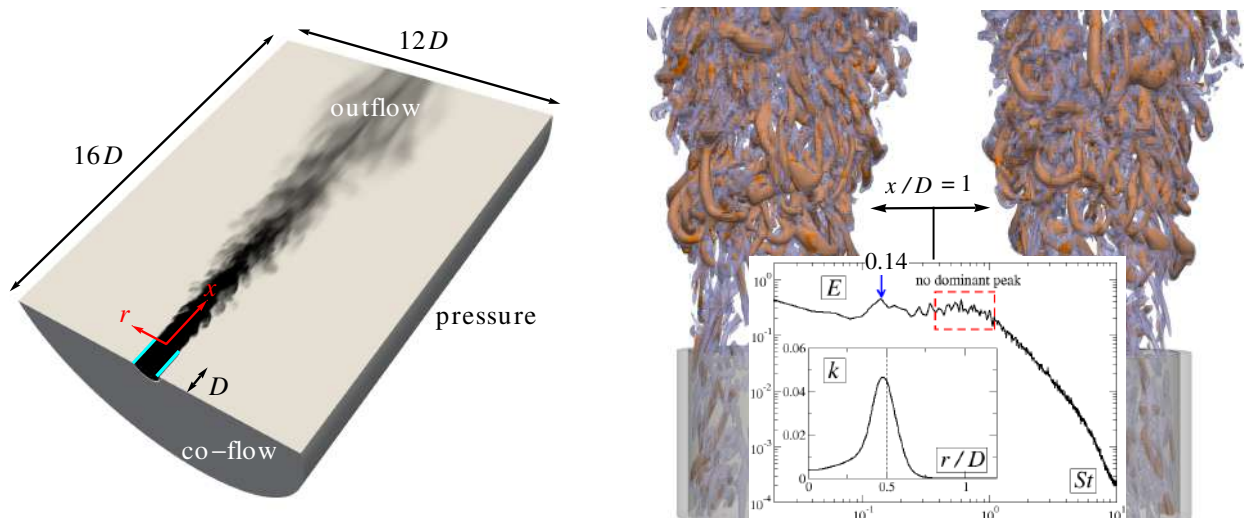


Рисунок 3.4. Слева: половина вычислительной области, цилиндрическая система координат (x, r, ϕ) и граничные условия. Мгновенное поле визуализирует концентрацию пассивной примеси. Светло-голубые линии обозначают твердые стенки фрагмента трубы толщиной $0.06D$ и длиной $1D$, на которых ставится условие прилипания для поля скорости. Справа: два последовательных момента времени, на которых показаны характерные вихревые структуры около кромки трубы (выхода), используя два значения изоповерхности Q -критерия ($Q = 0.5$ и $Q = 1.5$). На графике снизу представлен спектр турбулентной кинетической энергии в точке $x/D = 1$ и $r/D = 0.5$

3.2.1. Анализ данных моделирования методом крупных вихрей

¹В данной секции описываются результаты исследования канонической струи, вытекающей из круглой трубы при числе Рейнольдса $Re_D = 5300$, построенном по диаметру трубы D и среднерасходной скорости U_b . Результаты получены при помощи метода крупных вихрей (LES). Вычислительная область представляет собой цилиндр размером $12D$ в диаметре и $16D$ в длину. На рис. 3.4 показано мгновенное поле концентрации пассивной примеси, вытекающей из трубы с толщиной стенки $0.06D$, а также вычислительная область и граничные условия. Согласно работе Ханта и др. (1988) [247] вихревые структуры могут быть визуализированы при помощи изоповерхности Q -критерия, где $Q = (\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij})/2$. Тензоры S_{ij} и Ω_{ij} соответствуют симметричной и антисимметричной части тензора скорости деформации. Полностью развитый турбулентный поток из трубы имеет характерные продольные вихревые структуры около твердой стенки, которые можно наблюдать также около кромки сопла. Эти структуры взаимодействуют со слоем смешения, превращаясь в вихри на подобие шпилькообразных (hairpin), которые вскоре разрушаются вниз по потоку. Как уже было сказано в предыдущих секциях, в отличие от струй из сопел с поджатием, которые имеют почти однородный профиль скорости, рассматриваемое течение не имеет ярко выраженного пика в спектре турбулентных пульсаций в слое смешения (см. рис. 3.4). В это же время легко различить присутствие низкочастотных пульсаций в спектре в окрестности числа Струхала $St \approx 0.14$. Эта частота, как будет показано далее при помощи спектрального анализа и линейной теории устойчивости, не связана с неустойчивостью Кельвина–Гельмгольца, а представляет собой определенное синусоидальное и/или спиральное волновое когерентное движение. Для определения пространственной формы этих возмущений будет использоваться метод POD.

Проведены численные расчеты при помощи метода крупных вихрей (LES) и вычислительного кода T-FlowS, детали которого описаны в пункте 1.4. Граничные условия на выходе из области представляли собой нулевую производную на компоненты вектора скорости (outflow), на боковой стороне задавалось постоянное давление и также нулевая производная на скорость (pressure). Величина спутного потока на границе области $x = -1D$ равнялась $U_{co} = 0.04U_b$. На твердых стенках трубы задавалось условие прилипания. Входной профиль скорости генерировался в параллельном LES расчете течения в трубе длиной $5D$ с периодическими граничными условиями. Из вспомогательного расчета каждый шаг по времени копировалось поле скорости в фиксированной плоскости $r - \phi$ и подавалось в основную об-

¹ См. работы [4,5,17,18,28,30,31] в разделе “Публикации по теме диссертации”

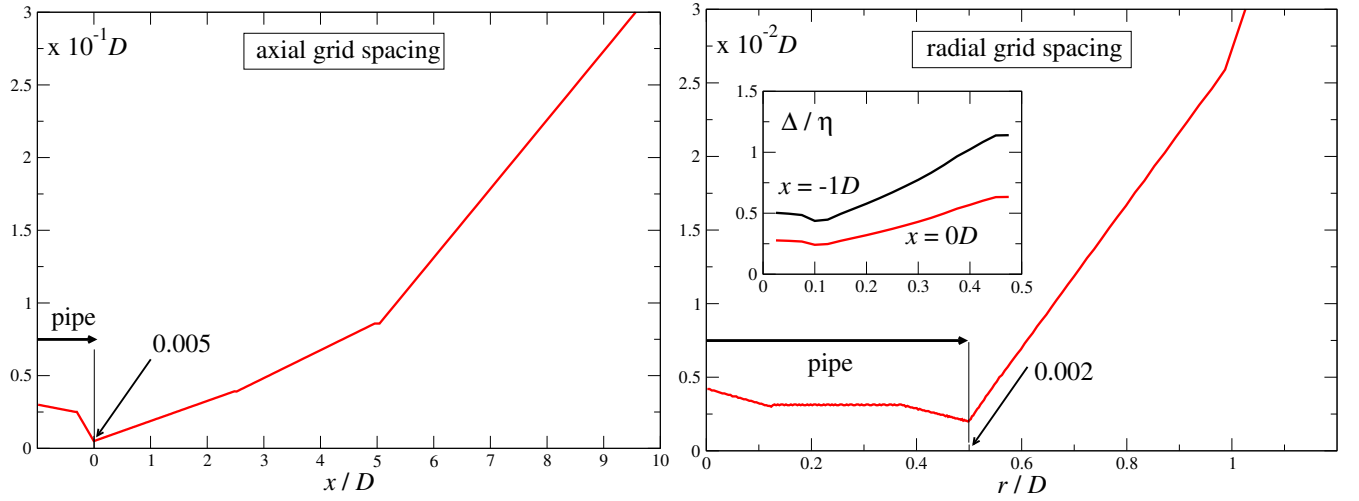


Рисунок 3.5. Размер вычислительных ячеек в продольном и радиальном направлении

ласть. Этот расчет был выполнен, используя сетку из 2.8×10^6 ячеек, что позволило получить хорошее согласие для радиального осредненного по времени профиля скорости и пульсаций с данными прямого численного моделирования из литературы [248, 249]. Вычислительная сетка в основной области состояла из $252 \times 282 \times 264$ ($\approx 16.7 \times 10^6$) гексагональных ячеек в радиальном, продольном и азимутальном направлении, соответственно. Около твёрдых стенок и в слое смешения было проведено существенное сгущение расчетных узлов с фактором, не превышающим 5 процентов (отношение длин двух соседних ячеек). Минимальная длина расчетной ячейки в продольном направлении составила $\Delta x = 0.005D$. На кромке трубы ($x = 0$) размеры ячейки около стенки составили $\Delta x^+ = 2.51$, $\Delta r^+ = 0.5$ и $(D\Delta\phi)^+/2 = 5.58$, обезразмеренные при помощи единиц стенки $-\nu/u_\tau$, u_τ – это скорость трения на стенке трубы (см. рис. 3.5). Разрешение во всей области удовлетворяет неравенству $\Delta/\eta < 12$ согласно рекомендациям в литературе [81], где $\Delta = (r\Delta x\Delta r\Delta\phi)^{1/3}$ – размер ячейки, $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$ – масштаб Колмогорова, ϵ – диссипация кинетической энергии турбулентности. Интересно отметить, что в трубе отношение $\Delta/\eta \approx 1$, где величина $\eta(r)$, осредненная по времени, соответствовала данным прямого численного моделирования [248].

На рис. 3.6 показано поле осредненной по времени продольной скорости и кинетической энергии турбулентности. В сечении $x/D = -1$ радиальные профили соответствуют характеристикам полностью развитого турбулентного течения в длинной трубе. Около сопла в слое смешения кинетическая энергия турбулентности быстро растет в интервале $x/D = 1 - 3$, однако, затем начинает затухать. Профиль скорости преобразуется в автомодельный профиль уже к $x/D = 10$. Поле k отчетливо указывает на существование так называемого “сохраняющегося ядра” (preserving core) аналогично потенциальному ядру в струях с ламинарным однородным входным профилем скорости [203]. Эта область характеризуется

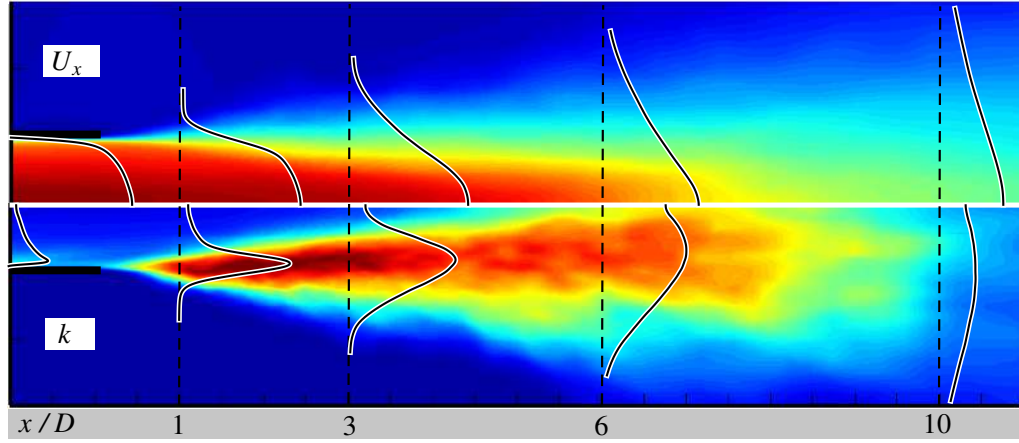


Рисунок 3.6. Осредненное по времени поле продольной скорости (сверху) и турбулентной кинетической энергии (снизу). Черными линиями показаны профили $\bar{u}_x$ и k в выбранных сечениях

относительно низким уровнем турбулентных пульсаций и протяженностью до $x/D \approx 4$, где слои смешения струи смыкаются.

Как уже обсуждалось в предыдущей главе, благодаря закону сохранения импульса на некотором расстоянии от источника осредненное по времени поле скорости убывает обратно пропорционально продольной координате, а полуширина струи линейно растет с x . Выпишем еще раз следующие соотношения:

$$\frac{\bar{u}_c^0}{\bar{u}_c} = \frac{1}{K} \left(\frac{x}{D} - \frac{x_0}{D} \right), \quad \frac{\delta}{D} = K_\delta \left(\frac{x}{D} - \frac{x_\delta}{D} \right), \quad (3.1)$$

где $\bar{u}_c^0$ – значение скорости на оси около сопла, D – его диаметр, K и K_δ – соответствующие коэффициенты затухания скорости и роста ширины струи, x_0 и x_δ – значения так называемого “виртуального” источника. Хотя в данном расчете мы исследуем только ближнюю область струи, интересно сравнить некоторые параметры автомодельных режимов с другими авторами. В табл. 3.1 показаны некоторые значения этих параметров для данных из литературы. Получено хорошее соответствие значений K и K_δ для разных данных, в то время как отрицательное значение виртуального источника скорее всего следует из-за недостаточно протяженной области вдоль x для оценки параметров автомодельности.

Рассмотрим количественно другой важный пространственный масштаб – толщину потери импульса:

$$\theta_{th} = \int \frac{\bar{u}_x - u_{co}}{\bar{u}_c - u_{co}} \left(1 - \frac{\bar{u}_x - u_{co}}{\bar{u}_c - u_{co}} \right) dr, \quad (3.2)$$

$$\theta_{th}^* = \frac{2}{D} \int \frac{\bar{u}_x - u_{co}}{\bar{u}_c - u_{co}} \left(1 - \frac{\bar{u}_x - u_{co}}{\bar{u}_c - u_{co}} \right) r dr, \quad (3.3)$$

Таблица 3.1. Использованная литература в хронологическом порядке публикации: ВР – Богуславски и Попиель (1979) [197], ФОК – Фердман, Отюген и Ким (2000) [199], MNN – Ми, Нобс и Натан (2001) [193], ХА – Ксу и Антониа (2002) [200], ВР – Воурос и Панадис (2013) [203], МАН – Мулляджанов, Абдуракипов и Ханъялич (2017) [204] (данная работа)

Авторы	Re_D	K	x_0/D	K_r
ВР [197]	$(5.1 - 12.5) \times 10^4$	5.9	0.5	0.08
ХА [200]	8.6×10^4	6.5	2.6	0.086
MNN [193]	5.0×10^5	3.0	0.0	0.0
ФОК [199]	2.4×10^4	6.7	2.49	0.088 – 0.09
ВР [203]	5500	5.7	2.65	0.078
данная работа, МАН [204]	5300	5.88	–1.41	0.08

где звездочка во втором определении означает учёт цилиндрической геометрии. Входной профиль скорости соответствует достаточно малым значениям $D/\theta_{th} \approx 22.3$ и $D/\theta_{th}^* \approx 30.8$. На рис. 3.7 (слева) показано прямое сравнение входного профиля скорости для данного расчета полностью развитого турбулентного потока и модельных профилей из сопла с поджатием из работы Кима и Чой (2009) [250]. Производная скорости на стенке для течения в трубе находится в промежутке между $D/\theta_{th} = 80$ и 120. Ниже мы сравним результаты расчета для струи, вытекающей из трубы, и результатов Кима и Чой для $D/\theta_{th} = 80$ при схожем числе Рейнольдса. Рост θ_{th} с x можно аппроксимировать линейной функцией, в то время как θ_{th}^* растет быстрее.

Для валидации LES расчета сравним полученные осредненные характеристики с DNS данными Сандберга и др. (2012) [251]² и PIV экспериментами Капоне и др. (2013) [221]. Показано хорошее соответствие результатов расчетов около кромки трубы ($0 \leq x/D \leq 3$) с DNS с существенным спутным потоком ($U_{co} > 0.2U_b$, случай M46-c1), который далее заметно влияет на характеристики течения. Эксперименты также хорошо согласуются с текущими LES расчетами для продольной осевой осредненной по времени скорости. Уровень пульсаций продольной компоненты скорости в эксперименте немного превышает LES и DNS результаты, в то время как для радиальной компоненты имеется отличное совпадение. Более высокий уровень продольных пульсаций может означать, что течение в трубе в эксперименте не совсем соответствует полностью развитому турбулентному течению. Показаны также результаты LES расчета для струи с однородным профилем скорости на входе с $D/\theta_{th} = 80$ для двух

² Эти данные используются в следующей секции при анализе струйного течения в дальнем поле

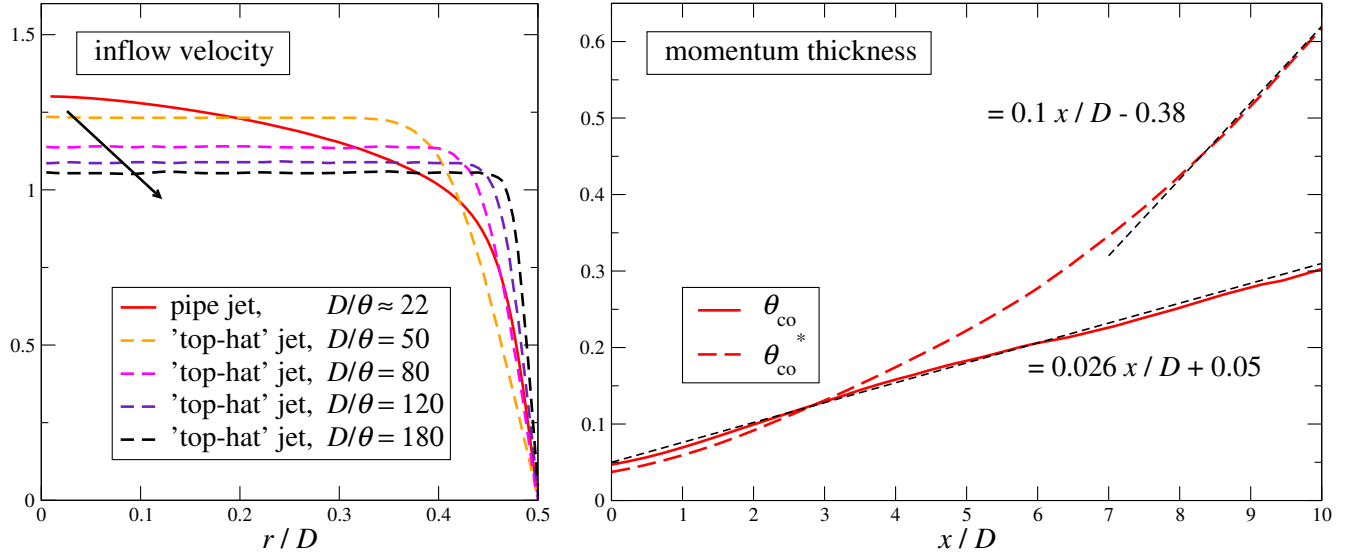


Рисунок 3.7. Слева: сравнение входных профилей скорости, используемого в данном расчете, и различные профили из литературы. Справа: изменение толщины потери импульса с продольной координатой x

чисел Рейнольдса.

Для того, чтобы подчеркнуть различие в струях с однородным и полностью развитым турбулентным профилем скорости на входе сравним продольные пульсации скорости для определенных азимутальных гармоник, проинтегрированных по всему сечению $r - \phi$ при постоянном x :

$$E_{xx}^m = \int \overline{(u'_x u'_x)}^m r dr. \quad (3.4)$$

На рис. 3.9 изображены графики E_{xx}^m в зависимости от x для $m = 0 - 3$. Для квазиламинарного однородного профиля скорости с выбранными характеристиками вихри Кельвина–Гельмгольца развиваются в диапазоне $x/D = 2 - 4$ с дальнейшей турбулизацией потока. Рост $E_{xx}^{m=0}(x)$ имеет экспоненциальный характер, однако, для других гармоник рост энергии турбулентности также очень быстрый. В это же время для струи с полностью турбулентным профилем на выходе величина E_{xx}^m растет линейно с расстоянием.

Спектр турбулентной кинетической энергии и заметный пик $St \approx 0.14$, указанный на рис. 3.4, далее анализируется для различных компонент скорости. Согласно рис. 3.10 пульсации продольной компоненты скорости ответственны за обнаруженные низкочастотные колебания. Оказывается, что это является следствием динамики спиральных вихревых структур (бегущих волн), обнаруженных в течении в трубе Даггльби и др. (2007) [252]. Действительно, на рис. 3.10 показано, что аналогичный пик $St \approx 0.14$ имеется в спектре пульсации продольной компоненты скорости в расчете периодического течения в трубе. Спектр пульсаций азимутальной компоненты скорости не имеет сколько-нибудь выраженного пика при высо-

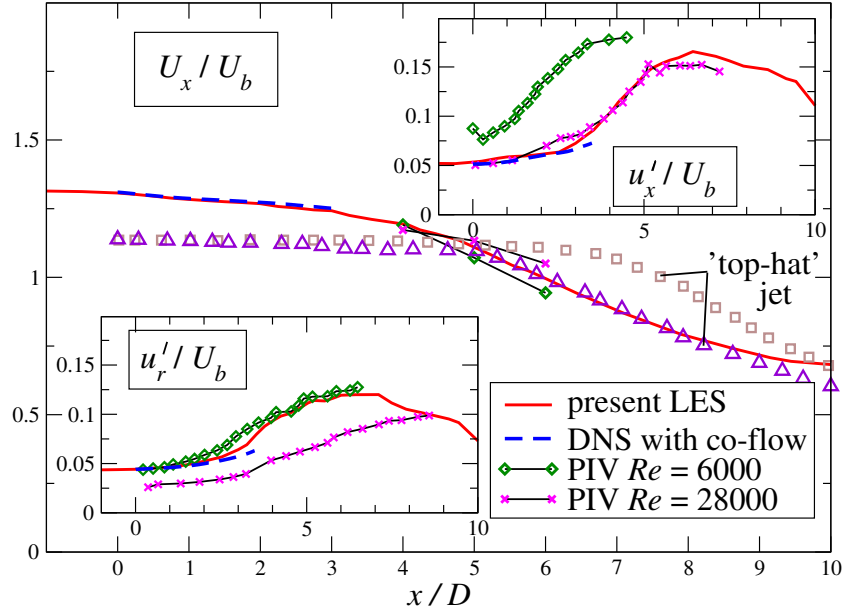


Рисунок 3.8. Профиль осредненной по времени продольной скорости, а также ее продольной и радиальной компоненты пульсаций на оси струи. Показано сравнение текущих LES расчетов, а также DNS [251] и PIV [221] данных. Также для сравнения приведены результаты LES расчетов струи [250] с однородным профилем скорости на входе с $D/\theta_{th} = 80$ для $Re_D = 3150$ (коричневые квадраты) и $Re_D = 8750$ (фиолетовые треугольники)

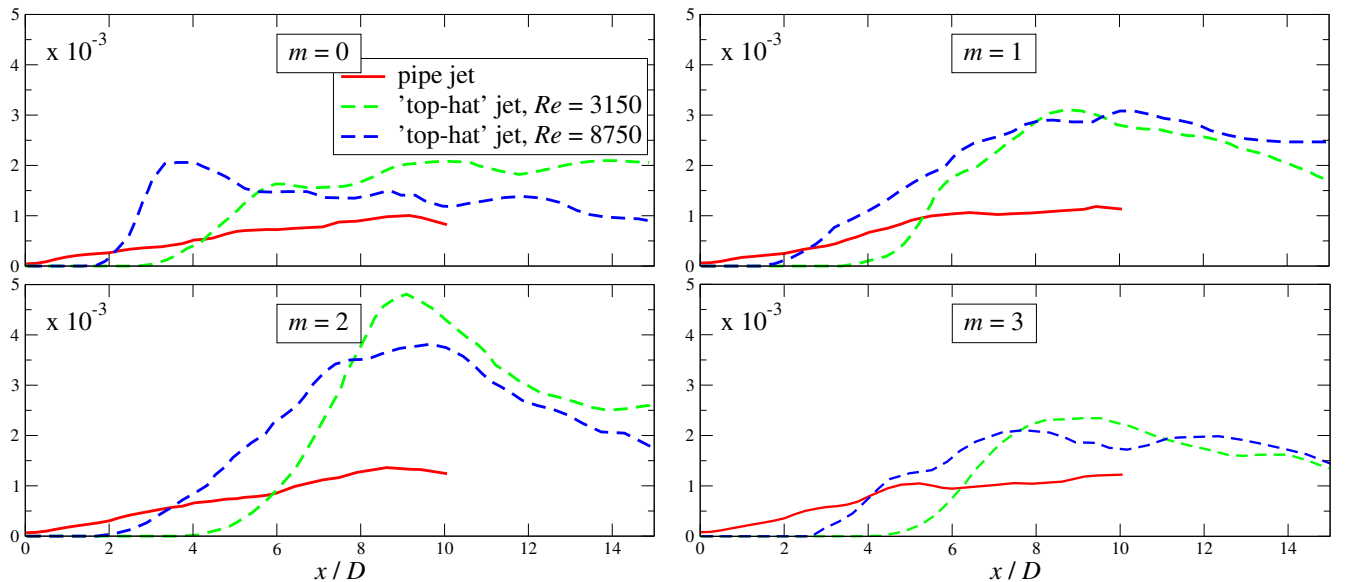


Рисунок 3.9. Интегрированная по поперечному сечению энергия продольных пульсаций скорости для определенных азимутальных гармоник m . Пунктирными линиями показаны данные [250] при $D/\theta_{th} = 80$

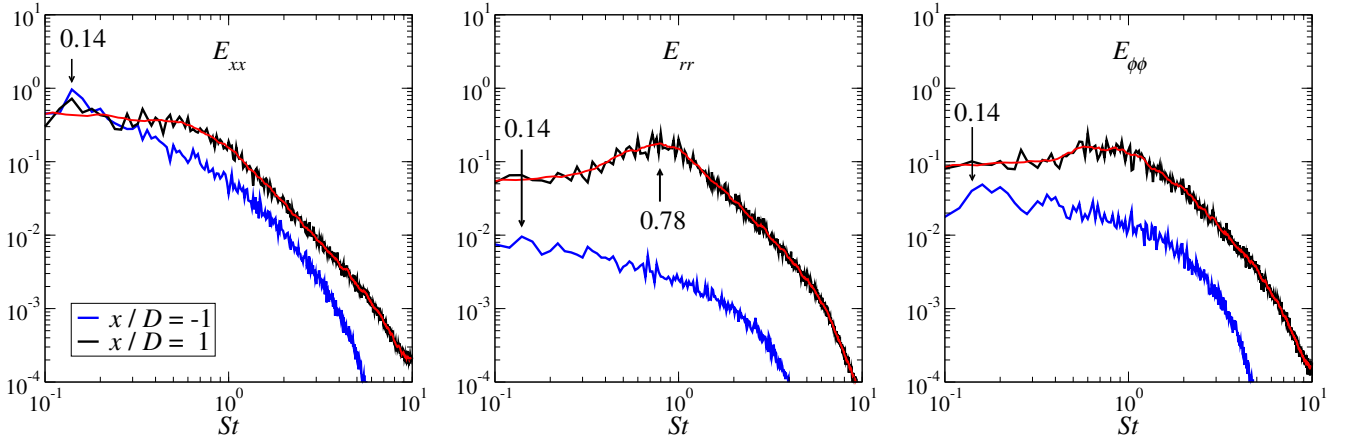


Рисунок 3.10. Синие линии соответствуют спектру энергии внутри трубы ($x/D = -1$ и $r/D = 0.46$), посчитанному для каждой компоненты вектора скорости отдельно. Черные линии соответствуют слою смещения около кромки трубы ($x/D = 1$ и $r/D = 0.5$)

ких частотах, в тоже время для радиальной компоненты имеется некоторый (широкий) пик при $St \approx 0.78$. Как будет показано ниже, эта частота хорошо описывается нейтральным волновым решением (с $k_{im} = 0$) задачи линейной теории устойчивости.

Как было сказано выше, распределение турбулентной кинетической энергии течения в трубе сильно влияет на спектральные характеристики струйного потока на начальном участке. На рис. 3.11 показано распределение турбулентной кинетической энергии для различных азимутальных гармоник m , полученное для вспомогательного расчета периодического течения в трубе. В центре трубы энергия пульсаций полностью распределена между $m = 0$ (пульсации продольной компоненты скорости) и $m = 1$ (радиальная и азимутальная компонента), однако, около стенки энергия содержится в широком спектре значений m . Наибольший вклад поступает от $m = 9$, что соответствует среднему поперечному расстоянию между пристенными продольными структурами (streaks) при данном числе Рейнольдса. POD анализ, выполненный в $r - \phi$ сечениях при постоянном x хорошо согласуется с трехмерным анализом Даггльби и др. [252]. Самая энергетичная мода, полученная в [252], соответствует $m = 5$ при $Re_D \approx 4300$ и имеет характерную частоту $St \approx 0.165$. Собственное значение (а именно $\lambda^2/2$) связано с турбулентной кинетической энергией пульсаций скорости, проинтегрированной по области, используемой для POD анализа. Для течения в трубе мы получили широкий спектр мод со сравнимой по величине энергией. Первая (самая энергетичная) POD мода ($q = 1$) с $m = 3$ содержит 2.47% от общей энергии, в то время как $q = 1$ с $m = 0$ имеет 1.35% и находится на четырнадцатом месте среди всех мод (по m и q). Пространственное распределение продольной скорости для $q = 1$ и некоторых m также показано на рис. 3.11.

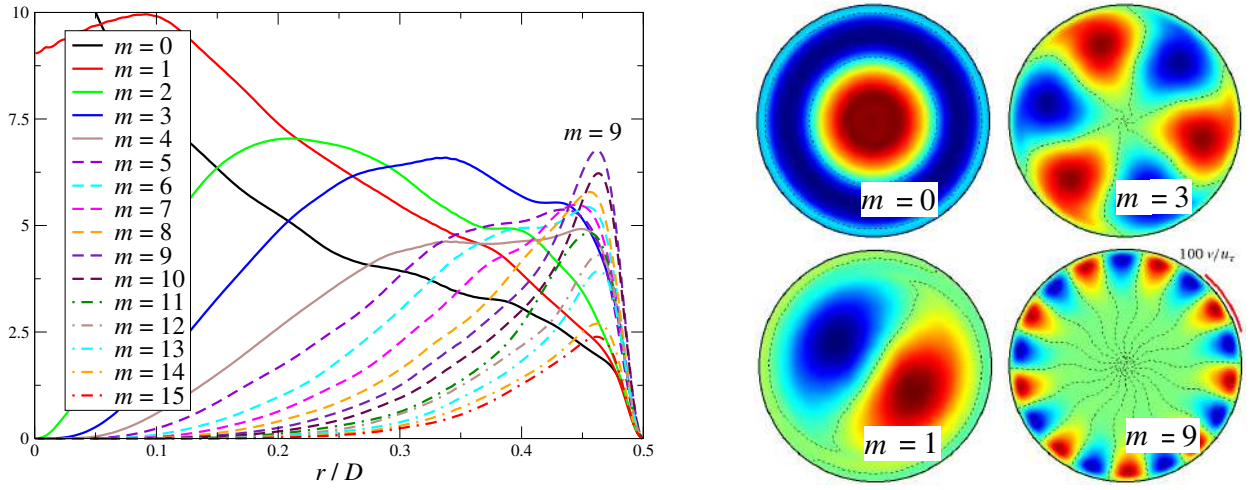


Рисунок 3.11. Фурье и POD анализ периодического течения в трубе. Слева: радиальные профили турбулентной кинетической энергии различных азимутальных гармоник m . Справа: поле продольной скорости в сечении $r - \phi$, соответствующее первой POD моде ($q = 1$) для различных m . Пунктирные линии означают нулевую продольную скорость, красный/синий цвет соответствует положительным/отрицательным значениям

Идентификация спиральных волн

В качестве первого шага мы анализируем эволюцию спектральных характеристик вдоль продольной координаты для различных m . Поле скорости после Фурье преобразования $e^{i(m\phi - 2\pi ft)}$ описывает динамику азимутальных мод, вращающихся вокруг оси x с постоянной угловой скоростью [253]. На рис. 3.12 показано распределение E_m для различных x , рассчитанных в слое смешения. Динамические процессы внутри трубы ($x/D = -1$), дающие существенный вклад в энергию, в основном происходят на частотах близких к $St \approx 0.14$ с небольшим разбросом. Особенно заметны моды с $m = 3 - 6, 8$ на низких частотах. Другая группа мод с высокими $m \geq 7$ расположена около $St \approx 0$ и соответствует, как было сказано выше, пристенным продольным структурам (streaks). Аналогичные результаты можно наблюдать и для $x/D = 1$ с дополнительными пиками в спектре на относительно высоких частотах, благодаря сдвиговой неустойчивости. Вниз по потоку энергия от высоких m передается более низким азимутальным волновым числам и, соответственно, частотам. При $x/D = 6$ в спектральный пик $St \approx 0.14$ наибольший вклад вносят $m = 1 - 3$.

Далее мы применяем POD алгоритм к полям скорости в $r - \phi$ плоскости и различных x (от $x/D = 0$ до 10). Пространственный шаг составляет $\Delta x/D = 0.25$ около кромки трубы и $\Delta x/D = 0.5$ в конце области. На рис. 3.13 (слева) показана зависимость турбулентной кинетической энергии для первой POD моды ($q = 1$) и различных m от продольной

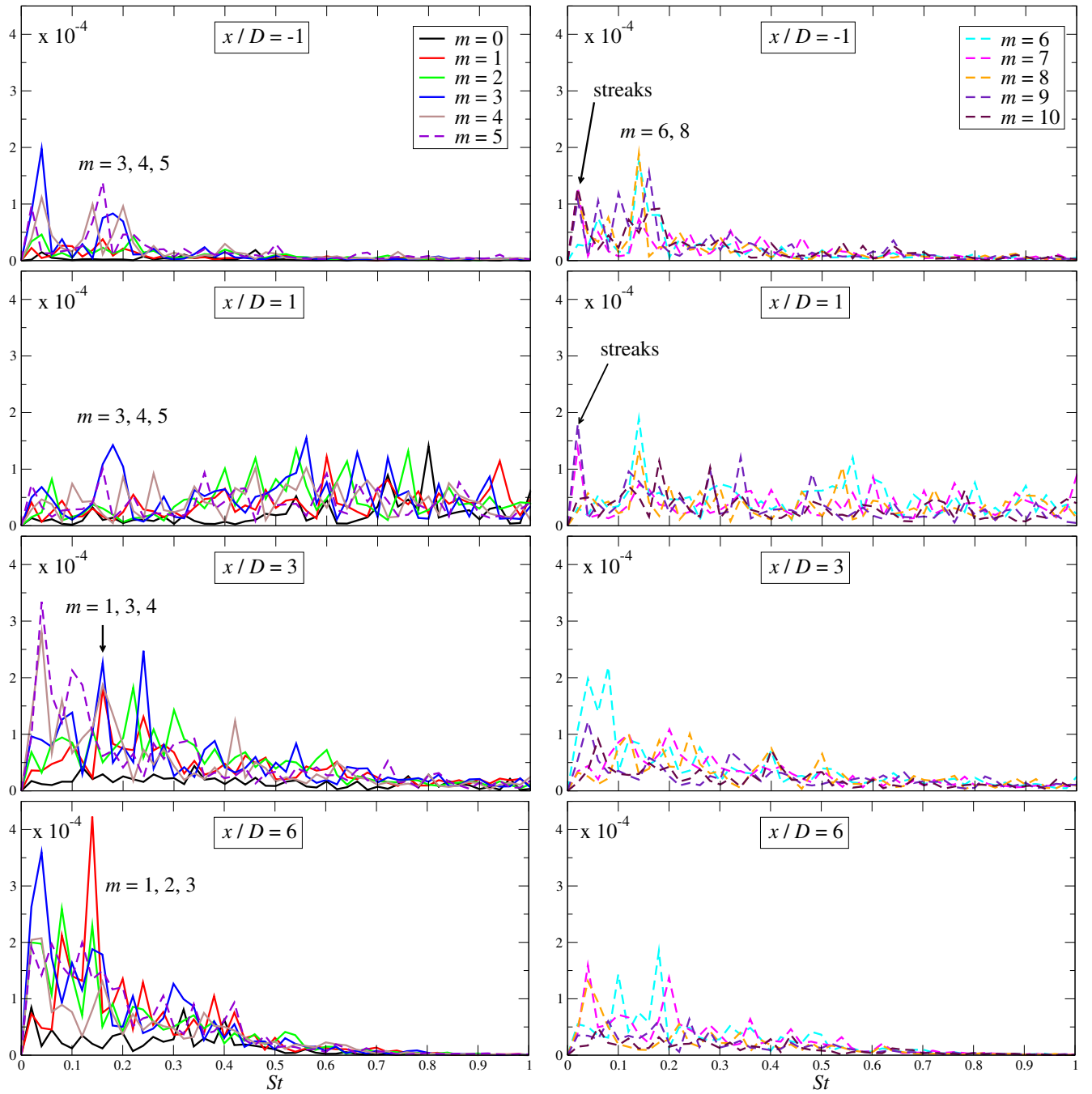


Рисунок 3.12. Спектры для различных азимутальных чисел для нескольких продольных координат. Для $x/D = -1$ спектр рассчитан в точке $r/D = 0.46$, в то время как для других x используется точка $r/D = 0.5$

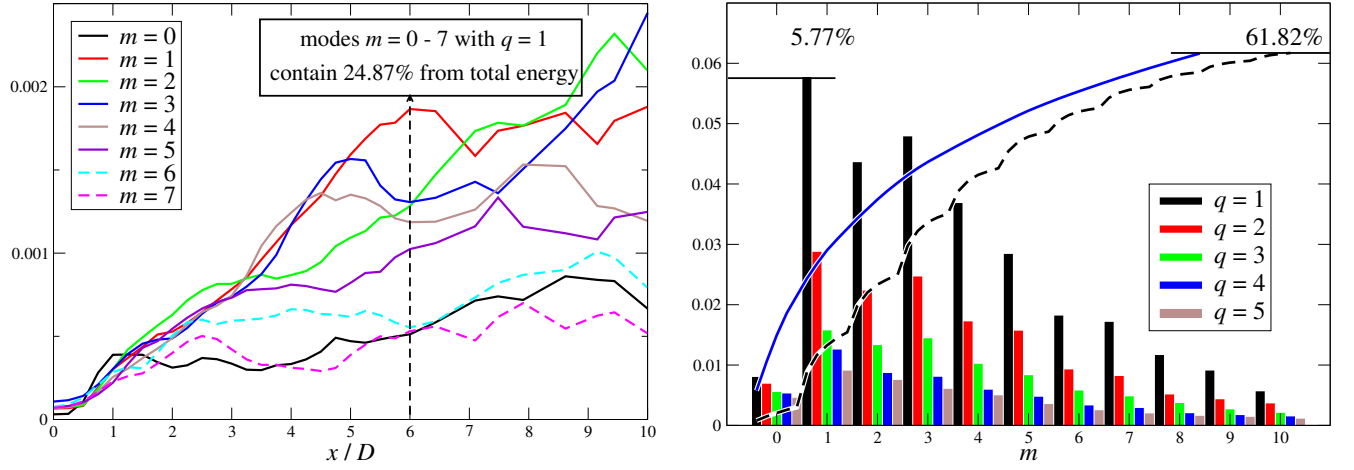


Рисунок 3.13. Слева: зависимость величины энергии первой POD моды $(\lambda_{q=1}^{(m)})^2/2$ от x . Справа: распределение доли энергии в первых 5 POD модах и первых 10 азимутальных модах при $x/D = 10$. Штриховая линия показывает величину кумулятивной энергии первых 5 POD мод (суммирование показанных колонок слева направо). Сплошная синяя линия соответствует величине кумулятивной энергии отранжированных мод по всем m и q . Обе величины кумулятивной энергии показаны со множителем 0.1

координаты x . В интервале $0 \leq x/D \leq 10$ можно наблюдать некоторое соревнование между различными собственными значениями для разных m . Наиболее энергетичные моды соответствуют $m = 1 - 5$. Распределение доли турбулентной кинетической энергии от общего значения между различными (m, q) при $x/D = 6$ показано на рис. 3.13 (справа). Кумулятивное (суммарное) значение доли энергии от мод с $m = 0 - 7$, $q = 1$ составляет около 25%. Если отранжировать все (m, q) моды по энергии, то первые 15 собственных значений составляют 40% энергии, в то время как вклад от 40 и 120 мод представляет 60% и 80%, соответственно. Интересно сравнить результаты POD для струй с однородным квазиламинарным профилем скорости на входе и с полностью развитым турбулентным потоком. Для струи при высоких числах Рейнольдса Юнг и др. [226] также рассчитал долю энергии в первых POD модах ($q = 1$), просуммированных по всем m . На расстоянии $x/D = 6$ в первой ($q = 1$), первых двух ($q = 1, 2$) и первых трех ($q = 1 - 3$) модах содержится 66%, 83% и 92%, соответственно, в то время как в нашем случае всего 30%, 47% и 57%.

Линейный анализ устойчивости осредненного по времени течения

Мы показали, что динамические особенности периодического течения в трубе во многом определяют характеристики ближнего поля струи. Интересно сравнить данные LES расчетов с результатами линейного анализа устойчивости. Как уже было подробно изложено в

Таблица 3.2. Дисперсионные кривые $k = k(f)$ на рис. 3.14 получены для двух профилей скорости, часто используемых в литературе [148, 152]. Мы использовали следующие значения: $\theta_{th} = 0.1$, $r_0 = 0.488D$, $U_c = 0.665U_b$ и $R_0 = 1.4D$ при аппроксимации профилей скорости из LES для $x/D = 1$ и $x/D = 10$

ближнее поле	дальнее поле
$U_{nf} = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left[\frac{1}{4\theta_{th}} \left(\frac{r_0}{r} - \frac{r}{r_0} \right) \right] \right) + U_{co}$	$U_{ff} = U_c / \left(1 + \frac{r^2}{R_0^2} \right)^2$

пункте 1.6, линейный анализ устойчивости для турбулентных потоков использует гипотезу турбулентной вязкости для параметризации “фоновой” (стохастической) турбулентности и применяется к “замороженным” полям скорости при фиксированном x . Таким образом, используется плоскопараллельное приближение, при этом зависимость собственных функций задачи линейной устойчивости представляется в виде плоских волн по x (гармоники Фурье). На рис. 3.14 показан инкремент роста $-k_{im}$ от частоты $f = \omega/(2\pi)$ при $x/D = 1$ и 10. Также для сравнения проведены расчеты без учета турбулентной вязкости ($\nu_t = 0$), которые показаны штриховыми линиями и соответствуют модельным профилям скорости (см. табл. 3.2), в то время как сплошные линии соответствуют расчетам, используя профили скорости и турбулентной вязкости из LES. При $x/D = 1$ достаточная величина производной скорости в слое смешения приводит к появлению помимо $m = 1$ также неустойчивого решения с $m = 0$. Частоты, соответствующие максимуму функции $-k_{im}$ ($St \approx 0.39$ и 0.47), не наблюдаются на спектре турбулентной кинетической энергии, в то время как нейтральное решение ($-k_{im} = 0$) совпадает с частотами, порождаемыми неустойчивостью Кельвина – Гельмгольца. При $x/D = 1$ спектр пульсаций радиальной компоненты скорости (см. рис. 3.10) имеет довольно широкий пик с центром при $St \approx 0.78$, в то время как результатом линейного анализа является $St \approx 0.76$ для $m = 0$ ($m = 1$ также дает высокочастотное решение). Полученные результаты находятся в согласии с результатами Петерсена и Саме (1988) [70], которые показали, что пик в спектре турбулентных пульсаций струи с однородным профилем скорости хорошо описывается нейтральным решением задачи линейной устойчивости. Однако, пик $St \approx 0.14$ не описывается решениями линеаризованной задачи и, таким образом, не связан с неустойчивостью Кельвина – Гельмгольца. При $x/D = 10$ только $m = 1$ остается неустойчивой с характерной частотой $St \approx 0.019$, где $-k_{im}$ имеет максимум. Видно, что нейтральное решение на частоте $St \approx 0.041$ находится в отличном согласии с данными LES.

На рис. 3.15 показано изменение некоторых спектральных характеристик с x , полученных при решении задачи линейной устойчивости и из данных LES. Пик, соответствующий

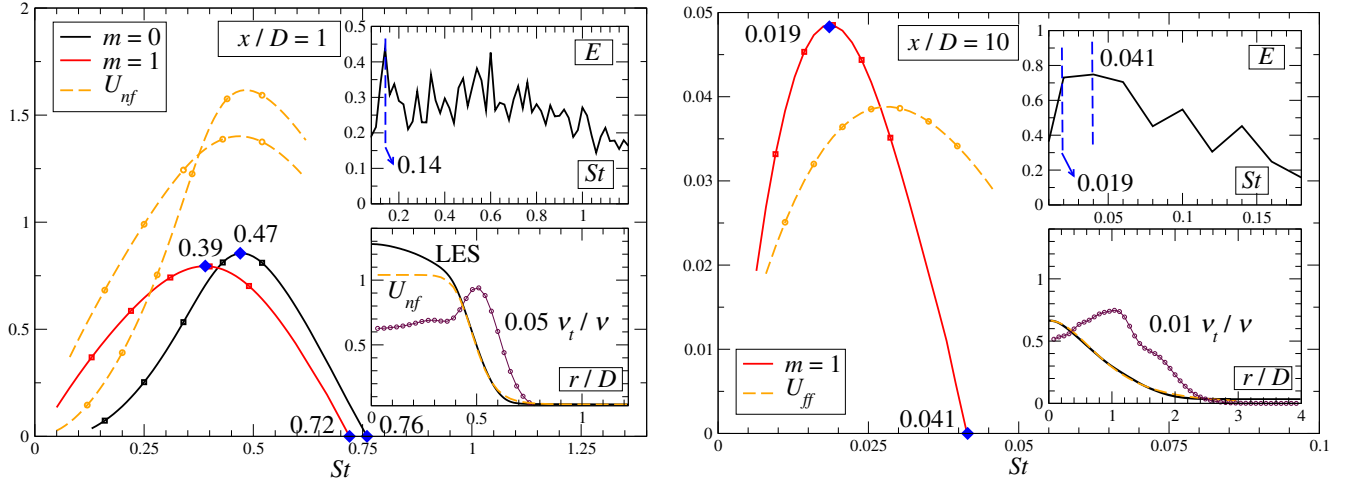


Рисунок 3.14. Инкремент роста $-k_{im}$, рассчитанный из задачи линейной теории устойчивости, в зависимости от безразмерной частоты St при $x/D = 1$ (слева) и 10 (справа). На малых графиках сверху показаны спектры пульсаций турбулентной кинетической энергии E при $r/D = 0.5$, снизу показаны осредненные по времени радиальные профили продольной компоненты скорости и профили турбулентной вязкости

неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, полученный при анализе спектра пульсаций радиальной компоненты скорости, можно различить до $x/D = 2$. Зависимость этой частоты от x можно аппроксимировать функцией $St = 1.25 - 0.4x/D$, которая также хорошо предсказывается решением линеаризованной задачи до $x/D \leq 1$. Далее из-за диффузии профиля скорости мода $m = 0$ становится устойчивой уже при $x/D \geq 1.6$. Характерные частоты решений с максимальным и нулевым инкрементом показаны на рис. 3.15, которые затухают с x степенным образом. Голубая пунктирная линия обозначает пик $St \approx 0.14$, который можно различить вдоль $0 \leq x/D \leq 10$. Заштрихованная область схематически обозначает другие низкочастотные пики (см. рис. 3.12).

Бегущие спиральные волны: POD анализ

Далее предлагается дополнить предыдущий анализ прямыми наблюдениями при помощи POD. Для того, чтобы выделить спиральные волны, вращающиеся в разных направлениях, будем использовать следующую декомпозицию комплексно-сопряженных временных коэффициентов $a_q^m(t)$, следуя работам [252, 254–257]:

$$a(t) = \beta(t)e^{2\pi i\gamma(t)}, \quad (3.5)$$

где β и γ представляют собой временные последовательности из N действительных чисел. Определенные комбинации β и γ соответствуют спиральному или синусоидальному движе-

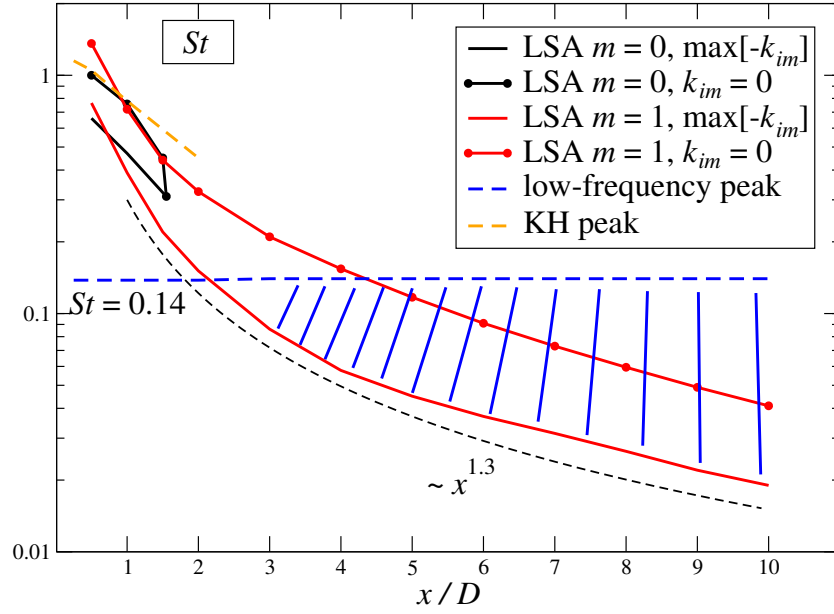


Рисунок 3.15. Изменение пика в спектре с продольной координатой x из данных LES и решения линейной задачи устойчивости (LSA)

нию [257]. Так, идеальная спираль представляет собой вращение ядра струи с постоянной угловой скоростью на постоянном удалении (радиус) от оси x . Таким образом, значение β постоянно, а γ линейно растет во времени. В контексте двух спиральных мод с противоположными значениями m , это означает, что одна мода присутствует, а другая – нет. Для синусоидального движения (так называемая флаговая неустойчивость) обе моды присутствуют, вращаясь с одной и той же угловой скоростью, но в разном направлении. Это соответствует колебаниям β относительно нуля и ступенькообразному изменению γ на π , когда β пересекает нуль.

На рис. 3.16 показано поведение фазы $\gamma(t)$ в течение 150 безразмерных единиц времени для первых нескольких q и m . Основным результатом данной части работы является обнаруженный факт, что фаза $\gamma(t)$ содержит очень длинные промежутки времени, где она меняется линейно. Как уже указывалось ранее, это означает, что соответствующая пространственная мода вращается вокруг оси симметрии с некоторой частотой. Эта особенность была впервые обнаружена в трехмерном POD анализе течения в канале Сировичем и др. [254] и для течения в трубе Даггльби и др. [252]. На рис. 3.16 также изображены некоторые характерные наклоны функции $\gamma(t)$, величина которых и является безразмерной угловой скоростью Ω . Так, например, для $m = 1$ можно выделить три типичных значения $\Omega \approx -0.87$, -0.14 и 0.08 . Для $\Omega \approx -0.14$ и $\Omega = \gamma t$ соответствующая POD мода обращается вокруг оси примерно за семь безразмерных единиц времени согласно (3.5). По графику $\gamma(t)$ для $m = 1$ можно сказать, что направление вращения меняется в среднем каждые $t = 5 - 10$ безразмерных

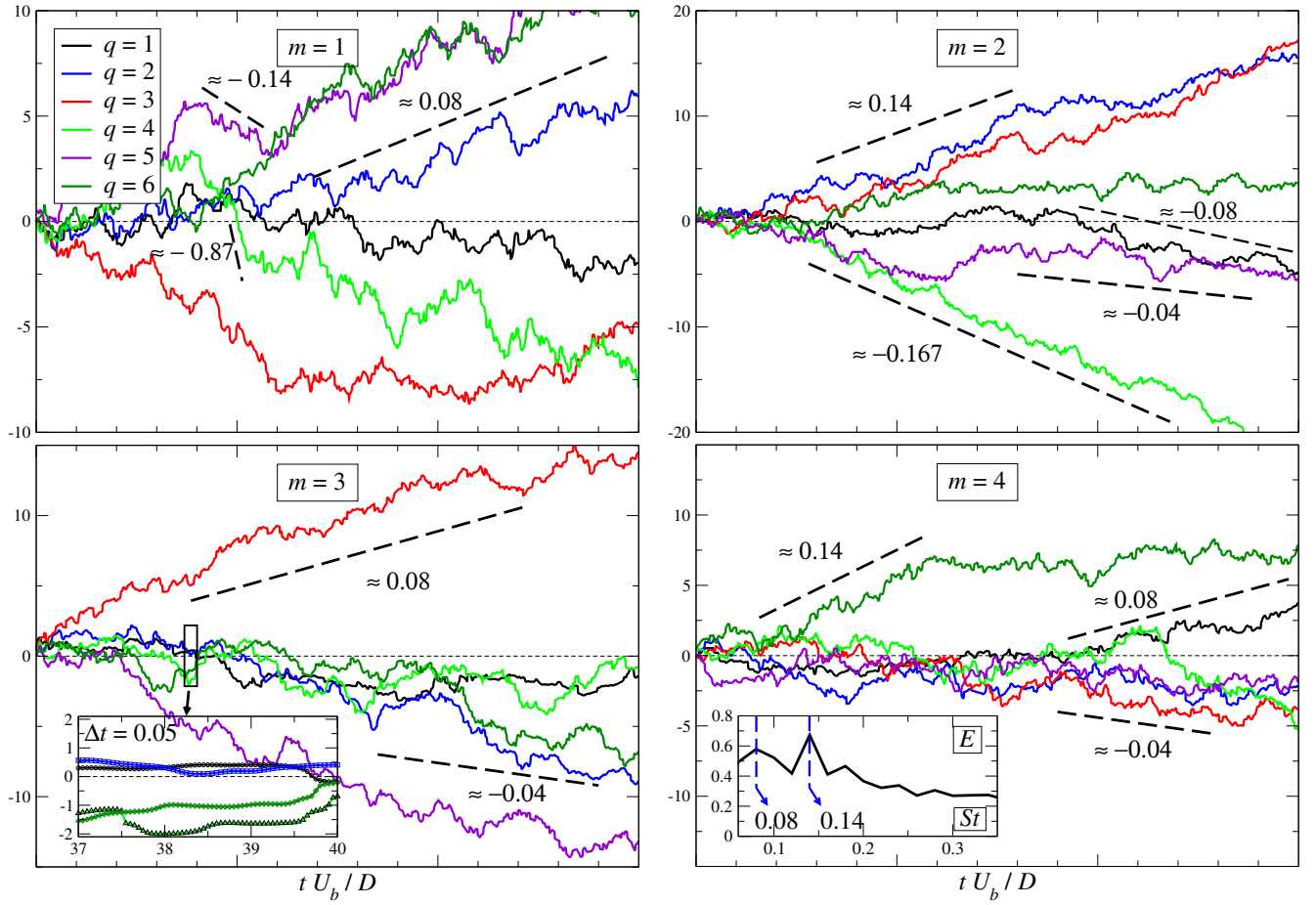


Рисунок 3.16. Эволюция фазы $\gamma(t)$ для разных m и q при $x/D = 6$. Увеличение части графика для $m = 3$ указывает на плавное изменение функций и, таким образом, достаточное разрешение во времени. На графике для $m = 4$ показан спектр турбулентных пульсаций в точке $x/D = 6$ и $r/D = 0.5$

единиц, в то время как есть и средний ненулевой наклон, если рассматривать большие промежутки времени. Для $m = 2$ наклон $\gamma(t)$ ограничен значениями -0.167 и 0.14 , при этом значение $\Omega \approx 0.08$ встречается также на графиках для $m = 3$ и 4 . Аналогичное поведение фазы можно наблюдать и для более высоких азимутальных волновых чисел. Вставка на графике для $m = 4$ показывает спектр энергии для $x/D = 6$ и $r/D = 0.5$, где показаны два низкочастотных пика с $St = 0.08$ и 0.14 . Однако, на рис. 3.16 также часто встречается наклон с $|\Omega| \sim 1$. Мы интерпретируем это как наличие быстрого и медленного вращения когерентной структуры, соответствующей рассматриваемой POD моде. Быстрое вращение выглядит как некоторые флуктуации $\gamma(t)$, в то время как медленное вращение соответствует (почти) постоянным наклонам $\gamma(t)$ в течение нескольких сотен безразмерных временных единиц. Здесь мы детально исследовали динамические особенности только для $x/D = 6$, однако, данные выводы справедливы для всей рассматриваемой области. Возвращаясь к проделанному анализу Фурье и линейной устойчивости среднего течения (рис. 3.15), результаты POD находятся с ними в отличном согласии. Анализ Фурье зафиксировал спектральные пики при $St \approx 0.04$, 0.08 и 0.14 при $x/D = 6$ (см. рис. 3.12), в то время как нейтральное собственное решение для задачи устойчивости имеет $St \approx 0.09$ для $m = 1$, а частота максимального значения $-k_{im}$ равна $St \approx 0.037$.

На рис. 3.17 показаны дополнительные наблюдения в интервале времени $t \in [49; 52.5]$ для $m = 1$ и $q = 4$. В этой области, как обсуждалось выше, наклон $\gamma(t)$ равен примерно -0.87 , что соответствует достаточно быстрому вращению когерентной структуры вокруг своей оси. График слева демонстрирует траекторию $a(t)$ в комплексной плоскости, где ее характерной формой является эллипс. Используя гипотезу Тейлора и полагая конвективную скорость равной $U_{conv} = U_c/2$ (здесь $U_c = 1.01U_b$ является локальной осредненной по времени продольной скоростью на оси струи при $x/D = 6$), мы реконструируем трехмерное поле скорости. Справа на рис. 3.17 показана изоповерхность Q -критерия для визуализации вихревой структуры, построенного по суммарному полю скорости среднего течения и $m = 1$, $q = 4$ POD моды. И хотя эта мода представляет только малую долю турбулентной кинетической энергии (1.26%), спиральная волна является типичным элементом вихревой структуры рассматриваемого струйного течения.

Далее исследуем описывают ли отдельные POD моды и их суперпозиция динамику реального течения. На рис. 3.18 представлено распределение модуля скорости в плоскости $r - \phi$ при $x/D = 6$ для различного числа POD мод и последовательных моментов времени. Верхняя строка демонстрирует результаты для одной моды с $m = 1$ и $q = 1$, которая содержит 5.77% энергии. При помощи только одной моды можно отследить динамику максимума скорости,

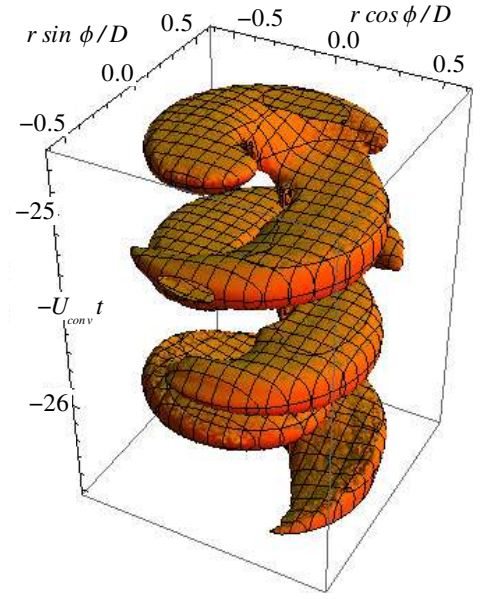
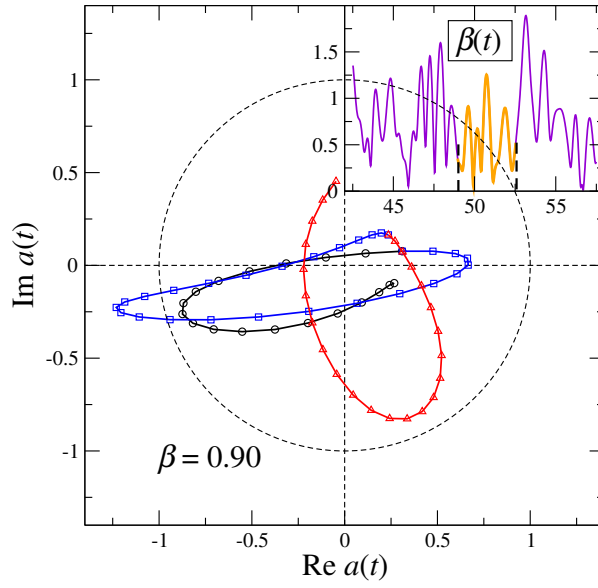


Рисунок 3.17. Слева: Пример поведения комплекснозначной функции $a(t)$ для $q = 4$, $m = 1$ при $x/D = 6$ и интервала времени $t \in [49; 52.5]$, где $\Omega \approx -0.87$ как на рис. 3.16. Траектория покрашена в черный, синий и красный, что соответствует (почти) полным оборотам когерентной структуры. Справа: изоповерхность $Q = 0.0012$ для суммы POD моды с $q = 4$, $m = 1$ и среднего течения. Трехмерная форма восстановлена при помощи гипотезы Тейлора (тот же временной интервал $t \in [49; 52.5]$). Струйный поток течет снизу вверх

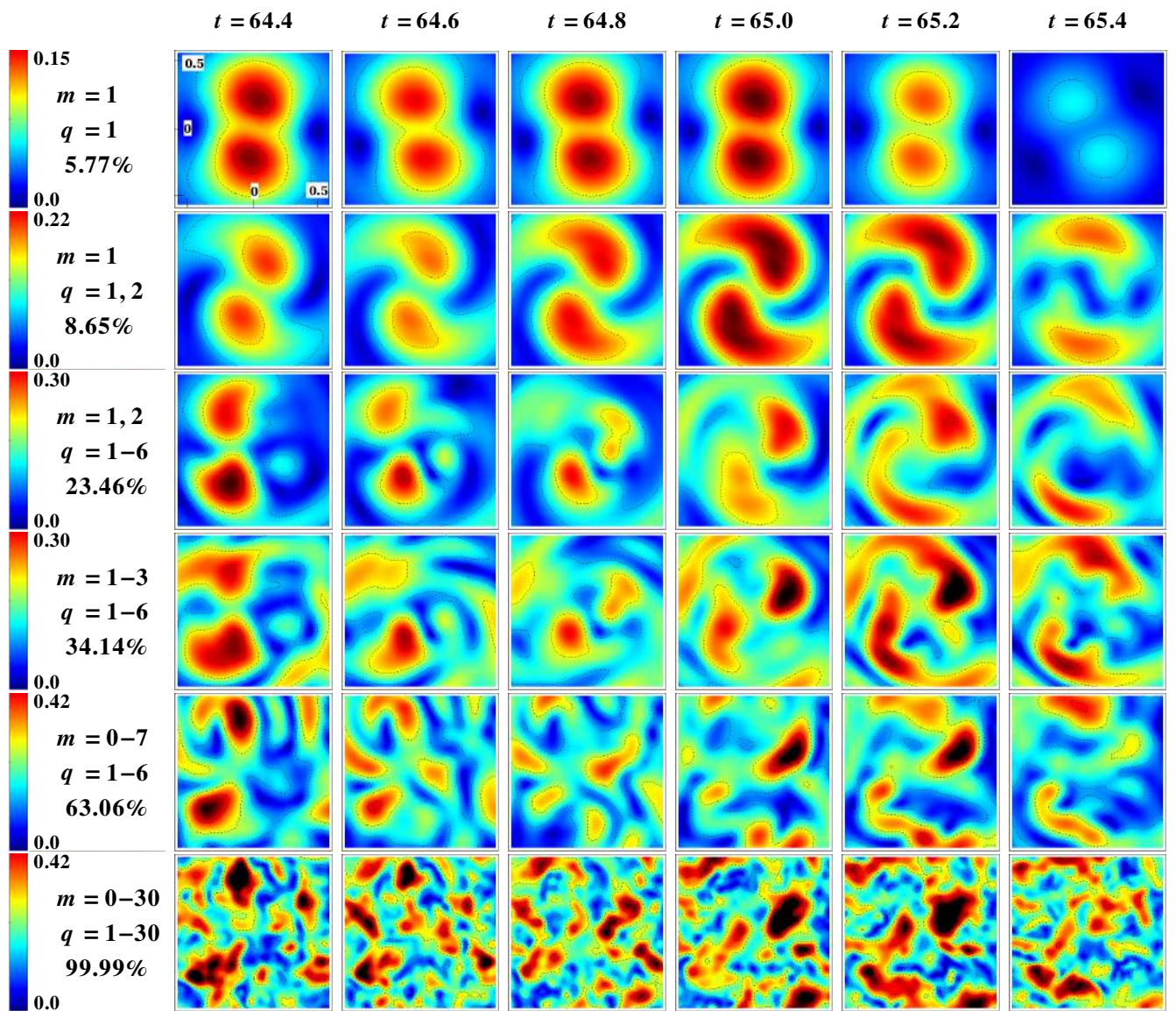


Рисунок 3.18. Последовательные во времени мгновенные поля модуля скорости при $x/D = 6$, восстановленные при помощи разного числа POD мод. Шесть строк соответствуют 1, 2, 12, 18, 48 и 930 модам. Для каждой суммы слева показана соответствующая доля турбулентной кинетической энергии (в %)

но сложно говорить о достоверности описания всей динамики. При увеличении количества мод в суперпозиции низкоразмерная модель описывает поток гораздо более аккуратно, что видно при сравнении каждой строки с нижней, которая соответствует мгновенному сигналу. Очевидно, что достаточно небольшое количество базисных функций требуется для хорошего описания полностью развитого турбулентного струйного потока.

В данной части работы мы исследовали когерентные структуры в ближней области струи, индуцированной полностью развитым турбулентным потоком в подводящей длинной трубе. При помощи метода крупных вихрей, линейной теории устойчивости и POD было показано, что пристенные вихревые структуры, наблюдаемые в полностью развитом потоке в трубе, подавляют образование осесимметричных вихрей Кельвина–Гельмгольца около кромки сопла. В отличие от экспоненциального роста возмущений при наличии вихревых колец, рост интегрированной по поперечному сечению турбулентной кинетической энергии в струе из трубы происходит линейным образом вдоль продольной координаты. Наиболее энергонесущими азимутальными гармониками являются $m = 1 - 5$. Низкочастотный пик в спектре энергии ($St \leq 0.14$) соответствует спиральным волнам, которые инициируются в течении в трубе и далее распространяются в струйном потоке. Линейный анализ устойчивости подтвердил, что это когерентное движение не связано с неустойчивостью Кельвина–Гельмгольца. Анализ динамических характеристик, основанный на временных POD коэффициентах, указывает на наличие двух типов движения: быстрого и медленного. Быстрое движение соответствует стохастическим турбулентным флуктуациям с характерным временем пульсации в несколько безразмерных единиц, в то же время медленное движение соответствует постоянному наклону фазы $\gamma(t)$ и может достигать нескольких сотен единиц по времени. Это медленное движение и имеет вид бегущих вниз по течению спиральных волн.

3.2.2. Анализ данных прямого численного моделирования

³В предыдущей секции были получены некоторые результаты о турбулентной структуре ближней области круглой струи с полностью развитым турбулентным профилем скорости при помощи метода крупных вихрей. Для того, чтобы подтвердить полученные результаты и расширить их на дальнюю область струи, мы исследуем базу данных, полученную при помощи прямого численного моделирования уравнений Навье–Стокса и вычислительного кода HiPSTAR, детали которого даны в пункте 1.4. Расчетная область, как и в предыдущей секции, представляет собой цилиндр радиусом около $40D$, где D , как и прежде, обозначает

³ См. работы [1,8,21,22,24,26,32] в разделе “Публикации по теме диссертации”

диаметр подводящей трубы, но с чуть меньшей толщиной стенки $\approx 0.02D$. Длина трубы составляет $25D$, далее расчетная область включает также $55D$ для моделирования струйного течения. Вся вычислительная область разбита на пять блоков (см. рис. 3.19), размеры которых указаны в табл. 3.3, вместе с использованным количеством точек для дискретизации. В азимутальном направлении функции задачи раскладывались на гармоники Фурье при помощи 64 мод, что соответствует 130 точкам в физическом пространстве, что вместе с конечно-разностной дискретизацией в $x - r$ плоскости дает расчетную сетку размером в 408×10^6 точек. Начало цилиндрической системы координат (x, r, ϕ) , как и прежде, расположено на оси симметрии и кромке трубы. Внутри трубы (блок 1) точки распределены равномерно от начала $x/D = -25$ до $x/D = -1.75$ с интервалом $\Delta x/D = 0.042$ между соседями. Далее проведено сгущение точек к концу трубы, при этом на самой кромке $\Delta x/D = 0.0045$. По радиусу внутри трубы также проведено сгущение точек с $\Delta r/D = 0.013$ в центре до $\Delta r/D = 0.0013$ у стенки. Вниз по течению область (блок 2, 3 и 4), которая не подвержена влиянию выходных условий, заканчивается при $x/D \approx 40$, далее до $x/D = 55$ используется демпфирующая область (sponge region), чтобы избежать отражений волн давления от выходной границы. Расстояние между дискретизационными точками вдоль x плавно увеличивается. Так, если $\Delta x/D = 0.0045$ при $x = 0$, то $\Delta x/D = 0.0074$ при $x/D = 5$ и далее $\Delta x/D = 0.0124$ при $x/D = 10$. Максимальное расстояние $\Delta x/D = 0.0515$ достигается в конце анализируемой области ($x/D \approx 40$). От $x/D \approx 40$ до конца области $x/D = 55$ используется еще 180 точек. В области 3, которая в радиальном направлении имеет ширину равную толщине стенки, точки расположены равномерно с $\Delta r/D = 0.0013$. Далее расстояние постепенно увеличивается, так что $\Delta r/D = 0.071$ при $r/D = 6.25$. От $r/D = 6.25$ до $r/D = 39.75$ расстояние между точками является опять эквидистантным. В области спутного потока (область 5) $\Delta x/D = 0.05$ при $x/D = -25.25$ и уменьшается до $\Delta x/D = 0.0045$ к кромке $x = 0$. Максимальное расстояние между соседними точками выбиралось так, чтобы акустические волны с частотами до $St_D \approx 2$ были “разрешены” как минимум 10 точками. Дополнительные детали расчёта приведены в работе [251].

Входные граничные условия в трубе задавались суперпозицией осредненной по времени профиля скорости и искусственных турбулентных флуктуаций, согласно методу цифровых фильтров (digital filter), описанному в работе [258]. В спутном потоке задавалась постоянная величина продольной скорости $U_{co} = 0.27U_b$ (случай M46-c1 в [251]) и ламинарный пограничный слой (толщиной $\approx 0.041D$) около внешней стенки трубы (решение Блазиуса). Стоит отметить, что скорость спутного потока в данном расчете является достаточно большой по сравнению с постановкой задачи в предыдущей секции. В качестве выходного гра-

Таблица 3.3. Длина пяти расчетных блоков (в диаметрах трубы D), из которых состоит вся область (см. рис. 3.19), в продольном (L_x) и радиальном (L_r) направлении, соответственно. Для каждого блока также дано количество точек дискретизации в продольном (N_x) и радиальном (N_r) направлении

Блок	1	2	3	4	5
$L_x \times L_r$	25.0×0.5	55.0×0.5	55.0×0.02	55.0×39.75	25.25×39.25
$N_x \times N_r$	624×68	2808×68	2808×17	2808×833	624×833

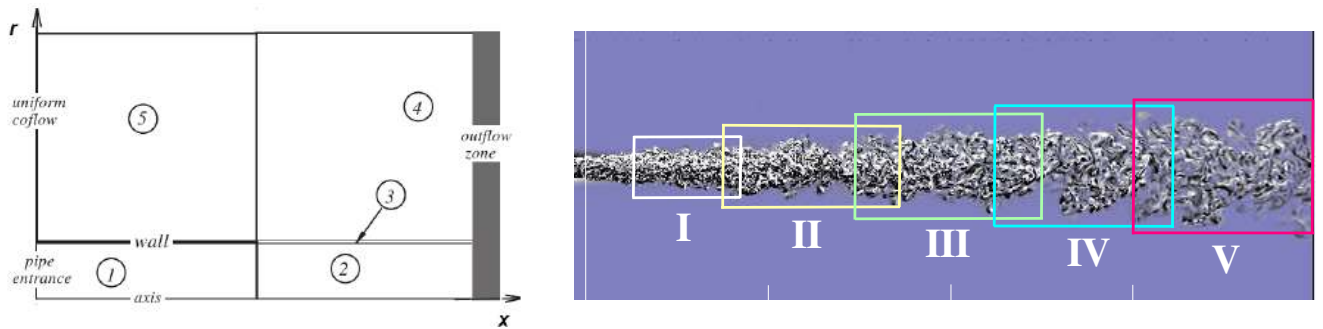


Рисунок 3.19. Слева: схема вычислительной области, граничные условия и нумерация блоков, представленных в табл. 3.3. Справа: мгновенное поле азимутальной компоненты завихренности в области до $x/D \leq 40$ и пять цилиндрических подобластей, в которых далее проводится статистический анализ (см. табл. 3.5)

ничного условия использовалось зональное характеристическое граничное условие [116] (в области $40 \leq x/D \leq 55$).

Рассматривается струйное течение с полностью развитым турбулентным профилем на входе при $Re_D = 5940$, что несколько выше, чем число Рейнольдса течения в предыдущей секции. Как уже обсуждалось ранее, такие входные условия позволяют избежать развития вихревых колец Кельвина–Гельмгольца. Таким образом, полностью развитое струйное течение, задаваемое таким способом, а также автомодельный режим в дальнем поле достигается раньше, что выгодно для экономии вычислительных ресурсов. Используемый численный алгоритм рассчитывает сжимаемые уравнения Навье–Стокса, поэтому дополнительным безразмерным параметром задачи выступает число Маха. В данном случае $Ma = 0.41$, при этом флуктуации поля температуры и плотности не превышает 5% от значения на стенке, что позволяет нам считать данное течение несжимаемым и анализировать поле скорости аналогичным образом как в предыдущей секции.

Визуальное представление о течении может быть получено на рис. 3.19, где показано мгновенное поле азимутальной компоненты завихренности. В дальней области особенно

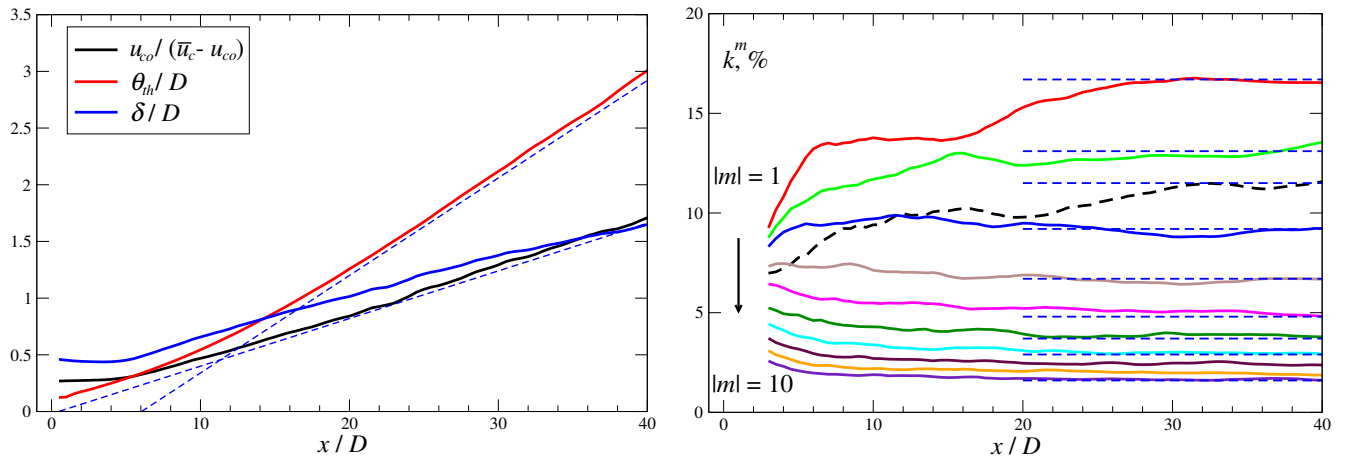


Рисунок 3.20. Слева: изменение нормированной осевой скорости, толщины потери импульса и полуширины струи с x . Справа: интегрированная в поперечной плоскости турбулентная кинетическая энергия для различных m . Черной пунктирной линией показана величина $k^{m=0}$

Таблица 3.4. “Асимптотический” уровень турбулентной кинетической энергии в дальней области струи для различных m (отмечен пунктирной синей линией на рис. 3.20)

$ m $	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k^m, \%$	11.5	16.7	13.1	9.2	6.7	4.8	3.7	2.9	2.4	1.9	1.6

выражено становится синусоидальное движение турбулентного ядра струи, что говорит о присутствии некоторой упорядоченности, которую мы и попытаемся количественно описать. Начнем с анализа средних характеристик. Удобно использовать соотношение (3.3) для расчета толщины потери импульса в зависимости от продольной координаты. Стоит напомнить, что

$$\theta_{th}^*(x) = \frac{2}{D} \int_0^\infty \frac{\bar{u}_x - u_{co}}{\bar{u}_c - u_{co}} \left(1 - \frac{\bar{u}_x - u_{co}}{\bar{u}_c - u_{co}}\right) r dr. \quad (3.6)$$

Осредненная по времени осевая скорость, толщина потери импульса и полуширина струи δ представлены на рис. 3.20 в зависимости от x . Осредненные характеристики показывают, что полностью развитая (автомоделная) область начинается примерно с $x = 20D$.

Как и прежде, благодаря круговой симметрии можно разложить функции задачи в ряд Фурье по переменной ϕ . Мгновенное поле скорости $\mathbf{u}$ раскладывается на комплекснозначные коэффициенты Фурье $\mathbf{u}^m$. Турбулентная кинетическая энергия для каждого азимутального числа, $k^m = |\mathbf{u}^m|^2/2$, проинтегрированная по плоскости $r - \phi$ при фиксированном x , показана на рис. 3.20. Видно, что близко к началу координат из-за полностью развитого турбулентного потока в трубе, возбужден широкий спектр волновых чисел m . С увеличением x большая часть энергии сосредоточена в низких m . Можно определить некоторые

Таблица 3.5. Геометрические характеристики цилиндрических подобластей I-V, показанных на рис. 3.19, где x_s и x_e соответствуют продольной координате начала и конца подобласти, R_0 – ее радиус

Подобласть	1	2	3	4	5
x_s/D	2.5	8.5	15.0	22.5	30.0
x_e/D	8.5	17.5	25.0	32.5	40.0
R_0/D	1.5	2.0	2.5	2.8	3.0

“асимптотические” значения k^m в конце области, поскольку функции $k^m(x)$, нормированные на общую турбулентную кинетическую энергию при данном x , выходят на некоторые (примерно) постоянные значения (см. табл. 3.4). Теперь понятно, что эти значения зависят от входных условий и соответствуют множеству автомодельных решений, описанных в Главе 2.

Далее мы применяем метод POD отдельно для каждого азимутального волнового числа m и каждой подобласти I-V к ансамблю $M = 1100$ полей $[\mathbf{u}_1^m, \mathbf{u}_2^m, \dots, \mathbf{u}_M^m]$, которые соответствуют значениям времени $t = t_1, \dots, t_M$ с шагом $\Delta t \approx 0.35D/U_b$:

$$\mathbf{u}_i^m(r, x) = \mathbf{u}(r, x, m, t_i) = \sum_{q=1}^M a_q^m(t_i) \lambda_q^m \mathbf{v}_q^m(r, x), \quad (3.7)$$

где $\mathbf{v}_q^m(r, x)$ и $a_q^m(t)$ являются безразмерными комплекснозначными пространственными собственными функциями и временными амплитудами, соответственно, которые удовлетворяют условиям ортогональности (см. пункт 1.5). В отличие от предыдущей секции, где POD анализ проводился для некоторых сечений при постоянном x , здесь мы рассматриваем объемы. Геометрические характеристики исследуемых подобластей представлены в табл. 3.5.

На рис. 3.21 для разных подобластей показано распределение турбулентной кинетической энергии $k_q^m = (\lambda_q^m)^2/2$, соответствующей модам с номером q и волновым числом m . Результаты подтверждают, что в дальней области достигается некоторый автомодельный режим течения, поскольку распределение энергии перестает существенно меняться в области IV и V. Перед тем как анализировать отдельные энергонесущие POD моды, необходимо отметить, что главные собственные функции, соответствующие наибольшим собственным значениям, имеют пару с (почти) таким же уровнем энергии. Это особенно заметно для ближней области струи, где временная реализация является очень длинной по сравнению с локальным характерным временем, что гарантирует хорошую сходимость результатов, т.е. POD алгоритма (см. пары $q = 1, 2$ и $q = 3, 4$). Каждая базисная функция должна иметь идентичную себе пару с точностью до замены $\phi \rightarrow -\phi$ (зеркальная симметрия), что является следствием акси-

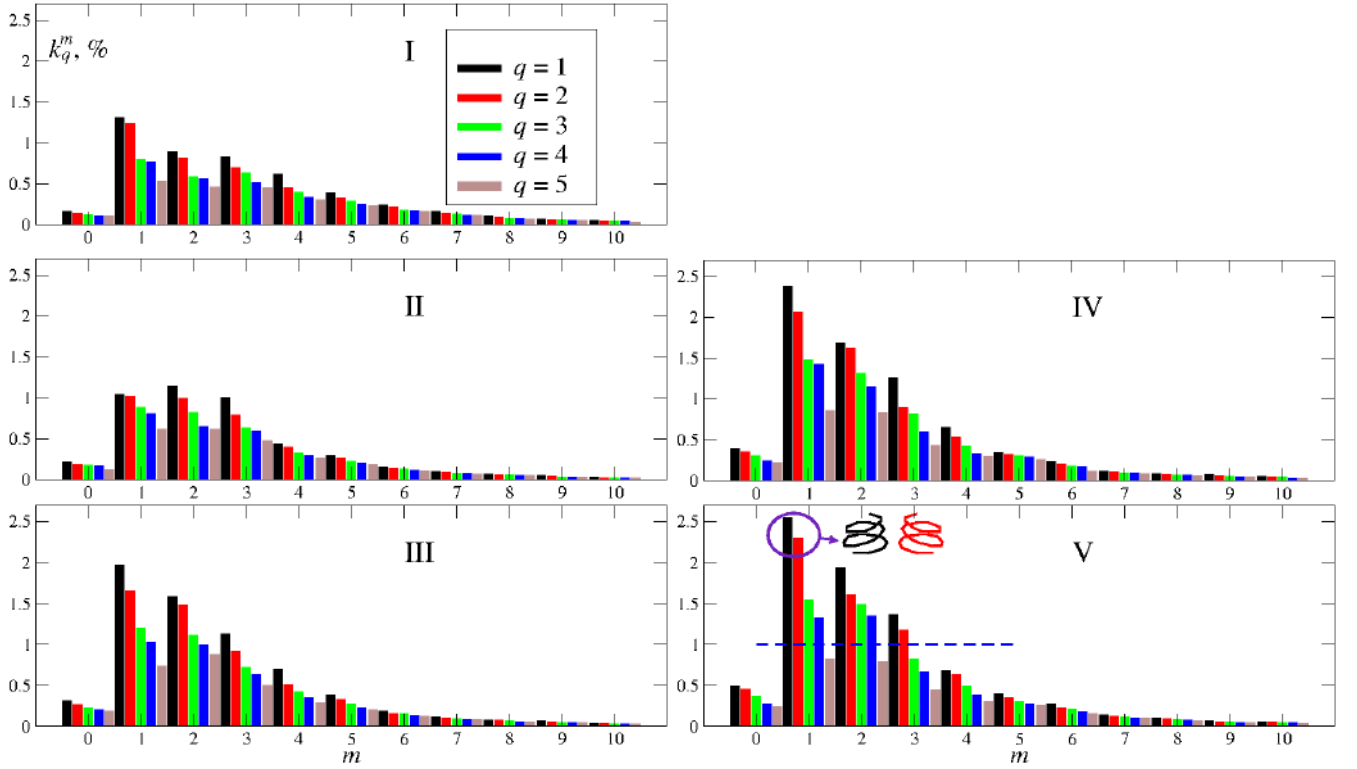


Рисунок 3.21. Распределение доли $k_q^m = (\lambda_q^m)^2/2$ от общей турбулентной кинетической энергии для пяти наиболее энергетичных POD мод с разными m

альной симметрии потока и отсутствием закрутки (выделенного направления). Небольшое отклонение уровней энергии между зеркально-симметричными модами происходит также благодаря сильно ограничивающему условию ортогональности для $\mathbf{v}_q^m(r, x)$.

На рис. 3.22 (слева) показана спиральная форма двух наиболее энергетичных мод с $m = 1$ и $q = 1, 2$ для самой дальней подобласти V, которые в паре содержат 4.85% от общей энергии. Винтовая форма возмущения реализуется из-за волнового поведения функции $\mathbf{v}_q^m(r, x)$ в направлении x и Фурье-декомпозиции по ϕ . Спираль наблюдается для всех наиболее энергетичных мод в том числе $m > 1$, и может быть интерпретирована как типичная форма базисной функции для струйной задачи (“оптимальный” базис в терминах POD).

Аналогично предыдущей секции, рассмотрим комплекснозначные временные амплитуды a_q^m , начиная со следующей декомпозиции:

$$a(t) = \beta(t)e^{2\pi i\gamma(t)}, \quad (3.8)$$

где β и γ являются действительными функциями времени. Важно еще раз отметить, что γ оказывается линейной функцией времени ($\gamma \approx ft$), что продемонстрировано на рис. 3.22. Отметим, что пара зеркально-симметричных мод ожидаемо имеет одно и то же абсолютное значение γ , но разного знака, что соответствует вращению спиралей вокруг оси симметрии,

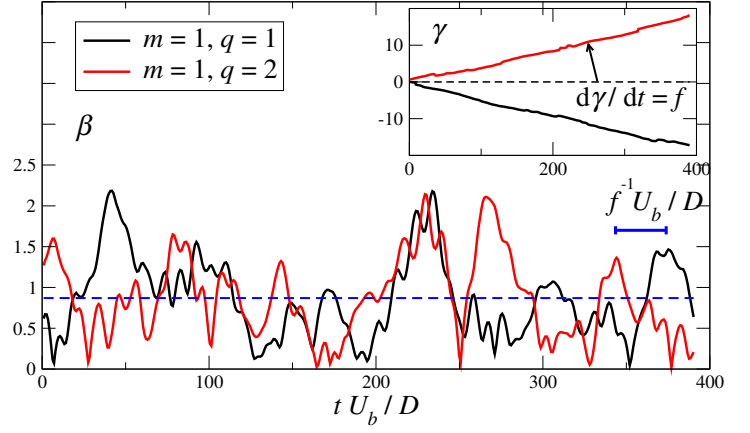
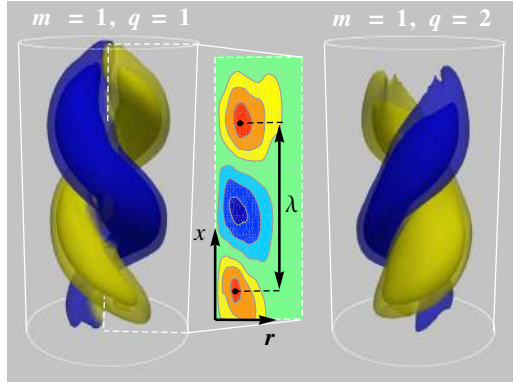


Рисунок 3.22. Слева: изоповерхность модуля скорости, окрашенная величиной продольной скорости моды с $m = 1$ и $q = 1, 2$ для подобласти V. Двумерные изоконтурные демонстрируют распределение реальной части продольной компоненты скорости POD моды. Справа: эволюция β и γ (вложенный рисунок) для области V

но в разные направления, с частотой f . Обнаруженная экспоненциальная зависимость временных амплитуд POD мод от времени ($e^{2\pi i f t}$) означает, что рассматриваемые винтовые структуры сносятся (распространяются) вниз по потоку с некоторой фазовой скоростью, которая будет определена чуть ниже. Таким образом, мы систематически показали, что базисные (оптимальные) функции струйной задачи представляют собой спиральные *бегущие* волны. В тоже время турбулентная динамика представляется функцией $\beta(t)$, которая флуктуирует примерно с тем же периодом вращения спирали $1/f \approx 22.5D/U_b$ для области V.

Характеристики наиболее энергонесущих спиральных волн для $m = 1$ ($q = 1$ идентично $q = 2$) представлены на рис. 3.23 в зависимости от расстояния от начала координат. Длина волны λ медленно растет с x и равняется примерно 5, если её нормировать на локальную полуширину струи ($\lambda/\delta \approx 5$). Частота вращения f спирали уменьшается с x и колеблется около значения 0.17 при нормировке на локальные характеристики струи. Аналогично фазовая скорость $u_{ph} = f\lambda$, убывающая с x , принимает почти постоянные значения (около 0.9), если обезразмерена при помощи δ и осредненной по времени осевой скорости в точке $r = \delta$, что находится в согласии с предыдущими исследованиями [194]. Стоит отметить, что схожие характеристики наиболее энергетичных спиральных волн найдены и для $m > 1$ (близкие значения λ , f и u_{ph}). Как и в предыдущей секции мы сравниваем результаты, полученные при помощи POD и линейного анализа устойчивости для нейтрального решения ($k_{im} = 0$), которые показаны также на рис. 3.23 сплошной линией. Стоит отметить, что анализ устойчивости проведен аналогичным предыдущему пункту 3.2.2 образом. Сравнение для частоты

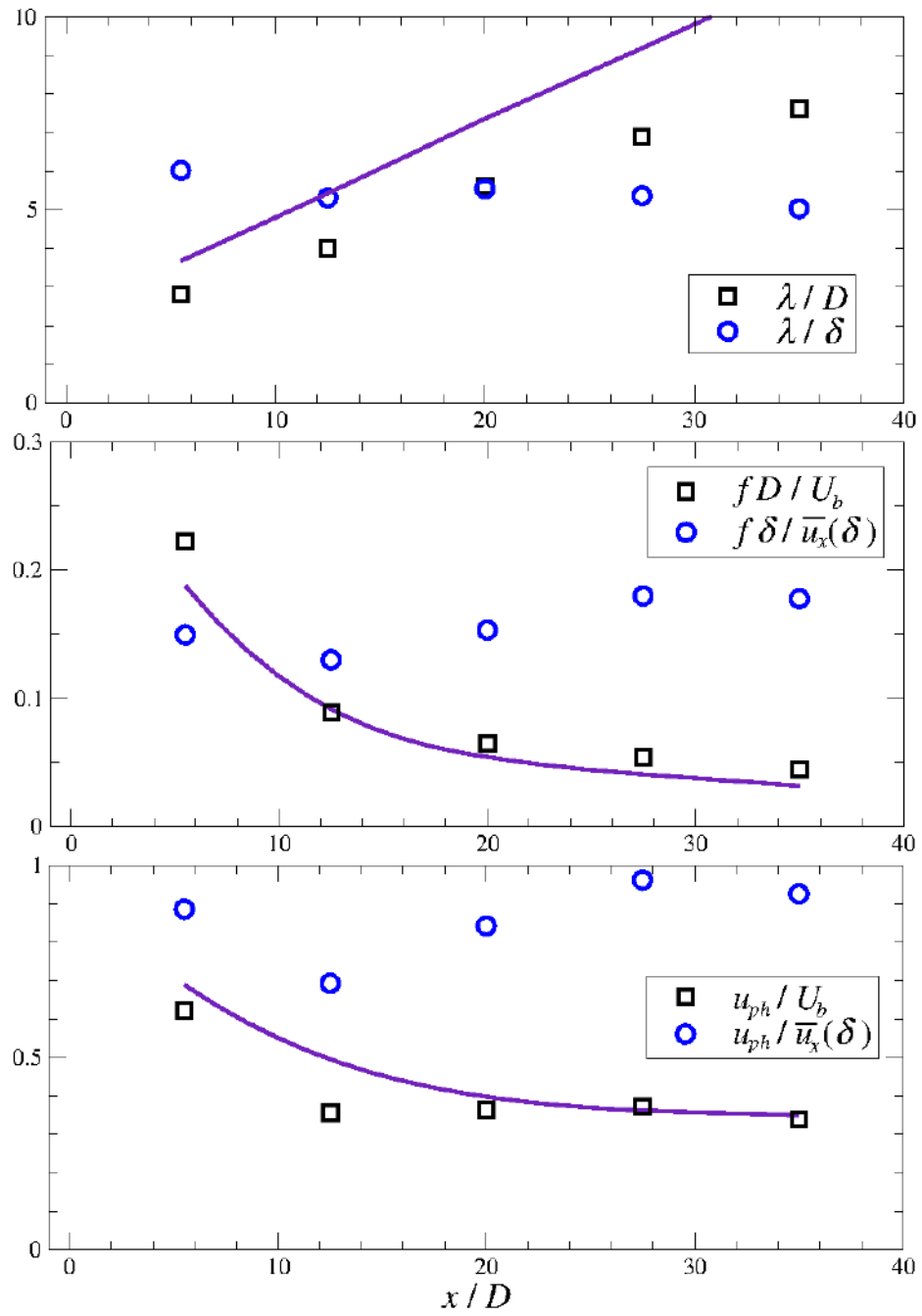


Рисунок 3.23. Изменение λ , f и u_{ph} с x . Символы: результаты POD, нормализованные при помощи U_b , D (квадраты) и локальных значений δ , $\bar{u}_x(r = \delta)$ (кружки). Линии: результаты линейной теории устойчивости (U_b , D)

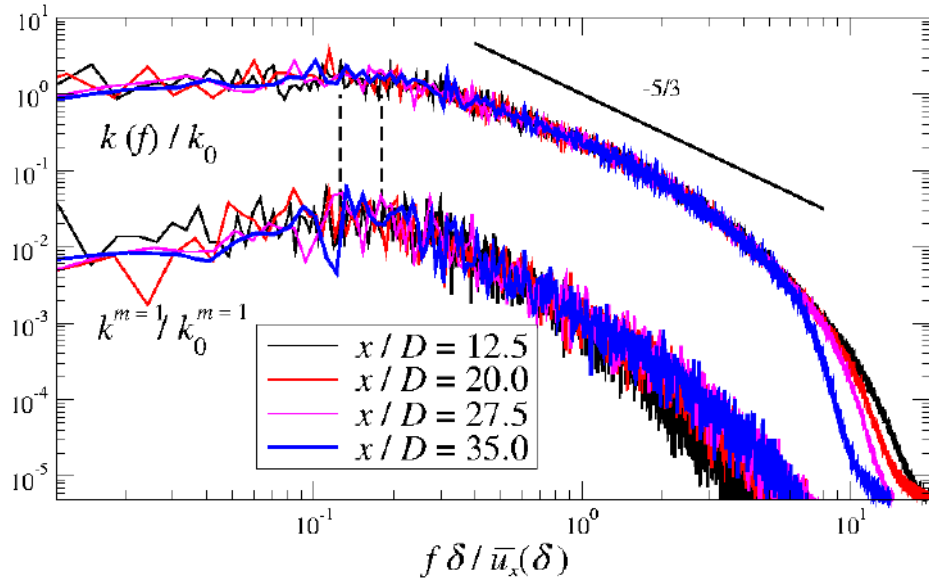


Рисунок 3.24. Нормированный спектр турбулентной кинетической энергии $k(f)$ в слое смешения ($r = \delta$) в различных продольных позициях. Также показан спектр пульсаций, соответствующих $m = 1$, $k^{m=1}$ (смещен вниз для ясности). Вертикальные штриховые линии указывают диапазон частот, обозначенных на рис. 3.23

и фазовой скорости показывает отличное совпадение, в то время как длина волны немного переоценена.

Имеет смысл рассмотреть динамическую значимость проанализированных когерентных структур. Для начала рассмотрим спектр турбулентных пульсаций в слое смешения при различных x , рис. 3.24. Стоит отметить очевидную автомодельность крупных масштабов и инерционного интервала [259], что подтверждает аргументы предыдущей главы, а именно, формулу (2.113). Вертикальные штриховые линии демонстрируют некоторый разброс характерной частоты крупномасштабных спиральных структур с $m = 1$ и $q = 1, 2$ (см. рис. 3.23). Если проинтегрировать низкочастотную часть спектра от нуля до $f\delta/\bar{u}_x < 0.24$, то результат составит 43% от общей энергии. На рис. 3.24 также показан спектр турбулентных пульсаций, рассчитанный только для $m = 1$, на котором уже можно обнаружить слабый пик в интересующем нас интервале частот.

При помощи результатов численных расчетов методом DNS и статистического анализа методом POD исследованы характеристики когерентных структур от ближней до дальней области турбулентной струи, вытекающей из трубы круглого сечения. Показано, что распространяющиеся вниз по потоку когерентные структуры спиральной формы являются характерными собственными модами струйного течения и вносят существенный вклад в структуру и динамику пульсаций потока. Обнаруженные спиральные структуры, по всей видимости,

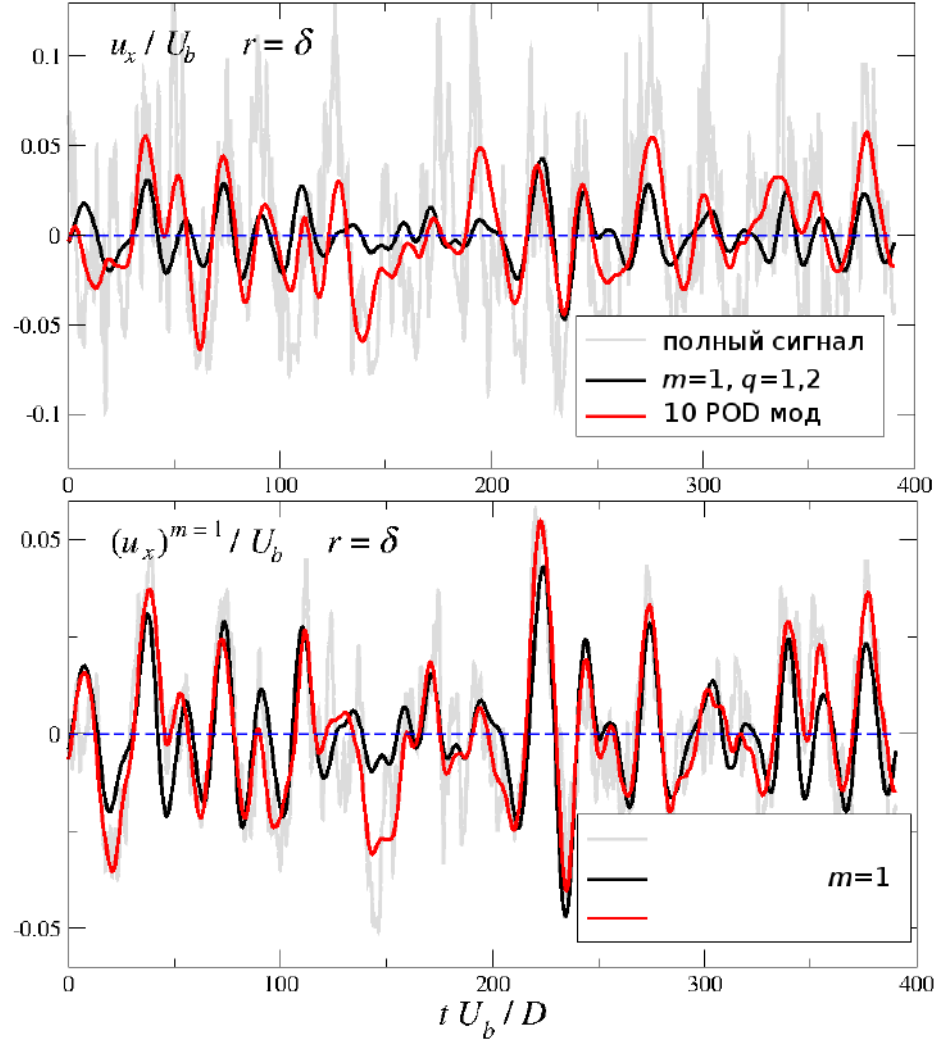


Рисунок 3.25. Сверху: мгновенный сигнал продольной компоненты скорости в точке $x/D = 35$, $r = \delta$, а также сигнал, восстановленный только из двух мод $m = 1$, $q = 1, 2$ и десяти мод. Снизу: аналогичные сигналы продольной скорости только для $m = 1$

играют определяющую роль в динамике неосесимметричных и закрученных струй, что хорошо согласуется с асимптотикой в дальней области струи и соображениями автомодельности (см. пункт 2.2). Характеристики наиболее энергонесущих спиральных структур, такие как длина волны, частота и фазовая скорость, нормированные на локальные параметры струи, были проанализированы с использованием статистического метода POD и сопоставлены с результатами линейного анализа устойчивости. Установлено, что две первые зеркально-симметричные POD моды, содержащие около 5% полной кинетической энергии турбулентности, описывают пространственную структуру и динамику крупномасштабных пульсаций первой азимутальной моды $m = 1$ сдвигового слоя. Будущие исследования будут направлены на детальное изучение роли наблюдаемых спиральных структур в процессах перемешивания [210], генерации акустического шума [211], анализ их вклада в сильную анизотропию течения, а также распределение концентрации пассивной примеси в дисперсных потоках [260].

3.3. Слабозакрученная турбулентная струя

⁴Закрученные струйные течения имеют богатую историю исследования как из-за широкого спектра промышленных приложений, так и благодаря интригующим фундаментальным явлениям [261]. Свободные струйные течения с закруткой имеют особое значение, поскольку они содержат некоторые общие черты, присущие всем закрученным потокам и не подвержены влиянию ограничивающего пространства и стенок. Как и в случае без закрутки, в литературе обычно исследуются струйные течения, вытекающие из сопла с поджатием, особенностью которых является квазиламинарный однородный профиль скорости на кромке сопла. Несколько параметров определяют динамику такого потока, среди которых число Рейнольдса, толщина потери импульса тонкого пограничного слоя около стенки внутри сопла и уровень турбулентных пульсаций. Важным параметром является степень закрутки потока, которая может задаваться различными техническими способами (стационарные завихрители, тангенциальная инжекция и т.д.). В частности, известно, что при довольно сильной степени закрутки поджатие сопла приводит к появлению дополнительного максимума на радиальном профиле скорости с точкой перегиба [262–266]. Таким образом, для исследования различных режимов течения приходится варьировать большое число параметров. Неизбежно возникают проблемы при сравнении и интерпретации результатов, полученных с различными граничными условиями при помощи разных экспериментальных установок. Исследования канонических закрученных течений, результаты которых можно использовать для валидации данных,

⁴ См. работы [6,18,33] в разделе “Публикации по теме диссертации”

полученных в экспериментах и численных расчетах, являются крайне актуальными.

Как и в прежней секции мы исследуем течение из длинной трубы, из которой вытекает полностью развитый турбулентный поток в затопленное пространство. Закрутка задается при помощи вращения внутренней стенки трубы вокруг своей оси, что позволяет получить на выходе уникальный осредненный по времени профиль скорости и пульсаций, зависящий только от числа Рейнольдса и параметра крутки $N = U_w/U_b$ [267]. Здесь U_w обозначает скорость вращения стенки трубы вокруг своей оси, а U_b – среднерасходная скорость в трубе, как и прежде. Мы будем исследовать струйное течение с $Re = 5300$ в диапазоне $0 \leq N \leq 1$ при помощи метода крупных вихрей (LES), аналогично незакрученному случаю, рассмотренному в секции 3.2.1. Все вычислительные детали соответствуют случаю с $N = 0$, поэтому повторно не приводятся. Помимо закона сохранения массы и импульса, решается также транспортное уравнение на отфильтрованное поле концентрации пассивной примеси (температуры) при постоянной плотности среды в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{T} = \frac{1}{PrRe} \Delta \tilde{T} - \nabla \cdot \tilde{\mathbf{q}}, \quad (3.9)$$

где $\tilde{T}$ – отфильтрованное поле температуры, $Pr = \nu/\alpha$ есть отношение кинематической вязкости ν и коэффициента температуропроводности α , представляющее число Прандтля (было также введено в пункте 1.4), которое в данном пункте равно $Pr = 0.71$, что соответствует характеристикам воздуха. Вектор подсеточного потока тепла $\tilde{\mathbf{q}}$ возникает в уравнении после применения операции пространственной фильтрации и моделируется аналогично тензору $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ (см. пункт 1.3) при помощи гипотезы Буссинеска:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{u}}\tilde{T} - \tilde{\mathbf{u}}\tilde{T} = \frac{1}{Pr_t Re_t} \nabla \tilde{T}, \quad (3.10)$$

где $Re_t = \nu Re/\nu_t$ – турбулентное число Рейнольдса, которое определяется подсеточной турбулентной вязкостью согласно (1.46), при этом турбулентное число Прандтля принимается постоянным, $Pr_t = 0.9$. Далее при изложении результатов волна над символами будет опущена.

Одни из первых экспериментов по исследованию влияния закрутки стенки трубы на рассматриваемое струйное течение были выполнены Розе (1962) [268]. Он описал основные эффекты благодаря наличию средней азимутальной компоненты скорости, такие как увеличение угла расширения струи, интенсификация вовлечения окружающей жидкости, высокий уровень турбулентных пульсаций, быстрое затухание продольной компоненты скорости вниз по течению по сравнению с незакрученной струей. Пратте и Кеффер (1972) [269] подтвердили выводы Розе и показали, что средняя продольная и азимутальная компоненты скорости затухают, как x^{-1} и x^{-2} , соответственно. Эти факты активно обсуждались в Главе 2, основываясь

на соображениях автомодельности. Напомним, что для ламинарной струи асимптотика дальнего поля закрученной струи была исследована Лойцянским (1953) [138] и Цуккером (1955) [137]. Мехта и др. (1991) [270] количественно изучили изменения напряжений Рейнольдса при увеличении N до 0.4. Факциоло и Альфредссон (2004) [271] также экспериментально исследовали закрученное течение из трубы вплоть до $Re = 33500$ и $N = 0.5$. Подводящая труба длиной в $100D$ позволяла надежно получать полностью развитый турбулентный поток на выходе. Было обнаружено интересное явление, когда наблюдалось так называемое противовращающееся основному потоку струйное ядро около оси симметрии на расстоянии $x/D \approx 6$. Дальнейшие экспериментальные и численные исследования этого явления описаны в [272]. Орлу и Альфредссон (2008) [224] использовали ту же самую экспериментальную установку для одновременного измерения пульсаций температуры и скорости в слабо нагретом струйном потоке при $Re = 24000$ и $N = 0 - 0.5$. Масиель и др. (2008) [273] предложил объяснение явлению противовращающегося струйного ядра, используя уравнение переноса момента импульса.

Закрученный квазиламинарный поток, вытекающий из относительно короткой трубы, исследовался Лиангом и Максворзи (2005) [274] при $Re = 1000$. Авторы изучали течения при различных значениях параметра крутки, исследуя азимутальные неустойчивости в форме спиральных волн. Особое внимание было уделено глобальной моде неустойчивости, реализующейся в результате так называемого разрушения вихря (vortex breakdown) при наличии рециркуляционной зоны около сопла (области возвратного течения). И хотя в данной работе явление разрушения вихря не исследуется, стоит отметить, что в литературе оно получило много внимания и подробно представлено в обзорных статьях [275, 276]. При помощи LES в серии работ Лугинсланд и др. [277–279] показали, что характеристики рециркуляционной зоны крайне чувствительны к граничным условиям, толщине стенки трубы и уровню пульсаций на входе. Санмигель-Рохас и др. (2008) [280] численно исследовали ламинарный поток, вытекающий из вращающейся трубы в цилиндрический резервуар с соотношением диаметров 1 : 8. Авторы построили карту режимов в плоскости $Re - N$, проанализировали спиральные возмущения и явление разрушения вихря. Недавно Миранда-Бареа и др. (2015) [281] подтвердили эти результаты экспериментально.

На рис. 3.26 представлена визуализация вихревых структур в ближней области струи для разных значений N . Как уже обсуждалось ранее для $N = 0$ хорошо видны полосчатые структуры до $x/D \leq 1$, которые зарождаются в турбулентном потоке внутри трубы около ее стенки. Как и для слабозакрученных струй с однородным входным профилем, что приводит к наклону вихрей Кельвина–Гельмгольца относительно оси симметрии [282], для $N = 0.25$

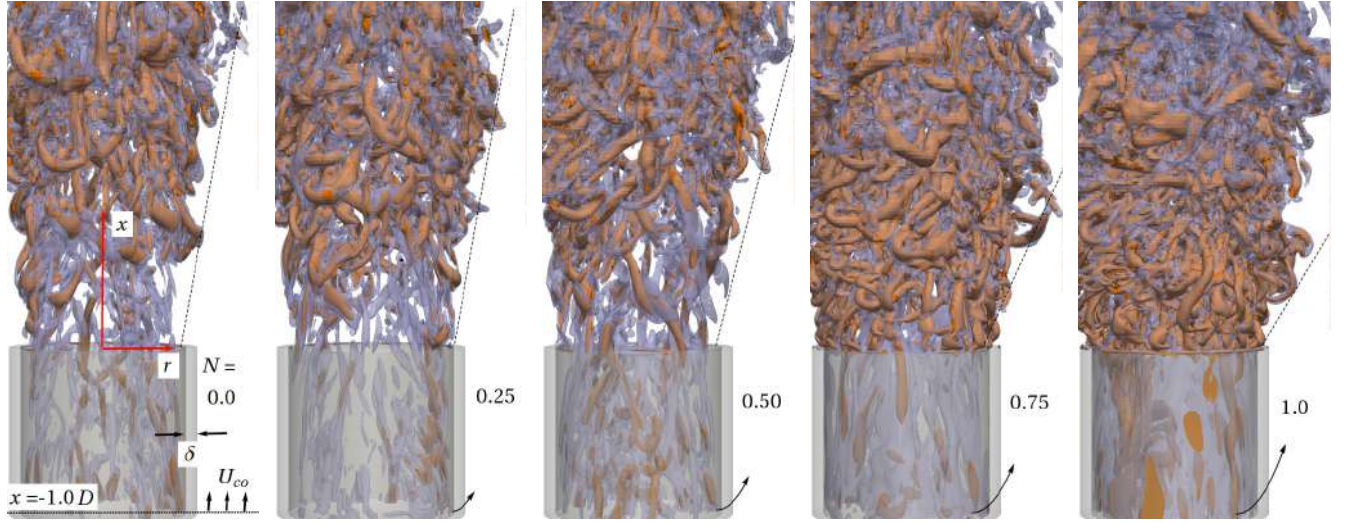


Рисунок 3.26. Визуализация вихревых структур около кромки трубы при помощи изоповерхностей Q -критерия с $Q = 0.5$ и 1.5 для различных значений N от 0 до 1. Черные стрелки указывают направление вращения внутренней стенки трубы. Штриховая линия схематически показывает угол раскрытия струи

шпилькообразные вихри (hairpin) также наклоняются вместе с линиями тока. Однако, для относительно больших значений $N \geq 0.75$, вихревые структуры, вытекающие с потоком из трубы, сразу же разрушаются под действием сильного аксиально-азимутального сдвига в слое смещения.

На рис. 3.27 представлены радиальные профили осредненной по времени продольной и азимутальной компоненты скорости внутри трубы ($x/D = -1$) для различных значений N . Увеличение закрутки приводит к известной ламинаризации потока, при этом продольная компонента скорости в центре трубы увеличивается. Профиль $\bar{u}_\phi$ близок к параболе из-за влияния напряжений Рейнольдса, в то время как для ламинарного течения точным решением является линейный профиль азимутальной компоненты скорости [283]. В диапазоне рассматриваемых значений N напряжения Рейнольдса не меняются существенным образом. Для сравнения результатов с данными из литературы мы приводим значения параметра крутки, рассчитанного согласно формулам:

$$S_1 = \frac{\int \bar{u}_x \bar{u}_\phi r^2 dr}{D/2 \int \bar{u}_x^2 r dr}, \quad S_2 = \frac{\int \bar{u}_x \bar{u}_\phi r^2 dr}{D/2 \int \left(\bar{u}_x^2 - \bar{u}_\phi^2/2 \right) r dr}. \quad (3.11)$$

Интегрирование проводится при $x/D = -1$ внутри трубы. В табл. 3.6 представлены значения параметров крутки S_1 и S_2 для различных N . Максимальное значение $S_2 \approx 0.36$ соответствует $N = 1$. Отметим, что параметры S^{lam} в таблице рассчитаны, если принять линейный профиль азимутальной компоненты скорости $\bar{u}_\phi = 2Nr/D$. Все режимы соответствуют стру-

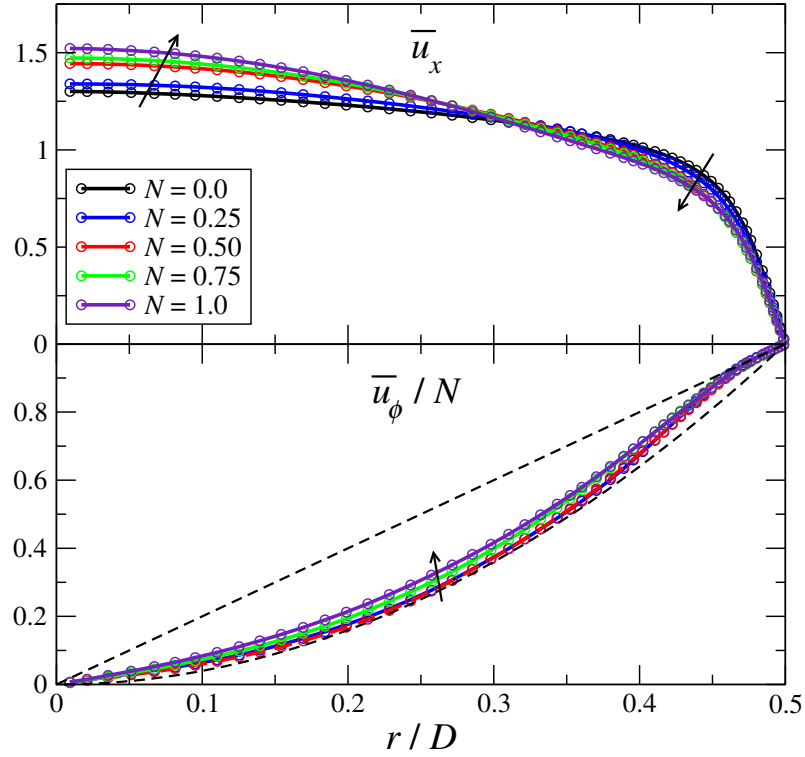


Рисунок 3.27. Радиальные профили осредненные по времени продольной и азимутальной компоненты скорости при $x/D = -1.0$. Стрелки показывают тенденцию при увеличении закрутки. Штриховые линии соответствуют линейной функции и параболе

ям с умеренной величиной закрутки без рециркуляционной зоны. Как отмечено выше, Лугинсланд и др. [277–279] исследовал похожую конфигурацию течения с $N \approx 1.3$, однако, профили скорости задавались аналитическими функциями. В их случае реализовывалось явление разрушения вихря из-за высокого значения $S_2 \approx 0.8$, поскольку азимутальная компонента скорости имела линейное распределение, в то время как для полностью развитого течения во вращающейся трубе свойственно параболическое распределение $\bar{u}_\phi$, что значительно уменьшает значение S (S_1 или S_2) при том же самом N .

С увеличением N поток заметно меняется. На рис. 3.28 показана эволюция $\bar{u}_x$, максимума $\bar{u}_\phi$ с расстоянием x , а также пульсации $\bar{u}'_x$, $\bar{u}'_r$. Кроме того, показаны данные для поля температуры $\bar{T}$ и ее пульсаций $\bar{\theta}'$. Для случая $N = 0$ сравнение результатов с данными Сандберга и др. [251] и Капоне и др. [221] было уже показано в предыдущей секции. Продольная компонента скорости затухает быстрее при наличии закрутки потока. Помимо роста скорости расширения струи с N , стоит отметить, что пограничный слой в трубе становится толще (см. рис. 3.27), что также приводит к более быстрой диффузии импульса вниз по течению. Сравнение скорости затухания максимума радиального профиля $\bar{u}_\phi$ с данными экспериментов Орлу и Альфредссона [224] для случая $N = 0.5$ показывают отличное согласие, несмотря

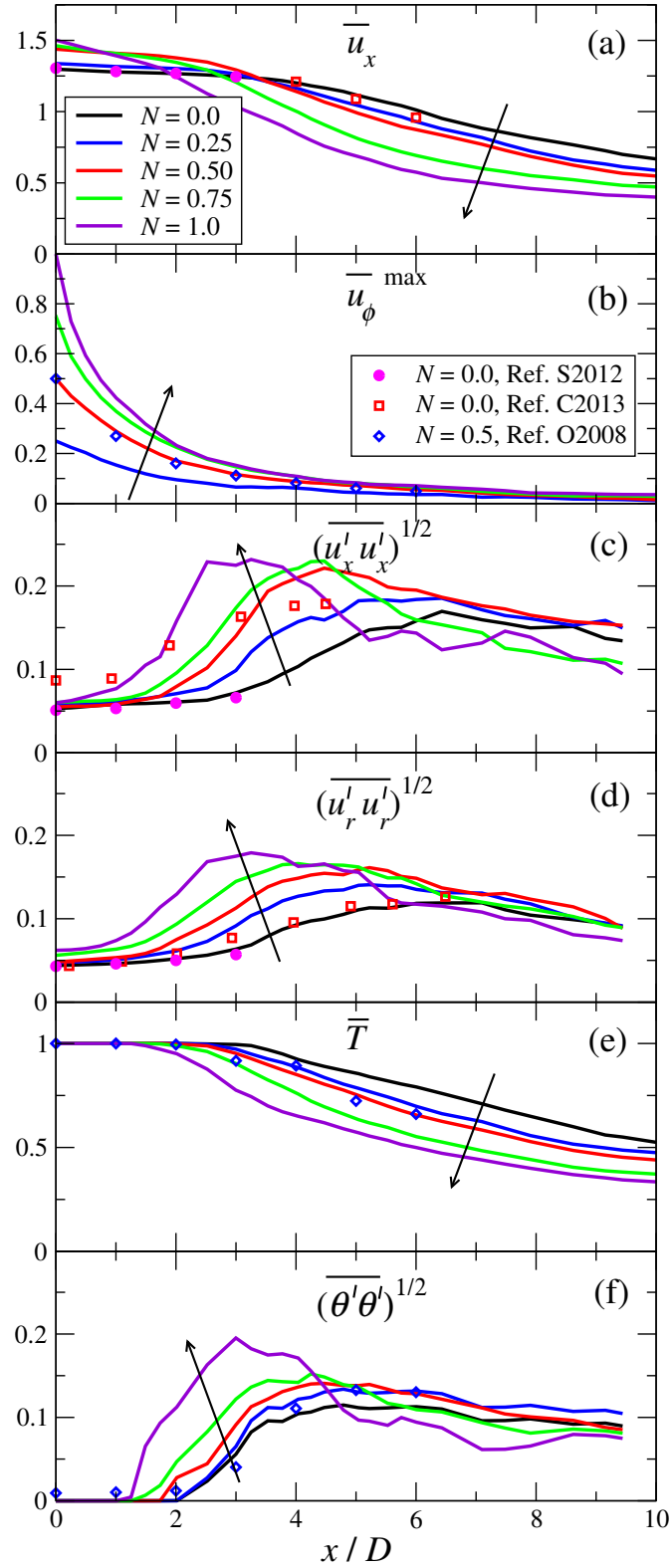


Рисунок 3.28. Осредненные по времени характеристики вдоль оси симметрии для различных N . (a): продольная скорость, (b): максимум азимутальной скорости при данном x , (c): пульсации продольной компоненты скорости, (d): пульсации радиальной компоненты скорости, (e): температура, (f): пульсации температуры. Данные из литературы показаны символами (S2012: [251], C2013: [221], O2008: [224]). Стрелка указывает на увеличение величины закрутки

Таблица 3.6. Значения числа закрутки согласно различным определениям

N	S_1	S_1^{lam}	S_2	S_2^{lam}
0	0	0	0	0
0.25	0.076	0.096	0.077	0.098
0.50	0.142	0.182	0.148	0.193
0.75	0.220	0.271	0.243	0.310
1.0	0.296	0.360	0.358	0.462

на то, что эксперименты проведены для $Re = 24000$. Стоит обратить внимание, что закрутка уменьшается крайне быстро с x и уже при $x/D = 10$ величина азимутальной компоненты скорости становится пренебрежимо малой по сравнению с продольной компонентой. Температура на оси затухает примерно с той же скоростью, что и $\bar{u}_x$. Чем выше значение N , тем быстрее спадает $\bar{T}$. Согласие с экспериментами для $\bar{T}$ и $\bar{\theta}'$ также очень хорошее, несмотря на некоторый разброс данных при $x/D = 3$ и 4 .

На рис. 3.29 показано сравнение радиальных профилей $\bar{u}_x$ и $\bar{u}_\phi/N$ для различных N и x . При $x/D = 1$ для малых параметров крутки радиальный профиль $\bar{u}_x$ схож с профилем скорости, соответствующим полностью развитому потоку в трубе. Однако, при увеличении N уже около кромки трубы профиль продольной скорости имеет форму типа распределения Гаусса. Профиль $\bar{u}_\phi$ все еще может быть описан параболой в центре потока. На последней рассматриваемой продольной позиции $x/D = 6$ видно, что существует небольшая область около оси симметрии, где $\bar{u}_\phi$ отрицательна, которая появляется уже при $N = 0.5$ в диапазоне $x/D = 5.5 - 5.8$ с шириной зоны противовращения $r/D \approx 0.14$. При более высоких значениях N это явление становится более ярко выраженным. Для $N = 0.75$ область с $\bar{u}_\phi < 0$ расположена между $x/D = 5.5$ до 6.4 и имеет ширину $r/D \approx 0.17$. Для $N = 1.0$ эта область начинается при $x/D \approx 4.5$ и заканчивается при 6.2 , при этом максимальная отрицательная азимутальная компонента скорости составляет примерно 2% от среднерасходной, а ширина этой зоны примерно равна $r/D \approx 0.22$. Это явление противовращающегося ядра впервые наблюдалось в экспериментах Факциоло и Альфредссоном (2004) [271], а также исследовалось в работах [224, 272, 273]. И хотя последняя работа включает в себя результаты LES расчетов и, таким образом, достаточно подробную информацию о потоке, исследование в основном было сфокусировано на осредненных по времени характеристиках. Однако, как будет показано ниже, для объяснения этого явления необходимо рассмотреть динамические

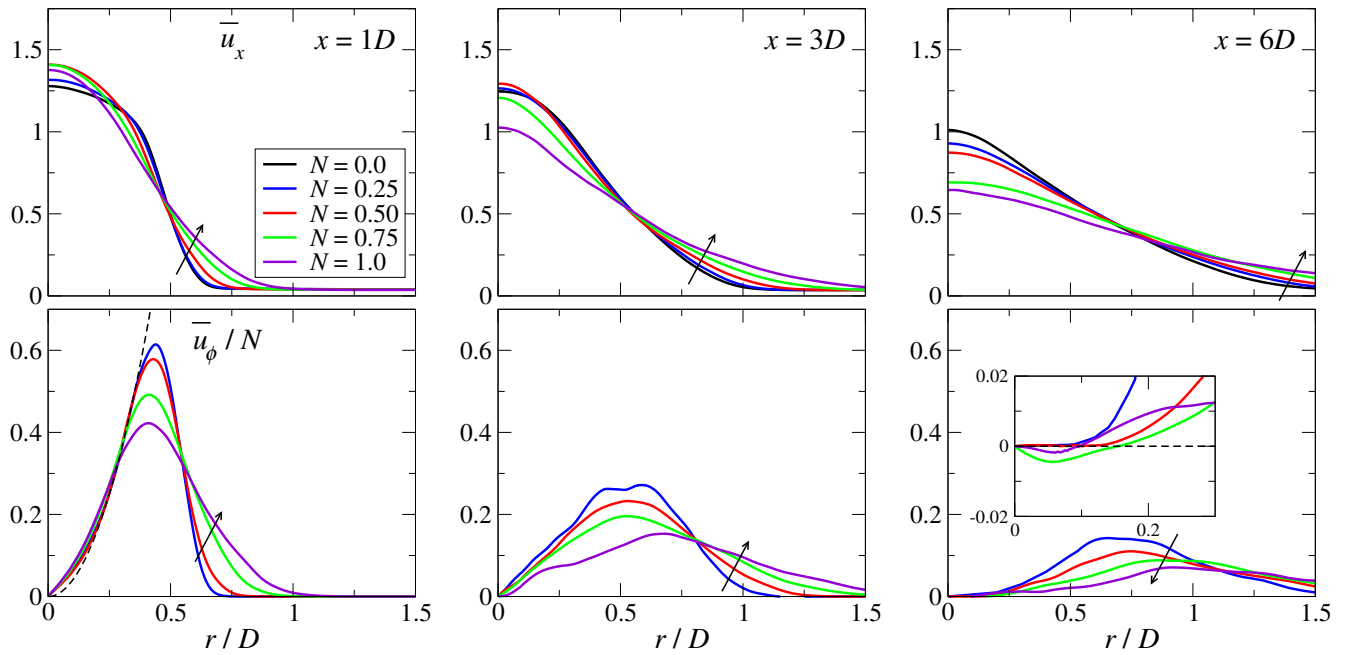


Рисунок 3.29. Радиальные профили осредненной по времени продольной и азимутальной компоненты скорости в сечениях $x/D = 1, 3$ и 6 для различных N . Штриховая линия снизу слева соответствует параболе. Вставка на правом нижнем рисунке показывает область отрицательной средней азимутальной скорости, что соответствует явлению противовращающегося струйного ядра струи

особенности потока.

Диагональные компоненты тензора напряжений Рейнольдса монотонно возрастают с увеличением N до $x/D = 4$ (см. рис. 3.28). В то же время при $x/D = 6$ уровень пульсаций является самым низким для $N = 1$ из-за быстрого затухания продольной скорости с x . На рис. 3.30 показаны радиальные профили $\bar{T}$, $\overline{\theta'\theta'}$, $\overline{u'_x\theta'}$, $\overline{u'_r\theta'}$ и $\overline{u'_\phi\theta'}$. Как было сказано ранее осредненные по времени профили температуры в основном напоминают профили продольной скорости. Таким образом, чем выше скорость вращения, тем быстрее происходит диффузия поля температуры с x . В отличие от диагональных компонент напряжений Рейнольдса $\overline{\theta'\theta'}$ ведет себя немонотонно с увеличением N . При $x/D = 1$ максимум пика пульсаций реализуется для $N = 0 - 0.25$, в то время как радиальный профиль $\overline{\theta'\theta'}$ гораздо шире для $N = 1$. Компоненты $\overline{u'_x\theta'}$ и $\overline{u'_r\theta'}$ остаются положительными для всех N , в то время как $\overline{u'_\phi\theta'}$ меняет знак при $r/D \approx 0.5$ и имеет отрицательный пик около оси симметрии для высоких значений N . Аналогичным образом ведут себя сдвиговые компоненты напряжений Рейнольдса $\overline{u'_\phi u'_r}$ и $\overline{u'_x u'_\phi}$ (не приведены здесь), в то время как $\overline{u'_x u'_r}$ имеет только положительные значения для всех N . Далее будем исследовать мгновенные распределения скорости и температуры и их динамические особенности при помощи плотности функции вероятности.

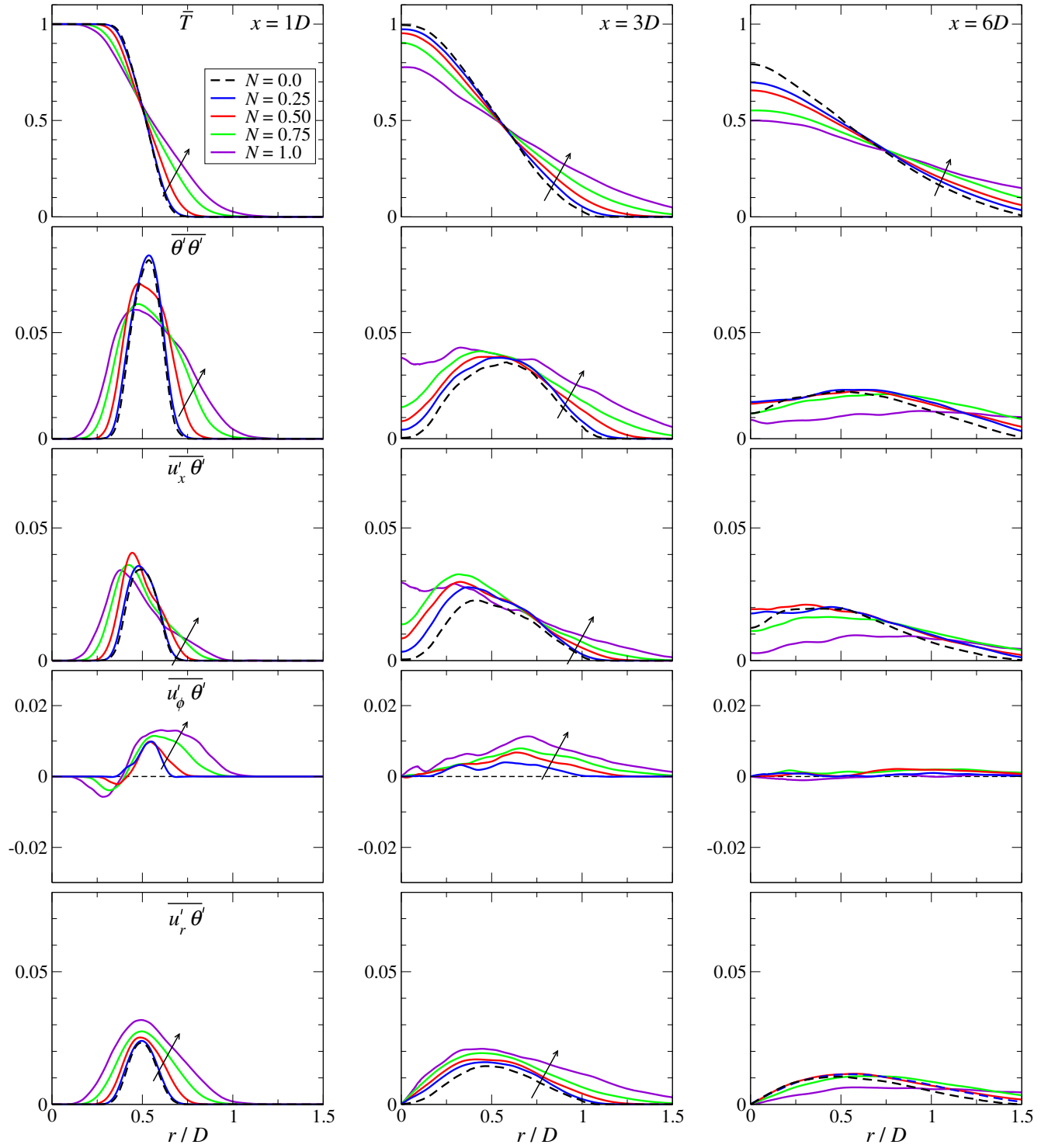


Рисунок 3.30. Радиальные профили осредненной по времени температуры, ее пульсаций и корреляций пульсаций температуры и различных компонент скорости в сечениях $x/D = 1, 3$ и 6 для разных N

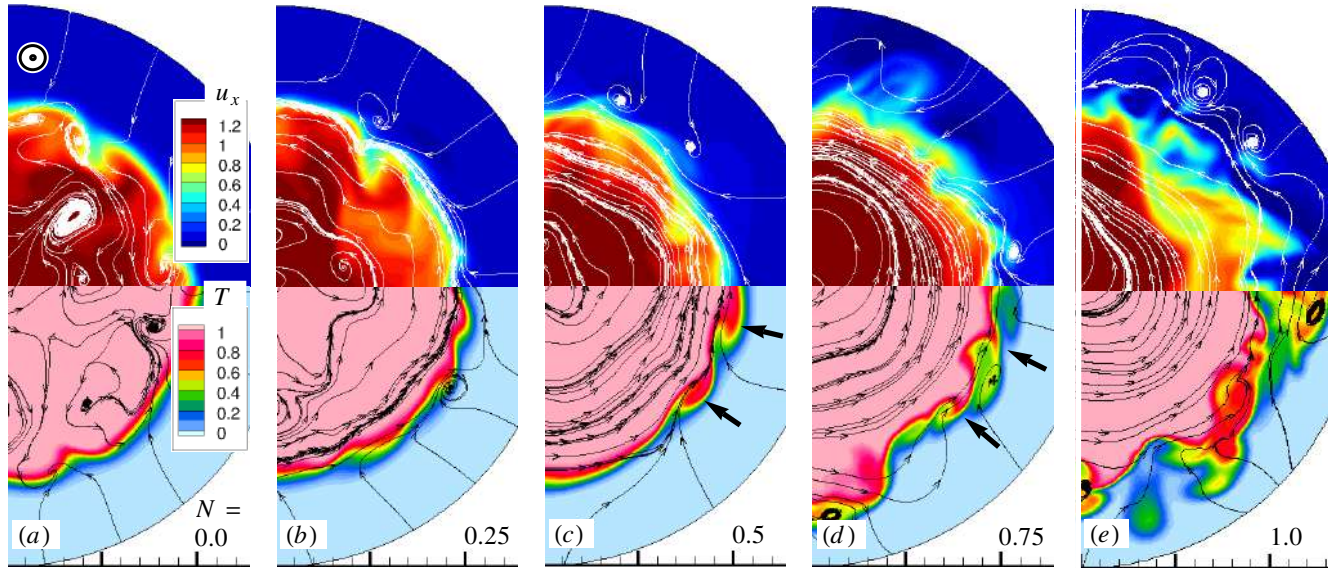


Рисунок 3.31. Мгновенное поле продольной компоненты скорости (сверху) и температуры (снизу) вместе с линиями тока в плоскости $r - \phi$ в сечении $x/D = 0.5$ при различных N

На рис. 3.31 показаны мгновенные поля скорости, температуры и линии тока при $x/D = 0.5$ в плоскости $r - \phi$. Для $N = 0 - 0.25$ поток имеет все характеристики полностью развитого турбулентного пристенного течения с различными продольными полосчатыми когерентными структурами. Видно, что для $N \geq 0.5$ перемешивание в слое смешения сильно интенсифицируется благодаря дополнительному азимутальному сдвигу. Спиральные вихри, идентифицированные Лиангом и Максворзи [274], формируются в слое смешения и имеют вид волн, показанных стрелками на рис. 3.31. Известно, что закрутка потока приводит к возбуждению старших азимутальных гармоник из-за действия центробежной неустойчивости [284]. Согласно визуализации эти крупномасштабные спиральные волны и ответственны за интенсификацию процессов перемешивания. При дальнейшем увеличении N граница раздела горячей и холодной жидкости становится все более нерегулярной. Как будет показано в следующей секции эти особенности сохраняются и при очень высоких значениях $N \approx 5$. Для того чтобы количественно представить изменение объема жидкости, вовлекаемого в струйный поток, используем определение Вигнанского и Фидлера [194] и Кроу и Шампань [56] для расчета dQ/dx , где

$$Q = 2\pi\rho \int_0^\infty \bar{u}_x(x, r) r dr \quad (3.12)$$

представляет собой поток массы через $r - \phi$ плоскость при фиксированном значении x . Изменение dQ/dx (нормированное на $Q_0 = Q(x = 0)$ и D) показано на рис. 3.32. В соответствии с литературными данными закрутка существенно интенсифицирует вовлечение жидкости около сопла, однако, далее эта величина выходит на некоторое постоянное значение в согласии

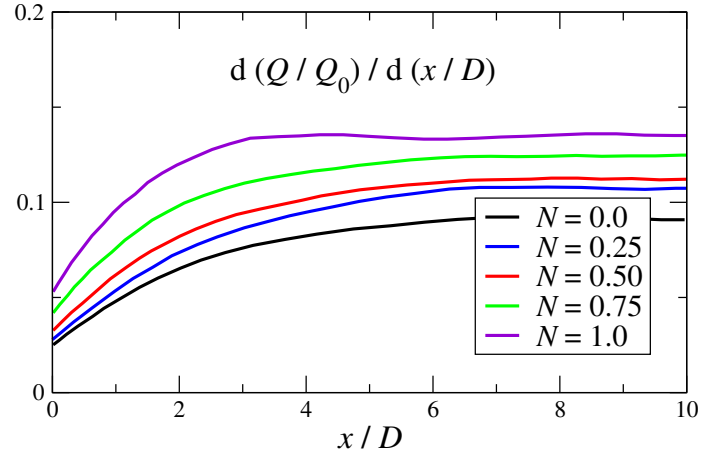


Рисунок 3.32. Нормированная величина, характеризующая интенсивность вовлечения окружающей жидкости в ядро потока

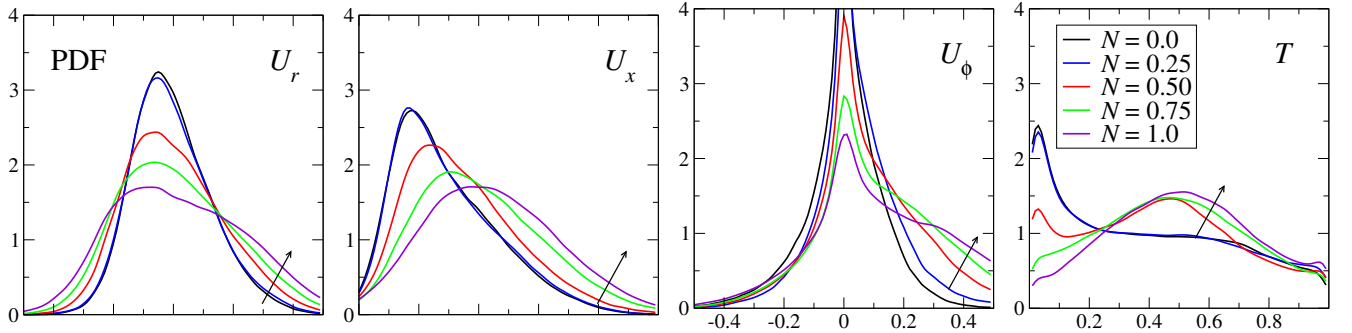


Рисунок 3.33. Функция плотности вероятности (ФПВ) отдельных компонент поля скорости и температуры в слое смешения в точке $x/D = 1.0$, $r/D = 0.5$

с соображениями автомодельности [79].

Орлу и Альфредссон [224] исследовали функцию плотности вероятности (ФПВ) одной и двух переменных (скорости, температуры) в области $4 \leq x/D \leq 6$ для случаев $N = 0$ и $N = 0.5$. Для того, чтобы дополнить эти данные мы сконцентрировались на самой ближней области к кромке трубы ($x/D = 1$). На рис. 3.33 показана ФПВ для всех компонент скорости и температуры при различных N . “Хвосты” ФПВ для u_r растут с N , что указывает на существенную интенсификацию вовлечения жидкости и процессов перемешивания. Распределение ФПВ u_x и u_ϕ становится также более однородным, для T формируется некоторый пик при $T \approx 0.5$, начиная с $N = 0.5$. На рис. 3.34 представлены двумерные ФПВ от радиальной скорости и температуры, а также продольной скорости и температуры. Из такого представления данных видно, что для $N = 0$ вовлечение “холодной” жидкости происходит при $u_r/U_b \approx -0.07$ и $u_x/U_b \approx 0.15$. С увеличением N происходит существенное изменение ФПВ. Стоит отметить, что для пар (u_r, T) и (u_x, T) имеется три пика, амплитуда которых

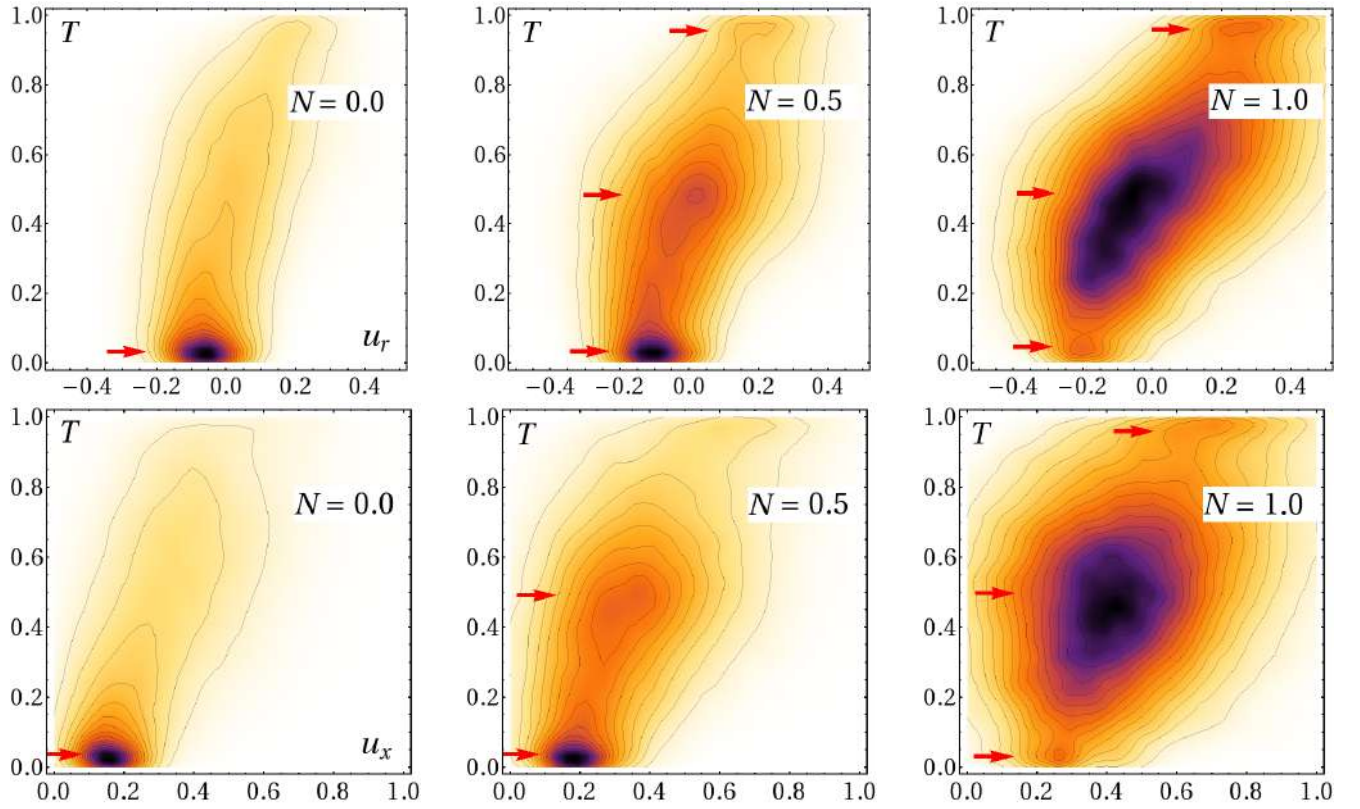


Рисунок 3.34. Совместная ФПВ для двух пар переменных (u_r, T) и (u_x, T) в слое смешения в точке $x/D = 1.0$, $r/D = 0.5$ (верхний и нижний ряд, соответственно). Цветовая схема варьируется от белого для минимальных значений до черного для максимальных для значений ФПВ

зависит от значения N . Имеется пик с отрицательным значением u_r (или низким u_x) и $T \approx 0$. Для $N = 0.5$ этот максимум является самым заметным, также как и для $N = 0$, и соответствует вовлечению “холодной” окружающей жидкости в “горячую” струю. Второй пик имеет $u_r \approx 0$ ($u_x \approx 0.4$) и $T \approx 0.5$, описывающий характеристики хорошо перемешанной жидкости. Третий пик едва различим и имеет $u_r \approx 0.2$ (или $u_x \approx 0.6$) и $T \approx 1$, что соответствует “горячей” жидкости из ядра струи, выбрасываемой на периферию. Для $N = 1$ главным пиком является тот, что описывает хорошо перемешанную жидкость с нулевой радиальной скоростью. Эти наблюдения согласуются с ФПВ одной переменной.

Последний вопрос, который мы рассмотрим, является причина появления отрицательной азимутальной скорости – противовращающегося струйного ядра – при $x/D \approx 6$. На рис. 3.35 показана изоповерхность $T = 0.4$ для $N = 0$ и $N = 1$ и линии тока. Из визуализации видно, что закрутка существенно интенсифицирует перемешивание благодаря дополнительному азимутальному сдвигу. Вниз по течению можно наблюдать достаточно сильные отклонения ядра струи от оси из-за ее крупномасштабных колебаний как раз в области, где обнаружена

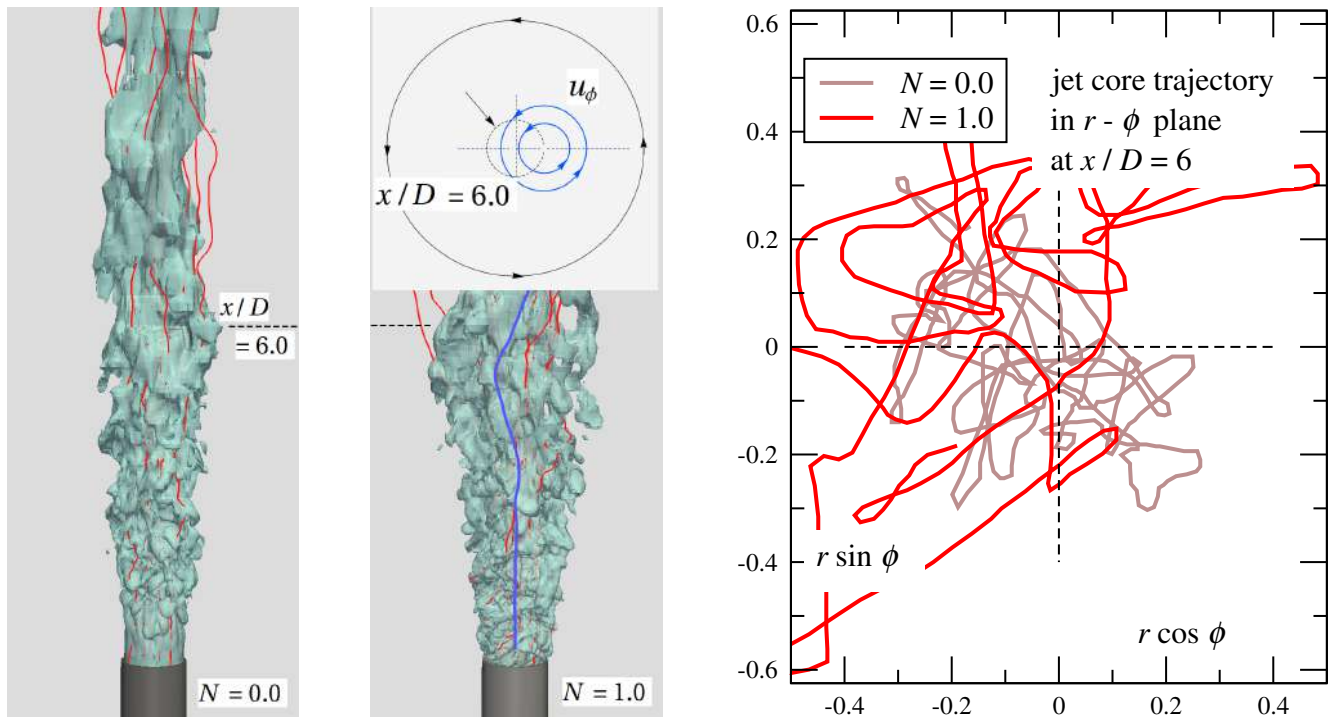


Рисунок 3.35. Изоповерхность $T = 0.4$ и $N = 0.0$ (слева) и $N = 1.0$ (справа). Красная линия соответствует мгновенным линиям тока. Синяя линия (для $N = 1.0$) показывает ядро струи. Вставка на графике схематически объясняет явление противовращающегося струйного ядра

$\bar{u}_\phi < 0$. Эта нестационарность не является очень регулярной и проявляется как некоторое меандрирование и вращение ядра струи вокруг оси симметрии. На рис. 3.35 также показана траектория центра струи (максимальной продольной скорости) в $r - \phi$ сечении при $x/D = 6$. Учитывая распределение азимутальной компоненты скорости, отклонение ядра струи от центра приводит к появлению области с $u_\phi < 0$ около $r = 0$. Если эти отклонения статистически значимы, то эффект может быть замечен и в осредненных по времени характеристиках. Для $N = 0$ траектория максимума продольной скорости в поперечном сечении более плотная из-за относительно высокой продольной скорости и компактная из-за отсутствия азимутальной неустойчивости. Среднеквадратичное отклонение траектории от оси симметрии составляет $r/D \approx 0.19$ для $N = 0$ и $r/D \approx 0.37$ для $N = 1$.

Далее предлагается исследовать обнаруженное меандрирование ядра струи при помощи анализа Фурье для азимутальной переменной и времени. Как и в секции 3.2.1 векторное поле скорости в некоторой плоскости $r - \phi$ представлялось при помощи комплекснозначных коэффициентов $\mathbf{u}(r, m, f)$. Квадрат этой величины пропорционален энергии, содержащейся в определенном азимутальном волновом числе и конкретной частоте. На рис. 3.36 показаны спектры энергии для некоторых низких m при $x/D = 6$ и $r/D = 0.5$ для различных N . Совращающиеся моды с $m > 0$ имеют направление закрутки такое же как и основной

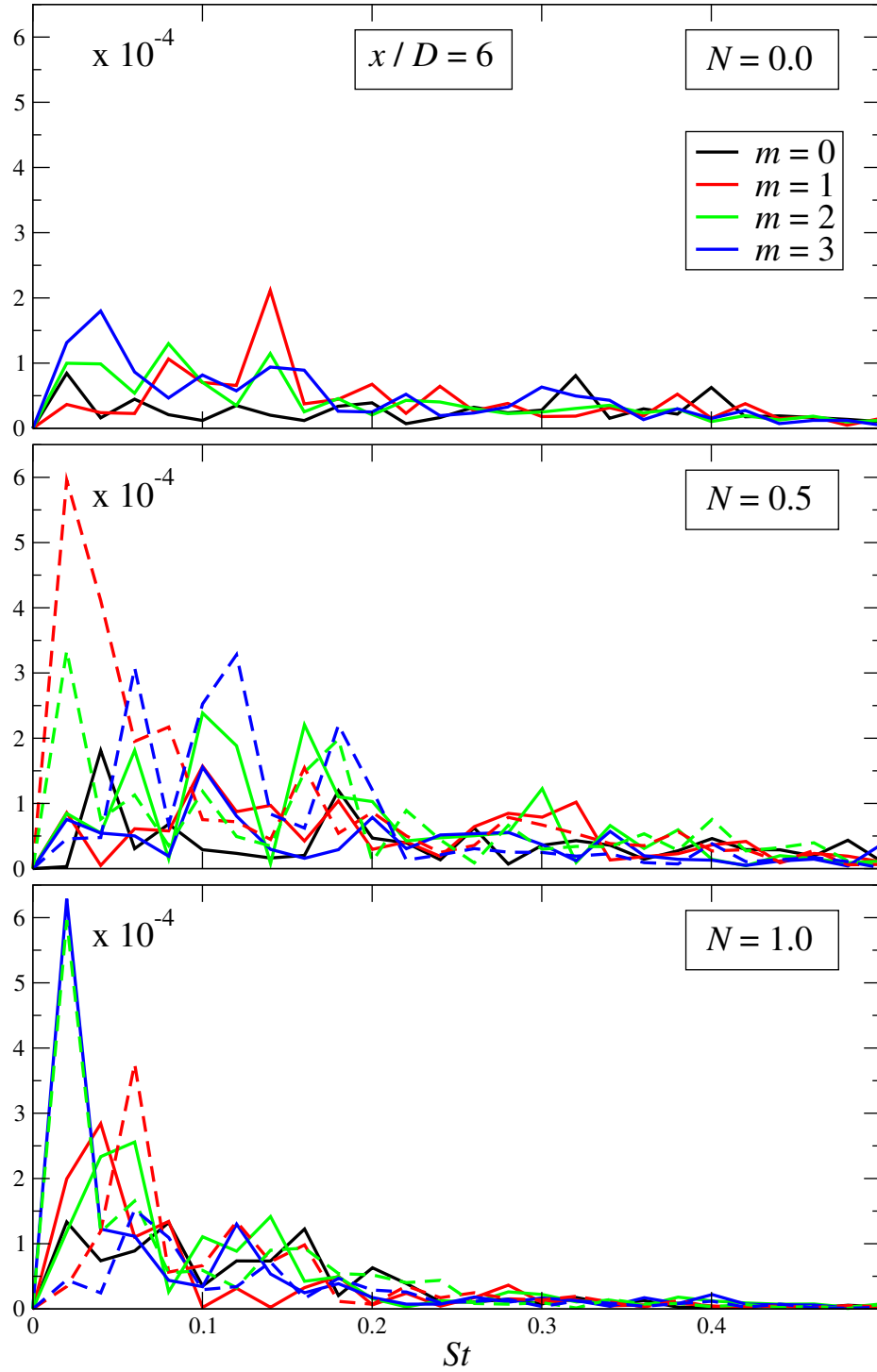


Рисунок 3.36. Спектр кинетической энергии турбулентности для низких азимутальных чисел при $x/D = 6.0$ и $r/D = 0.5$ для различных значений N . Сплошные линии соответствуют $m \geq 0$, в то время как штриховые – $m < 0$.

(средний) поток, в то время как с $m < 0$ – противовращающиеся. В целом, с увеличением N увеличивается величина турбулентной кинетической энергии с малыми m . Для $N = 0$ уровень пульсаций достаточно низок, при $N = 0.5$ существенную энергию приобретают моды с $m = -1, -2$ и -3 . Дальнейшее увеличение N приводит к появлению совращающихся мод в согласии с работой Оберляйтнера и др. [253]. Энергия моды с $m = 3$ компенсирует моду $m = -2$, в то время как $m = \pm 1$ дают примерно одинаковый вклад. Стоит отметить, что в сечении $x/D = 6$ азимутальная скорость уже мала, также не высок уровень турбулентных пульсаций, которые сопровождаются некоторыми низкочастотными флуктуациями. Тем не менее, текущий спектральный анализ находится в согласии с предыдущими визуальными наблюдениями противовращающегося струйного ядра из-за низкочастотных пульсаций.

В данной части работы исследовано влияние закрутки трубы вокруг своей оси, из которой истекает жидкость в затопленное пространство, на характеристики струи в ближней области. Показано, что даже высокая скорость вращения трубы по сравнению со средне-расходной скоростью жидкости не приводит к сильнозакрученному струйному течению в ближней области, поскольку профиль тангенсальной скорости меняется с радиальной координатой почти параболически. Таким образом, жидкость в ядре струи остается слабозакрученной, при этом вращение в слое смещения быстро затухает с продольной координатой. Тем не менее, относительно небольшой закрутки хватает, чтобы дестабилизировать поток и наблюдать так называемое явление противовращающегося струйного ядра при удалении от сопла примерно на шесть калибров. Удалось объяснить это явление в терминах когерентных структур, впервые обнаруженное экспериментально и не имевшего до сих пор должного обоснования. Кроме того, проанализировано влияние закрутки на процессы перемешивания и вовлечения сторонней жидкости в ядро потока.

3.4. Импульсная слабозакрученная турбулентная струя

⁵В закрученных потоках и пламенах из-за нелинейных эффектов при одних и тех же условиях могут реализовываться различные режимы течения. В нереагирующих закрученных потоках бифуркации происходят из-за особенностей гидродинамики – глобальная неустойчивость потока и явление разрушения вихря. В это же время в реагирующих течениях изменение потока зачастую связано с отрывом и присоединением пламени от кромки сопла. Как уже отмечалось ранее, для сильнозакрученных потоков реализуется область возвратного течения, которая широко используется в практических приложениях для стабили-

⁵ См. работы [12,16,37] в разделе “Публикации по теме диссертации”

зации пламени. Эта область возвратного течения помогает организовать рециркуляцию горячих продуктов горения, которые также являются источником тепла для свежей несгоревшей смеси. Несмотря на активное исследование закрученных потоков, явление гистерезиса до сих пор остается достаточно мало изученным. Необходимо знать условия, при которых режим течения может резким образом измениться, для того чтобы предсказывать и предотвращать нежелательные последствия этих переходов.

Большинство особенно ранних исследований закрученных струйных потоков являются экспериментальными. Конфигурации и рассматриваемые явления, близкие к данной работе, исследовались в многочисленных работах [264, 285–293]. Относительно недавно в литературе начали появляться исследования, использующие LES расчеты для анализа закрученных струйных потоков и пламен. LES нереагирующих закрученных струй в схожих конфигурациях были проведены в ряде работ [286, 294–300]. Реалистичные (полу)промышленные конфигурации соплового устройства и камеры сгорания были рассмотрены в работах [296, 301, 302]. Большая часть численных работ указывают на то, что LES расчеты достоверно воспроизводят экспериментальные данные.

В данной части работы исследуется затопленная струя, вытекающая из двух длинных соосных кольцевых каналов, которые необходимы для раздельной подачи топлива и окислителя. Внешняя стенка во внешнем кольцевом канале вращается вокруг своей оси, таким образом, рассматривается аналогичный способ закрутки как и в предыдущей секции. Стоит сразу отметить, что хоть скорость вращения и высокая, что существенно способствует скорости перемешивания двух потоков, число крутки (S_1 или S_2) все равно является низким. В данной конфигурации зона рециркуляции образуется благодаря центральному телу обтекания. Известно [275, 285, 290, 291, 303], что при достаточном увеличении числа закрутки образуется дополнительная зона рециркуляции чуть ниже по течению от основной зоны возвратного течения за телом обтекания.

Несколько работ в открытой литературе исследовали переходные процессы, связанные с неединственностью режимов течения и гистерезисом. Ваниершот и Ван ден Балк (2007) [290] исследовали несколько режимов течения при различных параметрах крутки кольцевой струи. Рассмотренные режимы включали явления распада вихря и гистерезис, проявляющиеся при числе закрутки 0.56 и выше. Переходные процессы были описаны при помощи некоторой диаграммы перехода между режимами как функция закрутки. Авторы также исследовали влияние геометрии сопла на гистерезис и числа закрутки на ближнюю область струи [290, 291]. Недавно Огус и др. [304] исследовал аналогичную геометрию при низких числах Рейнольдса при помощи DNS и подробно описал механизмы перехода и гистерезис.

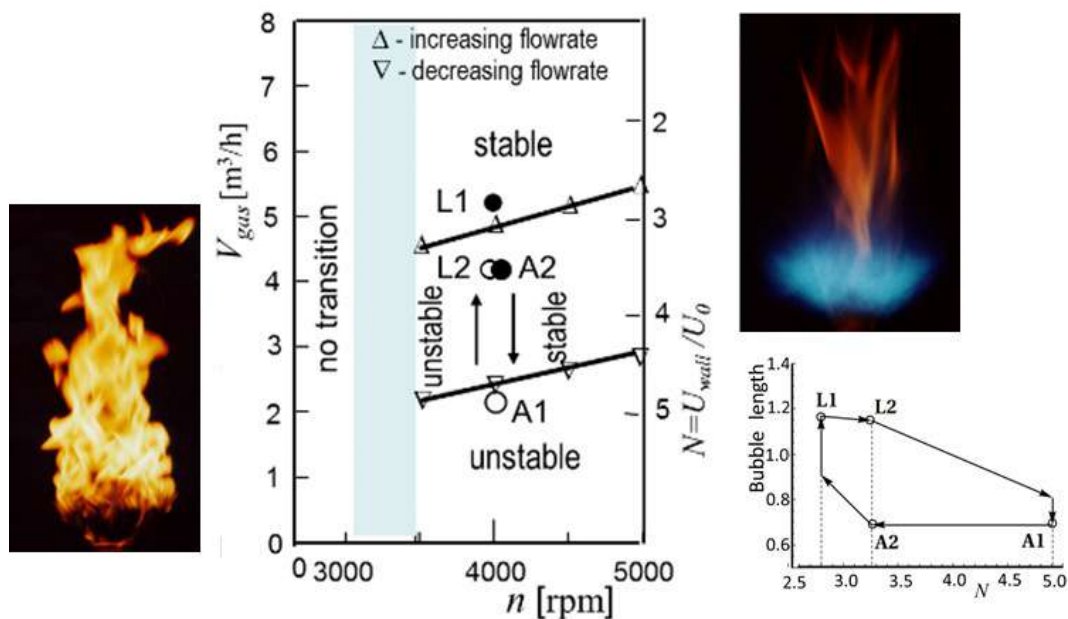


Рисунок 3.37. Фотография присоединенного неустойчивого желтого пламени A1 (слева) и устойчивого поднятого голубого пламени L1 (справа). Между ними показана диаграмма режимов с областью гистерезиса (из работы [307]). Линии с символами Δ и ∇ обозначают переход к устойчивому и неустойчивому режиму, соответственно. Снизу справа показаны траектории режимов в зависимости от длины рециркуляционной зоны и величины закрутки

Фалес и др. (2014) [305] исследовал геометрию с более сложной организацией сопла при помощи LES, однако, получил аналогичную диаграмму режимов. Гермет и др. (2014) [306] рассмотрел реалистическую камеру сгорания и провел LES расчеты для реагирующего и нереагирующего случая. При наличии процесса горения авторы обнаружили два разных режима для одних и тех же условий течения. В первом состоянии пламя было присоединено к кромке сопла, в то время как во втором режиме пламя было поднято. Явное присутствие глобальной неустойчивости было обнаружено только во втором случае.

В экспериментах Хюбнера и др. (2003) [307] и Туммерса и др. (2009) [308], геометрия которых используется в данной работе, исследовалось горение предварительно перемешанной смеси (диффузионное горение). При увеличении расхода газа и постоянном отношении расхода воздуха и топлива, а также при достаточно высокой скорости вращения внешней стенки внешнего канала вокруг своей оси (> 3500 оборотов в минуту), авторы наблюдали два характерных режима горения с присоединенным длинным желтым неустойчивым пламенем и коротким голубым поднятым устойчивым пламенем (см. рис. 3.37). Обнаруженное явление гистерезиса в данном случае заключается в том, что граница перехода от желтого к синему пламени (от неустойчивого к устойчивому), т.е. при монотонном увеличении скоро-

сти газа, происходит при более высоких значениях расхода (прямой переход), по сравнению с границей перехода от синего пламени к желтому (обратный переход). В промежуточной области могут наблюдаться оба режима в зависимости от начальных условий (или “траекторий”) эксперимента. Из-за центрального тела обтекания во всех режимах присутствует рециркуляционная зона. Тем не менее, по сравнению с относительно небольшой рециркуляционной зоной у желтого пламени, для синего пламени область возвратного течения почти в два раза длиннее ($1.14D$ против $0.68D$, где D – диаметр внешнего канала) при одних и тех же параметрах течения. Туммерс и др. [308] высказал предположение, что для большой рециркуляционной зоны (синего пламени) проявляется глобальная неустойчивость и явление разрушения вихря. В то время как переход снизу вверх (см. рис. 3.37), то есть от голубого пламени к желтому происходит резким изменением режима течения, обратный переход происходит постепенно. Как показано на рис. 3.37 при обратном переходе (вниз) реализуется голубое пламя в диапазоне параметров, где прежде наблюдалось желтое пламя при прямом переходе (вверх). В это же время исследование аналогичного нереагирующего течения не зафиксировало явления гистерезиса [309]. Тем не менее, в данной работе будет показано, что исследование нереагирующего течения при аналогичных параметрах позволит выявить вероятный гидродинамический предвестник и объяснить обнаруженное явление в реагирующем случае.

При помощи метода крупных вихрей исследуются режимы течения, рассмотренные в экспериментах [307, 308], в которых был зафиксирован описанный выше гистерезис между режимами с желтым и синим пламенем. Контрольным параметром является скорость вращения U_{wall} внешней стенки внешнего кольцевого канала вокруг своей оси. Используется безразмерный параметр крутки, определенный также как и в предыдущей секции, $N = U_{wall}/U_b$, который меняется от 2.8 до 4.9. Стоит отметить, что в задаче исследуется несколько режимов с различными N , которые задаются одной и той же скоростью вращения стенки U_{wall} и разными расходами воздуха во внешнем канале. Среднерасходная скорость во внутреннем канале всегда изменится пропорционально изменению во внешнем, так что их отношение остается постоянным для всех режимов.

Исследуемая конфигурация, схематически изображенная на рис. 3.38, состоит из двух концентрических кольцевых каналов со внутренним/внешним диаметром $D/0.54D$ (для воздуха) и $0.46D/0.34D$ (для газа), соответственно, а также центрального цилиндрического тела обтекания. Как уже было сказано выше, в эксперименте закрутка задается при помощи постоянного вращения внешней стенки внешнего канала (с воздухом) со скоростью 4000 оборотов в минуту. При этом параметр крутки меняется варьированием расхода в подводящих каналах.

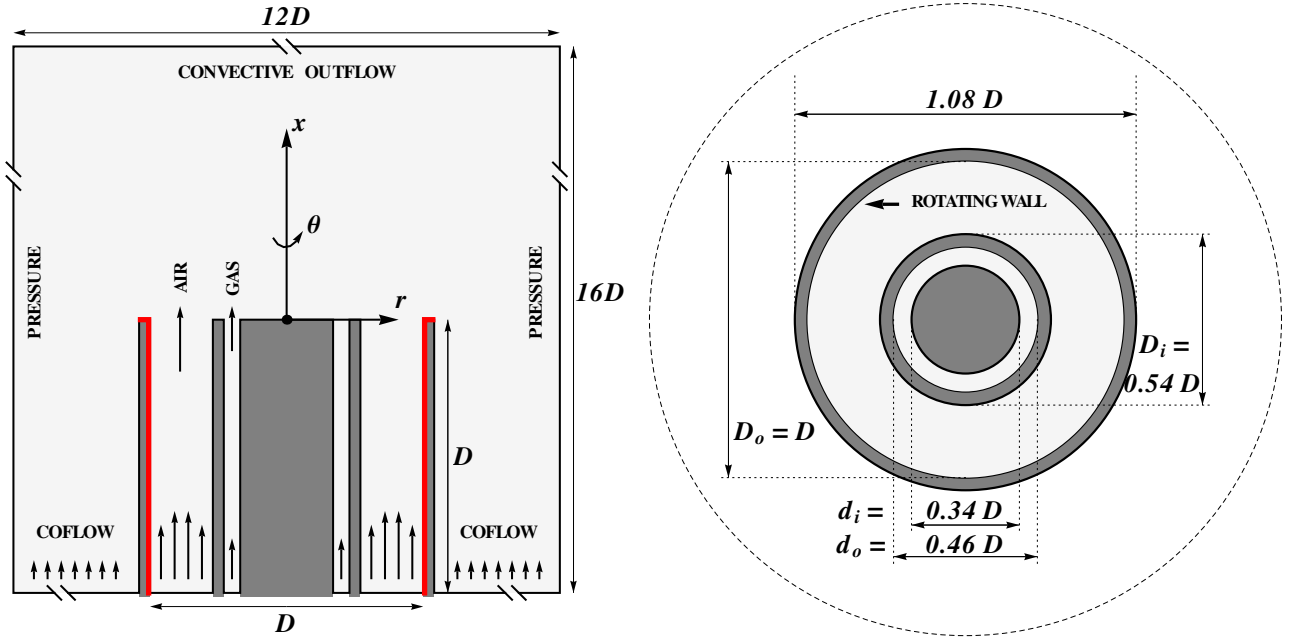


Рисунок 3.38. Геометрия и размеры вычислительной области. Слева показан вид сбоку, справа – вид сверху

Таблица 3.7. Основные параметры рассматриваемых режимов. Индексы ‘a’ и ‘g’ обозначают воздух и газ, соответственно

Режим	N	S_1	S_2	U_g/U_b	U_a/U_b	Re_g	Re_a
L1	2.8	0.41	0.55	0.79	1.0	2250	11250
L2/A2	3.26	0.6	0.99	0.63	0.79	1750	9700
A1	4.91	0.81	1.81	0.57	0.61	1300	6400

Числа Рейнольдса, построенные по гидравлическому диаметру для внешнего и внутреннего канала меняются от 11250 и 2250 до 6400 и 1300, соответственно. В табл. 3.7 представлены основные параметры рассматриваемых режимов. Все величины обезразмерены при помощи D и U_b , которые в эксперименте имеют значения $D = 70.3$ мм, $U_b = 5.2$ м/с. Стоит отметить, что параметр крутки $N = U_{wall}/U_b$, используемый в предыдущей и этой секции, а также в работах [274, 287, 289, 307, 308], не отражает реального отношения продольной компоненты потока продольной и азимутальной компоненты импульса. Для сравнения в табл. 3.7 мы также приводим значения параметров крутки S_1 и S_2 , определенных в предыдущей главе формулой (3.11).

Численные расчеты проведены при помощи метода крупных вихрей аналогично предыдущим секциям. Использовались такие же граничные условия как и для круглой струи. Входные условия генерировались в отдельном LES расчете, где рассматривалась полная длина

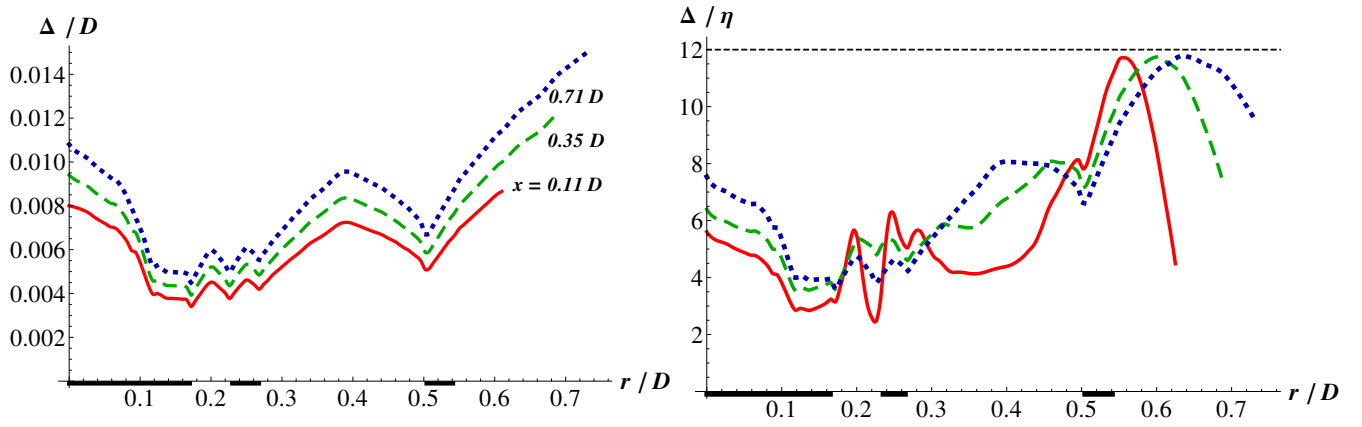


Рисунок 3.39. Слева: характерный размер вычислительной ячейки Δ в нескольких радиальных сечениях. Справа: отношение Δ к масштабу Колмогорова η . Черными линиями на оси абсцисс показана геометрия (стенки) сопла

подводящих каналов. Последовательные во времени значения поля скорости в сечении $r - \phi$ при $x = -1D$ записывались на диск и использовались в основном расчете струйного течения. Вычислительная сетка состояла из $230 \times 202 \times 264$ ($\approx 12.3 \times 10^6$) гексагональных ячеек в радиальном, продольном и азимутальном направлении, соответственно. Минимальная длина расчетной ячейки в продольном направлении составила $\Delta x = 0.005D$. На рис. 3.39 показан характерный размер вычислительной ячейки $\Delta = r\Delta r\Delta x\Delta\phi$ в нескольких радиальных сечениях. Приемлемое разрешение построенной сетки подтверждается небольшими значениями отношения Δ к колмогоровскому масштабу η , значения которого получены из предварительных URANS расчетов данной геометрии (случай L1). Во всей расчетной области выполняется необходимое неравенство $\Delta/\eta < 12$ [81].

Расчеты для случаев L2 и A2 проводились путем резкого изменения параметров течения, находящегося в развитом L1 и A1 режиме, соответственно. Таким образом, расход воздуха и газа в подводящих каналах был резко изменен, согласно приведенным в табл. 3.7 значениям. Режим L1 соответствует максимальному расходу воздуха (и газа), поэтому ему соответствует минимальный параметр крутки $N = 2.8$, в то время как режим A1 соответствует минимальному расходу и максимальному значению $N = 4.91$. Промежуточные режимы L2/A2 имеют один и тот же параметр крутки $N = 3.26$, таким образом, для того, чтобы произошел переход L1→L2 необходимо уменьшить расход, а для A1→A2 – увеличить. Далее рассматриваются статистические характеристики полностью развитых (стационарных) режимов течения для L1, L2, A1 и A2, а также гидродинамические процессы, которые происходят во время перехода L1→L2 и A1→A2. Стоит напомнить, что исследуемые режимы течения соответствуют некоторым точкам на диаграмме переходов, показанной на рис. 3.37,

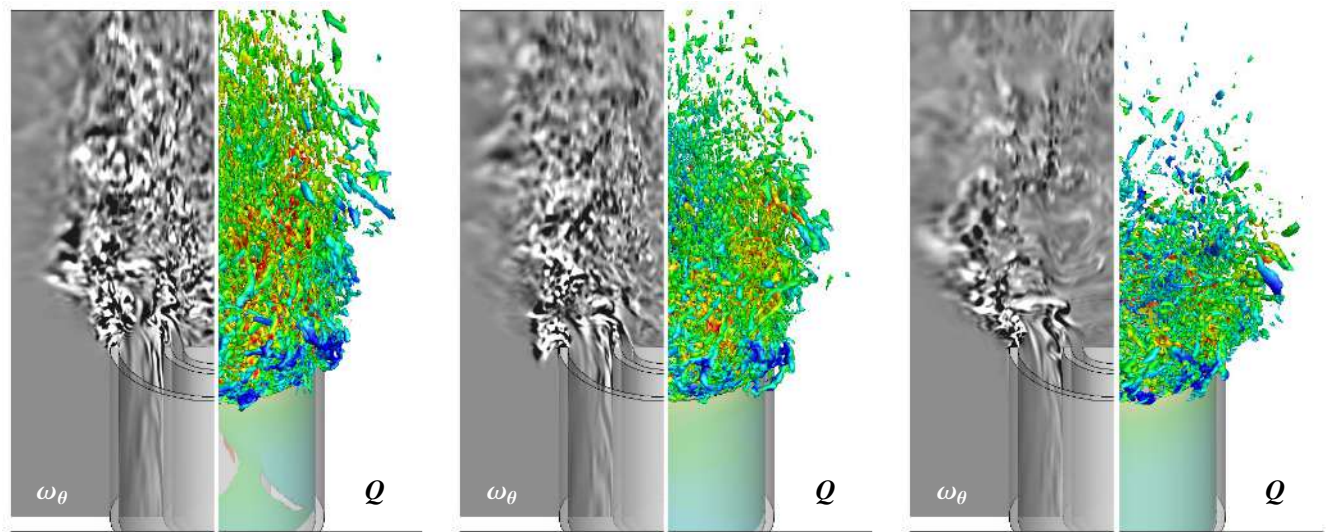


Рисунок 3.40. Визуализация вихревых структур. Левые половины: вертикальные сечения с представленным полем азимутальной компоненты завихренности. Правые половины: изоповерхности $Q = 1.0$, окрашенные в поле продольной скорости

которые характеризуют различные режимы горения.

Мгновенные поля и вихревые структуры

Общее впечатление о рассматриваемых режимах течения можно получить из рис. 3.40, где показаны мгновенные поля азимутальной компоненты завихренности в сечении $x - r$ (левые половины) и изоповерхности Q -критерия (правые половины), уже использованные ранее для визуализации вихревых структур в потоке. Видно влияние числа Рейнольдса на поле течения. Стоит отметить, что в расчетах, также как и в экспериментах переходы $L1 \rightarrow L2$ и $A1 \rightarrow A2$ привели к статистически идентичному режиму $L2/A2$, характеристики которого далее показываются совместно. Для всех случаев можно отметить интенсивную генерацию завихренности во внутренних и внешних слоях смешения. Кроме того, при низких числах Рейнольдса (случай A1) движение в зоне рециркуляции за телом обтекания становится квазиламинарным. Заметным становится и более сильный угол раскрытия струи при $N = 4.91$ из-за определяющего влияния центробежных сил.

Эти наблюдения также хорошо видны на рис. 3.41, где показаны поля мгновенной продольной и поперечной компоненты скорости в плоскости $x - r$. Если для режима L1 линии тока достаточно параллельны в струйном ядре, при этом зона рециркуляции мала, то зона возвратного течения для A1 благодаря действию центробежных сил достигает больших размеров с крайне низкими значениями скорости внутри. Интересно отметить, что для этого случая профиль скорости при удалении от сопла имеет вид характерный для задач

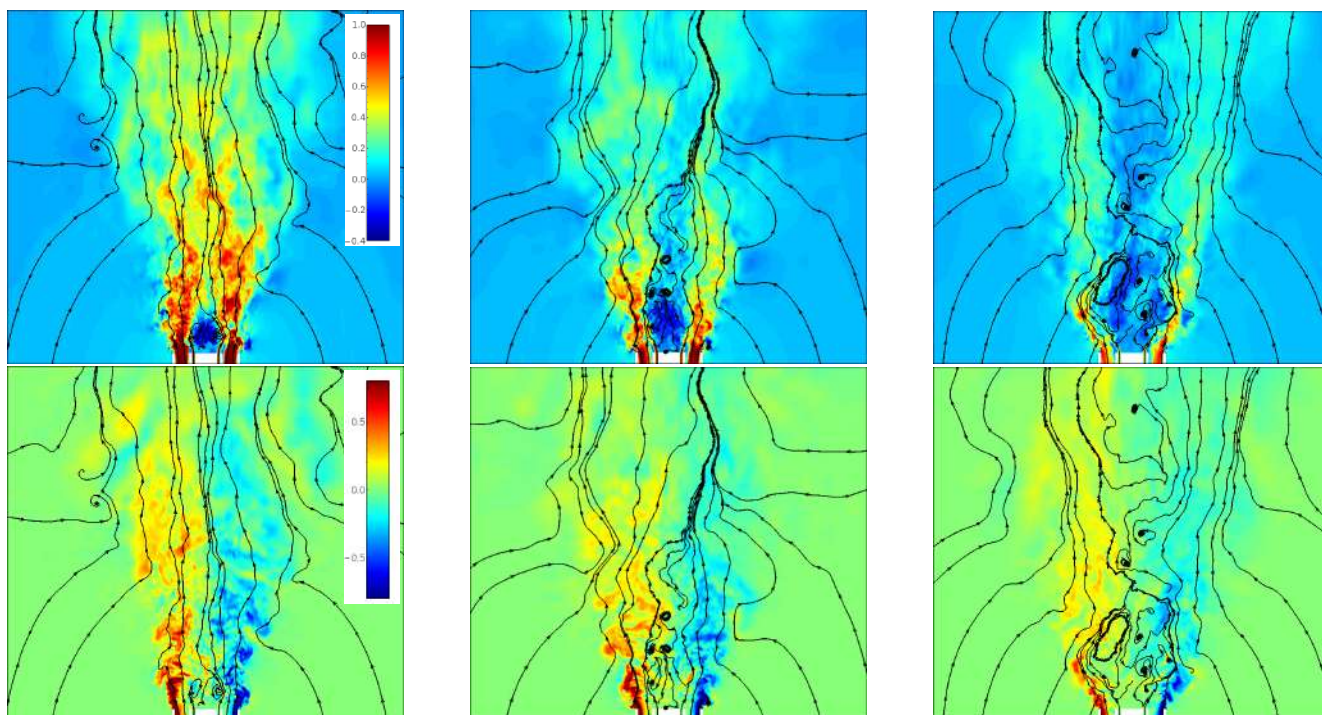


Рисунок 3.41. Мгновенные поля скорости, а также линии тока. Сверху: продольная компонента скорости. Снизу: поперечная компонента

обтекания (следов), в то время как L1 при удалении от рециркуляционной области довольно быстро приобретает струйный профиль. На рис. 3.42 показаны сечения $r - \phi$ при $x = 0.11D$ с мгновенной продольной и радиальной компонентой скорости. Аналогичные поля скорости мы прежде наблюдали для круглой закрученной струи с $N \leq 1$, рис. 3.31. Даже при значительном увеличении параметра N можно различить спиральные вихри (волны) во внешнем слое смещения, которые являются следствием центробежной неустойчивости [284]. Интересное волновое движение наблюдается и во внутреннем слое смещения. В предыдущей секции был сделан вывод, что именно подобные механизмы являются причиной существенной интенсификации процессов вовлечения окружающей жидкости в струйный поток.

Осредненные поля и сравнение с экспериментом

На рис. 3.43 показано осредненное по времени поле продольной скорости для всех режимов течения в вертикальной плоскости. Малая рециркуляционная зона для случая L1 существенно увеличивается с ростом параметра N . Стоит отметить, что зона рециркуляции остается асимметричной для A1 даже при продолжительном осреднении по времени, что говорит о крайне низкой скорости внутри “пузыря” и, как следствие, больших характерных временах. Размер и форма зоны рециркуляции для случая L2/A2 хорошо согласуется с данными экспериментов [309]. Длина “пузыря”, полученная при помощи LES, составляет

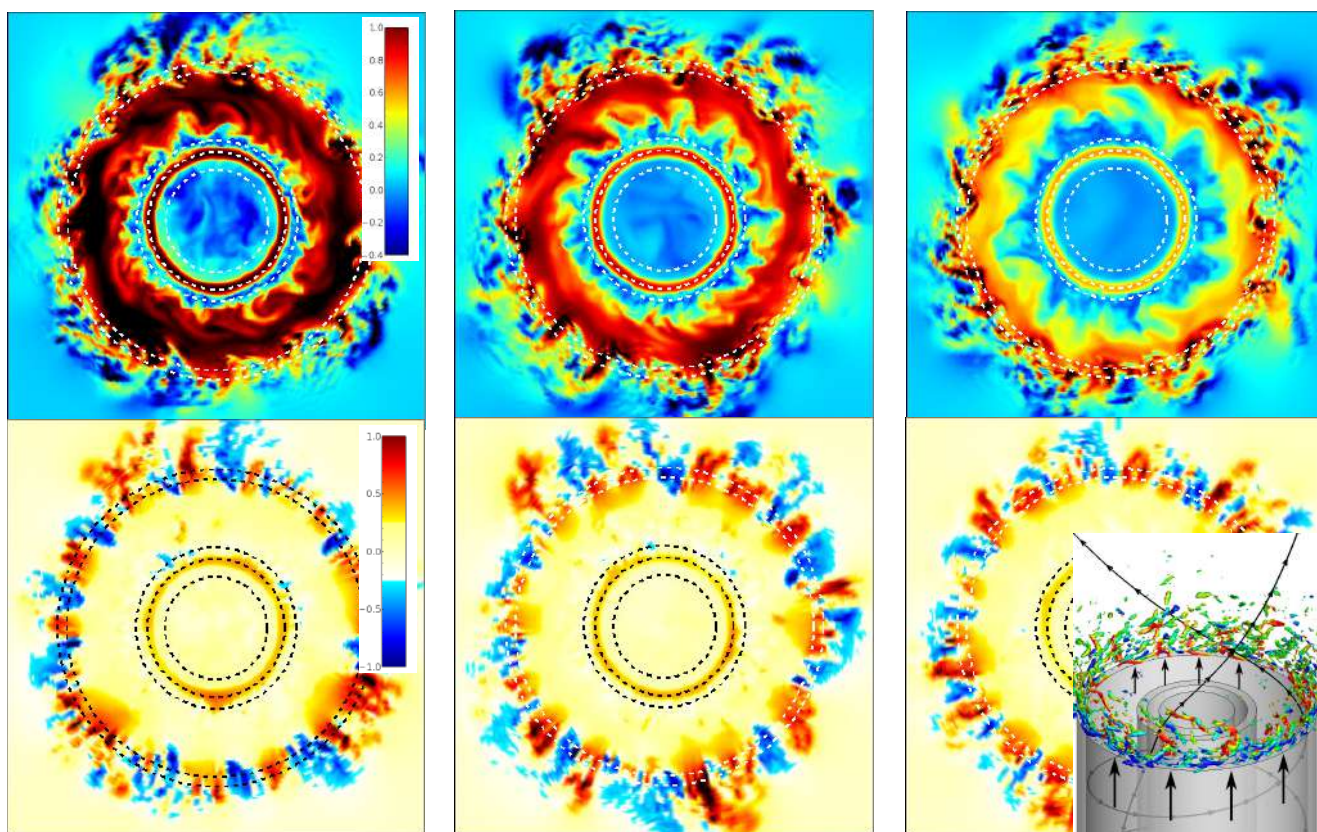


Рисунок 3.42. Поперечные сечения (плоскость $r - \phi$) и мгновенные поля скорости около сопла при $x/D = 0.11$. Сверху: продольная компонента скорости. Снизу: радиальная компонента. Вставка снизу справа показывает изоповерхность $Q = 2.0$, окрашенную в продольную компоненту скорости. Черные вертикальные стрелки указывают на характерные вихревые структуры около кромки сопла. Две линии тока, построенные по осредненному во времени полю скорости, демонстрируют степень закрутки потока

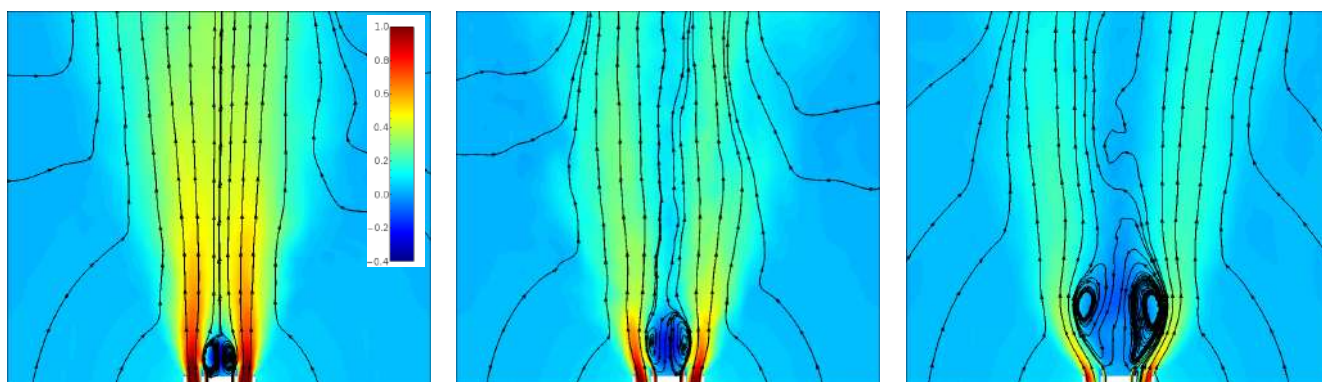


Рисунок 3.43. Осредненное по времени поле продольной компоненты скорости в плоскости $x - r$ и линии тока

0.98D, в то время как экспериментальное значение соответствует 0.92D. Длина зоны рециркуляции для случая L1 немного недооценена по сравнению с экспериментом (0.61D против 0.72D). Стоит отметить, что граничные входные условия, как уже отмечалось выше, генерировались в отдельном LES расчете течения в длинном кольцевом канале, размеры которого соответствуют эксперименту. Существующая неопределенность в уровне турбулентности и профиле скорости внутри канала влечет за собой трудности при прямом сравнении численного решения и экспериментальных данных. На рис. 3.44 показано более детальное сравнение осредненных по времени линий тока около кромки сопла. Синей пунктирной линией показаны данные экспериментов с пламенем, черная пунктирная линия соответствует данным для нереагирующего потока. Интересно отметить, что рециркуляционная зона для L2 режима больше, чем для A2, что как раз можно объяснить при помощи моделирования переходов L1→L2 и A1→A2 даже в нереагирующем случае.

Далее проведем сравнение радиальных профилей осредненных по времени компонент поля скорости и пульсаций. На рис. 3.45 показаны профили средней продольной, радиальной и азимутальной компоненты скорости для случая L1. Расчетные и экспериментальные профили продольной скорости представлены для нескольких сечений вдоль продольной координаты. Профили продольной скорости отлично согласуются кроме небольших различий в пике $r/D \approx 0.22$ для позиции $x/D = 0.11$, что может объясняться недостаточным пространственным разрешением в эксперименте. В то время как эксперимент указывает на быструю диффузию импульса в области внутреннего кольцевого канала, по результатам расчета небольшой пик в профиле продольной скорости еще виден при $x/D = 0.21$. Схожие результаты получаются и для профилей радиальной скорости. Стоит отметить, что абсолютная величина продольной скорости примерно в пять-десять раз больше радиальной, поэтому достаточно небольшие различия в профиле $\bar{u}$ могут приводить к существенным различиям в $\bar{v}$. Профили азимутальной скорости также показывают удовлетворительное согласие, несмотря на то, что экспериментальные данные для этой компоненты скорости имеются только для случая реагирующего течения.

Радиальные профили компонент скорости, осредненных по времени, для случая L2/A2 представлены на рис. 3.46. Также получено хорошее согласие экспериментальных и расчетных данных. Основные особенности течения аналогичны случаю L1. Внутренний пик, соответствующий струе газа, остается заметным вплоть до $x/D = 0.21$, указывая на то, что перемешивание газа и воздуха еще не закончено в этой области течения. Экспериментальные данные показывают более высокие значения радиальной компоненты скорости в области зоны рециркуляции ($x/D = 0.11$) по сравнению со случаем L1. Отсутствуют измерения ази-

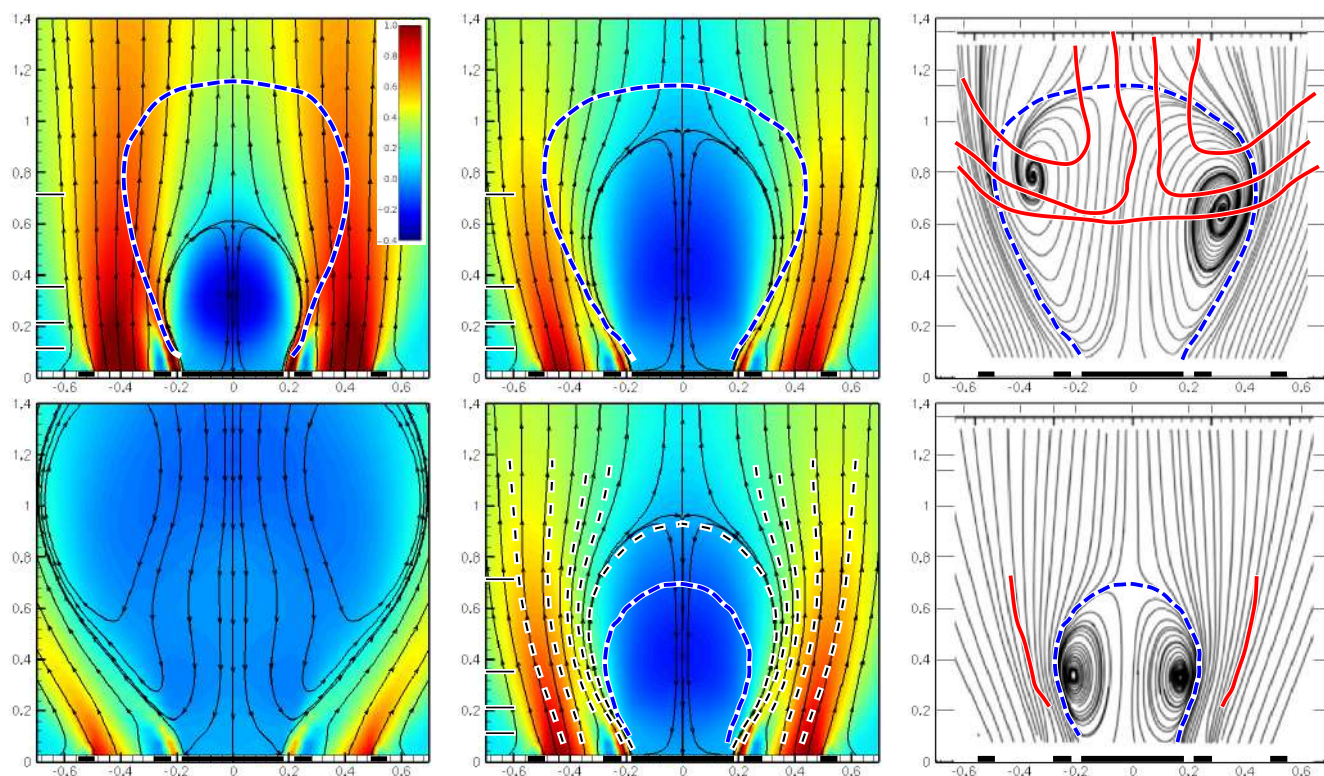


Рисунок 3.44. Поле осредненной по времени продольной компоненты скорости для четырех рассчитанных случаев в плоскости $x - r$. Черные штриховые линии соответствуют рециркуляционной зоне и линиям тока из результатов эксперимента без горения для случая L2/A2 [307, 308] (показан только для A2). Синяя штриховая линия соответствует границе рециркуляционной области в реагирующем случае (справа показаны данные экспериментов). Красная линия демонстрирует контуры средней концентрации ОН из экспериментов, указывая на местоположение пламени. Короткие горизонтальные черные линии слева демонстрируют продольные координаты, показанные на следующих рис. 3.45–3.47

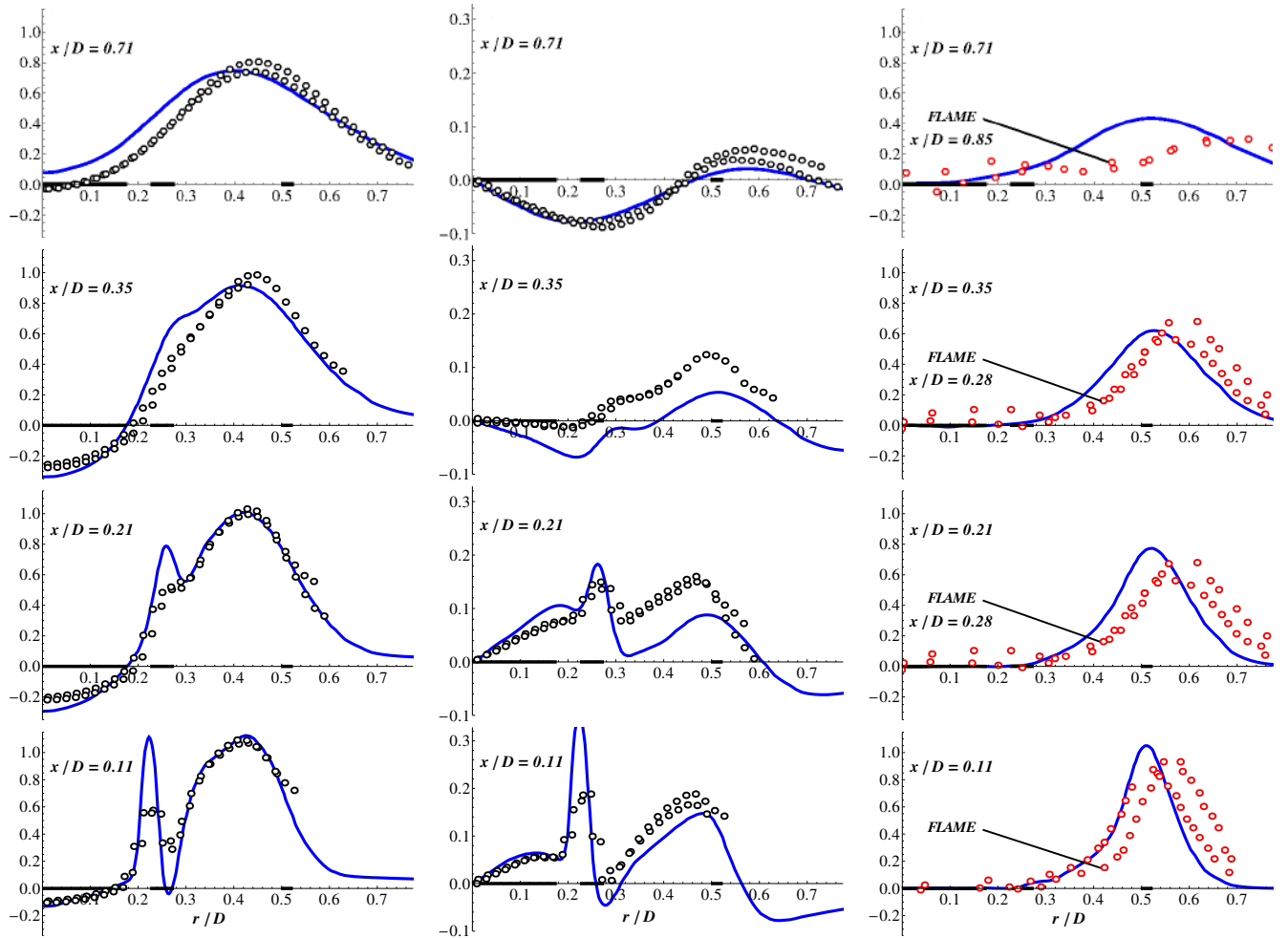


Рисунок 3.45. Радиальные профили осредненной по времени продольной (левый столбец), радиальной (средний) и азимутальной (правый) компоненты скорости в нескольких поперечных сечениях для нереагирующего случая L1. Линиями показаны результаты LES, символами – эксперимент. Красные символы соответствуют эксперименту с горением

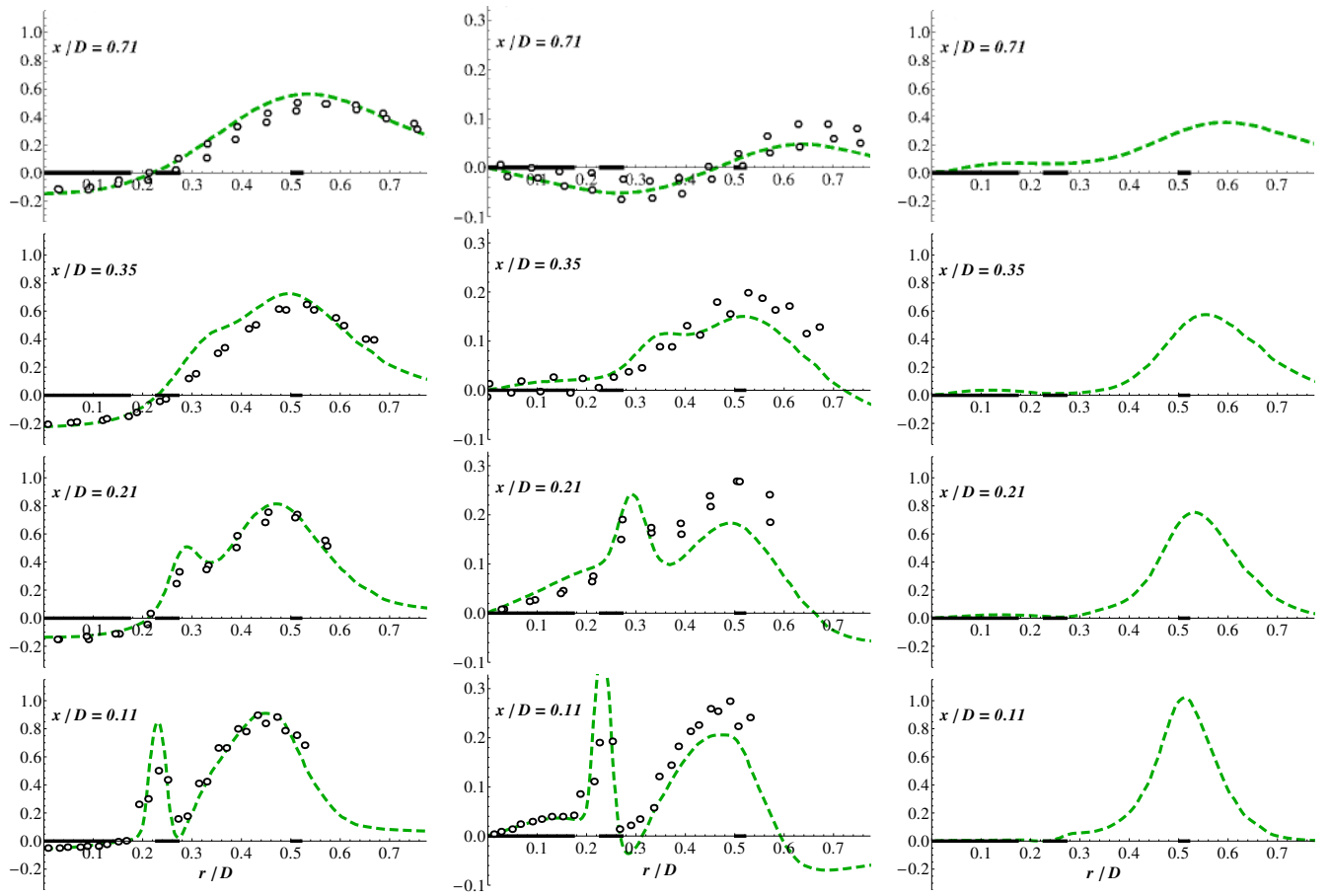


Рисунок 3.46. Радиальные профили осредненной по времени продольной (левый столбец), радиальной (средний) и азимутальной (правый) компоненты скорости в нескольких поперечных сечениях для нереагирующего случая L2. Линиями показаны результаты LES, символами – эксперимент

мутальной компоненты скорости, также как и всех компонент для случая A1.

Сравнение диагональных компонент тензора напряжений Рейнольдса показало хорошее согласие с экспериментальными данными, рис. 3.47. Существует два пика в профилях пульсаций около кромки сопла. Первый небольшой максимум соответствует внешнему слою смешения внутренней кольцевой струи, а второй – внешнему слою смешения внешней струи. Завышенные значения радиальных пульсаций на выходе, вероятно, связаны с небольшими различиями во входных условиях, которые уже упоминались. Далее по потоку при $x/D = 0.21$ уровень радиальных пульсаций $\overline{v'v'}$ (второй столбец) находится уже значительно ближе к измеренным значениям. Благодаря закрутке воздушной струи, сравним уровень азимутальных пульсаций $\overline{w'w'}$ (третий столбец) с другими двумя диагональными компонентами. Стоит отметить, что рассмотренные профили слабо отличаются между случаями L1 и L2.

Затухание продольной и азимутальной компоненты скорости в продольном направле-

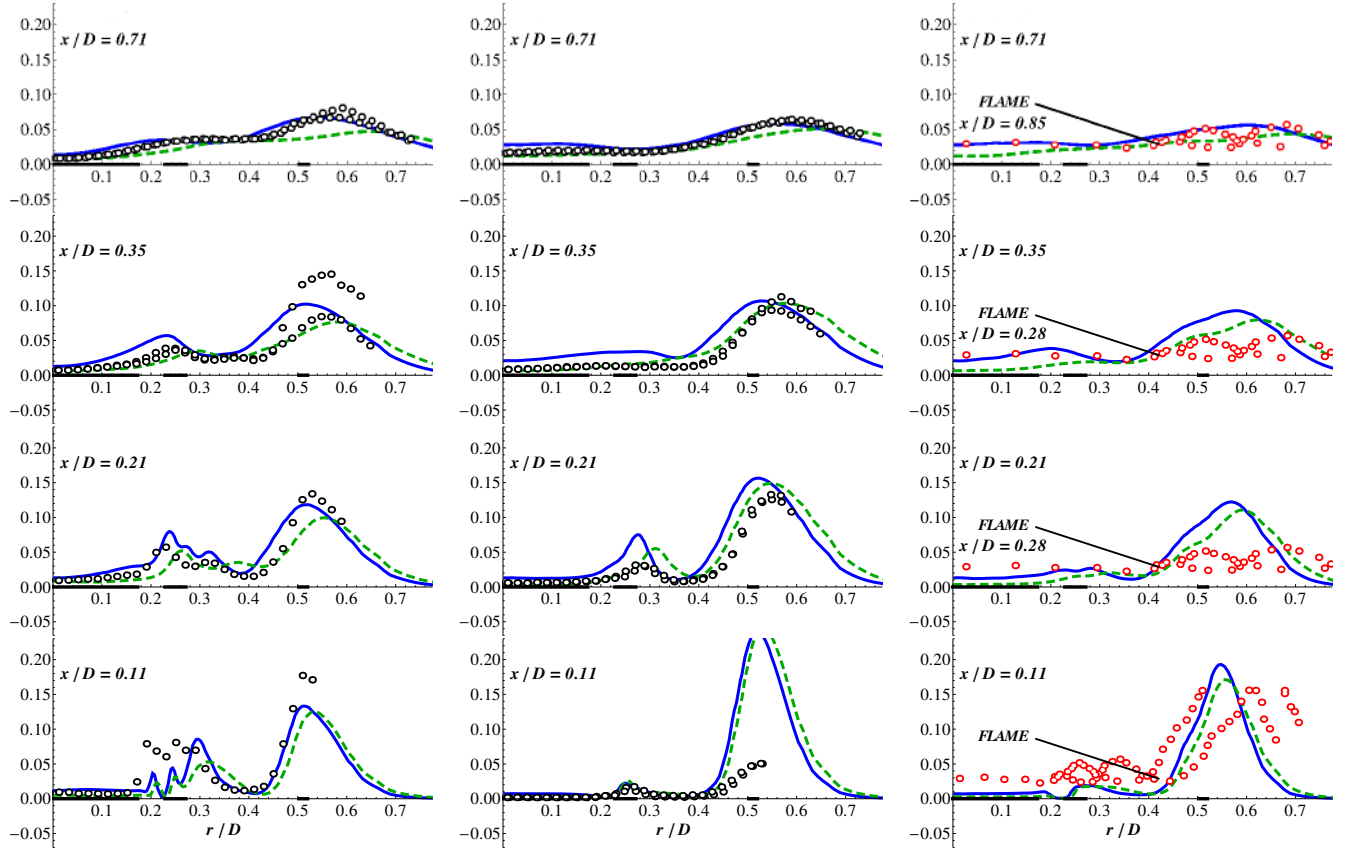


Рисунок 3.47. Радиальные профили осредненных по времени пульсаций продольной (левый столбец), радиальной (средний) и азимутальной (правый) компоненты скорости в нескольких поперечных сечениях. Линиями показаны результаты LES (сплошная – L1, штриховая – L2), символами – эксперимент L1. Красные символы соответствуют эксперименту с горением

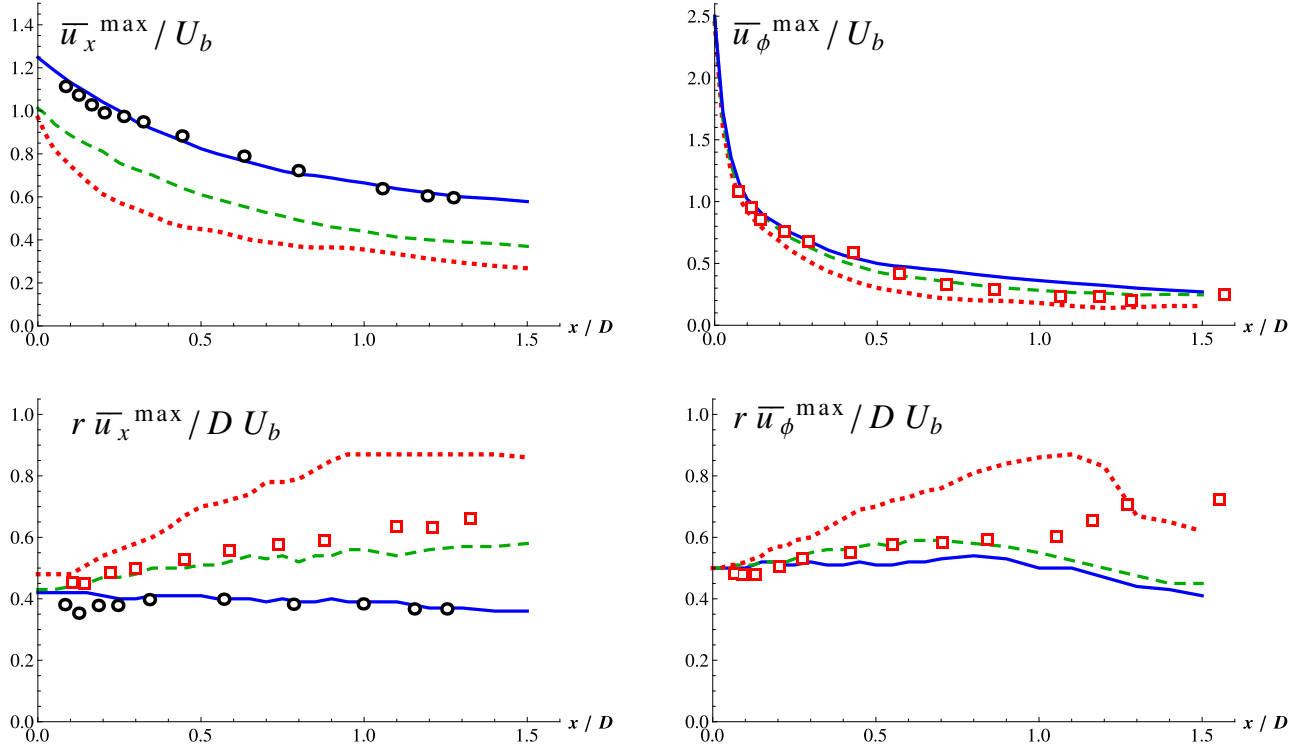


Рисунок 3.48. Максимальное значение осредненной по времени продольной и азимутальной компоненты скорости из LES (L1 – сплошная линия, L2/A2 – штриховая, A1 – точки) и эксперимента (L1 без горения – кружки, L2 с горением – квадраты)

нии показано на рис. 3.48. Максимум продольной скорости и изменение его радиальной координаты сравнивается с экспериментальными данными. Результаты измерения азимутальной компоненты скорости доступны только для случая реагирующего потока, которые, тем не менее, также приведены. Максимальная скорость вращения затухает экспоненциально с x . Сравнение расчетных и экспериментальных значений между собой показывает отличное согласие. Таким образом, значения максимума азимутальной компоненты скорости аккуратно предсказаны, в то время как его позиция немного ближе к оси симметрии по сравнению с данными измерения в пламени из-за дополнительного термического расширения.

Переходные процессы от L1 к L2 и от A1 к A2

Эволюция потока при переходе L1→L2 и A1→A2 показана на рис. 3.49 и 3.50 последовательными полями мгновенной продольной скорости и линиями тока. Время измеряется в безразмерных единицах $\tau = tU_b/D$, отсчитываемое с момента резкого изменения расхода. Мгновенное поле скорости для случая L1, показанное на первом рис. 3.49, характеризуется относительно малой, но интенсивной зоной рециркуляции. Внутренняя струя вовлекается в

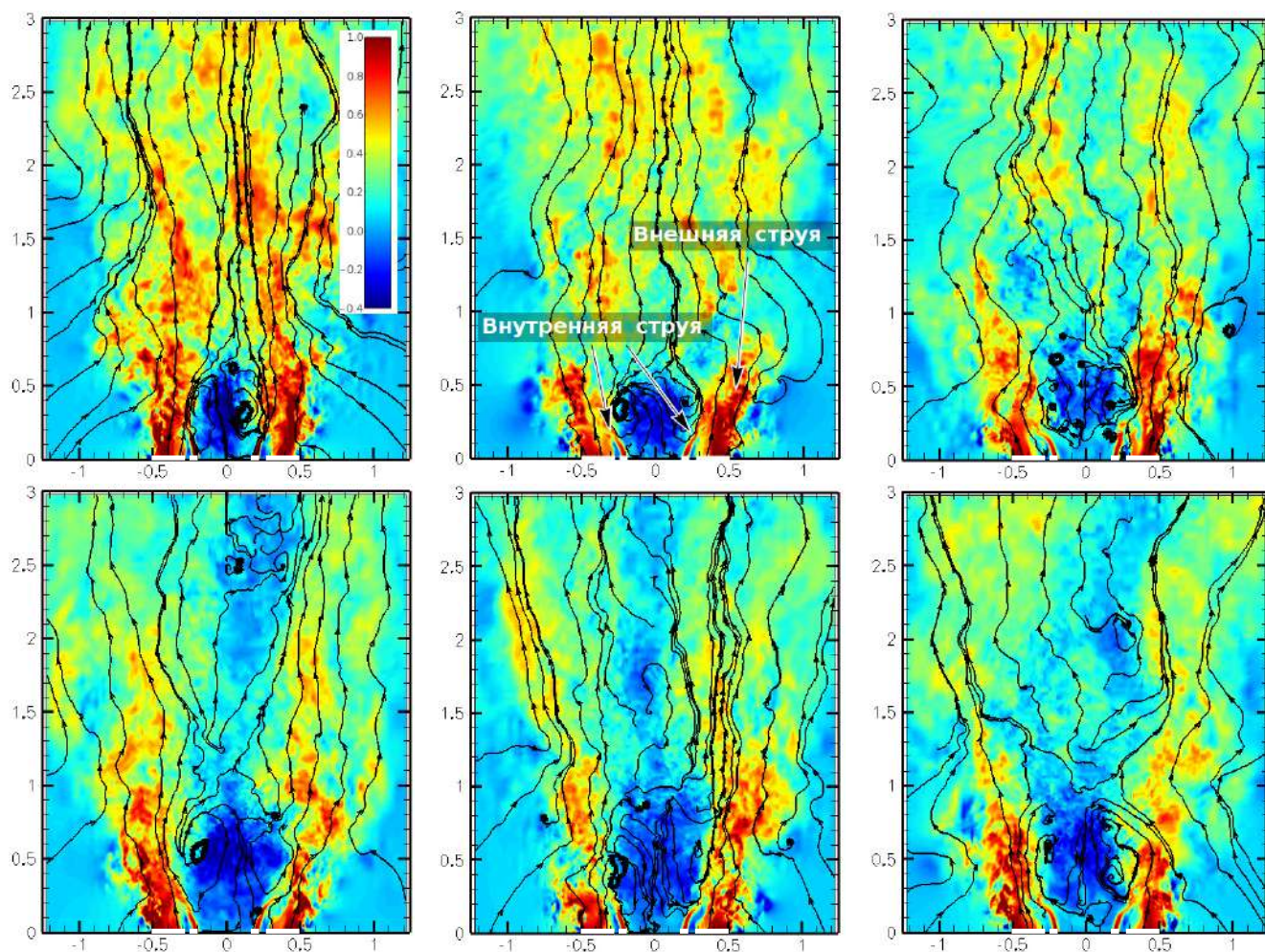


Рисунок 3.49. Мгновенные поля продольной скорости в плоскости $x - r$ в последовательные моменты времени с начала перехода L1→L2 для $\tau = 0, 2.5, 5, 19, 34, 44$

основной поток на расстоянии $x \approx 0.2D$ от кромки сопла. Скорость расширения струи достаточно низка из-за относительно высокого числа Рейнольдса и малого значения параметра крутки. Внутренняя незакрученная струя газа не позволяет струе воздуха придать вращение рециркуляционной зоне. Как было показано на радиальных профилях осредненных по времени компонент скорости (рис. 3.45), азимутальная компонента скорости пренебрежительно мала за центральным телом обтекания. Это означает, что не следует ожидать крупномасштабных вихревых структур, связанных с вращением. Тем не менее, ранее уже упоминалось присутствие высокочастотных возмущений во внешнем слое смешения благодаря центробежной неустойчивости, рис. 3.42.

Рассмотрим переход L1→L2, который происходит при резком уменьшении расхода воздуха и газа, согласно значениям табл. 3.7 в момент $\tau = 0$. Уменьшение продольной скорости и увеличение параметра крутки приводят к увеличению угла раскрытия струи. Вследствие этого внутренняя струя вовлекается в поток быстрее. После начала перехода зона рецирку-

ляции растёт монотонно примерно в течение $\tau < 20$ и далее перестаёт меняться. Заметна некоторая дестабилизация “пузыря” сразу после изменения расхода, $\tau = 2.5$. На рис. 3.51 показана эволюция безразмерной величины расхода газа через круглую площадку радиусом $0.25D$ на расстоянии $x = 0.71D$. Согласно анализу этой величины во времени видно, что переход $L1 \rightarrow L2$ происходит быстро. Сразу после начала перехода величина расхода через выбранный поверхность резко уменьшается, что соответствует увеличению рециркуляционной зоны. Далее область рециркуляции немного осциллирует около среднего значения, выйдя на стационарный режим после $\tau = 15 - 20$.

В отличие от быстрого перехода $L1 \rightarrow L2$, эволюция $A1 \rightarrow A2$ происходит более медленно в течение нескольких сотен единиц времени τ для того, чтобы достичь стационарного режима. Этот переход сопровождается интересной динамикой, которая включает в себя формирования новых крупномасштабных вихревых структур около сопла. Мгновенное поле скорости (первый рис. 3.50), соответствующее режиму $A1$, характеризуется большой и низкоинтенсивной областью возвратного течения за телом обтекания. Резкое увеличение скорости во внутреннем канале приводит к формированию тороидального вихря (диполя) за телом обтекания, который хорошо виден на втором рис. 3.50, соответствующий моменту времени $\tau = 0.8$. Старая рециркуляционная область существует достаточно долго над небольшим, но интенсивным новым “пузырем”, который с течением времени растёт. Рост прекращается при $\tau \approx 7$, однако, требуется около сотни единиц времени, чтобы течение достигло стационарного режима.

На рис. 3.51 удобно сравнивать различия в переходах $L1 \rightarrow L2$ и $A1 \rightarrow A2$. Начальное отрицательное значение расхода через рассматриваемую площадку говорит о возвратном течении. Для $A1 \rightarrow A2$ в начале перехода имеется резкий скачок интегрального значения расхода, что как раз связано с прохождением тороидального вихря через сечение $x/D = 0.71$. После этого процесс медленно релаксирует к стационарному режиму. Финальные режимы $L2$ и $A2$ имеют идентичные статистические характеристики.

Возможные различия переходных процессов в случае с горением и без горения

Полезно вернуться к рис. 3.44, где показаны различия между осредненными по времени характеристиками для нереагирующего потока и пламени. Поскольку все гидродинамические условия для них совпадают, то очевидно, что различия связаны с наличием химических реакций в одном из случаев. Справа на рис. 3.44 показаны изолинии поля концентрации ОН для режима $L2$ (аналогично выглядит $L1$) и $A2$. При помощи линии ОН можно приблизи-

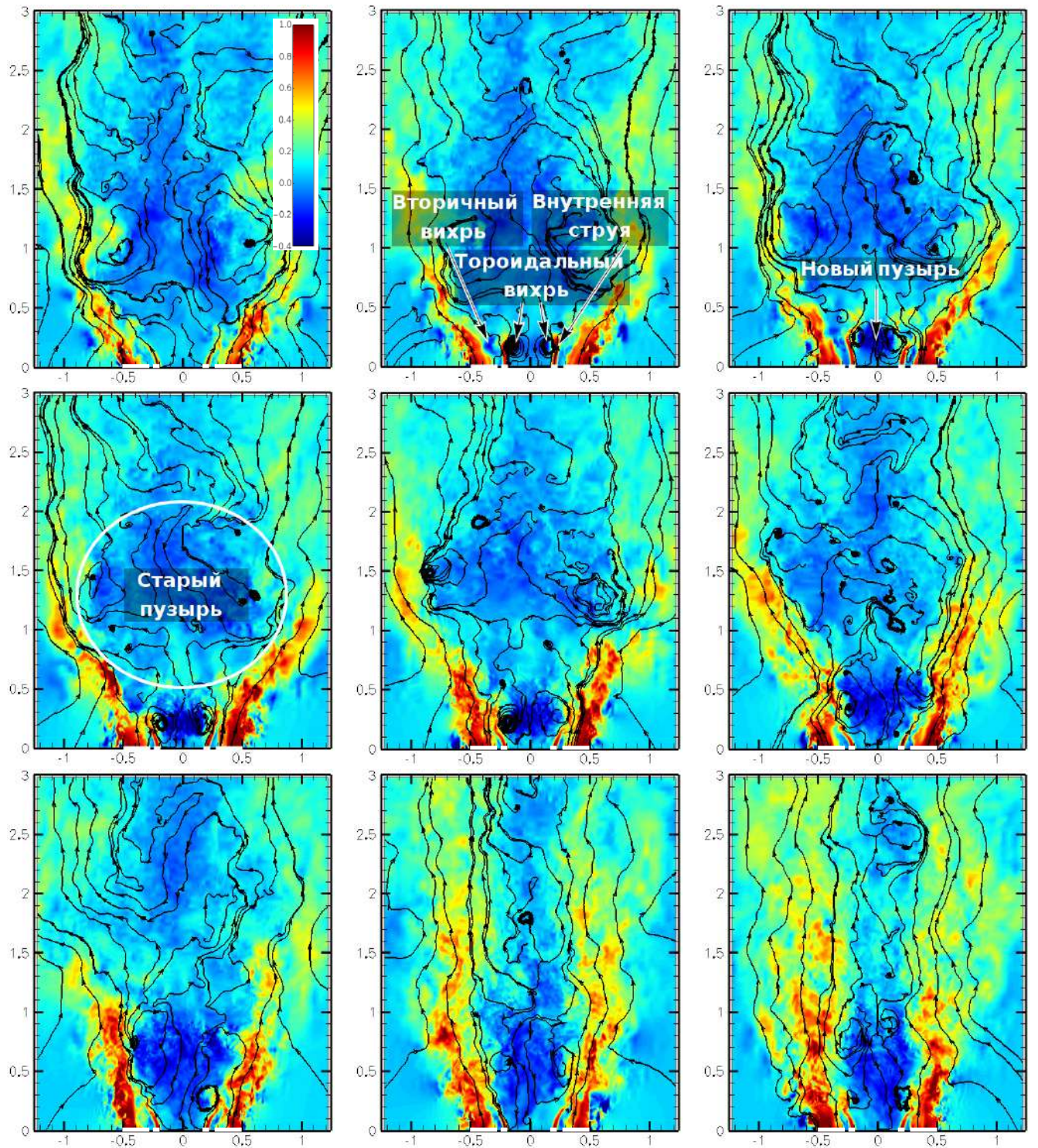


Рисунок 3.50. Мгновенные поля продольной скорости в плоскости $x - r$ в последовательные моменты времени с начала перехода $A1 \rightarrow A2$ для $\tau = 0, 0.8, 1.6, 2.5, 3.5, 5, 7, 34$ и 53

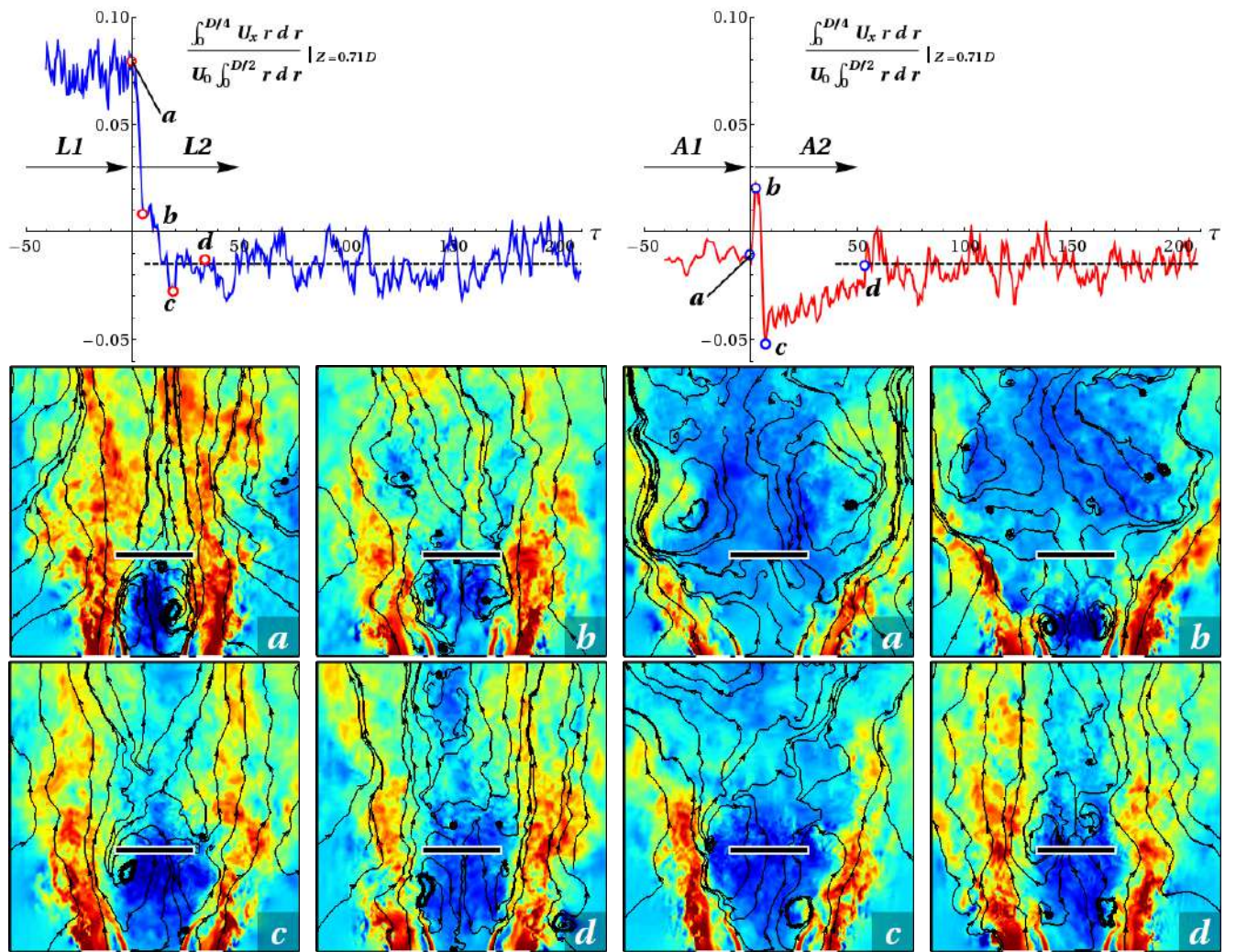


Рисунок 3.51. Изменение безразмерного интегрального массового расхода через поперечное сечение (диск) радиуса $r/D = 0.25$ при $x/D = 0.71$, характеризующая гидродинамику переходов L1→L2 (слева) и A1→A2 (справа). Штриховые линии соответствуют стационарным решениям L2/A2. Четыре мгновенных поля скорости (a, b, c, d) для каждого случая соответствуют моментам времени, отмеченным на графиках выше

тельно локализовать фронт пламени, где его скорость распространения равна локальной скорости смеси. Важно отметить, что в случае L1/L2 пламя поднято примерно на $0.6D$ от кромки сопла, при этом центр тороидального вихря проходит примерно через фронт пламени. В случае же A2 пламя является присоединенным к кромке сопла и проходит в слое смешения, разделяющим внешнюю и внутреннюю струю.

Основываясь на полученной информации можно рассмотреть вопрос о том, как в реагирующем режиме A2 рециркуляционная зона оказывается меньше, чем в L2, в то время как до перехода “пузырь” A1 значительно больше, чем в L1. Очевидно, что если поднятое пламя в переходе L1→L2 оказывает незначительное влияние на его динамику, то в случае A1→A2 расположение фронта играет ключевую роль. Можно предположить, что возникающий тороидальный вихрь в какой-то момент перестает расти в случае реагирующего потока. Таким образом, присоединенное пламя, расположенное между внешней и внутренней струей, поджимает поток в центре из-за термического расширения, что и приводит к относительно короткой и интенсивной зоне рециркуляции.

3.5. Выводы по главе

В данной главе изучено ближнее и дальнее поле затопленных незакрученных и слабо-закрученных турбулентных струйных течений.

На основе LES и DNS исследована задача о незакрученной турбулентной струе при числе Рейнольдса $Re_D \approx 6000$, вытекающей из длинной трубы. При помощи собственного ортогонального разложения впервые систематически показано, что спиральные бегущие волны являются собственными функциями струйной задачи и, таким образом, представляют наиболее энергонесущие вихревые структуры в дальнем поле затопленной турбулентной струи. Показано, что в автомодельной области доля турбулентной кинетической энергии для данных параметров течения составляет 11.5%, 16.7%, 13.1% и 9.2% для $m = 0, 1, 2$, и 3, соответственно. Получены зависимости волновых характеристик идентифицированных структур от их частоты. Показано, что характеристики наиболее энергонесущих вихревых структур с азимутальным волновым числом $m = 1$ хорошо согласуются с результатами плоскопараллельного анализа устойчивости, что указывает на справедливость использования линейного анализа устойчивости для турбулентных потоков и анализа крупномасштабных флуктуаций.

Посредством LES исследована ближняя область незакрученных и слабозакрученных струй, вытекающих из вращающейся вокруг своей оси трубы при $Re_D = 5300$ и параметре крутки, определенного как отношение скорости вращения стенки трубы к среднерасходной

скорости жидкости в канале, изменяющегося в диапазоне $N = 0 - 1$. Проанализировано влияние N на осредненные по времени характеристики потока, а именно, поле скорости, концентрацию пассивной примеси, пульсационных составляющих и их смешанных корреляций. Получена зависимость интенсивности вовлечения окружающей жидкости в ядро потока от N . Описано явление противовращающегося вихревого ядра, возникающее около 6 калибров вниз по течению от кромки сопла.

На основе LES исследовано течение закрученной соосной кольцевой струе при различных параметрах течения с числами Рейнольдса $Re_g = 1300 - 2250$ и $Re_a = 6400 - 11250$ для внутреннего и внешнего кольцевого канала, соответственно, и параметрами крутки $N = 2.8 - 4.9$, построенными по скорости вращающейся внешней стенки. Изучено влияние резкого изменения расхода жидкости на режимы течения. Исследованы переходные процессы, сопровождающиеся формированием крупномасштабных когерентных структур. Показано, что экспериментально наблюдаемый гистерезис режимов в случае реагирующего потока может быть связан с формированием вторичной зоны рециркуляции около кромки сопла в случае резкого уменьшения расхода газа.

Особенности моделирования и когерентные структуры в задаче обтекания цилиндра

4.1. Введение

В прошлых главах мы подробно рассмотрели следствия и особенности автомодельности, а также организацию крупномасштабных вихрей в классическом неограниченном струйном потоке. Другой распространенный класс свободных сдвиговых течений представляют следы за телом обтекания. Мы рассматриваем простейшую форму тела – длинный цилиндр круглого сечения диаметра D , на который натекает однородный ламинарный поток со скоростью U_∞ . В такой постановке задачи имеется только один безразмерный критерий – число Рейнольдса Re , построенное по скорости натекающего потока и диаметру цилиндра. Прежде, чем перейти к анализу случая турбулентного потока, стоит обозначить основные характерные режимы течения в зависимости от Re . На рис. 4.3 указаны основные режимы и поведение коэффициента сопротивления $C_{p,b}$, рассчитанного в тыльной точке (за цилиндром). Безразмерный коэффициент давления (коэффициент донного давления)

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \quad (4.1)$$

указывает на распределение давления по поверхности цилиндра, где p_∞ – это величина давления на бесконечности. Зачастую основными параметрами задачи обтекания являются коэффициенты сопротивления и подъемной силы, которые имеют следующий вид:

$$C_D = \frac{F_{||}}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 D}, \quad C_L = \frac{F_\perp}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 D}, \quad (4.2)$$

где $F_{||}$ и $F_\perp$ обозначают компоненты силы на единицу длины цилиндра, действующие параллельно и перпендикулярно натекающему потоку, соответственно. Компоненты вектора силы, действующей на цилиндр имеют следующий вид:

$$F_i = \frac{1}{L} \oint_S \left(-pn_i + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right) dS, \quad (4.3)$$

где интегрирование происходит по поверхности тела обтекания, а n_i – это компоненты вектора нормали к ней, при этом стоит отметить, что интеграл нормирован на длину цилиндра L .

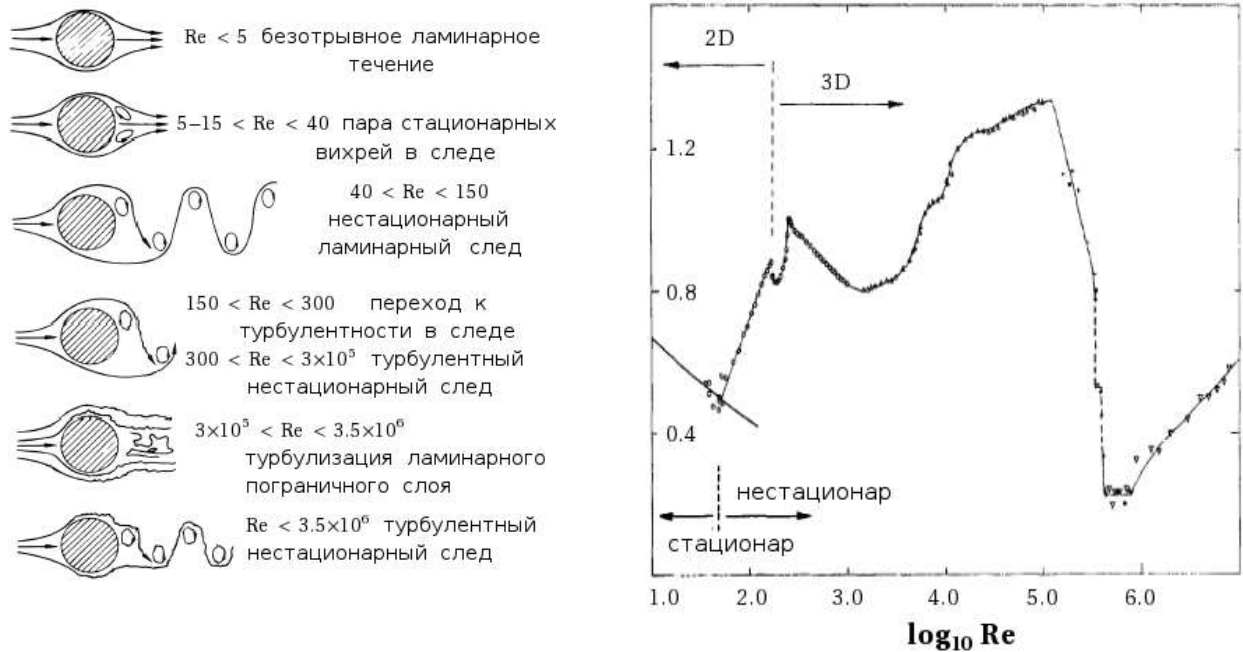


Рисунок 4.1. Слева: различные режимы течения при обтекании цилиндра (иллюстрация из работы [315]). Справа: коэффициент $-C_{p,b}$ в зависимости от Re (иллюстрация из работы [312])

Для малых чисел Рейнольдса ($Re \lesssim 5$) реализуется безотрывный режим обтекания, рис. 4.1. При дальнейшем увеличении Re сразу за цилиндром появляется пара так называемых вихрей Фёппла. Около $Re \approx 47$ происходит переход от двумерного стационарного течения к двумерному нестационарному режиму при помощи бифуркации Хопфа [310, 311], которая нарушает симметрию потока и приводит к развитию периодических осцилляций. Эти колебания способствуют формированию крупномасштабных вихрей, которые периодически срываются с кромки тела обтекания, что приводит к хорошо известному явлению – дорожке Кармана [312]. Периодическое вихревое движение сказывается на распределении давления и приводит к пульсациям сил, действующих на затопленное тело со стороны жидкости. Сильные флуктуации подъемной силы и силы сопротивления могут привести к серьезным повреждениям тела обтекания из-за резонансных вибраций самой конструкции, вызванной гидродинамикой потока [313, 314].

Рошко (1954) [57] впервые описал режимы течения до $Re < 10^4$, проведя серию подробных экспериментов. В диапазоне $150 < Re < 300$ происходит потеря устойчивости двумерного нестационарного режима течения, переход от двумерного течения к трехмерному и последующая турбулизация в следе за цилиндром. При этом стоит отметить, что существует две неустойчивые моды (А и Б), которые соответствуют двум длинам волн поперечных

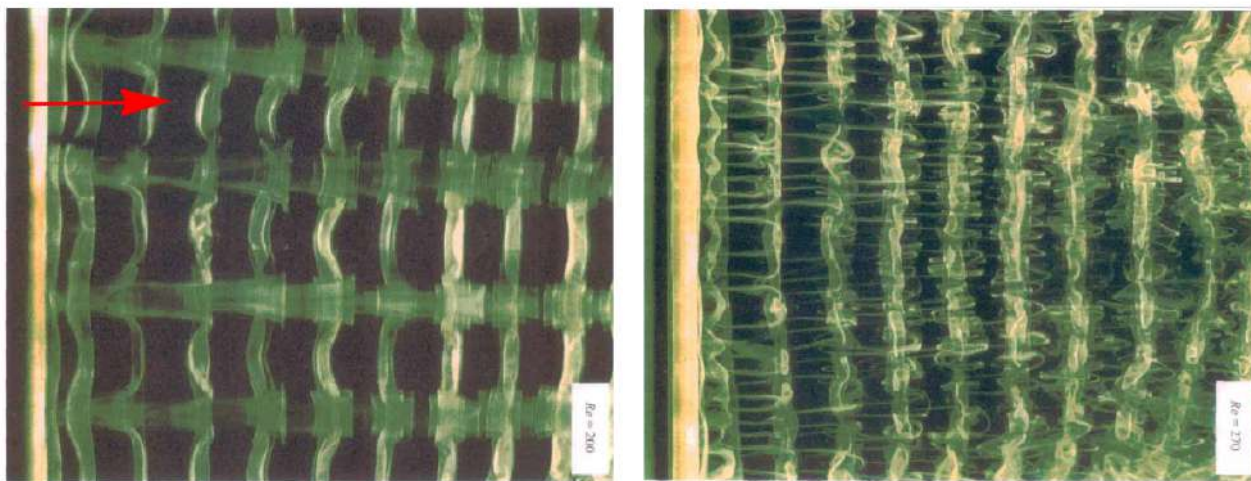


Рисунок 4.2. Визуализация вторичной неустойчивости, которая приводит к развитию трехмерного течения. Слева на каждом рисунке вертикально видно половину цилиндра. Показаны два сценария: мода А при $Re = 200$ (слева) и мода Б при $Re = 270$ (справа). Красная стрелка показывает направление течения. Иллюстрация взята из [316]

возмущений – длинноволновая и коротковолновая мода с $\lambda/D \approx 4$ и ≈ 1 , соответственно (см. рис. 4.2). Режим течения, при котором пограничный слой до точки отрыва является ламинарным, называют *докритическим*, при этом турбулизация происходит в слое смешения только после отрыва. При дальнейшем увеличении скорости натекающего потока пульсации скорости проявляются в слое смешения все раньше. Эти наблюдения позже подтвердились в экспериментах Блура (1964) [317] и Вилльямсона (1988) [318]. Дальнейшие эксперименты Рошко (1961) [319] дополнили предыдущие исследования в диапазоне более высоких Re . Рошко показал, что при $2 \times 10^5 < Re < 5 \times 10^5$ происходит так называемый *кризис сопротивления* (нижний переход), при котором коэффициент сопротивления C_D существенно понижается. Второй переход (верхний) происходит в диапазоне $10^6 < Re < 3.5 \times 10^6$ и сопровождается некоторым увеличением C_D . Дальнейшие эксперименты Ахенбаха (1968) [320] были проведены в диапазоне $6 \times 10^4 < Re < 5 \times 10^6$. В частности, он показал, что в критической области по Re (между нижним и верхним переходом) точка отрыва существенно смещается вниз по течению, составляя угол в 140 градусов, который отсчитывается от лобовой точки. Суть этого явления заключается в том, что пограничный слой турбулизируется на цилиндре и затягивает момент отрыва, при этом режим течения называется *надкритическим*. Недавние LES-расчеты, проведенные Лемкюхлом и др. (2014) [321] и Родригез и др. (2015) [322] в диапазоне $2.5 \times 10^5 < Re < 8.5 \times 10^5$, указали на процесс формирования новой маленькой рециркуляционной зоны на одной стороне цилиндра, что приводит к экспериментально на-

блюдаемой асимметрии в распределении силы по поверхности цилиндра. При дальнейшем увеличении Re аналогичный “пузырь” образуется и на второй стороне цилиндра, восстанавливая симметрию течения.

Краткий обзор известных результатов показал, что некоторые интересные физические явления происходят при больших числах Рейнольдса. Кроме того, в практических приложениях обтекание затопленных тел происходит зачастую также при высоких Re . И хотя на сегодняшний день в литературе уже появляются результаты численных расчетов задач обтекания при достаточно высоких Re даже при помощи DNS [323], вычислительные ресурсы, необходимые для проведения такого исследования, остаются за гранью возможности большинства ученых и практиков, которые во многом опираются на такой подход к моделированию турбулентности как RANS (см. пункт 1.2). Следующая часть данной главы посвящена исследованию особенностей двух выбранных RANS-моделей в применении к задаче обтекания цилиндра однородным потоком жидкости.

4.2. Тройная декомпозиция, моделирование и когерентные структуры

¹Существует распространенное мнение, что RANS-модели неспособны аккуратно предсказывать характеристики турбулентных потоков с существенной областью отрыва. Это мнение, в основном, опирается на концептуальные недостатки, связанные с подходом осреднения по Рейнольдсу, а также на опыт использования линейных моделей, основанных на турбулентной вязкости. Однако, примеры использования моделей более высокого порядка замыкания указывают на то, что URANS может достаточно точно предсказывать результат даже для самых сложных случаев и представляет определенный интерес как минимум для промышленных приложений. Это было продемонстрировано для некоторых достаточно общих конфигураций, например, для пульсирующей струи [324], течения за уступом [325], для задачи обтекания массива труб (сборки) [326] и некоторых других. Тем не менее, в литературе присутствует достаточно мало работ, анализирующих ограничения и причины неудач RANS-моделей, так же как и отвечающих почему некоторые модели хорошо воспроизводят экспериментальные данные в той или иной ситуации. Поскольку подход RANS скорее всего останется основным инструментом инженерных численных исследований [327] (в различных комбинациях с LES), требуется дальнейшее более глубокое изучение особенностей используемых RANS-моделей. Этот как раз тот случай, когда исследуются достаточно сложные отрыв-

¹ См. работы [9,29,34] в разделе “Публикации по теме диссертации”

ные течения при высоких числах Рейнольдса, для которых использование метода крупных вихрей оказывается непрактичным. Как будет показано ниже, вполне достаточно использовать модели турбулентности, основанные на замыкании уравнений Рейнольдса второго порядка, чтобы аккуратно предсказывать ламинарно-турбулентный переход и дальнейшее развитие гидродинамических неустойчивостей в слое смешения, что особенно критично для аккуратного предсказания динамики и характеристик отрывной зоны.

Для проверки справедливости заложенных в URANS гипотез мы будем использовать результаты численных расчетов при помощи LES. В данной работе рассматриваются два числа Рейнольдса $Re = 3.9 \times 10^3$ и 1.4×10^5 , при этом оба попадают в докритический режим течения с ламинарным пограничным слоем до отрыва потока от стенки цилиндра. Существует большое количество работ, в которых было проведено численное исследование обтекания цилиндра при $Re = 3.9 \times 10^3$ при помощи прямого численного моделирования и методом крупных вихрей [328–331], помимо прочих. Несмотря на многочисленные попытки до последнего времени исследователи не могли объяснить присутствие существенного разброса в результатах различных авторов. Недавно Лемкюхл и др. (2013) [332] провели прямое численное моделирование для достаточно длинного временного интервала, обнаружив при этом два характерных состояния (режима) течения в области за цилиндром, которые последовательно сменяются между собой с очень низкой частотой. Этот факт может объяснить имеющиеся расхождения литературных данных между собой при условии недостаточной продолжительности осреднения характеристик потока.

Гораздо реже в литературе встречаются численные исследования такого течения при больших числах Рейнольдса из-за высоких вычислительных затрат. Некоторые ссылки на первые LES-расчеты могут быть найдены в работе Роди (1993) [333]. Травин и др. (2000) [334] исследовал возможности так называемого метода отсоединенных вихрей (Detached-eddy simulations), который основан на совместном (гибридном) использовании RANS и LES-подходов. Авторы рассмотрели широкий диапазон чисел Рейнольдса до $O(10^6)$, при этом использовали очень грубые расчетные сетки, что привело, к примеру, к переоценке длины рециркуляционной зоны. Схожая работа была выполнена Ло и др. (2005) [335]. Недавно Муссад и др. (2014) [336] провел серию расчетов при помощи URANS и гибридного подхода RANS-LES. Авторы использовали $k - \epsilon$ модель, которая показала неудовлетворительные результаты. В частности, модель является сильно диссипативной и не дает развиваться трехмерным эффектам даже при высоких числах Рейнольдса. При этом ряд двумерных вычислений подтвердил необходимость учитывать неустойчивость в поперечном направлении [326, 337–339]. Каталано и др. (2003) [340] также получил неудовлетворительные результаты, используя $k - \epsilon$ модель

и стандартные пристеночные функции. Брауэр (2000) [341] и Трэмбле (2002) [342] провели LES-расчеты при $Re = 1.4 \times 10^5$. Авторы проанализировали влияние численных методов и подсеточных моделей на результат, который показал хорошее согласие с экспериментами Кантвелла и Коулса (1983) [343]. Как уже упоминалось выше, Лемкюхл и др. (2014) [321] и Родригез и др. (2015) [322] недавно провели серию LES-расчетов с хорошим пространственным разрешением в диапазоне чисел Рейнольдса от 2.5×10^5 до 8.5×10^5 , которые позволили прояснить тонкости явления кризиса сопротивления.

4.2.1. Рассматриваемая геометрия и вычислительные детали

Для LES-расчетов использовались сетки размером 15.6×10^6 и 13.4×10^6 гексаэдральных ячеек для $Re = 3.9 \times 10^3$ и 1.4×10^5 , соответственно. Сетка для низкого Re по разрешению близка к DNS-разрешению, при этом отношение подсеточной турбулентной вязкости к молекулярной составляет $\bar{\nu}_{sgs}/\nu < 0.5$, в то время как для большого числа Рейнольдса $\bar{\nu}_{sgs}/\nu < 6$. Для вычислений при помощи подхода URANS использовались гораздо более грубые сетки ($0.94 - 3 \times 10^6$), используя две RANS-модели, подробно описанные в пункте 1.3, а именно, линейная модель $\zeta - f$ Ханъялича и др. (2004) [98] (linear-eddy-viscosity model, EVM), основанная на гипотезе турбулентной вязкости, и модель Якирлича и Ханъялича (2002) [100] второго порядка замыкания (Reynolds-stress model, RSM). Эти модели были выбраны как продвинутые представители своих классов, хорошо описывающих характеристики некоторых потоков в сложной геометрии.

На рис. 4.3 представлена прямоугольная область, которая использовалась для расчетов, с размерами $25D \times 20D$ в продольном и вертикальном направлении. Поперек цилиндра длина области варьировалась от $2D$ до $6D$. Центр цилиндра располагался на расстоянии $10D$ от входной границы области. Для $Re = 3.9 \times 10^3$ поперечная длина составляла $4D$ для LES, согласно данным работы [344], в то время как для URANS использовались $3D$ и $6D$. Для $Re = 1.4 \times 10^5$ поперечная ширина области была выбрана равной $2D$ для LES, следуя работе [322], и $3D$ – для URANS. На верхней и нижней границе были заданы нулевые производные продольной и поперечной компоненты скорости, в то время как значение вертикальной компоненты приравнявалось нулю. На входной границе задавалось постоянное значение скорости U_∞ и нулевой уровень турбулентности. На поперечных границах задавались периодические условия. На выходе из области было реализовано конвективное граничное условие. Все результаты, представленные далее, обезразмерены при помощи U_∞ и D .

В нескольких работах была обнаружена существенная чувствительность URANS-реше-

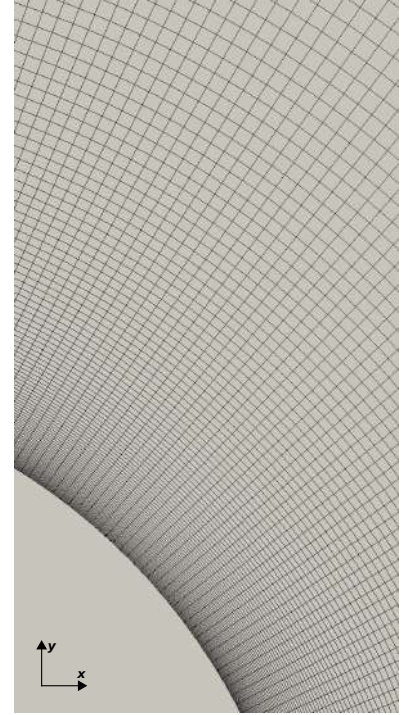
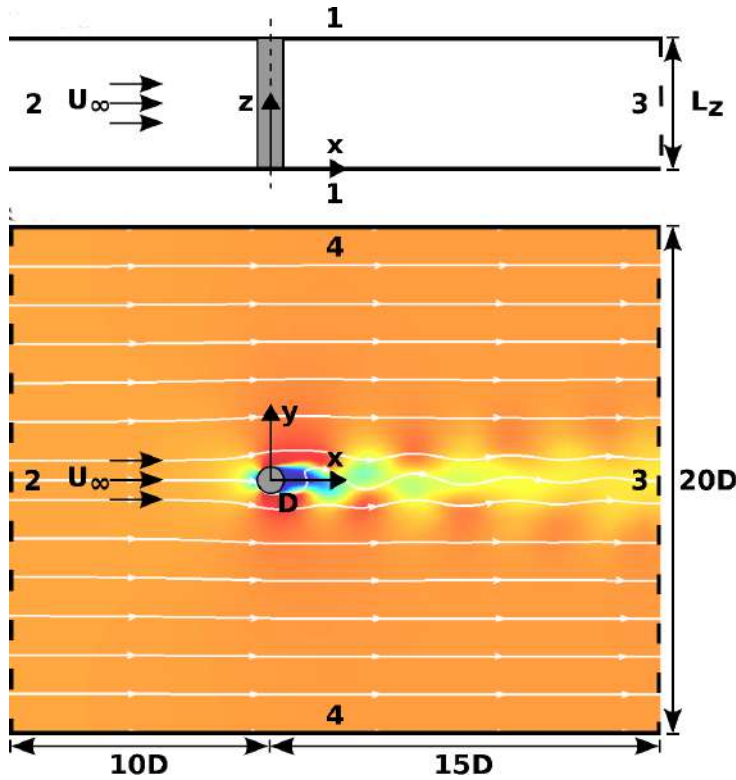


Рисунок 4.3. Слева: вычислительная область и система координат. Цифры от 1 до 4 соответствуют периодическим, входным, конвективным и боковым граничным условиям, соответственно. Справа: расчетная сетка в плоскости $x - y$ с 3×10^6 ячейками для $Re = 1.4 \times 10^5$

ния для отрывных потоков к ряду вычислительных деталей [324, 345]. В данной работе был выбран достаточно малый шаг по времени для того, чтобы избежать применения неявной операции фильтрации по времени, однако, больший по сравнению с LES-расчетами. В дополнение к нашим собственным тестам, выбор был основан на результатах Юнга и Оий (2007) [346]. Авторы исследовали влияние шага по времени на результаты расчета течения при $Re = 3.9 \times 10^3$ с $\Delta t = 0.1, 0.5 \times 10^{-1}$ и 2.5×10^{-2} , при этом имелись некоторые отличия в результатах даже для двух последних (наименьших) шагов по времени. Именно для этого в данной работе используется шаг по времени почти в три раза меньше, чем наименьший Δt в работе [346] (см. табл. 4.1). Поскольку традиционные RANS-модели не могут воспроизвести зарождение ламинарно-турбулентного перехода, вычисления начинаются с низким (ненулевым) значением турбулентной кинетической энергии на входе в расчетную область ($k^{1/2}/U_\infty = 0.5-2\%$ и $\nu_t/\nu = 5-20$). Когда поле турбулентной кинетической энергии становится достаточно развитым, входные значения турбулентных характеристик задаются равными нулю. Уровень турбулентности на входе в область зависит от чувствительности (и диссипативности) выбранной RANS-модели. Для рассматриваемого случая модели второго порядка замыкания было достаточно уровня в 0.1% и $\nu_t/\nu \approx 1$, в то время как $\zeta - f$ требовала гораздо

Таблица 4.1. Характеристики расчетных сеток и шаги по времени, использованные для LES и URANS. N_{tot} – общее количество ячеек, N_{theta} – узлов по окружности цилиндра, L_z – ширина расчетной области в поперечном направлении, Δt – шаг по времени

	N_{tot}	N_{θ}	N_z	L_z	Δt
			$Re =$	3.9×10^3	
LES	15.6×10^6	252	256	4	5×10^{-3}
URANS	1.44×10^6	200	48	6	8×10^{-3}
			$Re =$	1.4×10^5	
LES	13.4×10^6	520	132	2	1.5×10^{-3}
URANS	3.0×10^6	400	32	3	2.2×10^{-3}
URANS _c	0.94×10^6	200	32	3	2.2×10^{-3}

более высоких значений. Стоит, однако, отметить, что эти данные неважны для конечного результата, потому что служат только для того, чтобы инициализировать турбулентные поля за телом обтекания. Адекватность пространственного разрешения проверялась по результатам расчетов на нескольких вычислительных сетках. В данной работе представлены только результаты расчетов для сетки в 1.5×10^6 ячеек для $Re = 3.9 \times 10^3$ и для двух сеток в 0.94×10^6 и 3×10^6 для $Re = 1.4 \times 10^5$, см. табл. 4.1.

4.2.2. Подход URANS: тройное разложение

Моделируемая, разрешаемая и смешанная часть вторых моментов

URANS (нестационарный RANS) обычно применяется, используя RANS-модель в нестационарном режиме, для описания потоков, характеристики которых меняются с течением времени. Обычно подразумевается, что масштаб времени, на котором меняются интегральные характеристики течения, велик по сравнению с масштабом времени турбулентных пульсаций. Однако, URANS может также применяться к стационарным потокам, когда проявляются низкочастотные пульсации вследствие имеющейся сильной гидродинамической неустойчивости системы, приводя к формированию квазипериодических когерентных вихревых структур. На динамику этих структур, которые часто реализуются и в аналогичном ламинарном потоке, влияют также мелкомасштабные турбулентные флуктуации через поле турбулентной вязкости, распределенной в пространстве неоднородным образом. Часто предполагается, что из-за

разделения масштабов между мелкомасштабной турбулентностью и крупномасштабным движением соответствующие пульсации не коррелируют между собой, но, в действительности, поле стохастических флуктуаций и когерентная компонента влияют друг на друга. Таким образом, аккуратное моделирование такого течения помимо численных факторов определяется RANS-моделью для мелкомасштабной турбулентности, ее чувствительностью к гидродинамической неустойчивости.

Рассматривая стационарный поток в задаче обтекания цилиндра при наличии квазипериодического срыва крупномасштабных вихрей, будем исследовать идеи, заложенные в подходе URANS, проверяя их справедливость. Для этого выведем уравнения URANS, применяя тройную декомпозицию поля скорости (и давления) на компоненту, осредненную по времени, а также периодическую и стохастическую часть:

$$\mathbf{u} = \underbrace{\bar{\mathbf{u}}}_{\text{средн.}} + \underbrace{\mathbf{u}^c}_{\text{период.}} + \underbrace{\mathbf{u}^s}_{\text{стохаст.}}. \quad (4.4)$$

$= \tilde{\mathbf{u}} \text{ оср. по фазе}$

Периодическая (когерентная) и стохастическая части обозначены как $\mathbf{u}^c$ и $\mathbf{u}^s$. Волна над символом $\tilde{\mathbf{u}}$ здесь обозначает условное (фазовое) осреднение. Для того, чтобы напрямую исследовать данную декомпозицию, проводился LES-расчет, при этом рассчитывались неизвестные слагаемые, появляющиеся в уравнениях URANS. Эта декомпозиция, как уже упоминалось во Введении, была впервые использована Хуссейном и Рейнольдсом (1970) [64] для анализа волнового движения в сдвиговых потоках и далее применялась для исследования когерентных структур в турбулентном потоке [62, 63]. Некоторые вопросы, связанные со взаимодействием когерентных и стохастических пульсаций скорости, особенно удобно исследовать именно в этом классе течений, поскольку в ближней области следа когерентное движение содержит до 20% от общей турбулентной кинетической энергии, см. табл. 1. Условное осреднение уравнений Навье – Стокса при подстановке поля скорости в виде декомпозиции (4.4) дает три дополнительных слагаемых, которые характеризуют напряжения, связанные с когерентными пульсациями, стохастическими флуктуациями и их смешанными корреляциями. Как будет показано далее, прямое сравнение этих слагаемых, полученных из условно-осредненных данных в LES подтверждают, что смешанные корреляции не являются пренебрежимо малыми по сравнению с когерентной и стохастической частью, однако, уменьшаются с увеличением числа Рейнольдса.

После условного осреднения безразмеренного уравнения Навье – Стокса, получим вы-

ражение

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\tilde{u}_i \tilde{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j^2}. \quad (4.5)$$

Здесь мы предположили, что оператор осреднения коммутирует с пространственными и временными производными. Дальнейшие преобразования позволяют получить

$$\widetilde{u_i u_j} = \widetilde{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} + \widetilde{\tilde{u}_i u_j^s} + \widetilde{\tilde{u}_j u_i^s} + \widetilde{u_i^s u_j^s}. \quad (4.6)$$

Подстановка осредненного конвективного слагаемого в (4.5) дает

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\tilde{u}_i \tilde{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} (L_{ij} + C_{ij} + R_{ij}), \quad (4.7)$$

где

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \widetilde{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j = \widetilde{u_i^c u_j^c} - u_i^c u_j^c, \\ C_{ij} &= \widetilde{\tilde{u}_i u_j^s} + \widetilde{\tilde{u}_j u_i^s} = \widetilde{u_i^c u_j^s} + \widetilde{u_i^s u_j^c}, \\ R_{ij} &= \widetilde{u_i^s u_j^s}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где по аналогии с LES введены напряжения Леонарда L_{ij} , смешенные корреляции C_{ij} и напряжения Рейнольдса R_{ij} , соответственно [88].

Как указывалось выше, стандартный URANS-расчет уравнения (4.7) выполняется в предположении $L_{ij} = C_{ij} = 0$. Одна из моделей RANS обычно применяется для моделирования R_{ij} , при этом в качестве решения получают зависящие от времени поля $\tilde{u}_i$ и $\tilde{p}$. Ниже мы количественно вычислим вклад неучтенных слагаемых в напряжения Рейнольдса, полученные из LES. Стоит отметить, что в итоге расчета важно получить достоверные статистические характеристики (осреднение по времени). Полные (RANS) напряжения Рейнольдса равны

$$\overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j = \overline{u_i^c u_j^c} + \left(\overline{u_i^c u_j^s} + \overline{u_i^s u_j^c} \right) + \overline{u_i^s u_j^s}. \quad (4.9)$$

Первое слагаемое в правой части соотношения (4.9) определяется “разрешенной” частью URANS решения $\tilde{u}_i$, в то время как последнее слагаемое моделируется. Как будет показано ниже, правильное отношение уровня разрешенных и моделируемых напряжений является крайне важным фактором для адекватного описания ламинарно-турбулентного перехода в сдвиговом слое после отрыва потока. Смешанные корреляции в (4.9) обычно игнорируются в расчетах, поскольку не совсем ясно как выделять стохастическую часть пульсаций из URANS-решения. Впечатление об абсолютной и относительной величине смешанных корреляций может быть получено из результатов, представленных далее.

При рассмотрении нестационарных потоков необходимо определить операцию условного осреднения по времени. Согласно предыдущим работам [325, 347], разрешенное поле скорости можно получить сверткой некоторой функции фильтрации по времени G и мгновенного поля скорости:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \int G(t - t') \mathbf{u}(t') dt'. \quad (4.10)$$

Если параметры течения меняются медленно, как, например, монотонно изменяющийся расход жидкости в некотором канале, тогда процедуру осреднения по Рейнольдсу можно определить как локальное осреднение по времени в некотором небольшом промежутке времени. Таким образом, функцию G можно представить в виде ступенчатой/прямоугольной функции (“top-hat”), где ширина фильтра определяется вычислительным шагом по времени, численными методами дискретизации и, возможно, используемой моделью турбулентности. Для квазипериодических потоков можно использовать другой подход:

$$G(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \delta(t - t_n), \quad (4.11)$$

где моменты времени t_n соответствуют определенным значениям наблюдаемой величины, δ – дельта-функция. Если t_n расположены во времени равномерно, тогда определение $G(t)$ соответствует *фазовому* осреднению. Для меняющегося временного интервала между повторяющимися событиями осреднение называется *условным*. При анализе данных LES мы фокусировались на двух характерных состояниях, когда фаза подъемной силы (или коэффициента подъемной силы C_L) минимальна и равна нулю. Стоит отметить, что фаза любого другого состояния может быть выражена как доля между минимальным (максимальным) значением C_L в интервале между $C_L \in [\min(C_L), 0]$ или $C_L \in [0, \max(C_L)]$, при этом значения минимумов и максимумов C_L меняются от фазы к фазе.

На рис. 4.4 показана эволюция во времени коэффициента сопротивления и подъемной силы, которая демонстрирует характерный периодический процесс сноса вихрей, а также наличие низкочастотных модуляций. Несмотря на то, что в данной задаче обтекания крупномасштабные пульсации происходят с явно выраженной частотой, период между отрывом вихрей и их амплитуда может немного зависеть от времени. Прямой расчет интервалов времени между максимальными/минимальными значениями C_L подтверждает необходимость применения описанной процедуры условного осреднения, основанного на поведении во времени некоторой реперной величины.

Как отмечено выше, в результате подстановки тройной декомпозиции и использования условного осреднения в уравнениях Навье – Стокса появляются несколько дополнитель-

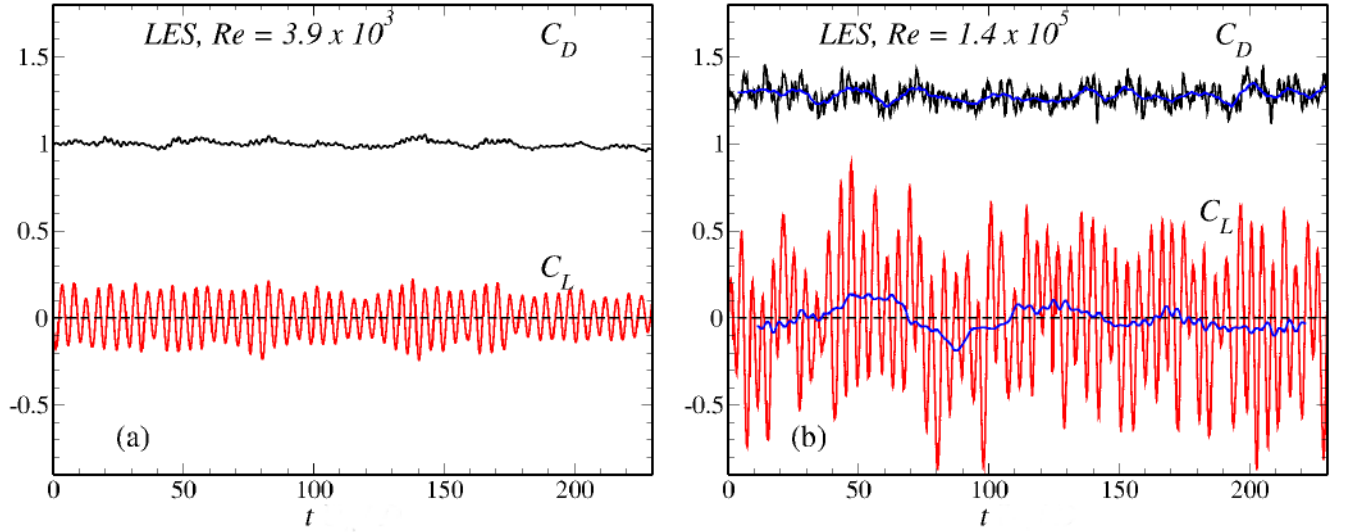


Рисунок 4.4. Поведение коэффициента сопротивления (C_D) и подъемной силы (C_L) из LES-расчета для двух чисел Рейнольдса. Слева: $Re = 3.9 \times 10^3$. Справа: $Re = 1.4 \times 10^5$. Синие линии на правом графике соответствуют локально осредненным по некоторому интервалу времени значениям для выявления низкочастотных пульсаций C_D и C_L

ных слагаемых, а именно, напряжения Леонарда, смешанные корреляции и напряжения Рейнольдса. Ненулевые значения напряжений Леонарда тем не менее малы по сравнению с остальными слагаемыми. Смешанные корреляции представляют собой корреляции между когерентной и стохастической частью пульсаций скорости. RANS-модель описывает только стохастическую часть, в то время как когерентные пульсации автоматически разрешаются при решении URANS-уравнений. Однако, смешанные корреляции не могут быть получены из URANS, поскольку мгновенные данные о стохастических флуктуациях не восстанавливаются в этом методе. Для того, чтобы сделать оценку роли смешанных корреляций и справедливости подхода URANS на рис. 4.5 и 4.6 сравниваются когерентные $\widetilde{u^c u^c}$, стохастические $\widetilde{u^s u^s}$ и смешанные $\widetilde{u^c u^s}$ корреляции. Данные результаты получены в ходе обработки результатов LES-расчета и из экспериментов Кантвелла и Коулза [343]. Когерентная и стохастическая части высчитываются при помощи процедуры условного осреднения и мгновенного сигнала C_L , после этого рассчитываются смешанные корреляции. Моделируемая часть спектра в LES не учитывается при расчете $\widetilde{u^c u^s}$, поскольку является пренебрежимо малой для $Re = 3.9 \times 10^3$ и используемого пространственного разрешения, а также несущественной для $Re = 1.4 \times 10^5$. Неучет подсеточных напряжений только усиливает выводы сделанные ниже по поводу малой величины отношения $\widetilde{u^c u^s} / \widetilde{u^s u^s}$. Стоит отметить, что величина $\widetilde{u^c u^c}$ не должна сильно зависеть от подсеточных напряжений, поскольку пространственное разрешение является достаточным. Как показано на рис. 4.5, поле $\widetilde{u^c u^c}$ для двух чисел Рейнольдса имеет очень

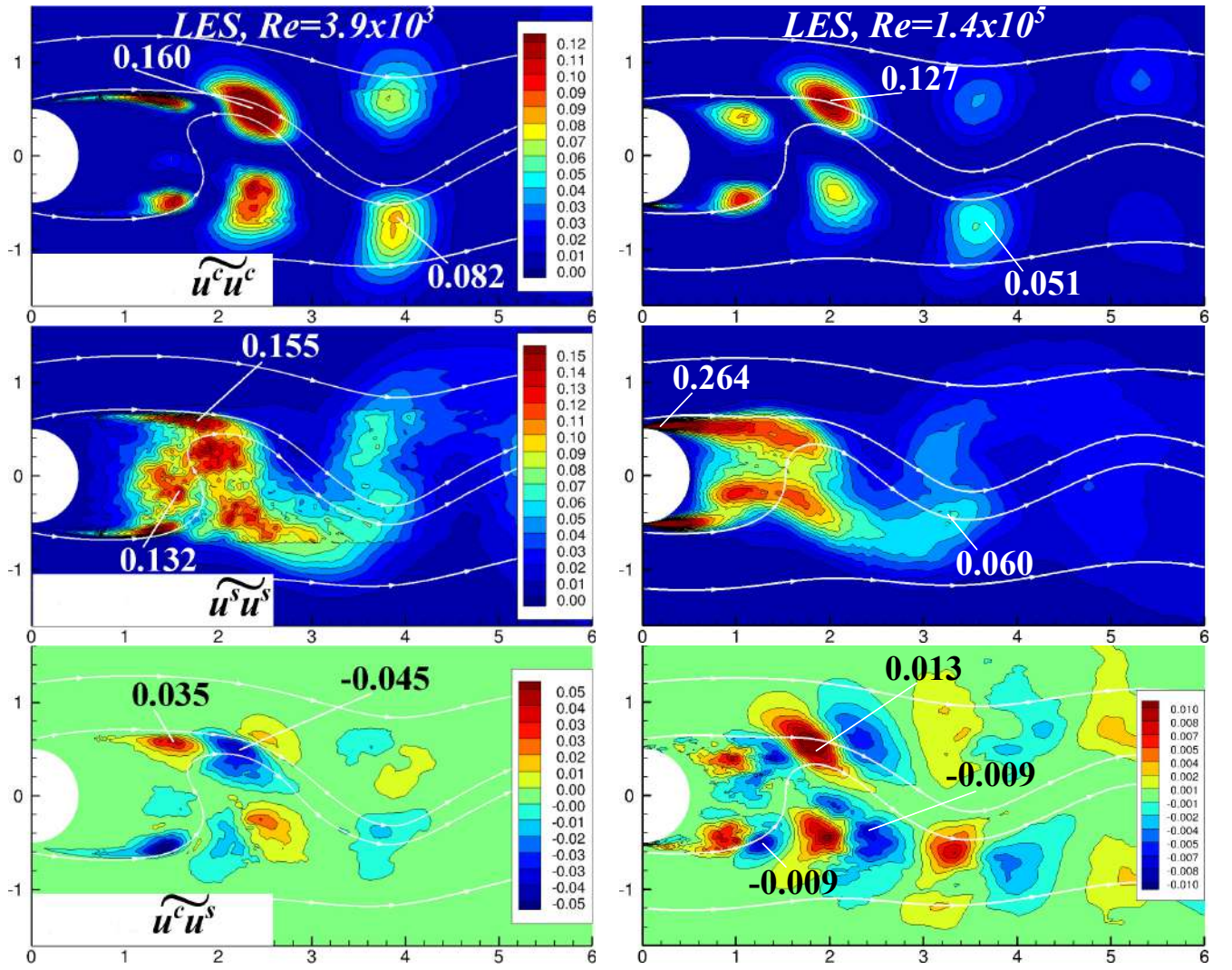


Рисунок 4.5. Когерентные, стохастические и смешанные напряжения, рассчитанные из данных LES при постоянной фазе, соответствующей минимальному значению C_L

схожую структуру и амплитуду. С другой стороны, значения $\widetilde{u^s u^s}$ гораздо выше для большого числа Рейнольдса, при этом пик пульсаций сдвигается к цилиндру из-за сокращения длины рециркуляционной зоны. Очень похожие поля когерентных и стохастических пульсаций получены и экспериментально, см. рис. 4.6. Смешанные корреляции $\widetilde{u^c u^s}$ существенно ниже напряжений Рейнольдса ($\widetilde{u^s u^s}$), однако, достигают 30% от стохастических пульсаций в некоторых местах при малых числах Рейнольдса. Для $Re = 1.4 \times 10^5$ отношение их пиков ($= \widetilde{u^c u^s} / \widetilde{u^s u^s}$) достигает 5% и подтверждает вывод о несущественности смешанных корреляций при увеличении числа Рейнольдса. Это отношение будет еще меньше при высоких Re , если в $\widetilde{u^s u^s}$ учесть вклад от подсеточных напряжений.

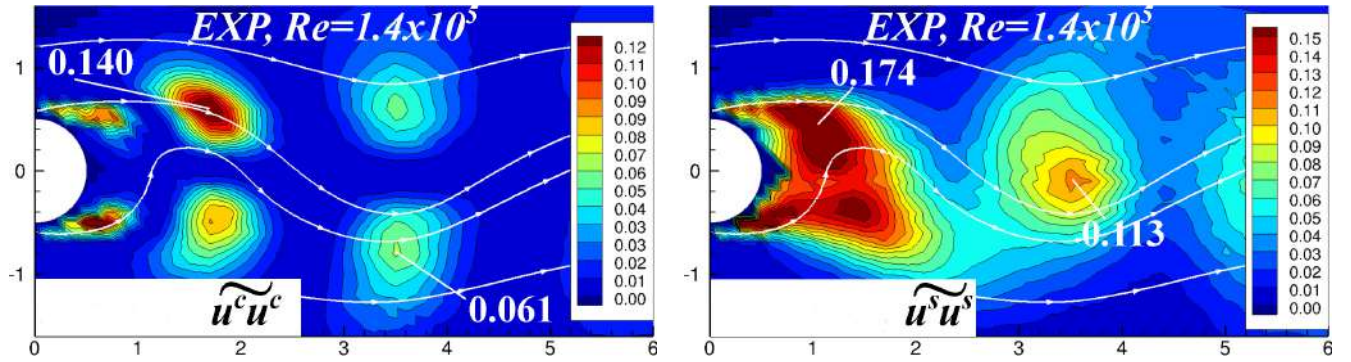


Рисунок 4.6. Когерентные и стохастические напряжения, измеренные в эксперименте [343]

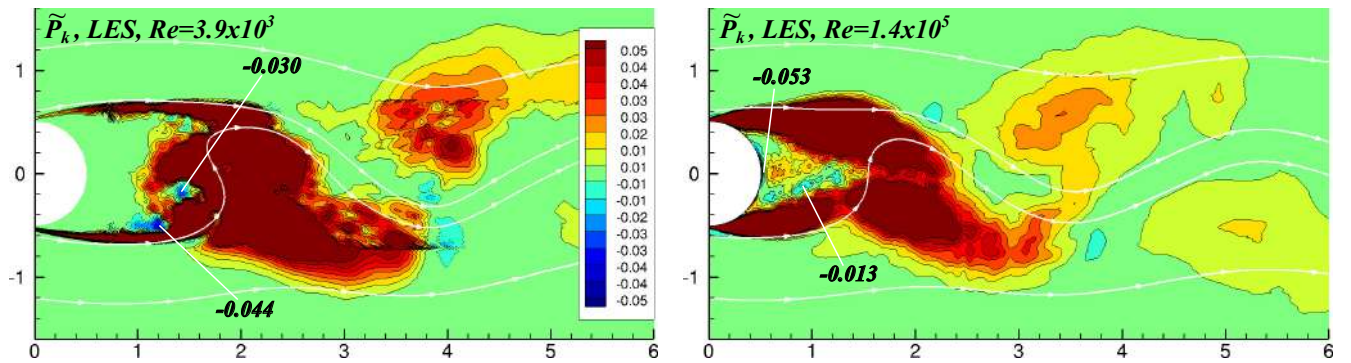


Рисунок 4.7. Слева: линии тока и производство турбулентной кинетической энергии $\widetilde{P}_k$ при постоянной фазе, соответствующей минимальному значению коэффициента подъемной силы и $Re = 3.9 \times 10^3$. Справа: угол для $Re = 1.4 \times 10^5$. Данные рассчитаны из LES

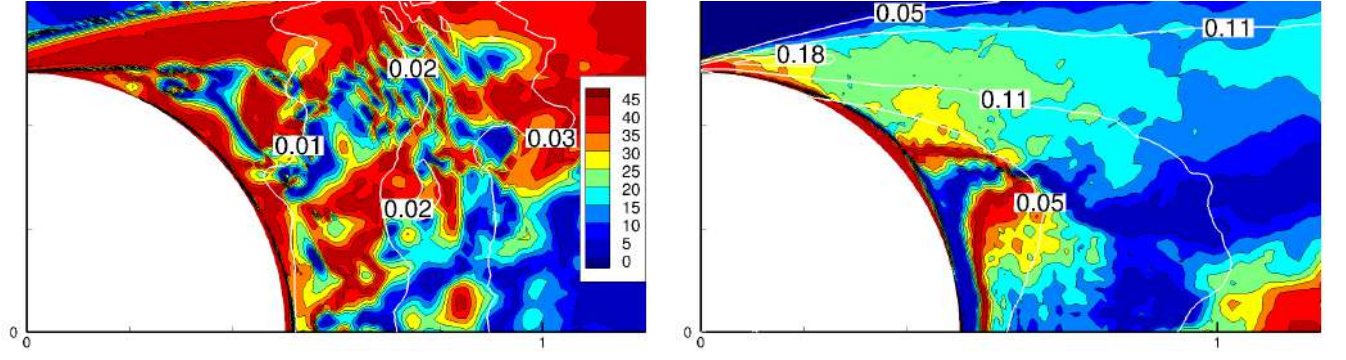


Рисунок 4.8. Слева: угол (в градусах) между собственными векторами тензоров $\tilde{S}_{ij}$ и $\tilde{R}_{ij}^{tr}$ с соответствующими контурами $\tilde{k}$ при $Re = 3.9 \times 10^3$. Справа: угол для $Re = 1.4 \times 10^5$

Обмен энергией между разрешаемыми и моделируемыми полями

Другим важным аспектом роли RANS-модели в контексте URANS является обмен энергией между разрешаемыми и моделируемыми полями пульсаций скорости. Этот обмен представляется в виде производства турбулентной кинетической энергии $\tilde{P}_k$. Отметим, что $\tilde{P}_k$ напрямую влияет на уровень эффективной вязкости, что определяет чувствительность модели к гидродинамическим возмущениям. Неудивительно, что данные LES указывают на наличие областей в пространстве за цилиндром, где $\tilde{P}_k < 0$. Однако, Кантвелл и Коулз [343] не обнаружил существенных областей с отрицательным производством турбулентной кинетической энергии, вычисленной из экспериментальных данных. При этом Франке и др. (1989) [348] исследовали справедливость приближения Буссинесска, используя те же самые экспериментальные данные, и обнаружили области с $\tilde{P}_k < 0$, которые невозможно описать RANS-моделями, которые относятся к классу линейных моделей, основанных на гипотезе турбулентной вязкости. Производство турбулентной кинетической энергии в некоторой фазе равно

$$\tilde{P}_k = -\widetilde{u_i^s u_j^s} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = -\widetilde{u^s u^s} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \widetilde{u^s v^s} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) - \widetilde{v^s v^s} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}. \quad (4.12)$$

На рис. 4.7 показано поле $\tilde{P}_k$ при постоянной фазе, соответствующей минимуму подъемной силы, действующей на цилиндр. Стоит отметить, что области с $\tilde{P}_k < 0$ малы для обоих чисел Рейнольдса. Сами отрицательные значения также малы и в основном расположены в области возвратных токов.

Как известно, линейные RANS-модели, основанные на гипотезе турбулентной вязкости, переоценивают уровень производства турбулентной кинетической энергии, потому что получаемое выражение квадратично зависит от производной средней скорости, а значит, всегда положительно. Кроме того, в периодических течениях есть проблема предсказания

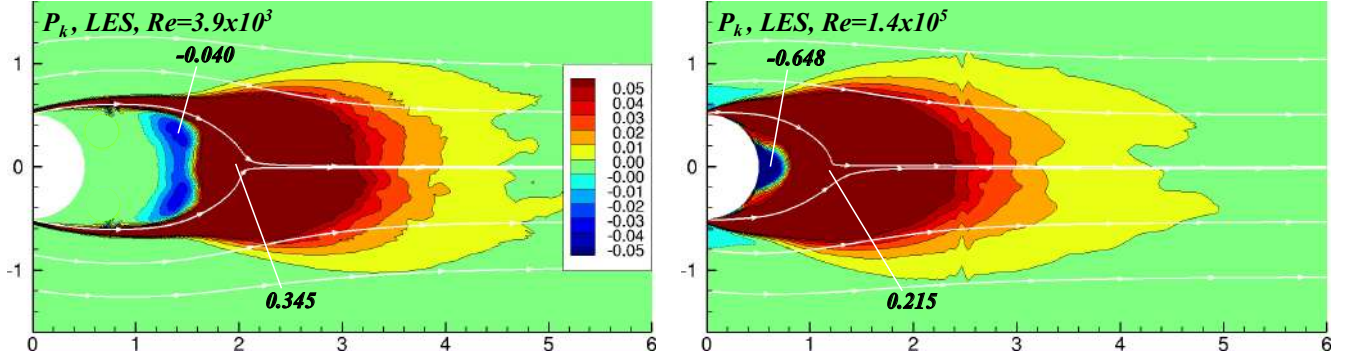


Рисунок 4.9. Производство турбулентной кинетической энергии P_k , рассчитанное из LES при $Re = 3.9 \times 10^3$ и 1.4×10^5

некоторой задержки по фазе между напряжениями Рейнольдса и периодическим поведением сдвига [324, 349–351]. С первой проблемой можно частично бороться, налагая некоторые ограничения (realizability constraints), как в случае моделей, основанных на подходе эллиптической релаксации. Однако, для того, чтобы воспроизвести соответствующее поведение напряжений по отношению к тензору скоростей деформации, необходимо учитывать анизотропию. Оценку нарушения гипотезы Буссинесска можно провести при помощи расчета сонаправленности главных собственных векторов тензора $\tilde{S}_{ij}$ и $R_{ij}^{tr} = \widetilde{u_i^s u_j^s} - \delta_{ij} \widetilde{u_k^s u_k^s} / 3$. Поскольку данные осреднены по фазе, то рассматриваемые тензоры имеют размерность 2×2 и представляют собой симметричные матрицы, а значит имеют действительные собственные значения и ортогональные собственные вектора. Для количественного анализа сонаправленности $\tilde{S}_{ij}$ и R_{ij}^{tr} будем рассчитывать угол между главными собственными векторами. На рис. 4.8 показано распределение этого угла около цилиндра для обоих чисел Рейнольдса. Стоит отметить, что турбулизация в слое смешения соответствует максимально возможному углу в 45 градусов. Области сильной разнонаправленности рассматриваемых векторов гораздо меньше для высоких чисел Рейнольдса, что также объясняет хорошие результаты URANS-расчетов в этом случае, которые приведены ниже.

Для сравнения полезно рассмотреть среднее производство турбулентной кинетической энергии, которое реализуется в стационарном RANS-подходе. В этом случае

$$P_k = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = -\overline{uu} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} - \overline{uv} \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} \right) - \overline{vv} \frac{\partial \overline{v}}{\partial y}. \quad (4.13)$$

На рис. 4.9 показано поле P_k для обоих чисел Рейнольдса. Область $P_k < 0$ для низких чисел Рейнольдса представляет собой узкую полосу во внутреннем слое смешения с пиковым значением примерно в девять раз ниже, чем максимальное значение P_k . При увеличении Re эта область смещается к тыльной точке цилиндра. Стационарный RANS с линейной моделью (далее EVM) предсказывает $P_k > 0$ во всей области течения, что приводит к завышенным

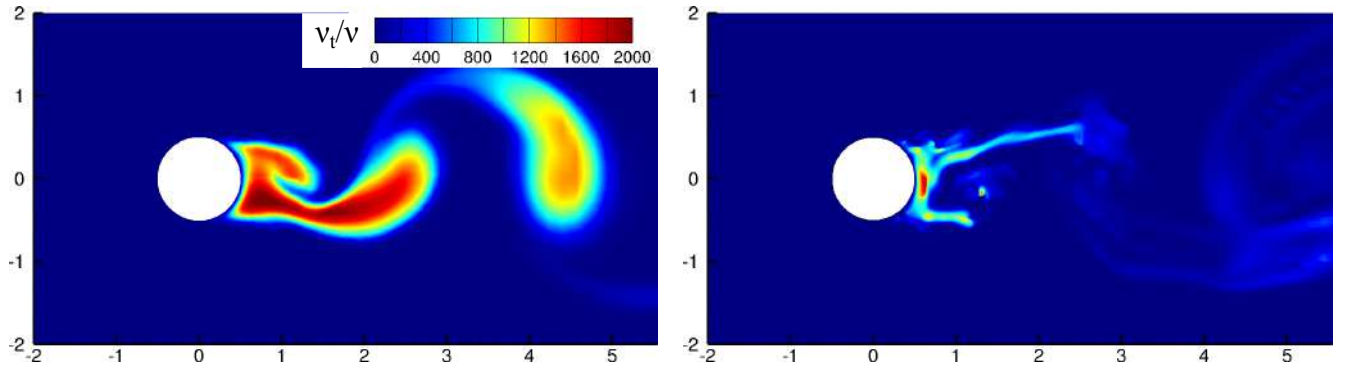


Рисунок 4.10. Мгновенные поля отношения ν_t/ν для EVM (слева) и RSM (справа) для $Re = 1.4 \times 10^5$

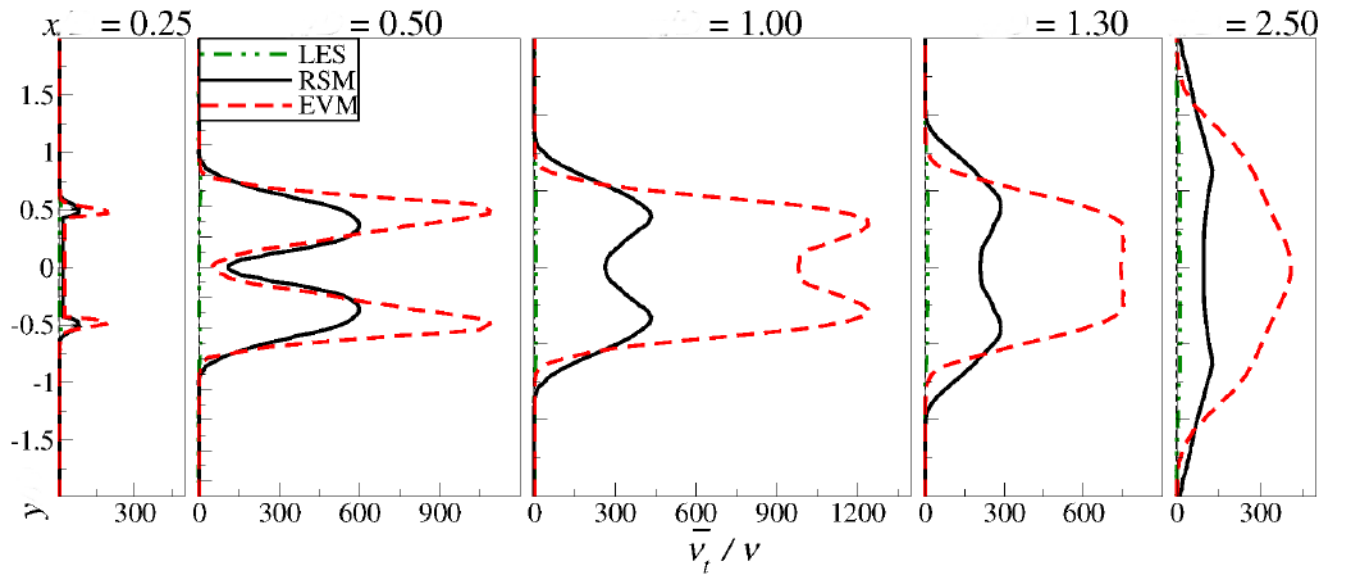


Рисунок 4.11. Профили отношения осредненной по времени турбулентной вязкости к молекулярной на разных сечениях x/D для LES, EVM и RSM

значениям турбулентной вязкости и понижению чувствительности модели к гидродинамическим неустойчивостям. Это приводит к существенным отклонениям в областях, где диагональные компоненты напряжений Рейнольдса играют ключевую роль. Когда такие модели применяются для расчета нестационарных потоков, зачастую можно получить стационарное решение, если неустойчивость не является достаточно сильной. Модели второго порядка замыкания (RSM) явным образом используют определение P_k и учитывают анизотропию пульсаций, что в данном случае особенно важно в области ламинарно-турбулентного перехода. На рис. 4.10 и 4.11 показаны мгновенные и осредненные по времени поля турбулентной вязкости для $Re = 1.4 \times 10^5$. Стоит отметить, что для EVM отношение турбулентной вязкости к молекулярной имеет вид $\nu_t/\nu = C_\mu \zeta k^2/(\nu \epsilon)$, где ζ является отношением величины квадрата вертикальной компоненты пульсаций скорости к турбулентной кинетической энер-

гии ($\zeta = \overline{v^2}/k$) и получена в ходе решения отдельного транспортного уравнения так же, как и k , см. пункт 1.3. Для RSM турбулентная вязкость может быть получена из выражения $\nu_t = P_k/(2S_{ij}S_{ij})$. На рис. 4.11 показаны также профили осредненного по времени отношения $\overline{\nu}_t/\nu$ для LES, максимальное значение которого не прыгало 6 на использованной вычислительной сетке.

4.2.3. Верификация и анализ URANS

Осредненные характеристики потока

Основные параметры расчета и интегральные характеристики течения вместе со сравнением с литературными данными представлены в табл. 4.2. При малых числах Рейнольдса длина зоны рециркуляции, полученная из LES, равна $L_r = 1.54$, в то время как RSM и EVM дают $L_r = 0.86$ и 0.58 , соответственно. Интересно отметить, что такие сильные расхождения в L_r не влияют на предсказания характерной частоты срыва вихрей f_0 при помощи обеих моделей. По сравнению с f_0 осредненный по времени коэффициент сопротивления $\overline{C}_D$, полученный из URANS, сильнее зависит от аккуратности предсказания поля скорости, которое в свою очередь влияет на распределение поля давления. Как и с остальными характеристиками результаты, полученные при помощи RSM, оказываются гораздо ближе к LES/DNS значениям. Интересно отметить, что несмотря на хорошее определение частоты f_0 , как будет показано ниже, имеющиеся низкочастотные модуляции в потоке видны только лишь на результатах, полученных с помощью RSM. Гораздо лучшее согласие с LES получено при высоком числе Рейнольдса. Длина рециркуляционной зоны для RSM, совпадает с результатами LES, в то время как EVM переоценивает L_r на 24%. Существенные отклонения от LES видны также и для $\overline{C}_D$ и $\overline{C}_{p,b}$ для EVM.

На рис. 4.12 показано сравнение осредненных по времени полей продольной компоненты скорости и линий тока в области зоны рециркуляции. Как уже было сказано выше и указано в табл. 4.2, согласно LES длина “пузыря” составляет $L_r = 1.54$ и 0.67 для $Re = 3.9 \times 10^3$ и 1.4×10^5 , соответственно. URANS предсказывает слишком короткую рециркуляционную зону для малых чисел Рейнольдса, рис. 4.12. Обе модели демонстрируют наличие небольшой рециркуляционной зоны около стенки цилиндра, которой не существует согласно результатам LES и литературным данным. Для высокого числа Рейнольдса получено отличное согласие между LES и RSM.

На рис. 4.13 показаны осредненные по времени профили продольной и поперечной скорости на различном удалении от цилиндра при $Re = 3.9 \times 10^3$. Форма профилей отра-

Таблица 4.2. Сравнение размера вычислительных сеток (N_{tot}), осредненного по времени коэффициента сопротивления ($\overline{C}_D$), коэффициента донного давления ($\overline{C}_{p,b}$), угла точки отрыва (θ_s), длины рециркуляционной зоны (L_r) и частоты срыва вихрей (f_0) с данными из литературы

	N_{tot}	$\overline{C}_D$	$-\overline{C}_{p,b}$	ϕ_s	L_r	f_0
		$Re =$	3.9×10^3			
LES	15.6×10^6	1.005	0.924	88.0	1.54	0.218
RSM	1.44×10^6	1.07	1.164	89.6	0.86	0.207
EVM	1.44×10^6	1.13	1.284	92.5	0.58	0.209
DNS, [332]	9.3×10^6	1.015	0.935	88.0	1.36	0.215
		$Re =$	1.4×10^5			
LES	13.4×10^6	1.27	1.27	90.8	0.67	0.229
RSM	3.0×10^6	1.24	1.37	85.0	0.67	0.217
RSMc	0.94×10^6	1.19	1.46	82.3	0.43	0.233
EVM	0.94×10^6	0.90	0.94	82.2	0.83	0.217
Exp, [343]		1.23	1.21	77.0	0.44	0.179
LES, [341]	6.76×10^6	1.37	1.60	91.5	0.42	0.205

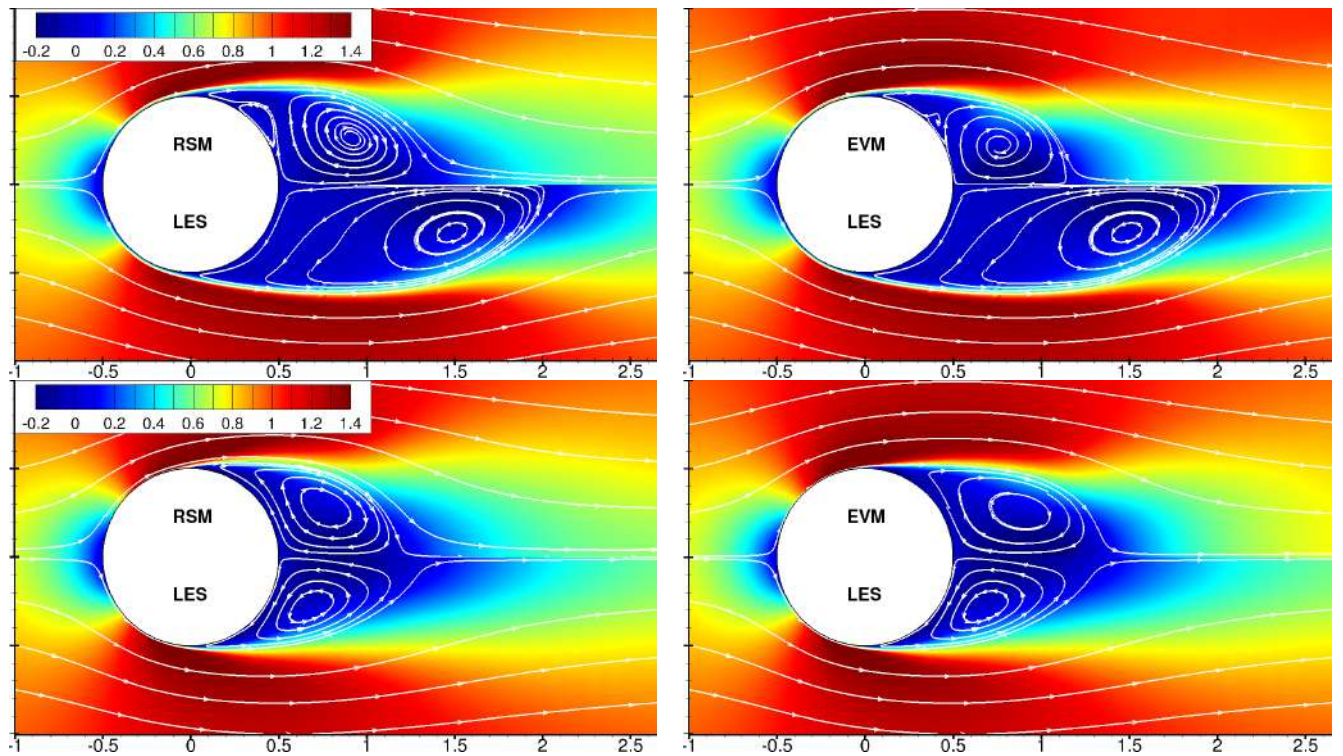


Рисунок 4.12. Поле осредненной по времени продольной компоненты скорости и линии тока для $Re = 3.9 \times 10^3$ (сверху) и 1.4×10^5 (снизу). Сравнение LES, RSM и EVM

жает тот факт, что URANS недопредсказывает длину зоны рециркуляции при этом числе Рейнольдса. Профиль продольной скорости в сечении $x = 1.06$ имеет V-образную форму вместо U-образной, предсказанной LES. При этом величина поперечной скорости превосходит соответствующие результаты из LES, что указывает на более интенсивное движение внутри пузыря для URANS-решения. На следующих сечениях ($x = 1.54$ и 2.02) URANS показывает слишком низкие значения скорости.

На рис. 4.14 показаны аналогичные профили скорости для $Re = 1.4 \times 10^5$. В целом, RSM показывает лучшее совпадение с результатами LES, чем EVM. В частности, RSM accurately описывает максимум продольной скорости вдоль x , в то время как EVM переоценивает продольную скорость в сечениях $x = 1.0$ и 1.3 из-за слишком длинной зоны рециркуляции. Хорошее согласие показывает и сравнение поперечной компоненты средней скорости. Но и здесь RSM показывает более точные результаты, что особенно видно в сечении $x = 1.0$. Интересно отметить, что RSM расчеты, проведенные на более грубой сетке (RSMc), отличаются слабо, что говорит о имеющейся сеточной сходимости анализируемого решения.

Сравнение полных напряжений Рейнольдса (суммы разрешенной и моделируемой части) при $Re = 1.4 \times 10^5$ показано на рис. 4.15. В сечении $x = 0.5$ продольные напряжения отлично согласуются с результатами RSM с небольшой переоценкой максимального значения

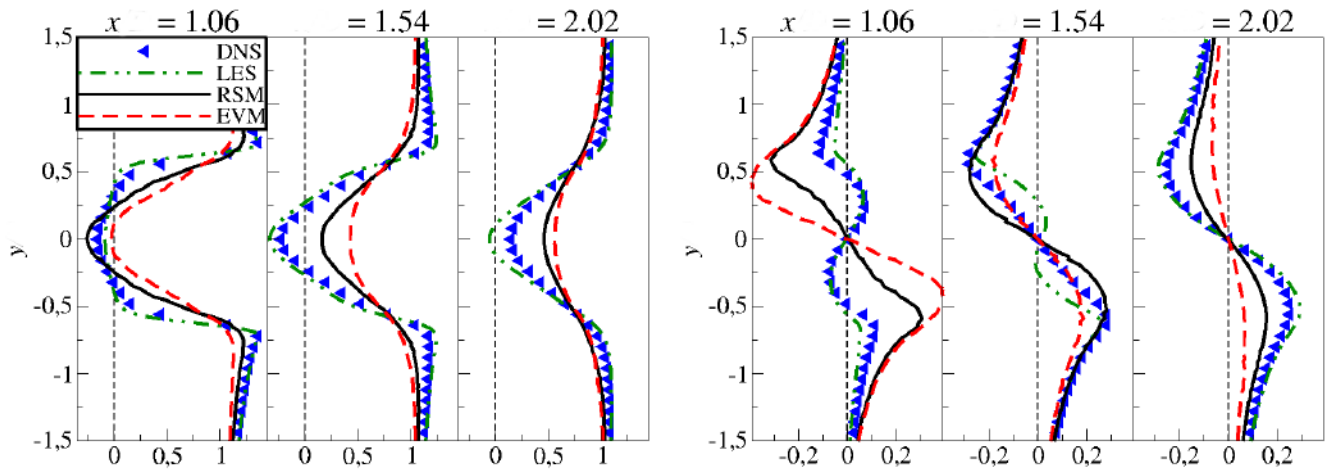


Рисунок 4.13. Профили осредненной по времени продольной (слева) и поперечной (справа) компоненты скорости на разных сечениях от цилиндра при $Re = 3.9 \times 10^3$. Результаты DNS взяты из работы [332]

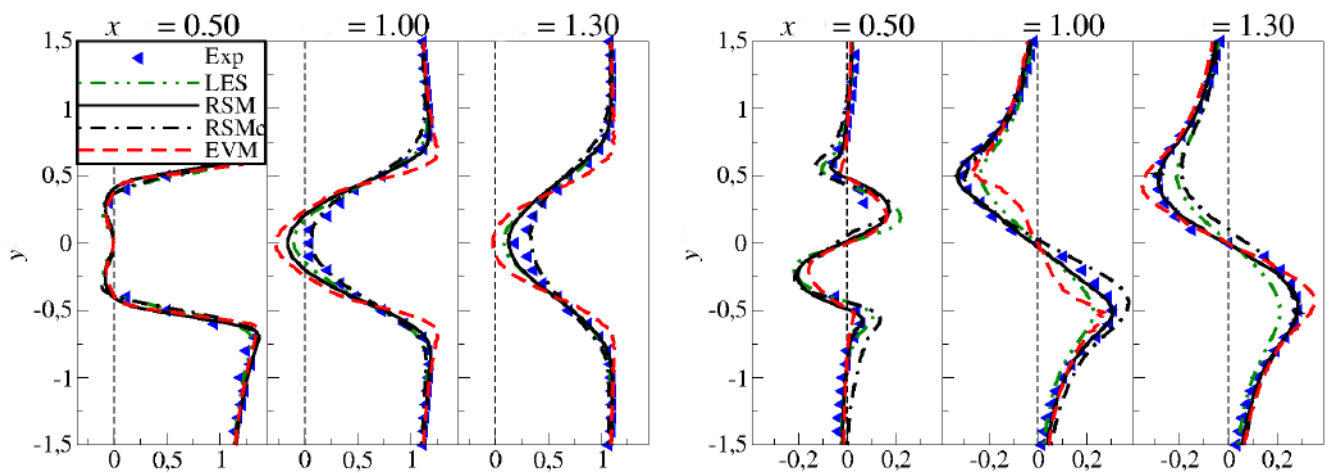


Рисунок 4.14. Профили осредненной по времени продольной (слева) и поперечной (справа) компоненты скорости на разных сечениях от цилиндра при $Re = 1.4 \times 10^5$. Экспериментальные данные взяты из работы [343]

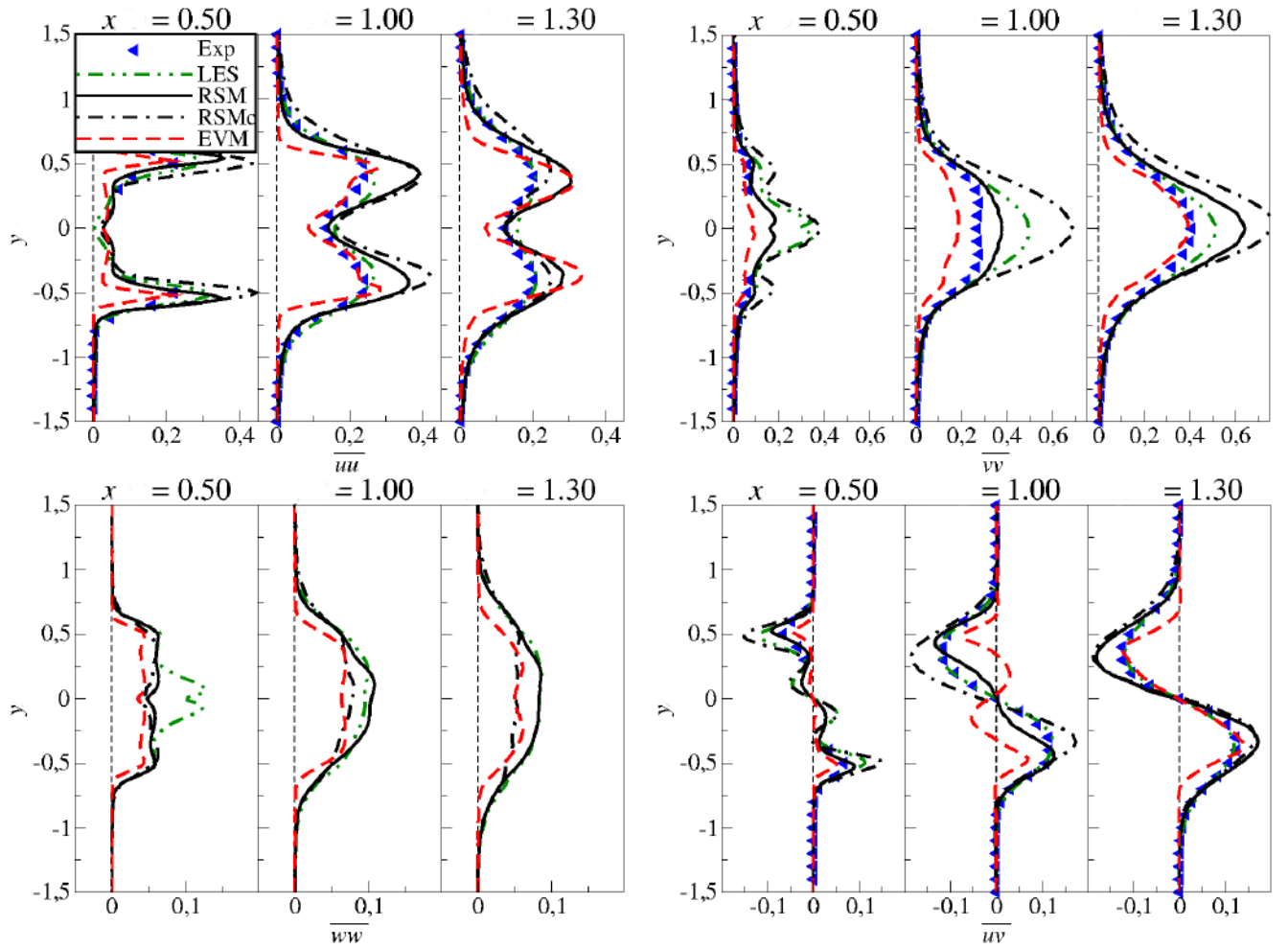


Рисунок 4.15. Профили различных компонент напряжений Рейнольдса ($\overline{u'u'}$, $\overline{v'v'}$, $\overline{w'w'}$, $\overline{u'v'}$) на разных сечениях от цилиндра при $Re = 1.4 \times 10^5$

в сдвиговом слое. Остальные диагональные компоненты тензора напряжений Рейнольдса, полученные из RSM, также хорошо согласуются с результатами LES, кроме относительно узкой области вдоль центральной плоскости $y = 0$. В это же время EVM недопредсказывает уровень диагональных компонент почти во всех рассматриваемых сечениях. Аналогичная ситуация имеется со сдвиговыми напряжениями, которые также лучше предсказаны RSM.

Причины неточного предсказания длины зоны рециркуляции в URANS

Как уже указывалось на рис. 4.12, обе URANS-модели неспособны аккуратно воспроизвести зону рециркуляции при $Re = 3.9 \times 10^3$, однако, при $Re = 1.4 \times 10^5$ результаты имеют достаточно высокую точность, особенно RSM. Для того, чтобы понять причины этого, стоит сперва отметить, что LES при низких числах Рейнольдса предсказывает ламинарно-турбулентный переход в слое смещения гораздо позже, т.е. далеко от точки отрыва, на расстоянии $x \approx 0.45$. Очевидно, что положение места ламинарно-турбулентного перехода существенно

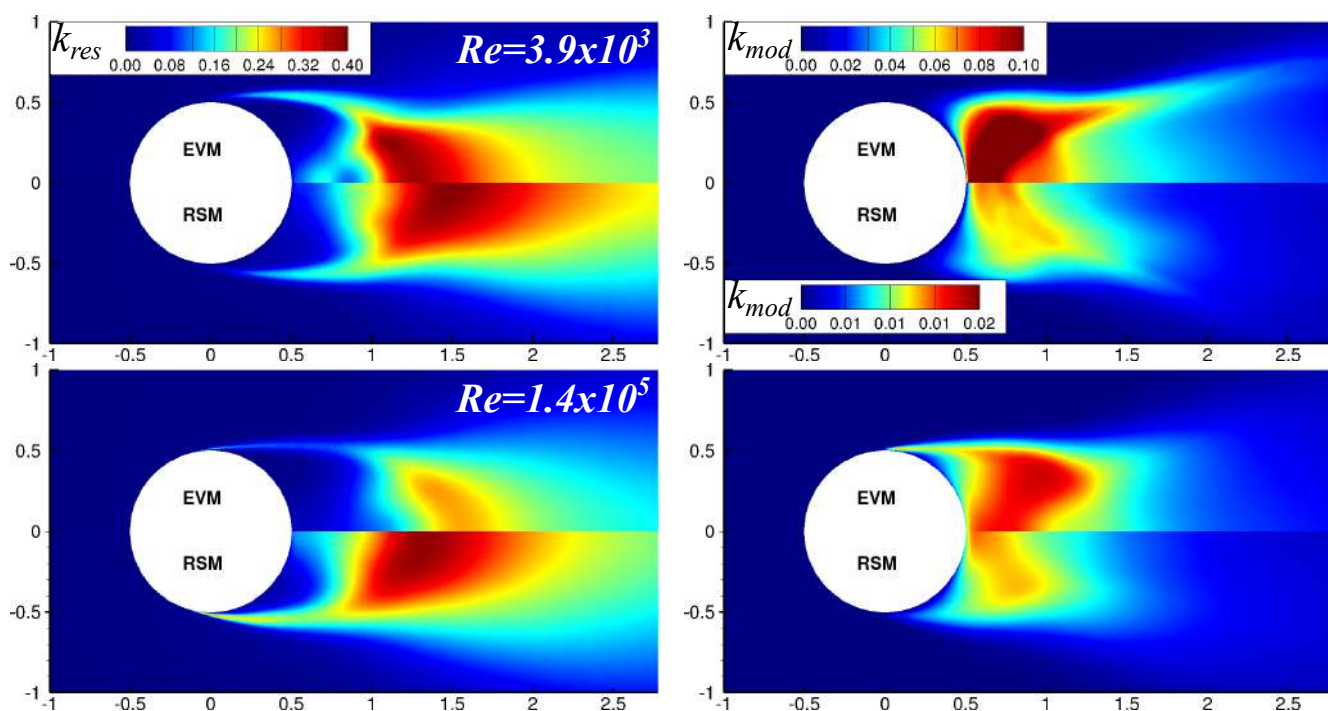


Рисунок 4.16. Сравнение разрешенной (слева) и моделируемой (справа) части турбулентной кинетической энергии, полученной при помощи URANS при $Re = 3.9 \times 10^3$ (сверху) и 1.4×10^5 (снизу)

влияет на полную турбулентную кинетическую энергию (разрешенную и моделируемую), далее влияя на интенсивность перемешивания в слое смешения и на размеры зоны рециркуляции. С другой стороны, турбулизация при высоких числах Рейнольдса происходит сразу же после отрыва потока от стенки цилиндра. Перед тем как начать анализ причины несоответствия области ламинарно-турбулентного перехода, стоит отметить, что точка отрыва предсказывается корректно обеими URANS моделями. В случае низкого числа Рейнольдса отрыв происходит при 89.6 и 92.5 градусах (от лобовой точки) согласно EVM и RSM, соответственно, против 88.0 градусов из LES. Таким образом, мы возвращаемся к анализу турбулентной кинетической энергии, которая предсказывается EVM и RSM. На рис. 4.16 показаны осредненные по времени поля разрешенной (k_{res}) и моделируемой (k_{mod}) части турбулентной кинетической энергии для двух чисел Рейнольдса и двух моделей. В обоих случаях EVM предсказывает более высокий уровень k_{mod} и более низкий уровень k_{res} . Таким образом, логично заключить, что неточное предсказание характеристик потока связано с переоценкой уровня турбулентной кинетической энергии в слое смешения сразу после точки отрыва. На рис. 4.17 показаны профили турбулентной кинетической энергии около стенки цилиндра при $Re = 3.9 \times 10^3$. По сравнению с LES, обе URANS-модели предсказывают ламинарно-турбулентный переход слишком рано сразу же после отрыва. На рис. 4.16 было показано, что

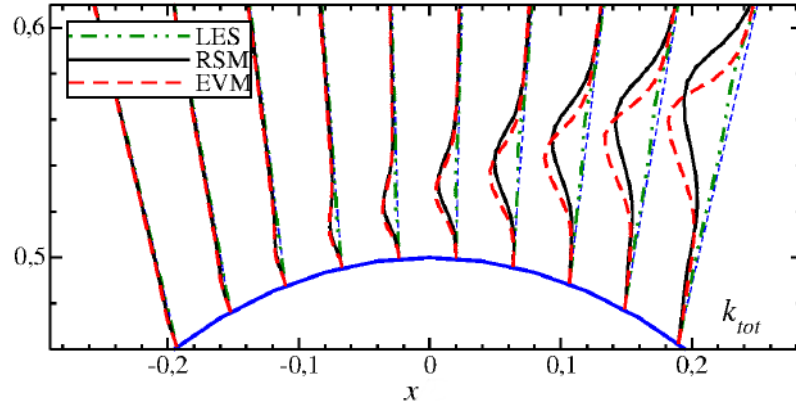


Рисунок 4.17. Радиальные профили полной турбулентной кинетической энергии в начальном слое смешения при $Re = 3.9 \times 10^3$

уровень k_{mod} в этой области незначителен. Это значит, что турбулизация определяется численным разрешением, которое является слишком грубым для предсказания такого тонкого процесса как ламинарно-турбулентный переход. На рис. 4.17 показано, что разница в результатах между RSM и EVM проявляется только после $x = 0.0$, где моделируемая часть начинает быть существенной.

Для того, чтобы понять влияние напряжений Рейнольдса на поле скорости, рассмотрим вертикальную компоненту осредненного по времени уравнения Навье – Стокса:

$$\underbrace{\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}}_{\text{конв.}} = \underbrace{-\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}}_{\text{давл.}} + \underbrace{\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2}}_{\text{вязк. напр.}} - \underbrace{\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y}}_{\text{турб. напр.}}. \quad (4.14)$$

Сумма сил, соответствующих $\overline{u'v'}$ и $\overline{v'v'}$, компенсируется конвекцией и давлением, поскольку вязкими силами, очевидно, можно пренебречь из-за достаточно высоких чисел Рейнольдса. Таким образом, переоценка напряжений Рейнольдса приводит к более интенсивному вертикальному движению в области рециркуляции. Это приводит к дальнейшему возрастанию пульсаций, что в свою очередь увеличивает производство турбулентной кинетической энергии через слагаемое $-\overline{v'v'} \cdot \partial \bar{v} / \partial y$, что в конечном итоге приводит к уменьшению области возвратного течения.

На левом рис. 4.18 показаны поперечные профили основных слагаемых уравнения (4.14) при $x = 1.06$ для $Re = 3.9 \times 10^3$, полученных из EVM, LES на “грубой” сетке, которая используется для URANS (обозначен как LESc), и непосредственно LES. Видно, что EVM и LESc дают схожие результаты, при которых вклад напряжений Рейнольдса переоценен. Как следствие это приводит к переоценке вклада конвекции и градиента давления. Схожие проблемы, появляющиеся в результатах URANS и LESc при низких числах Рейнольдса, подтвер-

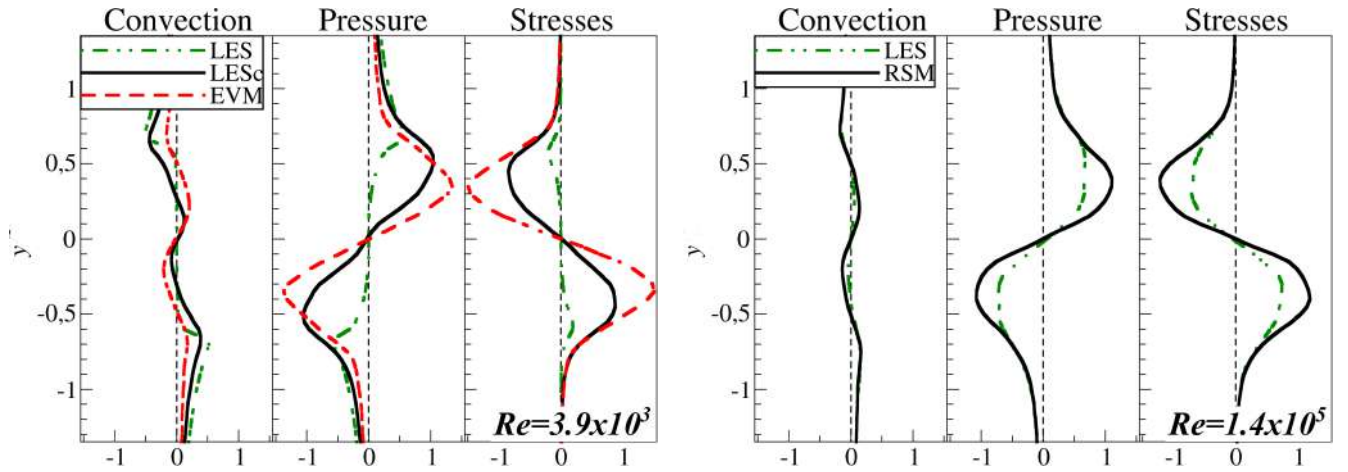


Рисунок 4.18. Различные слагаемые поперечной компоненты уравнения Рейнольдса для позиции $x = 1.06$ при $Re = 3.9 \times 10^3$ (слева) и $x = 1.0$ при $Re = 1.4 \times 10^5$ (справа)

ждают, что недостаточное пространственное разрешение области ламинарно-турбулентного перехода приводит к нефизической переоценке уровня турбулентных пульсаций. Для того, чтобы выявить влияние моделируемой части турбулентной кинетической энергии, был проведен численный расчет при помощи EVM в стационарной постановке задачи. Технически это можно реализовать, если задать в расчете очень большой шаг по времени. Таким образом, в стационарном решении периодические пульсации отсутствуют. Полную турбулентную кинетическую энергию составляет исключительно моделируемая часть. В результате стационарного EVM расчета длина зоны рециркуляции превышает в два раза результаты LES из-за недостаточного уровня турбулентной кинетической энергии. На правом рис. 4.18 показаны аналогичные поперечные профили основных слагаемых уравнения (4.14) при $x = 1.0$ для $Re = 1.4 \times 10^5$, полученных из RSM и LES, которые показывают достаточно хорошее согласие.

На рис. 4.19 показаны радиальные профили турбулентной кинетической энергии (k_{res} , k_{mod} и k_{tot}) и осредненной по времени тангенциальной компоненты скорости из URANS и LES для $Re = 1.4 \times 10^5$ в окрестности точки отрыва. В отличие от низких чисел Рейнольдса, при которых расчеты на относительно грубых сетках не могут достоверно предсказать область ламинарно-турбулентного перехода, турбулизация при высоких числах Рейнольдса происходит сразу после точки отрыва и, таким образом, предсказывается достаточно достоверно обеими моделями. Видно, что уровень k_{mod} значительно выше для EVM по сравнению с RSM. Это является следствием безусловно положительной величины производства турбулентной кинетической энергии при использовании гипотезы Буссинеска в случае EVM, как уже отмечалось прежде. Высокий уровень k_{mod} подавляет развитие пульсаций скорости, которые

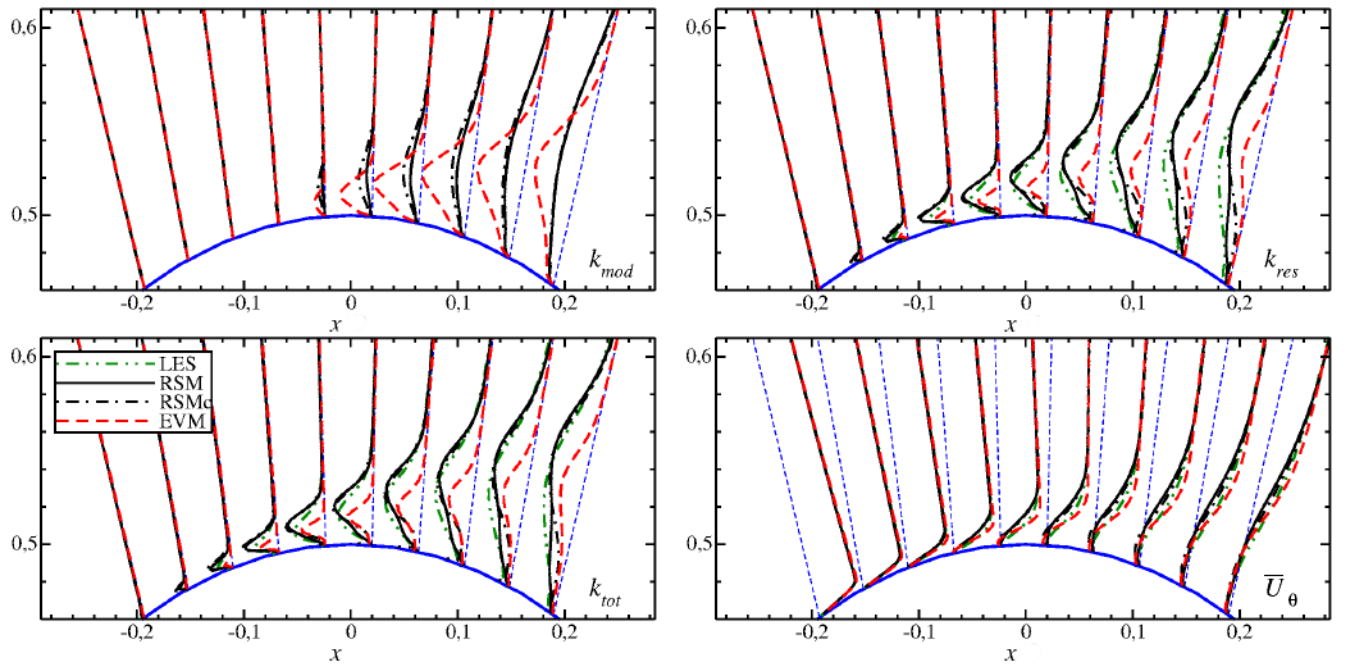


Рисунок 4.19. Радиальные профили моделируемой (k_{mod}), разрешаемой (k_{res}) и полной (k_{tot}) турбулентной кинетической энергии в начальном слое смешения при $Re = 1.4 \times 10^5$. Кроме того показано осредненное по времени поле тангенциальной скорости

развиваются на начальном участке слоя смешения после отрыва благодаря неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. Это снижает уровень k_{res} в случае EVM по сравнению с RSM, что также показано на рис. 4.19. Недостаток k_{res} не может быть компенсирован моделируемой частью турбулентной кинетической энергии из-за ее сравнительной малости. Как следствие EVM недопредсказывает уровень k_{tot} в слое смешения и в области рециркуляционной зоны, рис. 4.15, в то время как RSM хорошо согласуется с результатами LES.

Динамические характеристики, описываемые URANS

На рис. 4.20 показаны характерные вихревые структуры при $Re = 1.4 \times 10^5$, полученные из URANS и LES и визуализированные при помощи изоповерхности Q -критерия. Все рисунки демонстрируют схожие крупномасштабные структуры, но имеют различную детализацию вихрей малых масштабов. Как и ожидалось, URANS разрешает гораздо меньше мелкомасштабных вихрей, чем LES. Однако, существуют некоторые отличия в количестве и размере идентифицированных вихревых структур, полученных при помощи двух URANS-моделей. Видно, что RSM разрешает большую часть спектра пульсаций по сравнению с EVM, включая некоторые мелкомасштабные вихри. Несмотря на то, что это справедливо для обоих чисел Рейнольдса, более существенное отличие проявляется при $Re = 3.9 \times 10^3$ (не показано здесь). На рис. 4.20 также показаны результаты LES, отфильтрованные по пространству,

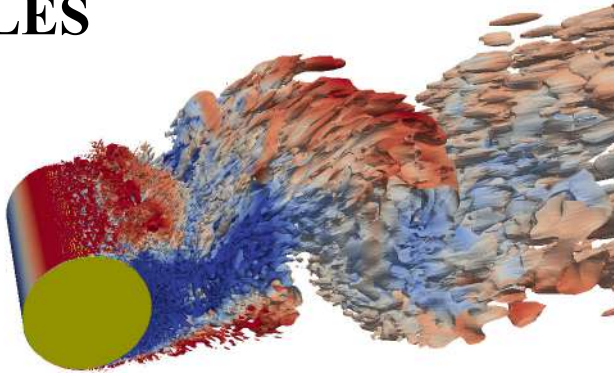
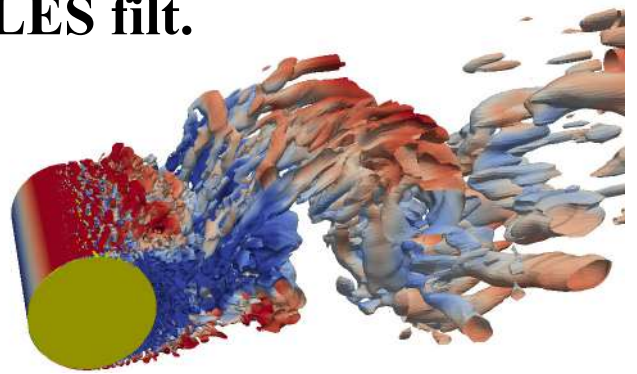
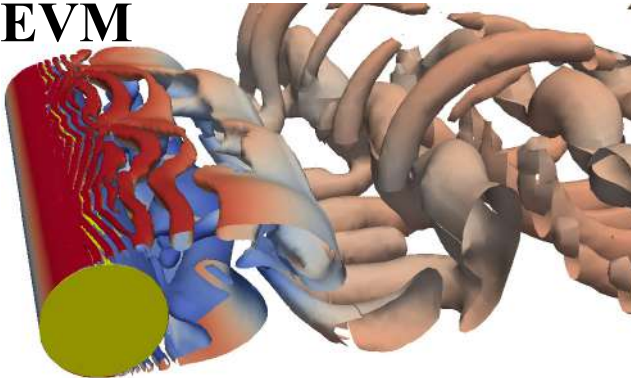
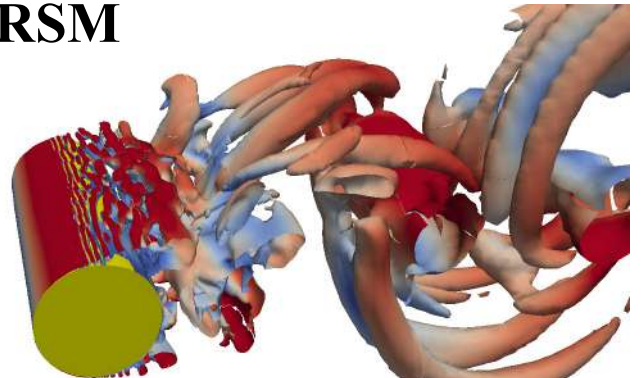
LES**LES filt.****EVM****RSM**

Рисунок 4.20. Сравнение вихревых структур, визуализированных при помощи изоповерхности $Q = 0.5$ из расчетов LES, EVM и RSM при $Re = 1.4 \times 10^5$ и окрашенных в поле продольной компоненты скорости

для того, чтобы избавиться от мелкомасштабной турбулентности и показать хорошее сходство крупномасштабных вихревых структур между LES и RSM.

В отрывных течениях зачастую реализуются относительно низкочастотные периодические пульсации. Недавно Лемкюхл и др. [332] зафиксировали присутствие двух состояний рециркуляционной зоны при $Re = 3.9 \times 10^3$, которые сменяют друг друга с низкой частотой, соответствующей числу Струхала $St = 0.0064$. В текущем LES было также зафиксировано подобное квазипериодическое движение с $St = 0.0072$, при этом только результаты RSM смогли воспроизвести в некоторой мере это явление. На рис. 4.21 показано изменение во времени коэффициента сопротивления (C_D) и подъемной силы (C_L), а также спектр пульсаций поперечной компоненты скорости, рассчитанный в слое смещения из LES и URANS для $Re = 3.9 \times 10^3$. Амплитуда колебаний сигнала C_D и C_L сильно переоценивается в результатах URANS. В то время как сигнал, соответствующий результатам EVM, имеет периодический синусоидальный вид, сигнал RSM очень похож на LES с некоторыми стохастическими пульсациями, но чрезвычайно большой амплитудой. Низкочастотные модуляции отчетливо видны на сигнале C_L из RSM, в то время как EVM не описывает подобное явление. Эти закономерности отображаются и на спектрах пульсаций скорости. Спектр RSM похож на

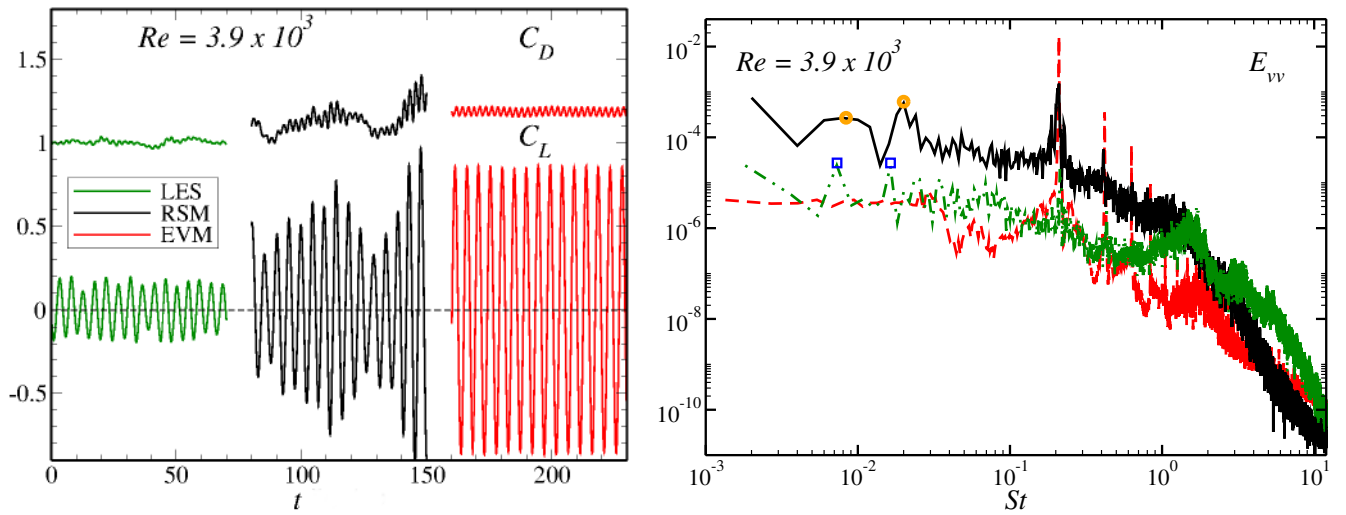


Рисунок 4.21. Слева: изменение C_D и C_L со временем из расчетов LES, RSM и EVM при $Re = 3.9 \times 10^3$. Справа: спектр вертикальной компоненты пульсаций скорости в точке $x = 0.71$ и $y = 0.66$

спектр сигнала, полученного из LES, в то время как на спектре EVM видны характерные дискретные пики, что свойственно для периодического сигнала. Результаты LES демонстрируют относительно узкий пик, соответствующий частоте схода вихрей с $St_{vs} = 0.218$, и более широкий пик с $St_{KH} = 1.44$, что соответствует возмущениям, вызванным неустойчивостью Кельвина–Гельмгольца. На спектре LES помимо $St = 0.0072$ можно также различить удвоенную частоту $St = 0.162$, которая также присутствует в DNS-данных Лемкюхла и др. [332]. RSM в некотором приближении воспроизводит оба пика.

На рис. 4.22 также показана эволюция C_D и C_L , а также спектр пульсаций скорости только для $Re = 1.4 \times 10^5$. Увеличение числа Рейнольдса естественным образом привело к более турбулентному сигналу C_D и C_L даже для EVM, результаты которого тем не менее все равно не сходятся с LES. Основная частота сноса вихрей из RSM и EVM равна $St_{vs} = 0.217$, которая легко различима на спектре пульсаций поперечной компоненты скорости. Для этого числа Рейнольдса можно также различить выделенную частоту $St = 0.018$ и удвоенную $St = 0.037$. Для высокого числа Рейнольдса низкочастотные пики имеют большее значение по сравнению с малыми Re , поскольку зона рециркуляции становится короче, что и увеличивает частоту ее пульсаций. Обе модели предсказывают низкочастотные модуляции турбулентного сигнала, наблюдаемые в LES. Однако, RSM предсказывает явный пик на частоте, соответствующей $St = 0.026$, в то время как EVM демонстрирует что-то слабовыраженное на $St = 0.0132$.

В завершение анализа рассмотрим динамику точки отрыва на поверхности цилиндра.

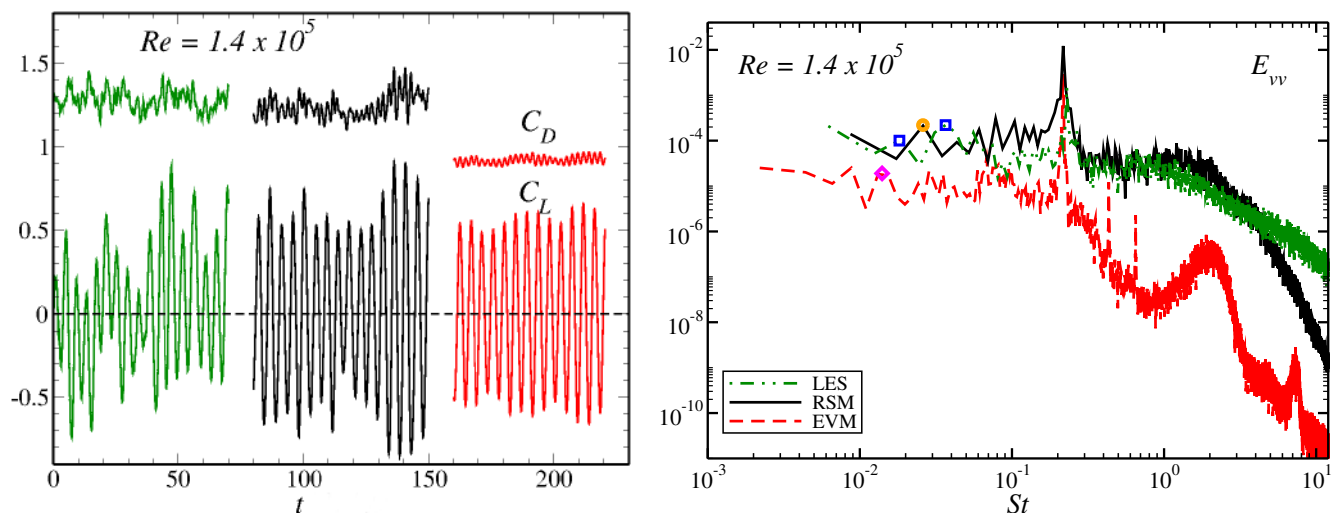


Рисунок 4.22. Коэффициенты C_D и C_L , а также спектр пульсаций вертикальной компоненты скорости при $Re = 1.4 \times 10^5$, аналогично рис. 4.21

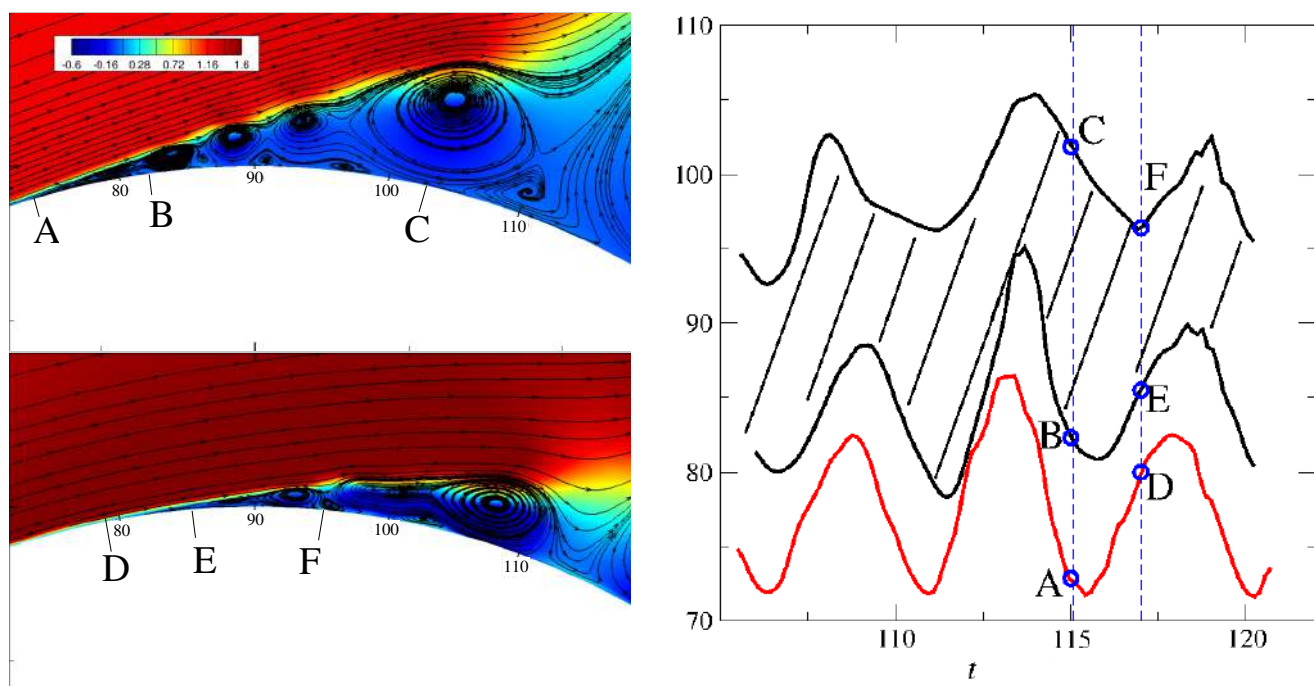


Рисунок 4.23. Слева: два мгновенных поля продольной компоненты скорости, демонстрирующих пристенную область, где происходит отрыв. Справа: динамика точек отрыва/присоединения на стенке цилиндра при $Re = 1.4 \times 10^5$ из RSM. Красная линия обозначает первую точку отрыва, заштрихованная область соответствует множественным отрывам/присоединениям, индуцированным пристенными вихрями Кельвина – Гельмгольца

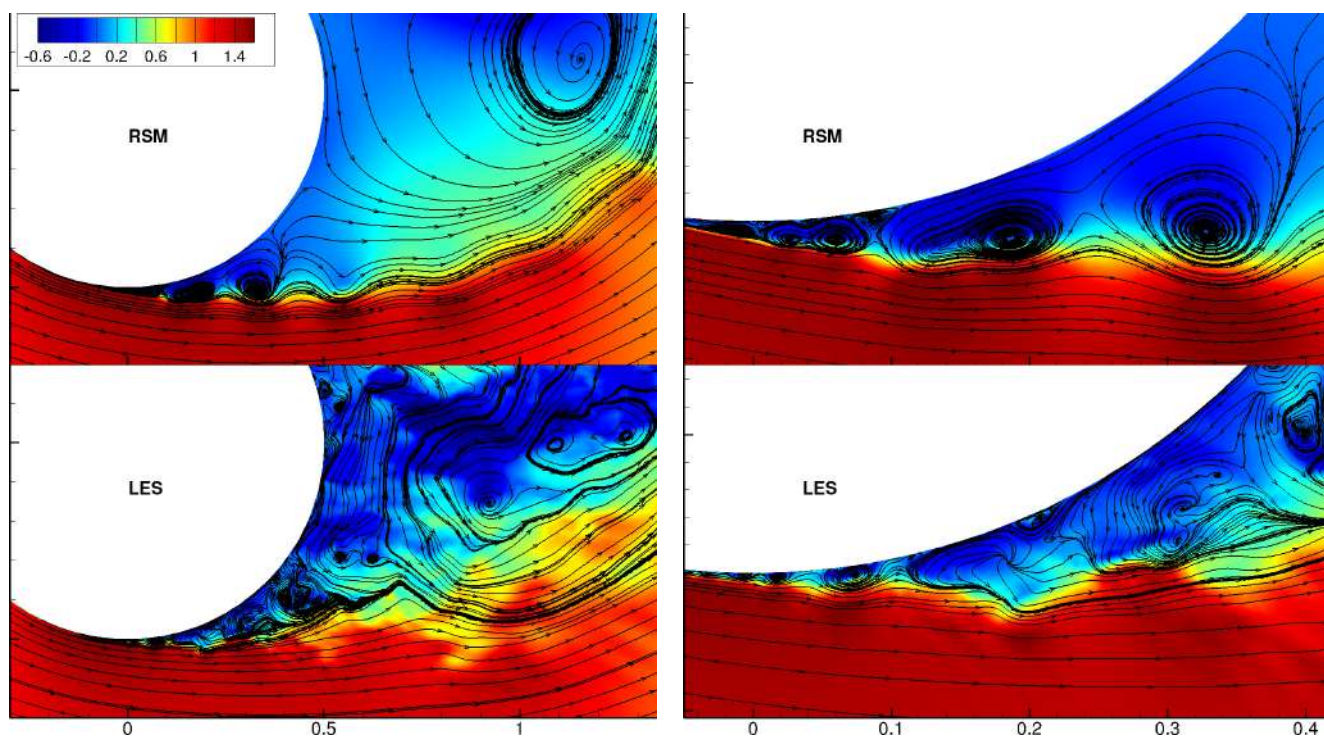


Рисунок 4.24. Мгновенные поля продольной компоненты скорости из LES и RSM при фиксированном значении фазы (по коэффициенту подъемной силы C_L)

Как сказано в предыдущей секции, аккуратное предсказание поведения потока в этой области крайне важно для точного определения длины рециркуляционной зоны. Отрыв происходит в ламинарном пограничном слое, в котором зарождаются вихревые структуры вследствие развития неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, рис. 4.23. Эти вихревые структуры взаимодействуют с поверхностью цилиндра, что приводит к появлению множественных отрывов и присоединений потока. RSM описывает основные явления, такие как формирование вихрей и их взаимодействие со стенкой. На рис. 4.23 также показано изменение угла точки отрыва со временем в некоторой плоскости $x - y$. Красной линией показана динамика первой точки отрыва, которая пульсирует с частотой St_{vs} , в то время как штрихованная область соответствует дальнейшим присоединениям потока и вторичным отрывам. На рис. 4.24 показаны поля мгновенной продольной компоненты скорости и линии тока как раз в области отрыва. Результаты, похожие на LES, воспроизводятся только с RSM, в то время как EVM является слишком диссипативной и подавляет мелкомасштабные вихри. Для задач обтекания кажется необходимым, чтобы модель была способна воспроизводить эти явления после точки отрыва и учитывать анизотропию около стенки, что возможно с RSM.

Предсказание ламинарно-турбулентного перехода при помощи URANS

Проведенный анализ показал, что для того, чтобы получить достаточно аккуратные результаты, URANS-расчету необходимо достаточно точно определить позицию ламинарно-турбулентного перехода, а также скорость роста турбулентной кинетической энергии в слое смешения после отрыва. Как известно, ни одна RANS-модель не способна предсказать этот переход и все его стадии в безотрывном потоке без наличия внешних возмущений или турбулентных пульсаций на входе. Однако, в отличие от стандартных EVM-моделей, использованная здесь RSM-модель воспроизводит некоторые случаи без дополнительных вмешательств [352]. Удачный случай применения этой модели в данном потоке можно обосновать получаемой в модели низкими значениями турбулентной вязкости, что позволяет рассчитывать начальную стадию турбулизации слоя смешения после отрыва с достаточной степенью точности. Это явно видно на рис. 4.23 и 4.24, демонстрирующих развитие неустойчивости в слое смешения. Очевидно, что численное разрешение играет центральную роль в задаче определения положения точки отрыва и последующей турбулизации. До и сразу после точки отрыва поток является ламинарным, и поле турбулентной кинетической энергии равно нулю. Мгновенное поле скорости, полученное из RSM, имеет сильное сходство с LES-расчетом, подтверждая утверждение о том, что достаточно чувствительная RSM-модель, которая восприимчива к гидродинамическим возмущениям, может с успехом быть использована для описания переходных процессов, вызванных крупномасштабным ламинарным отрывом потока при докритических Re .

Ограничения URANS как вихреразрешающего метода

Полученные в данной главе результаты указывают на то, что несмотря на концептуальные проблемы, некоторые URANS-модели (EVM и RSM) могут быть использованы как вихреразрешающие методы, если целью является описание низкочастотного движения в потоке. Некоторую проблему, однако, представляет собой интерпретация полученных результатов. Далее мы обсудим потенциал и некоторые ограничения URANS-подхода по сравнению с LES. Стоит сперва отметить, что в обоих подходах численно решаются одни и те же уравнения, т.к. компьютер не “знает” о различиях между пространственной фильтрацией и условным осреднением. Вся разница состоит в способе моделирования неразрешенных напряжений. Значение моделируемой части (турбулентной вязкости) существенно отличается в подходах LES и URANS, однако, оно также отличается, как было показано выше, и между различными URANS-моделями (EVM и RSM). Чем меньше турбулентная вязкость, тем

более чувствительной является модель к гидродинамическим возмущениям, что повышает шансы получить более реалистические результаты. Этот известный факт вдохновил на создание множества подходов, таких как Масштабно-адаптивные вычисления (Scale-adaptive simulations, SAS) [353], расчеты частично-осредненных уравнений Навье – Стокса (Partially-averaged Navier – Stokes, PANS) [354] и других, все из которых используют известные RANS-модели, стараясь при этом уменьшить значение турбулентной вязкости. Также как и URANS, ни один из этих подходов не может рассматриваться как систематический вихреразрешающий метод. Результат таких расчетов заранее не ясен и зависит от конкретной конфигурации течения и прочих факторов. В этом отношении URANS, конечно, не может соперничать с LES. Чего, однако, не хватает, так это практических указаний для границ применимости URANS и выборе соответствующей модели. Эта проблема, к примеру, может быть исследована в потоке с контролируемой степенью крупномасштабной нестационарности.

Стоит обсудить еще раз основные различия между URANS и LES. Во-первых, значение вклада моделируемой части почти всегда связано с локальной величиной дискретизационной сетки, в то время как в URANS – не связано. Таким образом, вихревое движение в LES-расчете чувствительно к сеточному разрешению, а в URANS оно контролируется уровнем турбулентной вязкости. Во-вторых, при серии последовательных расчетов задачи на более подробной вычислительной сетке, LES-результаты должны сходиться к DNS (точному решению), в то время как независящее от разрешения URANS-решение все равно имеет ненулевое значение напряжений Рейнольдса. RANS-модель, в которой напряжения Рейнольдса будут уменьшаться при увеличении пространственного разрешения, должна сходиться к DNS-результатам. Таким образом, сходимость результатов расчетов модели к DNS является основным критерием для систематического вихреразрешающего метода, в таком случае, ни одна URANS-модель (а также методы типа SAS, PANS, PITM и прочих) не удовлетворяет этому требованию. Однако, эти подходы, включая стандартный URANS, являются полезными для практических приложений.

Если касаться более фундаментальных вопросов, стоит отметить, что операция фильтрации в LES является неявной, что означает, что реальный оператор никогда не известен. Тем не менее, LES может рассматриваться как систематический вихреразрешающий метод, результатам которого стоит, однако, доверять только после сравнения численного решения и экспериментальных данных (или DNS), а также оценки величины вклада подсеточных напряжений. При достаточно хорошем пространственном разрешении моделируемые подсеточные напряжения редко учитываются, потому что имеют малое значение, как, например, в данной работе. Однако, явная связь LES-решения с точным не известна. С другой стороны, RANS-

уравнения получаются после применения осреднения по ансамблю, которое на практике не доступно. В случае квазипериодических течений можно математически определить операцию условного осреднения, аккуратное применение которого к уравнениям Навье – Стокса помимо напряжений Рейнольдса, дает также другие незамкнутые слагаемые. В данной работе при помощи LES были рассчитаны напряжения Леонарда, а также смешанные корреляции, которые при высоких числах Рейнольдса оказались малы по сравнению с напряжениями Рейнольдса. Если в стандартных URANS-уравнениях рассматривается условное осреднение, то фильтрация по времени будет приводить к нелокальности операции осреднения, при этом очевидно, что решение таких уравнений не может иметь пульсационную компоненту. Как и в LES, оператор осреднения в URANS является неизвестной функцией пространства и времени $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t')$, но в отличие от LES его ширина контролируется значением турбулентной вязкости, а не размером вычислительной сетки.

4.3. Выводы по главе

Численно исследована задача обтекания длинного цилиндра поперечным однородным потоком жидкости в докритическом режиме течения с ламинарным отрывом пограничного слоя при $Re = 3900$ и 1.4×10^5 . При помощи условного осреднения получены уравнения URANS, в которых помимо напряжений Рейнольдса, появляются также напряжения Леонарда и смешанные корреляции когерентных и стохастических флуктуаций. На основе LES впервые показано, что смешанные корреляции становятся пренебрежимо малы только при относительно высоких числах Рейнольдса. Проанализирована справедливость гипотезы Буссинеска и показано, что главный собственный вектор бесследовой части напряжений Рейнольдса с хорошей точностью сонаправлен с аналогичным вектором тензора скоростей деформации только при относительно высоких числах Рейнольдса.

Проведены расчеты течения при $Re = 3900$ и 1.4×10^5 , используя метод URANS и линейную модель $\zeta - f$, основанную на гипотезе турбулентной вязкости (Eddy-viscosity model, EVM), а также модель Ханъялича-Якирлича второго порядка замыкания (Reynolds-stress model, RSM). Показано, что обе модели неспособны аккуратно описать статистические характеристики потока и, в частности, воспроизвести длину зоны рециркуляции при $Re = 3900$, однако, при $Re = 1.4 \times 10^5$ результаты имеют достаточно высокую точность, особенно для RSM. Выявлено, что при высоких числах Рейнольдса обе модели хорошо предсказывают динамические характеристики в широком частотном диапазоне, включая низкочастотные модуляции турбулентного сигнала, наблюдаемые в LES. Проанализированы концептуальные

ограничения URANS как вихреразрешающего метода.

Вторичные течения в квазидвумерных струйных и отрывных потоках

5.1. Введение

Как было показано в предыдущих главах, организованные вихревые образования, имеющиеся в турбулентном слое смешения, существенно влияют на статистические характеристики потока. Возможно выделить отдельный класс когерентных структур, который проявляется в задачах обтекания и струйных течениях между двух параллельных плоскостей. Такие течения обычно называют квазидвумерными, поскольку поперечные и продольные характерные размеры сильно превышают расстояние между узкими стенками [355–357]. Эти конфигурации широко представлены в практических приложениях, однако, стоит особенно отметить красоту явлений, встречающихся именно в природе, см. рис. 5.1, где реализуется вихревая дорожка Кармана.

В струях схожая вихревая конфигурация проявляется вследствие меандрирования потока [358–362] из-за гидродинамической неустойчивости профиля скорости к синусоидальным возмущениям [363]. Синусоидальное движение ядра потока создает крупномасштабные противовращающиеся вихревые структуры, располагающиеся в слоях смешения в шахматном порядке. Согласно Лэнделу и др. (2012) [361] эти квазидвумерные вихри распространяются в струе вниз по потоку со скоростью примерно в четыре раза меньше осевой. Такой режим течения существует до тех пор, пока трение о стенки канала не снизит импульс потока до определенного значения, приводя к ламинаризации.

Ближняя область ограниченного струйного течения характеризуется наличием сильных трехмерных течений из-за взаимодействия слоев смешения и стенок [364, 365]. Поскольку вниз по течению происходит заметное уменьшение пульсаций компоненты скорости, перпендикулярной стенке, в литературе обычно высказывают мнение, что движение далеко от источника является двумерным [358, 359]. Стандартным подходом для моделирования квазидвумерных течений является осреднение в вертикальном направлении, что приводит к появлению дополнительного слагаемого – так называемого трения Рэлея (линейного трения) – в двумерных уравнениях Навье–Стокса [366]. Однако, возможные трехмерные течения искажают профиль скорости типа Пуазейля, что ставит под вопрос использование интегрального подхода [367].

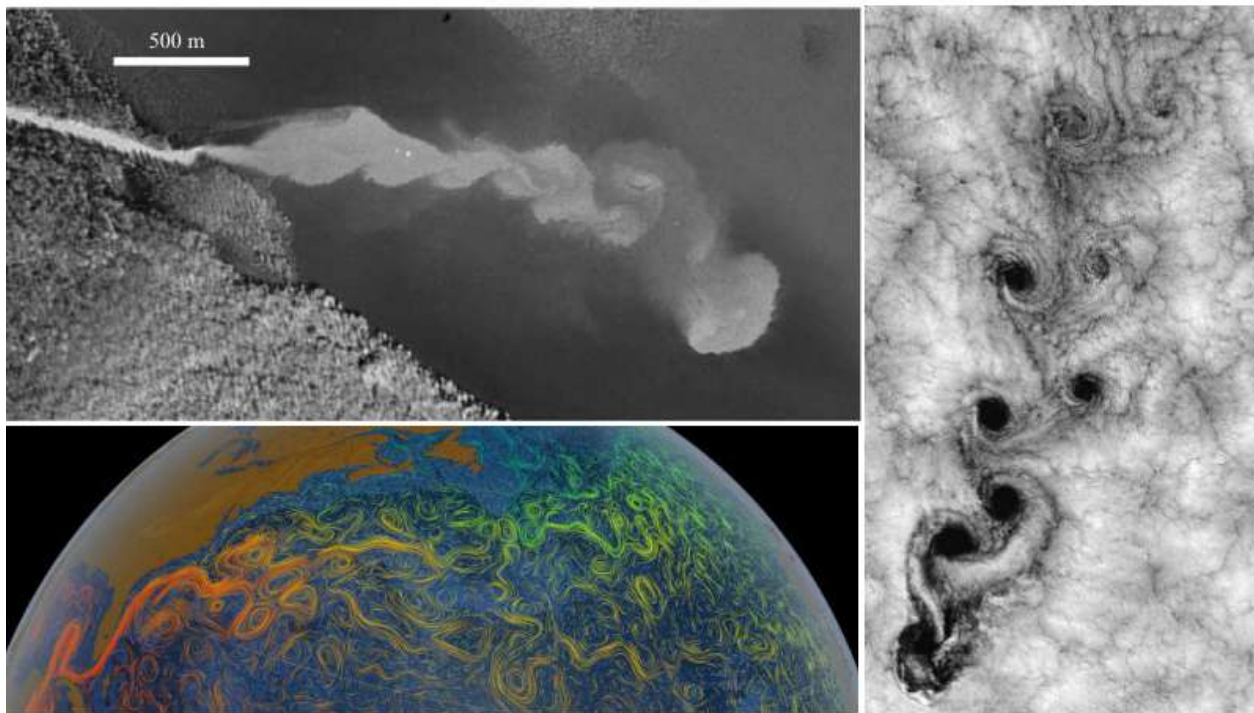


Рисунок 5.1. Сверху слева показано течение реки, впадающее в озеро, соединенное с Нижней Миссисипи около города Батон-Руж, США. Рисунок взят из работы [368]. На правом рисунке показан спутниковый снимок облаков, которые двигаются мимо острова Александр-Селькирк, расположенного рядом с Чили в Тихом океане на высоте около 1 км. Ссылка на фотографию: https://eoimages.gsfc.nasa.gov/images/imagerecords/0/625/vortex_lg.jpg. Нижний левый рисунок, также опубликованный агенством NASA, демонстрирует мгновенные линии тока жидкости на поверхности океана, окрашенные в поле температуры. Ссылка на фотографию: https://svs.gsfc.nasa.gov/vis/a000000/a003900/a003913/smd_hyperwall_gulf_sst14.27000_print.jpg

Аналогичная ситуация реализуется в следе за телом обтекания, с кромок которого срываются крупномасштабные вихри, приводя к меандрирующему течению. Кроме того, в области стыка тела обтекания и параллельных течению стенок образуется система крупномасштабных вихрей в виде “подковы”, так называемые подковообразные вихри. Такие вихревые образования оказывают существенное влияние на поток, определяя локальный сдвиг, теплоперенос, акустический шум, коэффициенты сопротивления и подъемной силы, действующей на тело обтекания, эрозию материала в носовой части препятствия и прочее [369]. В связи с этим в литературе активно исследуются различные методы управления характеристиками подобных турбулентных течений [370, 371]. Особо нужно выделить задачу о взаимодействии пограничного слоя на теле обтекания и подковообразных вихрей, которые проявляют существенную нестационарность и турбулизируются в следе [372, 373].

Влияние (вертикального) направления поперек узких стенок на трехмерные течения обычно исследуются в контексте ограниченных течений проводящей жидкости в присутствии магнитного поля [374–379] и эволюции дипольного вихря [367, 380–384]. В недавних экспериментах Ксии и др. (2011) [378] исследовалось взаимодействие крупномасштабного горизонтального (квазидвумерного) вихря и мелкомасштабного трехмерного турбулентного движения. Последнее подавляется, что приводит к формированию так называемого обратного каскада турбулентной кинетической энергии (от малых масштабов к крупным), реализующегося в двумерном турбулентном потоке [385]. В случае с импульсным дипольным вихрем, на его передней кромке организуется достаточно сильная циркуляция жидкости в вертикальном направлении [367, 380–383]. Однако, насколько нам известно, еще не было проведено систематического исследования трехмерных течений в пространственно развивающихся целевых потоках, что и является целью данной работы. В этой главе используется метод крупных вихрей для изучения когерентных вихревых структур в ограниченных струях и следах. Основной акцент в работе делается на исследование вторичных течений между параллельными узкими стенками и их эволюции вниз по течению.

5.2. Квазидвумерная струя

¹Рассматривается квазидвумерная турбулентная струя в прямоугольной области с размерами $D \times H \times L$ ($x \times y \times z$), где D ($= 200H$) и L ($= 267H$) много больше, чем расстояние между узкими стенками H , рис. 5.2. Размер области взят в соответствие с экспериментами Шестакова и др. (2015) [362], которые проводятся в Институте теплофизики СО РАН. Ко-

¹ См. работы [10,13,14,19,36,38] в разделе “Публикации по теме диссертации”

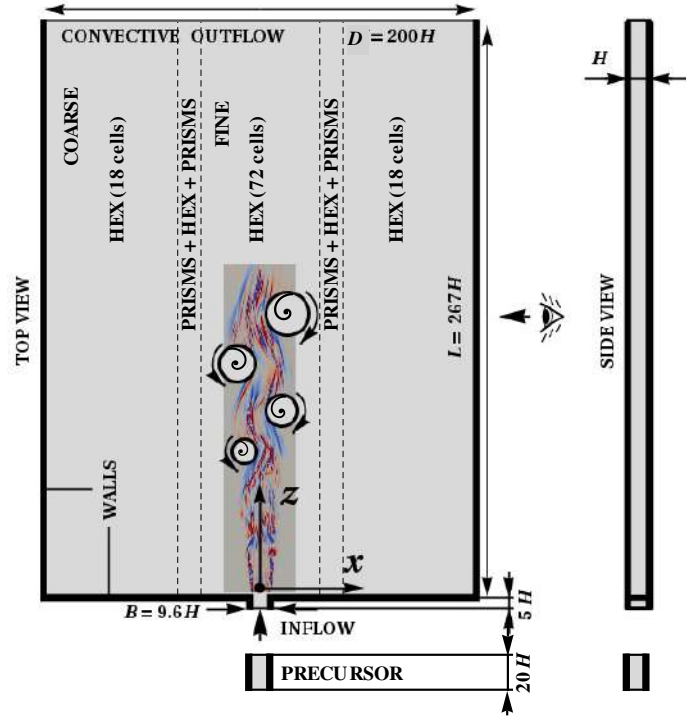


Рисунок 5.2. Схема расчетной области. Система координат располагается на кромке сопла. Узкие параллельные стенки имеют координату $y = 0$ и $y = H$

роткий подводящий канал длины $5H$ имеет прямоугольное сечение $B \times H$, где $B = 9.6H$. Число Рейнольдса потока, построенное по среднерасходной скорости в подводящем канале и расстоянию между узкими стенками H , равно 10^4 . Области подводящего канала соответствует расчетная сетка из $N_x \times N_y \times N_z = 142 \times 72 \times 25$ прямоугольных (гексаэдральных) ячеек в поперечном (x), нормальном к стенке (y) и продольном (z) направлении, соответственно. Нестационарный входной профиль скорости берется из предварительного LES-расчета полностью развитого турбулентного потока в прямоугольном канале размерами $B \times H \times 20H$ с периодическими граничными условиями вдоль z , которому соответствует расчетная сетка из $N_x \times N_y \times N_z = 142 \times 72 \times 100$ ячеек. В областях $27 < |x|/H < 33$ использовались два слоя ячеек формы треугольной призмы и один слой прямоугольных ячеек между призмами для того, чтобы уменьшить количество ячеек в y и z направлении по краям большого объема. Это позволило использовать 18 ячеек вместо 72 по y и 350 ячеек вместо 720 по z . Окончательная расчётная сетка содержала 23.74×10^6 элементов. Конвективное граничное условие использовалось на выходе из области, в то время как условие прилипания удовлетворялось на стенках. Существенное сгущение расчётной сетки проведено около стенок, при этом соседние ячейки не отличаются по размерам более, чем на 5%.

Для того, чтобы проверить сеточную сходимость полученного LES-расчета мы срав-

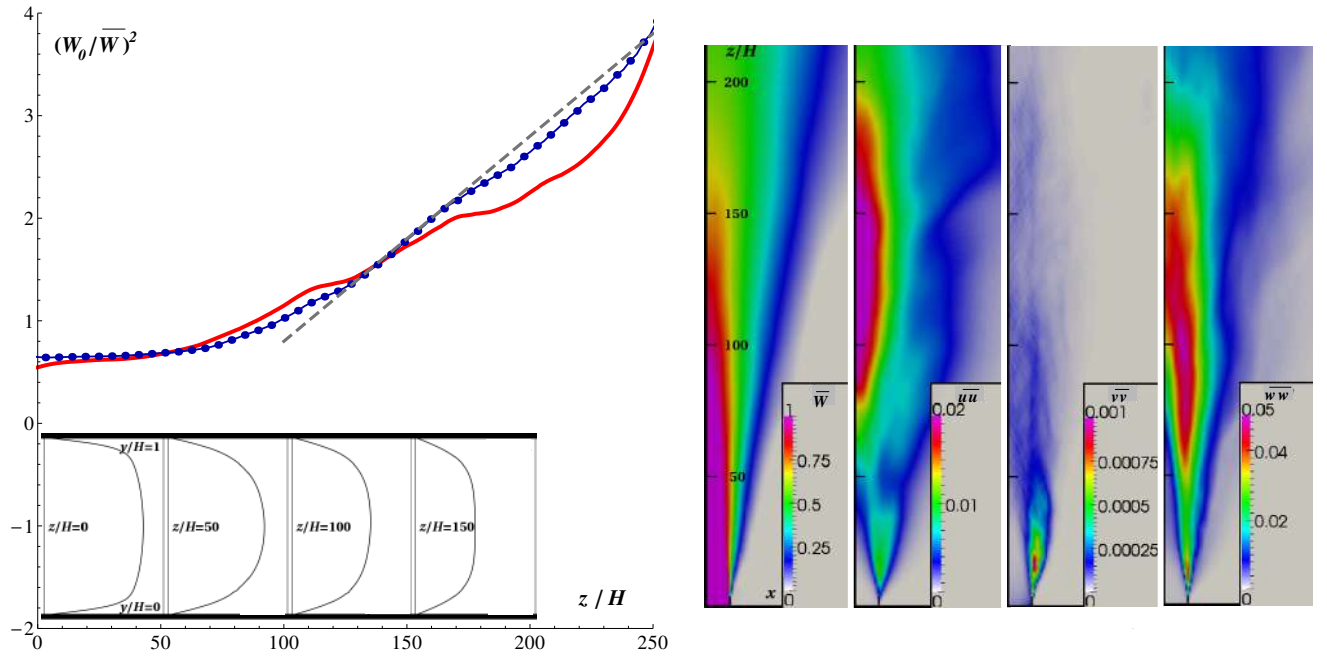


Рисунок 5.3. Слева: осредненная по времени обратный квадрат осевой скорости вдоль оси симметрии ($x = 0$ и $y = H/2$) из текущего LES расчета (синяя линия, 24 млн. ячеек) и из предварительного расчета (красная линия, 15 млн. ячеек). Серая пунктирная линия соответствует зависимости $z^{-1/2}$. Небольшие вставки демонстрируют профиль скорости вдоль y при $x = 0$ и различных z . Справа: осредненные по времени характеристики в плоскости $x - z$ при $y = H/2$

или осредненную по времени продольную скорость на оси с более грубым расчётом (около 15×10^6 ячеек). Согласно рис. 5.3 два профиля скорости находятся в отличном согласии в области $z/H < 130$, в то время как далее начинают проявляться различия, связанные с влиянием пространственного разрешения. В данном случае, классификацию на ближнее, среднее и дальнее поле струи можно провести следующим образом. Область $z/H > 130$ ($z \approx 13B$) будем называть дальней, поскольку осредненная по времени продольная скорость на оси спадает согласно автомодельной теории двумерных струй ($\propto z^{-1/2}$). Как показано ниже, в области $z/H < 40$ проявляется существенная трехмерность течения, связанная с интенсивными вторичными течения, и поэтому называется ближнем полем струи. Средней будем называть переходную область, которая располагается в диапазоне $40H < z < 13B$. Характерное осциллирующее (меандрирующее) движение ядра струи проявляется с $z \approx 5B$. Стоит отметить, что в ближней области характерным масштабом является расстояние H , в то время как в дальней области – B . Тогда отношение H к B является важным параметром задачи.

Как и в предыдущих расчетах, оценка пространственного разрешения расчетной сетки

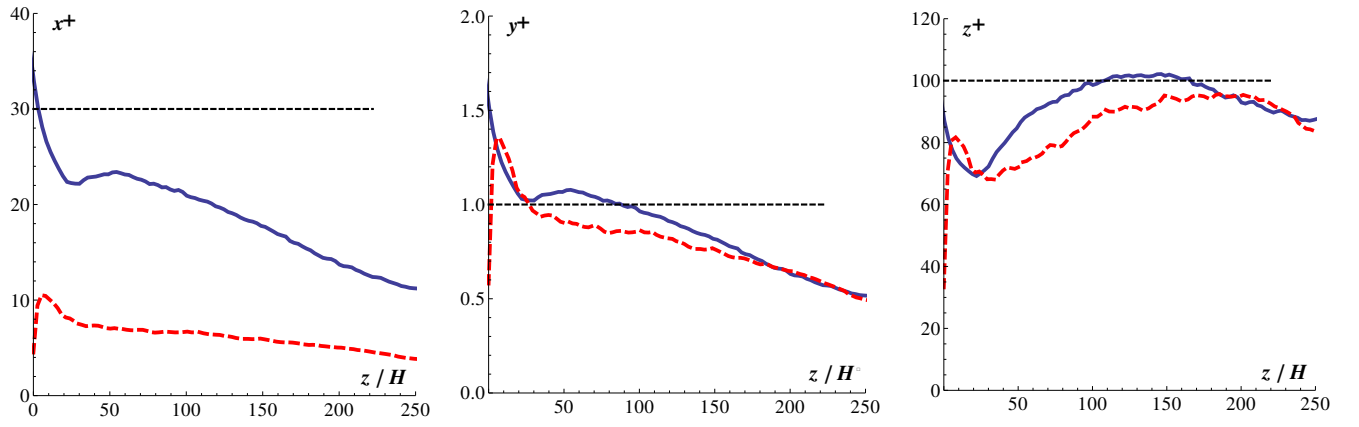


Рисунок 5.4. Характеристика расчетной сетки около стенки вдоль линий $x = 0$ (синяя линия) и $x/H = 4.8$ (красная линия)

проводится при помощи отношения $\bar{\nu}_t/\nu$. Это отношение в финальном расчете не превышало значения 0.75, в то время как в предварительных вычислениях на меньшей сетке максимальное значение $\bar{\nu}_t/\nu$ достигало 4. Расчеты течения в прямоугольном канале для генерации входных граничных условий для основных вычислений показали хорошее согласие осредненного профиля скорости с результатами прямого численного моделирования из литературы [386]. Кроме того, выполнены критерии для LES-сетки на размер расчетной ячейки около твердой поверхности в единицах стенки во всей области: $\Delta x^+ \simeq 15 - 40$, $y^+ < 2$, $\Delta z^+ \simeq 50 - 150$. На рис. 5.4 показано выполнение этих критериев вдоль оси и в слое смещения.

Квадрат осредненной по времени осевой скорости падает линейно вниз по течению, начиная с $z > 130H$ ($z > 13B$). При этом ширина струи растет как $dx_{1/2}/dz = S \approx 0.08$, где $x_{1/2}(z)$ обозначает полуширину струи на некотором удалении z . Это значение немного ниже значения для плоских автомодельных струй, ≈ 0.1 [81]. Результаты расчёта также несколько ниже, чем экспериментальное значение $S = 0.125$, полученное Лэнделом и др. [361], что в свою очередь чуть выше, чем данные других авторов [387, 388]. Первой возможной причиной является влияние боковых стенок, поскольку отношение ширины всей рассматриваемой области к ширине входного канала составляет $D/B \approx 21$, в то время как Лэндел и др. [361] исследовал случай с $D/B \approx 200$. Второй возможной причиной является недостаточная длина области для того, чтобы достичь автомодельного режима поскольку $L/B \approx 28$, в то время как в [361] авторы исследовали область $20 < L/B < 120$.

На рис. 5.3 также показаны осредненные по времени поля продольной скорости и диагональные компоненты тензора напряжений Рейнольдса в середине канала $y = H/2$. Стоит отметить наличие локального максимума пульсаций скорости $\overline{v'v'}$ и $\overline{w'w'}$ в ближнем поле струи около $z/H = 10 - 15$. Эта особенность связана со вторичными течениями и обсуж-

дается ниже. Дальнейшее исследование поля $\overline{v'v'}$ подтверждает стандартное предположение о квазидвумерности подобного рода течений. Остальные диагональные компоненты тензора напряжений Рейнольдса $\overline{u'u'}$ и $\overline{w'w'}$ достигают своего максимума в области крупномасштабной неустойчивости, где происходит меандрирование ядра струи. Поле $\overline{u'u'}$ указывает на то, что слои смещения струи смыкаются на расстоянии $z \approx 50H$ ($z \approx 5B$). Как уже упоминалось ранее, вследствие гидродинамической неустойчивости струйного профиля скорости [363] возникают поперечные колебания, амплитуда которых растет вниз по течению. Число Струхала $St = fx_{1/2}/\overline{w_c}$ меандрирования для $z > 100H$ лежит в диапазоне $0.074 < St < 0.088$, что находится в отличном согласии с экспериментальными данными [355, 359, 361]. Здесь f есть характерная частота, $\overline{w_c}$ означает осредненную по времени осевую скорость.

Как уже было сказано, сильная трехмерность течения наблюдается в ближней области струи, согласно полю пульсаций $\overline{v'v'}$, изображенному на рис. 5.3. Благодаря ограничивающим узким стенкам и меандрированию ядра струи, можно ожидать присутствие достаточно сильных трехмерных вторичных течений и в дальнем поле. Однако, их интенсивность, вероятно, существенно ниже по сравнению с ближним полем из-за затухания скорости вследствие расширения струи и трения о стенку. В верхнем ряду рис. 5.5 показано поле пульсаций давления на нижней стенке ($y = 0$) и изоповерхности Q -критерия для визуализации характерных вихревых структур. Стоит отметить, что расположение этих вихрей, как и ожидалось, совпадает с локальными минимумами давления. Видно, что крупномасштабные вихревые структуры, изначально порождаемые неустойчивостью Кельвина–Гельмгольца, растут вниз по течению и выстраиваются наподобие вихревой дорожки Кармана. При дальнейшем рассмотрении ближнего поля видно, как вихри Кельвина–Гельмгольца деформируются вследствие взаимодействия со стенкой. Вертикальные вихри имеют некоторое утолщение около стенки в области $z/H < 10 - 15$. Этот процесс деформации хорошо согласуется со сценарием производства завихренности, который описан Холдеманом и Фоссом (1975) [364]. В течение нелинейной стадии развития возмущения наблюдается формирование известных продольных вихрей (braid vortices), соединяющих “валики” Кельвина–Гельмгольца. Визуальное исследование средней/дальней области и меандрирующего струйного ядра указывает на наличие достаточно интенсивных продольных вихрей. Также стоит обратить внимание на характерное расположение этих вихрей зигзагом поперек канала, при этом их длина может легко превышать десятки H , достигая $30H$ с текущими параметрами течения.

Далее обсудим значение вихревых структур и вторичных течений в ближней области. На рис. 5.5 показаны такие же изоповерхности Q -критерия вместе с вертикальными сечениями мгновенного поля продольной компоненты завихренности. Стоит отметить, что высокие

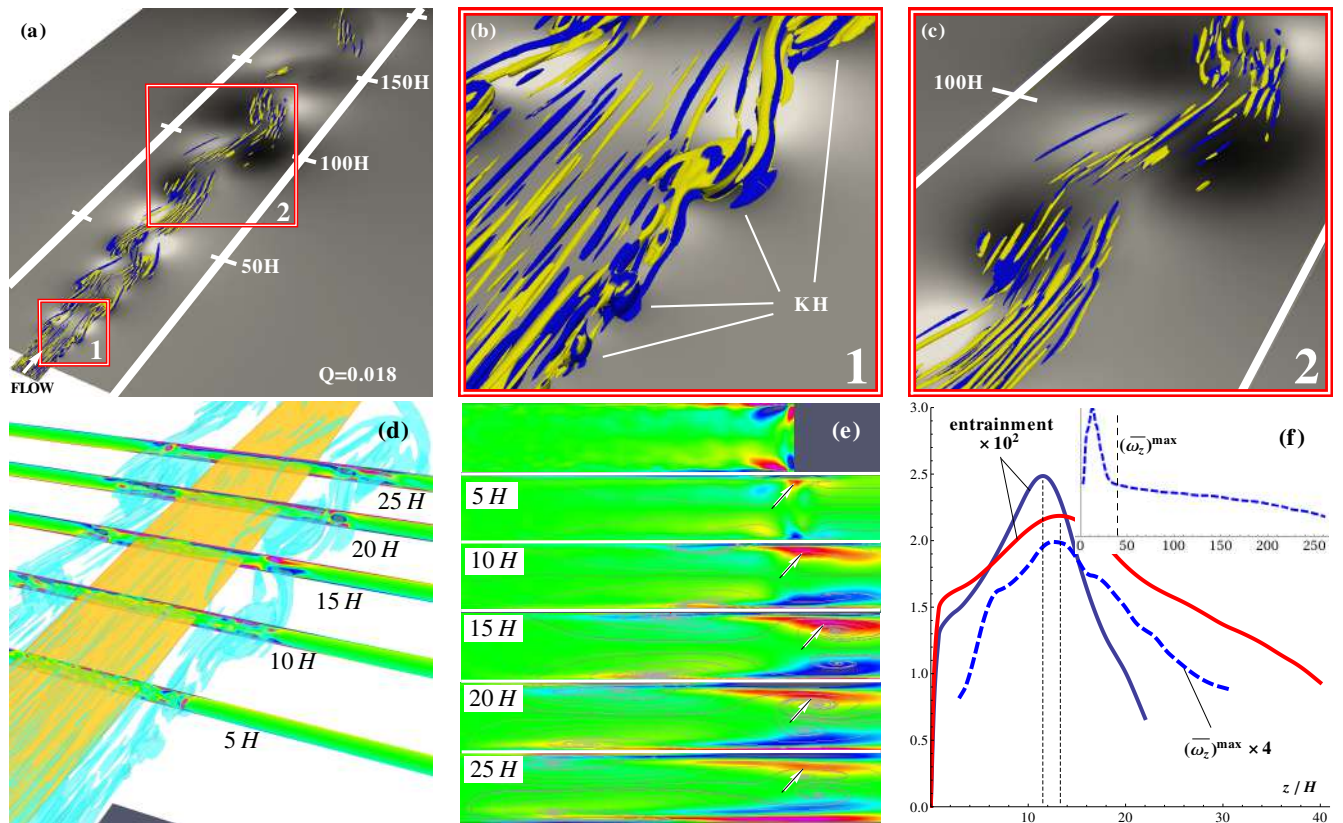


Рисунок 5.5. Верхний ряд: визуализация мгновенного поля давления (черные/белые пятна соответствуют локальным минимумам/максимумам) при $y = 0$ и вихревых структур при помощи изоповерхностей Q -критерия, окрашенных в продольную компоненту завихренности. (а): вся область. (b): визуализация окна “1” в ближнем поле. (с): визуализация окна “2” в дальнем поле. (d): визуализация ближнего поля, изоповерхности Q -критерия. Кроме того, показано поле завихренности в нескольких вертикальных плоскостях (красные/синие области соответствуют положительным/отрицательным значениям). Желтая изоповерхность соответствует $\bar{\omega} = 1.15W_b$. (е): в нескольких сечениях в плоскости $x-y$ и различных z показано осредненное по времени поле продольной компоненты завихренности и соответствующие линии тока. (f): сплошная линия показывает значение (умноженное на 10^2) функции $(W_b H)^{-1} \int_0^H \bar{u}(x, y, z) dy$ в зависимости от z при $x = 7H$ (синяя линия) и $x = 10H$ (красная линия). Пунктирная линия соответствует значению (умноженному на 4) локального максимума осредненной по времени продольной компоненты завихренности (нормированной на H/W_b) внутри вторичного вихря, показанного черной стрелкой на рис. 5.5е

значения завихренности как раз располагаются внутри идентифицированных продольных вихрей. Можно ожидать, что они дают наибольший вклад в производство завихренности. Дополнительно показаны вертикальные сечения с осредненным по времени значением продольной компоненты завихренности. Первое сечение расположено внутри подводящего канала и показано для того, чтобы дать представление о входных условиях. Внутри подводящего канала около каждого угла на осредненных полях имеется пара противовращающихся вихрей. При увеличении z один из этих вихрей остается в слое смешения, а другой смещается все ближе к центру канала. Рассмотрим как меняется интенсивность вихря в слое смешения с увеличением расстояния от сопла. На последнем рис. 5.5 показано несколько графиков, представляющих количественную информацию об интенсивности этих вторичных течений. Показано сравнение максимума продольной завихренности вихря в слое смешения, а также показан нормированный объемный расход жидкости, поступающей в ядро струи. Видно, что величины, связанные с расходом, имеют пик в области $z/H = 11.5 - 13.3$, при этом максимум завихренности попадает в этот диапазон со значением $z/H = 12.5$. Визуализация на втором и четвертом рис. 5.5 указывает на то, что этот пик связан с динамикой продольных вихрей, которые связывают первый и второй “валик” Кельвина – Гельмгольца. Вертикальной пунктирной линией на дополнительном графике последнего рис. 5.5 указано расстояние $z/H = 40$, после которого интенсивность вторичных течений монотонно падает. Эта область и идентифицирована как дальнее поле щелевой струи.

В среднем и дальнем поле обнаруженные продольные вихревые структуры меандрируют вместе с ядром струи, при этом они располагаются в форме зигзага поперек канала. Стоит рассмотреть некоторые возможные сценарии расположения продольных вихревых структур, которые ранее обсуждались Джиджером и др. (1991) [358]. На рис. 5.6 слева показана схема симметричного (а) и асимметричного (b) расположения вихрей относительно друг друга в плоскости $x - y$. Если учесть, что ядро струи вовлекает стороннюю покоящуюся жидкость, то асимметричное расположение вихрей является наиболее реалистичным. Поперечные осцилляции или меандрирование должно повлиять на характеристики этой конфигурации. Когда струйное ядро движется, например, слева направо, вторичные течения справа будут подавлены, в то время как слева, наоборот, должны усилиться, поскольку ядро “тащит” их за собой. Для того, чтобы проверить нашу гипотезу на рис. 5.6 справа показаны несколько поперечных сечений с мгновенными полями вертикальной компоненты скорости на различном удалении от источника. Первое сечение ($z/H = -4$) представлено для сравнения с последующими, где видно, что поток имеет относительно малый масштаб турбулентности по сравнению с областью струи. Далее поток начинает меандрировать, что приводит к появлению продольных

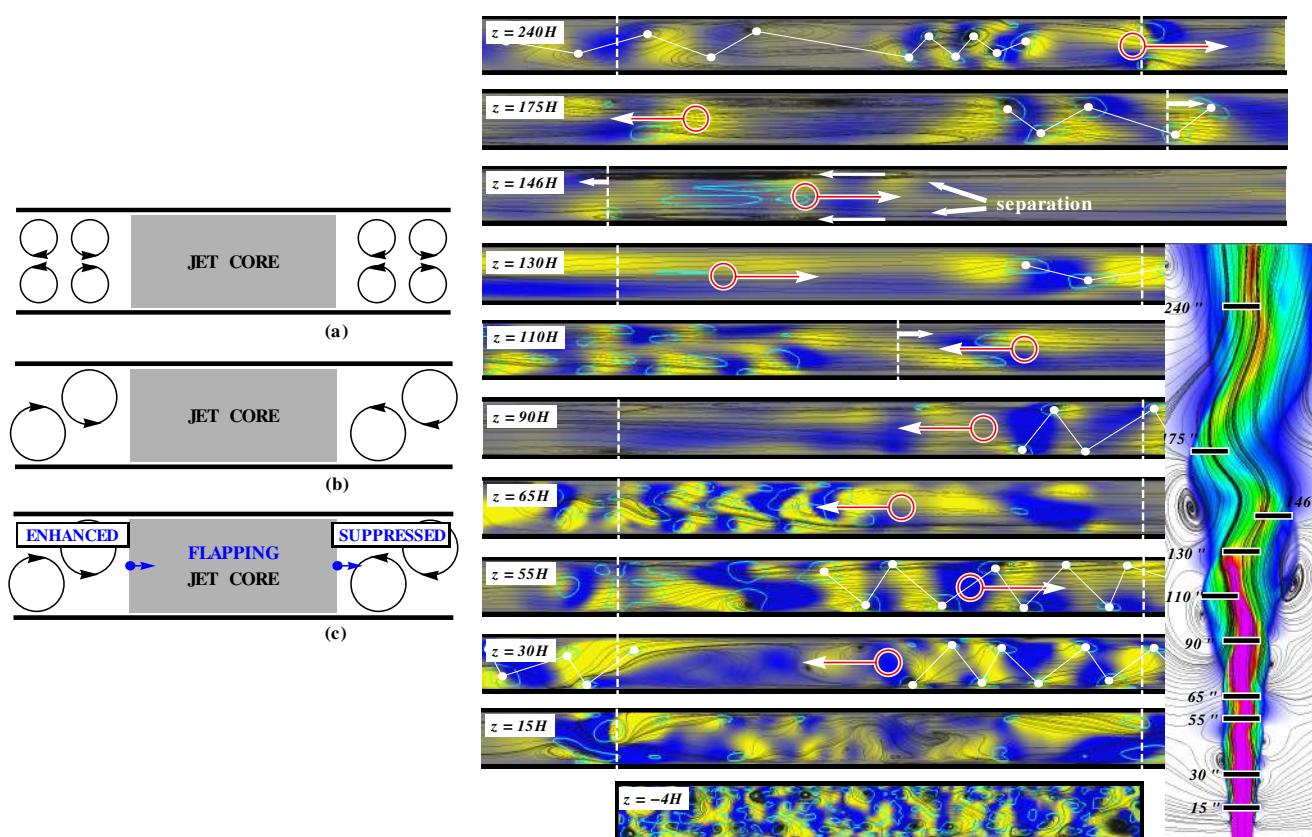


Рисунок 5.6. Слева: схематическое изображение вторичных течений в плоскости $x - y$. (a) Симметричное расположение вихрей; (b) асимметричное расположение (реалистичное); (c) поперечные колебания струйного ядра усиливают вторичные течения с одной стороны и ослабляют с другой. Справа: показано несколько поперечных сечений в плоскости $x - y$ при различных z , на которых изображено мгновенное поле вертикальной компоненты скорости (желтый/синий цвет соответствует движению вверх/вниз). Голубые контуры соответствуют линиям постоянного значения Q -критерия, указывающих на расположение продольных вихрей. Для того, чтобы отметить зигзагообразное расположение вихрей, их центры соединены белыми ломаными линиями

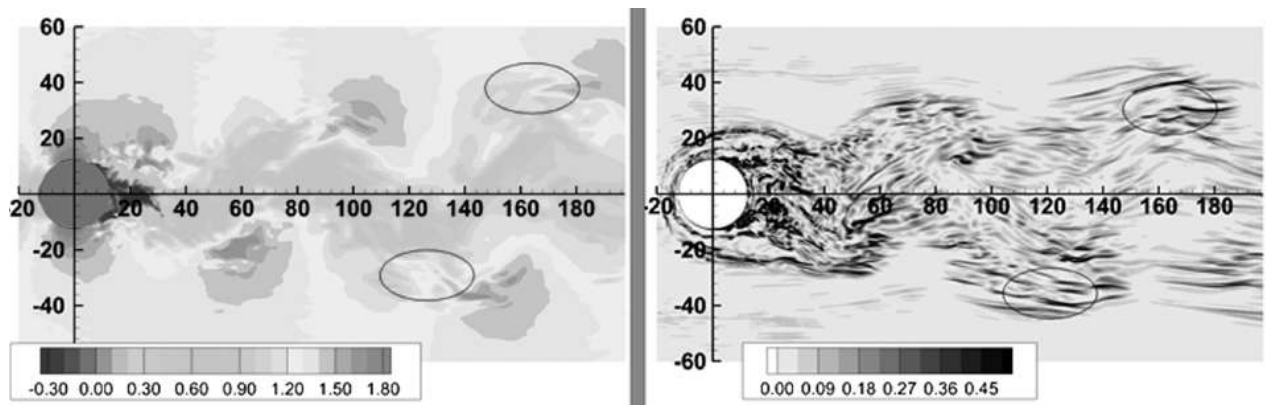


Рисунок 5.7. Иллюстрация из работы Жанга и Константинеску (2017) [389], где исследовалось течение в открытом канале со свободной поверхностью, которая соответствует $z/H = 1$, при этом твердая стенка расположена снизу ($z = 0$). Показан случай для $D/H = 10$, где D – диаметр цилиндра. Для расчетов использовался метод отсоединенных вихрей (DES). Слева: мгновенное поле продольной скорости при $z/H = 1$. Справа: мгновенное поле вертикальной компоненты завихренности ω_z ближе к стенке при $z/H = 0.2$. Черные эллипсы указывают место расположения продольных вихревых структур, которые очень похожи на вихри, идентифицированные в щелевом струйном потоке, см. рис. 5.5

вихрей, которые выстраиваются в виде зигзага (показано белой ломаной линией). Похожие образования можно обнаружить почти в любом показанном сечении. Очевидно, что процессы переноса в продольном и поперечном направлении определяются крупномасштабными квазидвумерными вихрями, в то время как для переноса поперек узких стенок важную роль играют выявленные продольные вихри – мелкомасштабные турбулентные структуры, появляющиеся в потоках при наличии поперечных колебаний, взаимодействующих с твердыми стенками. Стоит отметить, что аналогичные структуры были недавно идентифицированы в расчетах Жанга и Константинеску (2017) [389], которые исследовали щелевое течение в канале за цилиндром, см. рис. 5.7. В следующей части главы рассматривается похожая геометрия, где подробно исследуются эти вихри и их связь с теплопереносом.

5.3. Квазидвумерный след

²Как и в предыдущей секции геометрия задачи представляет собой прямоугольник с размерами $29D \times 20D \times H$, где $H = 0.4D$ обозначает высоту щелевого канала, рис. 5.8. Размер области взят в соответствие с экспериментами, которые проводятся в Институте теплофизики СО РАН Шестаковым М.В., где диаметр цилиндра равен 10мм. В численном расчете

² См. работы [7,23,25] в разделе “Публикации по теме диссертации”

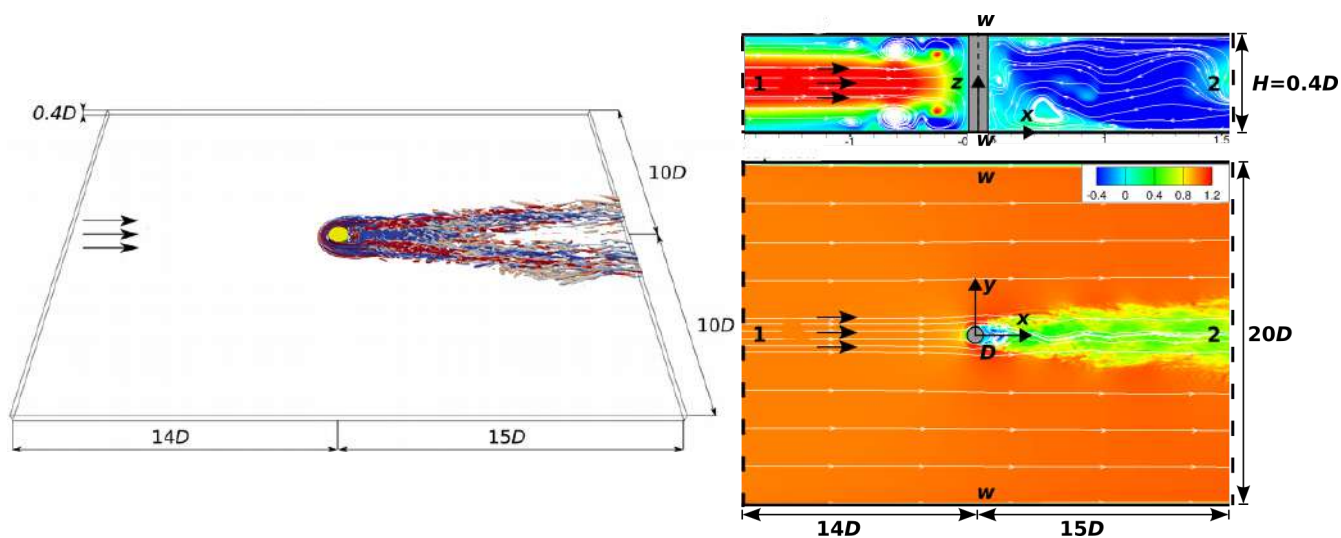


Рисунок 5.8. Слева: трехмерный вид вычислительной области. Справа: вид сверху и сбоку на вычислительную область и граничные условия. Индексы 1 и 2 обозначают входные и выходные условия, соответственно

входные условия на поле скорости представляют собой стационарный параболический профиль. Число Рейнольдса, построенное по среднерасходной скорости натекающего потока U_∞ и диаметру цилиндра, равно $Re = 3750$. Как и прежде, все величины далее обезразмерены при помощи U_∞ и D . На стенках задается условие прилипания, на выходе – конвективное граничное условие. Для исследования тепломассопереноса помимо уравнений Навье–Стокса решается дополнительное уравнение переноса поля температуры, как и в струйной задаче, см. (3.9) и (3.10). Считается, что обе стенки нагреты до постоянной температуры, при этом одна из них холодная, вторая – горячая. В качестве входного условия на поле температуры задается линейное распределение по координате z . На поверхности цилиндра и боковых стенках также задано линейное распределение температуры. После нормировки будем полагать, что $T = 1$ на нижней стенке и $T = 0$ – на верхней. Число Прандтля принято равным $Pr = 6.13$ и соответствует температуре, при которых проводился эксперимент, в то время как турбулентное число Прандтля Pr_t принято равным 0.9.

Проведено два расчета на грубой и подробной сетке, которые будут дальше обозначаться как LES_c и LES_r, соответственно. Вторая сетка имеет примерно в два раза больше вычислительных ячеек, чем первая; см. табл. 5.1, на которой также приведены некоторые интегральные характеристики потока. Центр первой ячейки расположен на расстоянии $\Delta z = 2.5 \times 10^{-4}$ от узких стенок. Центр первой ячейки по радиусу от стенки цилиндра расположен на расстоянии $\Delta r = 1.75 \times 10^{-3}$. Вдоль азимутальной координаты обе сетки имеют 280 точек, в то время как в случае, рассмотренном в предыдущей главе для равномерно

Таблица 5.1. Сравнение размера общего количества ячеек (N_{tot}) и вдоль каждого направления отдельно (N_θ , N_x , N_z), осредненного по времени коэффициента сопротивления ($\overline{C}_D$), угла точки отрыва (θ_s), длины рециркуляционной зоны (L_r) и частоты срыва вихрей (f_0) для двух LES-расчетов и PIV-измерений

	N_{tot}	N_θ	N_x	N_z	$\overline{C}_D$	θ_s	L_r	f_0
LES								
LESc	8.7×10^6	280	510	100	0.747	94.8	1.29	0.232
LESr	16.6×10^6	280	661	142	0.759	94.3	1.2	0.231
PIV								
PIVc	54×23	—	54	—	—	—	1.55	0.227
PIVr	62×60	—	62	—	—	94.9	1.48	—

натекающего потока и $Re = 3900$, N_θ было равно 252, см. табл. 4.1. Поперек узкого канала (вдоль координаты z) для грубой сетки используется 100 ячеек, а для подробной – 142. Помимо существенного сгущения вдоль z , в отличие от LESc вычислительная сетка для LESr является однородной после $x = 2.5$ вдоль продольной координаты, что гарантирует хорошее разрешение при удалении от цилиндра. Как показано ниже, результаты LES-расчетов верифицированы против экспериментальных PIV-данных, измеренных Шестоковым М.В., которые были проведены, используя два уровня пространственного разрешения. Оба эксперимента проведены в плоскости $x - y$ при $z = 0.2$ (середина щелевого канала). PIVc мы будем обозначать измерения в окне 6.1×2.5 , расположенном симметрично относительно оси y (т.е. $y \in [-1.25; 1.25]$), при этом левая граница области соответствует $x \approx 0.06$. В свою очередь, эксперимент PIVr с более подробным пространственным разрешением был проведен в окне 1.9×1.8 , при этом левая граница области соответствует $x \approx -0.02$. Учитывая изменения в окнах эксперимента, а также количество расчетных ячеек вдоль осей $x - y$ (см. табл. 5.1), пространственное разрешение по x и y для PIVr лучше, чем PIVc более, чем в 3.5 раза вдоль каждой оси или примерно в 10 раз для всей площади. Таким образом, можно ожидать, что пульсационные характеристики в PIVc будут недопредсказаны по сравнению с PIVr из-за существенного осреднения по каждой подобласти.

Пространственное разрешение LES-расчетов удовлетворяет стандартным критериям, которые обсуждались прежде. На рис. 5.9 показаны характеристики расчетной сетки около цилиндра и около одной из поверхностей в единицах стенки. Полученные характеристики

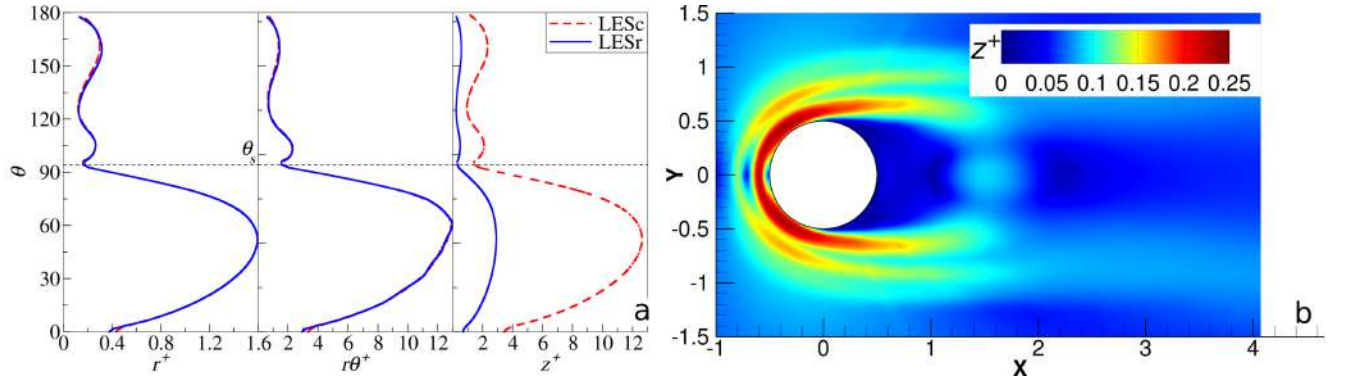


Рисунок 5.9. Слева: пристенное разрешение в единицах стенки около цилиндра для LESc и LESr для сечения $z = 0.2$. Справа: пристенное разрешение около нижней стенки, рассчитанное для центра первой от нижней стенки ячейки для LESr ($z^+ = u_\tau z / \nu$, где u_τ – скорость трения)

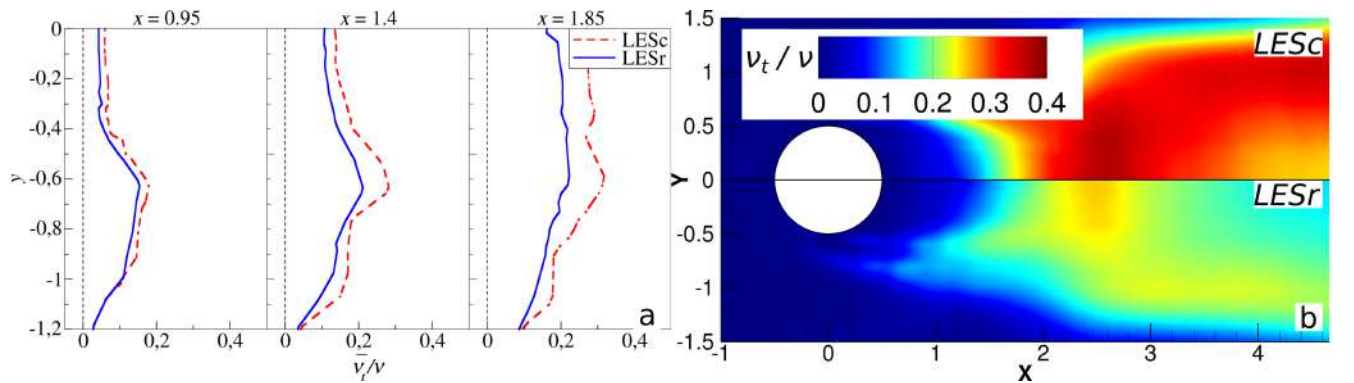


Рисунок 5.10. Слева: поперечные профили отношения $\bar{\nu}_t/\nu$ при различных x в области рециркуляции и $z = 0.2$. Справа: распределение $\bar{\nu}_t/\nu$ в плоскости $x - y$ при $z = 0.2$

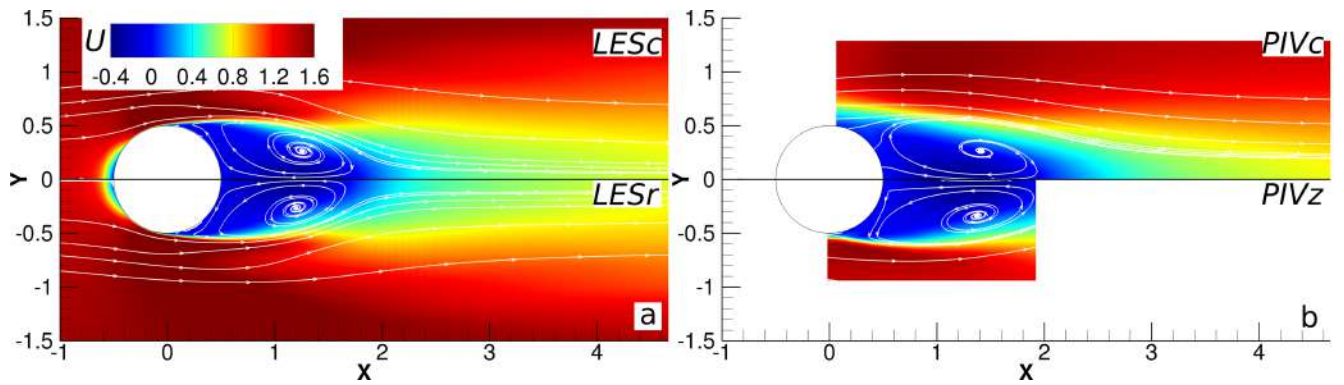


Рисунок 5.11. Осредненное по времени поле продольной скорости в сечении $z = 0.2$. Показаны результаты для LESc, LESr, PIVc и PIVz для сравнения

удовлетворяют критериям хорошего пространственного разрешения для LES [81]. Количество точек вдоль радиального и азимутального направления были выбраны в соответствии с уже изложенными результатами расчетов для задачи обтекания длинного цилиндра однородным потоком. Однако, в данной постановке имеются существенные вторичные течения даже до цилиндра, поэтому вторая сетка LESr по сравнению с LESc имеет больше узлов вдоль z , для того чтобы оценить влияние разрешения в этом направлении на результаты расчетов. Как будет показано далее, оба расчета имеют почти идентичные осредненные по времени характеристики. Стоит отметить, что на правом рис. 5.9 хорошо видно, что максимум величины z^+ для центра первой ячейки около стенки достигается в области, где присутствуют подковообразные вихри перед цилиндром и в слоях смешения. И хотя исследованию этой системы вихрей посвящено множество работ, в отличие от продольных когерентных структур, развивающихся вниз по течению, интересно рассмотреть ее влияние на тепломассоперенос, что будет изложено ниже. На рис. 5.10 представлены поперечные профили $\bar{\nu}_t/\nu$ в нескольких сечениях в области рециркуляционной зоны, а также при $z = 0.2$. Видно, что максимальное значение не превышает 0.2 и 0.3 для LESc и LESr, соответственно. В плоскости $x - y$ около $x \approx 2.5$ имеется максимум значения $\bar{\nu}_t/\nu$, который также, однако, не превышает 0.3 – 0.5.

На рис. 5.11 показаны осредненные по времени поля продольной компоненты скорости в сечении $x - y$ при $z = 0.2$ для LES и PIV. Имеется хорошее согласие между результатами расчетов и экспериментов, что подтверждает достаточное пространственное разрешение вычислительной сетки для LES, использованное в данной работе. Длина рециркуляционной зоны для LESc и LESr составляет $L_r = 1.29$ и 1.2 , соответственно. При этом эксперимент дает значения $L_r = 1.55$ и 1.48 для PIVc и PIVr, соответственно. Помимо экспериментальных данных, полученных Шестаковым М.В. в ИТ СО РАН, используются результаты PIV-экспериментов Озтурка и др. (2008) [390] для сравнения поля скорости в сечении $x - z$ при $y = 0$.

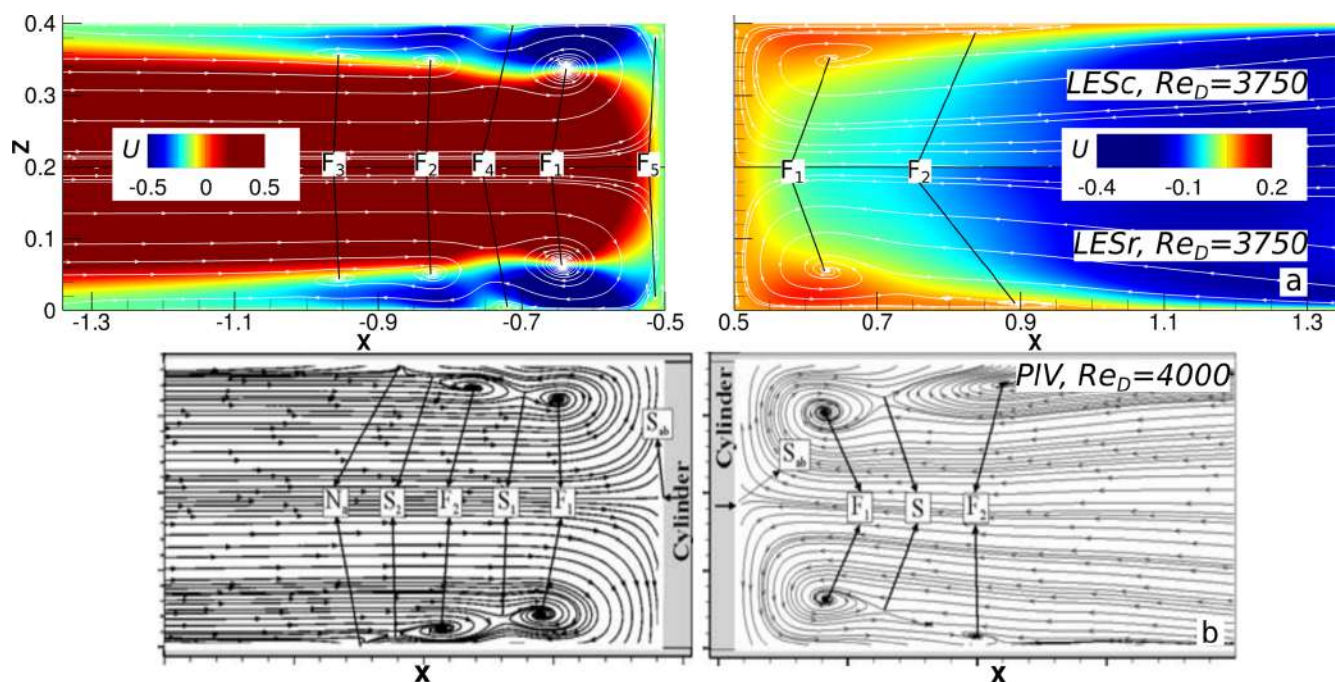


Рисунок 5.12. Осредненное по времени поле продольной скорости в сечении $y = 0$. Сравнение расчетов LESc, LESr и экспериментальных данных из литературы [390]

В экспериментах этих авторов рассматривалось аналогичное отношение $H/D = 0.4$ в небольшом диапазоне чисел Рейнольдса, самое близкое из которых к данной работе составляет $Re = 4000$. На рис. 5.12 показано сравнение осредненного по времени поля продольной компоненты скорости и линий тока для LESc, LESr и PIV-измерений из работы [390]. Имеется также отличное согласие результатов расчетов и эксперимента. Стоит отметить, что PIV-данные обладают некоторой асимметрией относительно плоскости $z = 0.2$. Как до, так и в области за цилиндром координаты центров основных вихревых структур хорошо совпадают, несмотря на различие в числе Рейнольдса. Стоит также отметить, что картины течения для LESc и LESr очень близки, что указывает на сходимость полученных решений.

На рис. 5.13 показано поле мгновенной скорости трения и теплового потока на нижней стенке канала при $z = 0$. Видно, что в слоях смешения реализуются сильные пульсации скорости в виде продольных структур, что приводит к интенсификации локального теплопереноса. Аналогично струйному течению (рис. 5.6) рассмотрим рис. 5.14, где показаны поперечные сечения при постоянной продольной координате x в нескольких значениях. Продольная компонента завихренности указывает на места расположения вихревых образований. Видно, что часто можно выделить их характерное расположение зигзагом, как и в струйной задаче. Однако, в случае следа рассматривается только ближнее поле при более низких числах Рейнольдса. Меандрирование (поперечное колебание) почти отсутствует по сравнению с дальним полем в струе, поэтому эти структуры не усиливаются поперечными

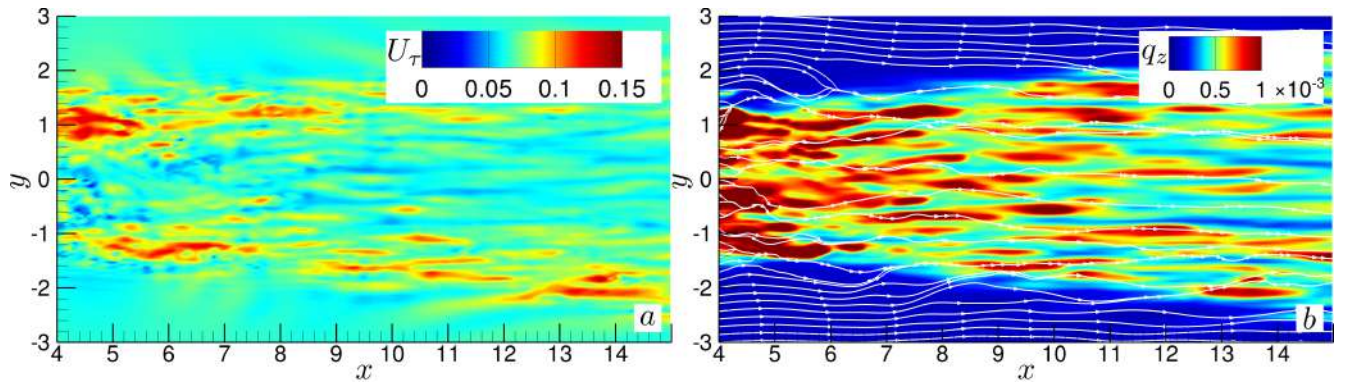


Рисунок 5.13. Мгновенная скорость трения и тепловой поток на нижней стенке канала при $z = 0$

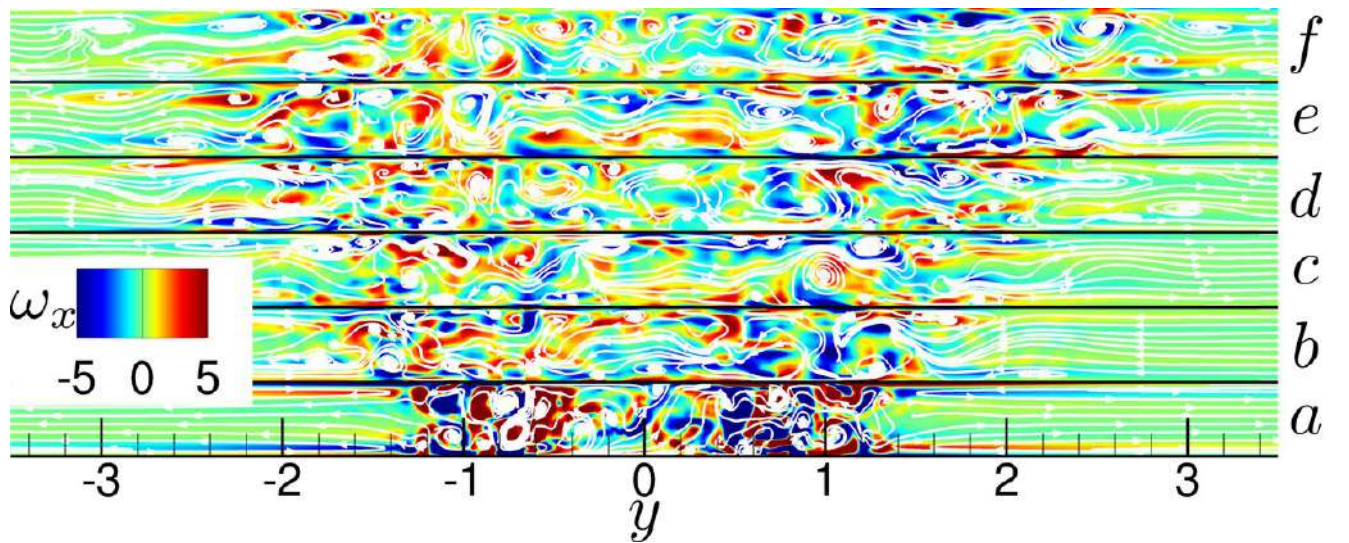


Рисунок 5.14. Мгновенная продольная завихренность и линии тока в нескольких $y - z$ сечениях при (a) $x = 1$, (b) 5.2, (c) 7.2, (d) 9.5, (e) 10.8 и (f) 13.5

колебаниями ядра потока. Тем не менее, ненулевой поперечной компоненты скорости жидкости и наличия узких стенок, видимо, достаточно, чтобы привести к данной организации, которая существенна для процессов тепломассопереноса поперек канала.

На рис. 5.15 представлена визуализация и анализ некоторых характеристик, связанных с продольными вихревыми структурами. При помощи визуализации изоповерхностью Q -критерия видно присутствие подковообразных вихрей перед цилиндром, которые далее теряют устойчивость и распадаются в турбулентном потоке. И хотя в ядре следа сложно увидеть определенную организацию движения, в слое смешения легко заметить характерные продольные структуры, которые наклонены относительно оси x под определенным углом. Вклад этих структур в осредненное поле продольной компоненты завихренности рассматривается на соседнем рисунке. Видно, что на осредненной картине они имеют вид двух пар вихрей, амплитуда которых перестает меняться при $x/H > 10$. Данное вихревое движение

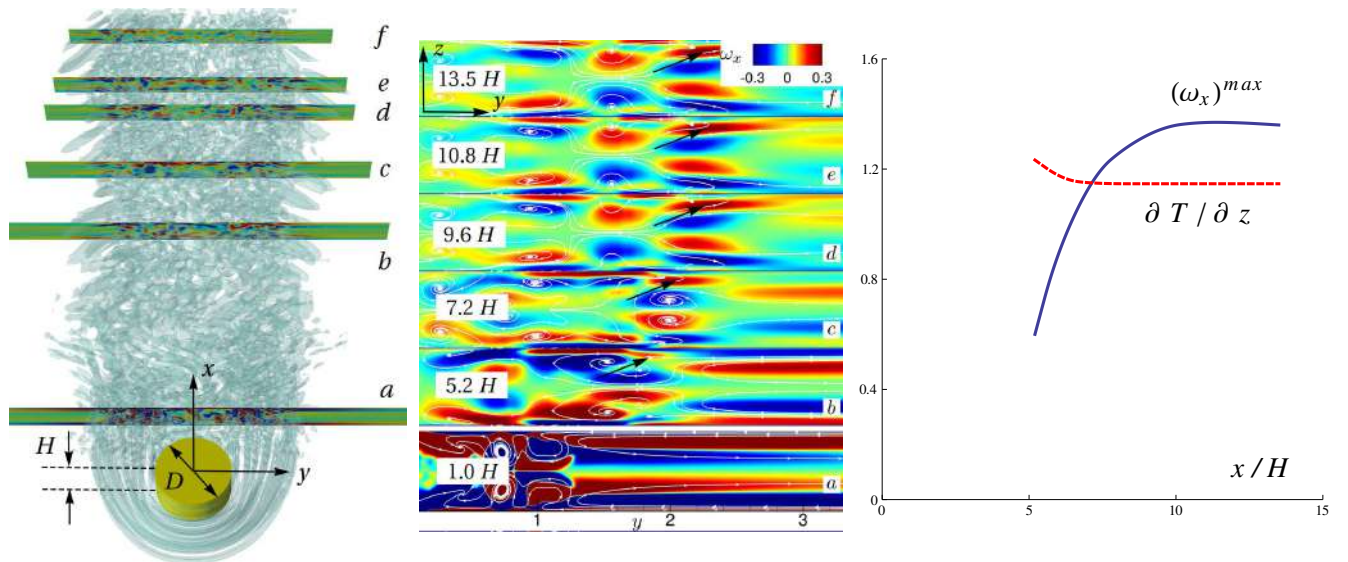


Рисунок 5.15. Слева: визуализация вихрей при помощи изоповерхности Q -критерия и поле завихренности в нескольких вертикальных плоскостях. Посередине: в нескольких сечениях в плоскости $y - z$ и различных x показано осредненное по времени поле продольной компоненты завихренности и соответствующие линии тока. Справа: сплошная линия показывает значение (умноженное на 4) локального максимума осредненной по времени продольной компоненты завихренности в точках, указанных стрелкой на левом рисунке. Пунктирная линия показывает вертикальную компоненту теплового потока в середине канала в месте расположения соответствующих вихрей, нормированного на соответствующую величину с линейным распределением температуры

существенно интенсифицирует теплоперенос около стенки (рис. 5.13), однако, даже на границе турбулентного следа это нестационарное движение влияет на поле температуры, профиль которой отклоняется от линейного. При помощи анализа вертикальной компоненты теплового потока ($\propto \partial T / \partial z$) показано, что в области расположения $\bar{\omega}_x^{max}$ в центре канала тепловой поток увеличивается на величину порядка 10%.

5.4. Выводы по главе

Исследована задача о щелевом струйном течении при числе Рейнольдса 10^4 и задача обтекания цилиндра потоком в узком канале между двух параллельных стенок при $Re = 3750$ посредством LES. Проведен анализ осредненных по времени характеристик потоков и сравнение с экспериментальными данными. В случае струи показано присутствие крупномасштабных осцилляций в поперечном направлении типа дорожки Кармана. Впервые численно обнаружены продольные вихревые структуры в таких конфигурациях, которые связаны с

взаимодействием меандрирующего поперек течения и твердых стенок. Показана связь этих вихрей с интенсификацией процессов вовлечения сторонней жидкости в ядро потока, а также с локальным теплопереносом.

Заключение

1. Получено аналитическое решение для дальнего поля струи, представляющее собой возмущение точного решения Ландау и соответствующее второму члену асимптотического разложения по обратным степеням расстояния R от источника, которое определяется поперечными компонентами вектора момента импульса. Найденное решение описывает течение неосесимметричных струй далеко от точечного источника движения. Это позволило сравнить эффект “памяти” потока о входных условиях и указать на различия асимптотического поведения ламинарных и турбулентных струй.

2. Решена задача устойчивости затопленной ламинарной струи, соответствующей точному решению Ландау. Показано, что возмущения растут с R степенным образом. Получены критические значения числа Рейнольдса для возмущений с азимутальным волновым числом $m = 0$ и 1 , равные $Re_{D,crit}^{m=0} = 13.98$ и $Re_{D,crit}^{m=1} = 27.10$. Предложен критерий оценки местоположения ламинарно-турбулентного перехода, основываясь на отношении скорости возмущения к скорости основного потока. Впервые получено хорошее количественное соответствие между линейной теорией и экспериментальными данными вплоть до чисел Рейнольдса $Re_D \approx 2000$ для значения расстояния от кромки сопла, на котором происходит турбулизация струи.

3. На основе LES и DNS исследована задача о турбулентной струе при числе Рейнольдса $Re_D \approx 6000$, вытекающей из длинной трубы. При помощи собственного ортогонального разложения впервые систематически показано, что спиральные бегущие волны являются собственными функциями струйной задачи и, таким образом, представляют наиболее энергонесущие вихревые структуры в дальнем поле затопленной турбулентной струи. Показано, что в автомодельной области доля турбулентной кинетической энергии для данных параметров течения составляет 11.5%, 16.7%, 13.1% и 9.2% для $m = 0, 1, 2$, и 3 , соответственно. Получены зависимости волновых характеристик идентифицированных структур от их частоты. Показано, что характеристики наиболее энергонесущих вихревых структур с азимутальным волновым числом $m = 1$ хорошо согласуются с результатами плоскопараллельного анализа устойчивости, что указывает на справедливость использования линейного анализа устойчивости для турбулентных потоков и анализа крупномасштабных флуктуаций.

4. Посредством LES исследована ближняя область незакрученных и слабозакрученных струй, вытекающих из вращающейся вокруг своей оси трубы при $Re_D = 5300$ и параметре крутки, определенного как отношение скорости вращения стенки трубы к среднерасходной скорости жидкости в канале, изменяющегося в диапазоне $N = 0 - 1$. Проанализировано влияние N на осредненные по времени характеристики потока, а именно, поле скорости, кон-

центрацию пассивной примеси, пульсационных составляющих и их смешанных корреляций. Получена зависимость интенсивности вовлечения окружающей жидкости в ядро потока от N . Описано явление противовращающегося вихревого ядра, возникающее около 6 калибров вниз по течению от кромки сопла.

5. На основе LES исследовано течение закрученной соосной кольцевой струе при различных параметрах течения с числами Рейнольдса $Re_g = 1300 - 2250$ и $Re_a = 6400 - 11250$ для внутреннего и внешнего кольцевого канала, соответственно, и параметрами крутки $N = 2.8 - 4.9$, построенными по скорости вращающейся внешней стенки. Изучено влияние резкого изменения расхода жидкости на режимы течения. Исследованы переходные процессы, сопровождающиеся формированием крупномасштабных когерентных структур. Показано, что экспериментально наблюдаемый гистерезис режимов в случае реагирующего потока может быть связан с формированием вторичной зоны рециркуляции около кромки сопла в случае резкого уменьшения расхода газа.

6. Численно исследована задача обтекания длинного цилиндра поперечным однородным потоком жидкости в докритическом режиме течения с ламинарным отрывом пограничного слоя при $Re = 3900$ и 1.4×10^5 . При помощи условного осреднения получены уравнения URANS, в которых помимо напряжений Рейнольдса, появляются также напряжения Леонарда и смешанные корреляции когерентных и стохастических флуктуаций. На основе LES впервые показано, что смешанные корреляции становятся пренебрежимо малы только при относительно высоких числах Рейнольдса. Проанализирована справедливость гипотезы Буссинеска и показано, что главный собственный вектор бесследовой части напряжений Рейнольдса с хорошей точностью сонаправлен с аналогичным вектором тензора скоростей деформации только при относительно высоких числах Рейнольдса.

7. Исследована задача о щелевом струйном течении при числе Рейнольдса 10^4 и задача обтекания цилиндра потоком в узком канале между двух параллельных стенок при $Re = 3750$ посредством LES. Впервые численно обнаружены продольные вихревые структуры в таких конфигурациях, которые связаны с взаимодействием меандрирующего поперек течения и твердых стенок. Показана связь этих вихрей с интенсификацией процессов вовлечения сторонней жидкости в ядро потока, а также с локальным теплопереносом.

Публикации по теме диссертации

1. Mullyadzhhanov R.I., Sandberg R.D., Abdurakipov S.S., George W.K., Hanjalić K. Propagating helical waves as a building block of round turbulent jets // [Physical Review Fluids](#). – 2018. – Vol. 3. – P. 062601(R). (из перечня ВАК)
2. Мулляджанов Р.И. Уравнения для описания семейства автомодельных решений дальнего поля круглой затопленной турбулентной струи // [Теплофизика и Аэромеханика](#). – 2018. – Т. 25, № 4. – С. 647–650. (из перечня ВАК)
3. Мулляджанов Р.И., Яворский Н.И. Линейная гидродинамическая устойчивость дальнего поля затопленной ламинарной струи // [Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки](#). – 2018. – Т. 11, № 3. – С. 32–40. (из перечня ВАК)
4. Иващенко В.А., Мулляджанов Р.И. Численное моделирование затопленной струи переменной плотности // [Сибирский физический журнал](#). – 2018. – Т. 13, № 1. – С. 45–53. (из перечня ВАК)
5. Mullyadzhhanov R., Abdurakipov S., Hanjalić K. Helical structures in the near field of a turbulent pipe jet // [Flow, Turbulence and Combustion](#). – 2017. – Vol. 98, №. 2. – P. 367–388. (из перечня ВАК)
6. Mullyadzhhanov R., Abdurakipov S., Hanjalić K. On coherent structures and mixing characteristics in the near field of a rotating-pipe jet // [International Journal of Heat and Fluid Flow](#). – 2017. – Vol. 63. – P. 139–148. (из перечня ВАК)
7. Палкин Е.В., Мулляджанов Р.И. Низкочастотные пульсации в задаче обтекания цилиндра потоком жидкости в узком зазоре при $Re = 3750$ // [Сибирский физический журнал](#). – 2017. – Т. 12, № 1. – С. 43–49. (из перечня ВАК)
8. Мулляджанов Р.И., Сандберг Р.Д., Абдуракипов С.С., Джордж В.К., Ханъялич К. О спиральных структурах в круглой турбулентной струе // [Сибирский физический журнал](#). – 2017. – Т. 12, № 4. – С. 40–51. (из перечня ВАК)
9. Palkin E., Mullyadzhhanov R., Hadžiabdić M., Hanjalić K. Scrutinizing URANS in shedding flows: The case of cylinder in cross-flow in the subcritical regime // [Flow, Turbulence and Combustion](#). – 2016. – Vol. 97, №. 4. – P. 1017–1046. (из перечня ВАК)

10. Shestakov M.V., Mullyadzhhanov R.I., Tokarev M.P., Markovich D.M. Modulation of large-scale meandering and three-dimensional flows in turbulent slot jets // [Journal of Engineering Thermophysics](#). – 2016. – Vol. 25, №. 2. – P. 159–165. (из перечня ВАК)
11. Mullyadzhhanov R., Palkin E., Niceno B., Vervisch L., Hanjalić K. Verification of a low Mach variable-density Navier – Stokes solver for turbulent combustion // [Journal of Physics: Conference Series](#). – 2016. – Vol. 754, № 6. – P. 062005. (из перечня ВАК)
12. Mullyadzhhanov R., Hadžiabdić M., Hanjalić K. LES investigation of the hysteresis regime in the cold model of a rotating-pipe swirl burner // [Flow, Turbulence and Combustion](#). – 2015. – Vol. 94, №. 1. – P. 175–198. (из перечня ВАК)
13. Hanjalić K., Mullyadzhhanov R. On spatial segregation of vortices and pressure eddies in a confined slot jet // [Physics of Fluids](#). – 2015. – Vol. 27, №. 3. – P. 031703. (из перечня ВАК)
14. Mullyadzhhanov R., Ilyushin B., Hanjalić K. On dynamics and secondary currents in meandering confined turbulent shallow jet // [International Journal of Heat and Fluid Flow](#). – 2015. – Vol. 56. – P. 284–289. (из перечня ВАК)
15. Мулляджанов Р.И., Яворский Н.И. Решение задачи об истечении неосесимметричной закрученной затопленной струи // [Прикладная механика и техническая физика](#). – 2013. – Т. 54, № 2. – С. 46–51. (из перечня ВАК)
16. Hadžiabdić M., Hanjalić K., Mullyadzhhanov R. LES of turbulent flow in a concentric annulus with rotating outer wall // [International Journal of Heat and Fluid Flow](#). – 2013. – Vol. 43. – P. 74–84. (из перечня ВАК)
17. Современные проблемы моделирования энергетических процессов. Под ред. проф. Ханъялича К., чл.-корр. РАН Марковича Д. М., к.ф.-м.н. Сиковского Д.Ф. Новосибирск, Изд-во НГУ, 2016. 452 с.

Мулляджанов Р.И., Абдуракипов С.С., Ханъялич К. Когерентные структуры в круглой турбулентной струе, С. 263–296.
18. Mullyadzhhanov R., Abdurakipov S., Hanjalić K. Turbulent kinetic energy evolution in the near-field of a rotating pipe round jet // In [Direct and Large-Eddy Simulation X](#), Springer. ERCOFTAC Series. – 2018. – Vol. 24. – P. 553–558. (Scopus)

19. Mullyadzhанov R., Ilyushin B., Hadžiabdić M., Hanjalić K. Large-eddy simulation of a shallow turbulent jet // In *Direct and Large-Eddy Simulation IX*, Springer. ERCOFTAC Series. – 2015. – Vol. 20. – P. 233–239. (Scopus)
20. Palkin E., Shestakov M., Mullyadzhанov R., Markovich D., Hanjalić K. Flow around a confined cylinder: LES and PIV study // *MATEC Web of Conferences*. – 2017. – Vol. 115. – P. 02010. (Scopus)
21. Муллыджанов Р.И., Сандберг Р.Д., Абдуракипов С.С., Джордж В.К., Ханъялич К. Бегущие спиральные волны в турбулентной струе // Сб. трудов XVIII научной школы “Нелинейные волны - 2018”, Нижний Новгород, Россия, 26 февраля - 4 марта, 2018, С. 217–218.
22. Mullyadzhанov R., Sandberg R., Abdurakipov S., George W., Hanjalić. Identification of coherent wavy motion in round turbulent jets // Proc. of 70th Annual Meeting of the APS Division of Fluid Dynamics, Denver, USA, November 19-21, 2017, 1 p.
23. Палкин Е.В., Шестаков М.В., Муллыджанов Р.И., Маркович Д.М., Ханъялич К. Обтекание цилиндра в узком зазоре: LES и PIV // Сб. трудов Всероссийской конференции “XXXIII Сибирский теплофизический семинар”, Новосибирск, Россия, 6-8 июня, 2017, С. 75.
24. Mullyadzhанov R., Sandberg R., Abdurakipov S., Hanjalić. Helical wave as a building block of a round turbulent jet // Book of Abstracts of 11th European Fluid Mechanics Conference, Sevilla, Spain, September 12-16, 2016, 1 p.
25. Палкин Е.В., Муллыджанов Р.И. Вихревые структуры при обтекании цилиндра в неглубоком канале при $Re = 3750$ // Сб. трудов XIV Всероссийской школы-конференции “Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики”, Новосибирск, Россия, 22-25 ноября, 2016, С. 40.
26. Mullyadzhанov R., Sandberg R., Abdurakipov S., Hanjalić. Helical wave as a building block of a round turbulent jet // Proc. of 581 EUROMECH Colloquium “Dynamics of concentrated vortices”, Novosibirsk, Russia, May 30 - June 1, 2016, 1 p.
27. Палкин Е.В., Муллыджанов Р.И., Ничено Б., Вервиш Л., Ханъялич К. Численное решение уравнений Навье–Стокса с переменной плотностью в приближении малых чисел Маха // Сб. трудов Всероссийской конференции “Теплофизика и физическая гидродинамика”, Ялта, Крым, 19-25 сентября, 2016, 1 с.

28. Мулляджанов Р.И., Абдуракипов С.С., Ханъялич К. Когерентные структуры в ближней области круглой канонической струи // Сб. трудов XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, Россия, 20-24 августа, 2015, С. 2661–2664.
29. Palkin E, Mullyadzhanov R, Hadžiabdić M, Hanjalić K. Scrutinizing URANS models in shedding flows: The case of the cylinder in cross flow // Proc. of 8th International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer, Sarajevo, Bosnia & Herzegovina, September 15-18, 2015, 14 p.
30. Mullyadzhanov R., Abdurakipov S., Hanjalić K. On coherent structures in the near field of a pipe jet // Proc. of 8th International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer, Sarajevo, Bosnia & Herzegovina, September 15-18, 2015, 10 p.
31. Mullyadzhanov R., Abdurakipov S., Hanjalić K. Large-eddy simulations of the round jet with a fully developed inflow conditions at $Re = 5300$: Coherent structures evolution // Proc. of 13th Asian Symposium on Visualization, Novosibirsk, Russia, June 22-26, 2015, 6 p.
32. Мулляджанов Р.И., Сандберг Р.Д., Абдуракипов С.С., Ханъялич К. Турбулентные затопленные осесимметричные струи: новые результаты // Сб. трудов Всероссийской конференции “XXXII Сибирский теплофизический семинар”, Новосибирск, Россия, 19-20 ноября, 2015, 1 с.
33. Mullyadzhanov R., Abdurakipov S., Hanjalić K. Turbulent kinetic energy evolution in the near field of a rotating-pipe round jet // Proc. of X Direct and Large-Eddy Simulation ERCOFTAC Workshop, Limassol, Cyprus, May 27 - 29, 2015, 2 p.
34. Palkin E., Mullyadzhanov R., Hanjalić K. URANS and LES of a flow over a cylinder at $Re = 3900$ // Proc. of 17th International Conference on the Methods of Aerophysical Research, Novosibirsk, Russia, June 30 - July 6, 2014, 9 p.
35. Мулляджанов Р.И. Динамика и трехмерные вторичные течения в турбулентной щелевой струе // Сб. трудов XIII Всероссийской школы-конференции “Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики”, Новосибирск, Россия, 20-23 ноября, 2014, С. 123–124.
36. Mullyadzhanov R, Ilyushin B, Hadžiabdić M, Hanjalić K. Numerical study of a quasi-two-dimensional confined turbulent jet // Book of Abstracts of 14th European Turbulence Conference, Lyon, France, September 1-4, 2013, 2 p.

37. Hadžiabdić M., Mullyadzhanov R., Hanjalić K. LES investigation of the hysteresis regime in the cold model of a swirl burner // Proc. of 8th International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena, Poitiers, France, August 28-30, 2013, 4 p.
38. Mullyadzhanov R., Ilyushin B., Hadžiabdić M., Hanjalić K. Numerical simulation of a quasi-two-dimensional jet // Proc. of IX Direct and Large-Eddy Simulation ERCOFTAC Workshop, Dresden, Germany, April 3 - 5, 2013, 2 p.
39. Мулляджанов Р.И., Яворский Н.И. О задаче устойчивости для затопленной струи // Сб. трудов 4-ой Всероссийской конференции “Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения”, Бийск, Россия, 5-10 июля, 2011, С. 69–70.

Литература

1. Reynolds O. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels // [Proceedings of the Royal Society of London](#). — 1883. — Vol. 174. — P. 935–982.
2. Reynolds O. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion // [Proceedings of the Royal Society of London](#). — 1895. — Vol. 186. — P. 123–164.
3. Lin C. C. The Theory of Hydrodynamic Stability. — Cambridge University Press, 1955. — 155 p.
4. Drazin P., Reid W. Hydrodynamic Stability. — Cambridge University Press, 1981. — 539 p.
5. Schmid P. J., Henningson D. S. Stability and Transition in Shear Flows. — Applied Mathematical Sciences, Vol. 142, 2001. — 558 p.
6. Schmid P. J. Nonmodal stability theory // [Annual Review of Fluid Mechanics](#). — 2007. — Vol. 39. — P. 129–162.
7. von Helmholtz H. Über discontinuirliche flüssigkeitsbewegungen // Monatsbericht der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. — 1868. — Vol. 23. — P. 215–228.
8. Lord Kelvin. Hydrokinetic solutions and observations // Philosophical Magazine. — 1871. — Vol. 42. — P. 362–377.
9. Lord Rayleigh. On the instability of jets // [Proceedings of the London Mathematical Society](#). — 1879. — Vol. 10. — P. 4–13.
10. Lord Rayleigh. On the stability, or instability, of certain fluid motions // [Proceedings of the London Mathematical Society](#). — 1880. — Vol. 10. — P. 57–70.
11. Orr W. M. F. The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid // Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences. — 1907. — Vol. 27. — P. 9–138.
12. Sommerfeld A. Ein beitrage zur hydrodynamischen erklärung der turbulenten flüssigkeitsbewegungen // Proceedings of the 4th International Congress in Mathematics, Rome. — 1908. — P. 116–124.

13. Taylor G. I. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders // [Philosophical Transactions of the Royal Society of London](#). — 1923. — Vol. 223. — P. 289–343.
14. Lord Rayleigh. On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side // [The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science](#). — 1916. — Vol. 32, № 196. — P. 529–546.
15. Tollmien W. Über die entstehung der turbulenz // Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse. — 1929. — P. 21–44.
16. Schlichting H. Berechnung der anfachung kleiner störungen bei der plattenströmung // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. — 1933. — Vol. 13. — P. 171–174.
17. Klebanoff P., Tidstrom K., Sargent L. The three-dimensional nature of boundary layer instability // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1962. — Vol. 12. — P. 1–34.
18. Gaster M. A note on the relation between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1962. — Vol. 14, № 2. — P. 222–224.
19. Huerre P., Monkewitz P. A. Absolute and convective instabilities in free shear layers // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1985. — Vol. 159. — P. 151–168.
20. Huerre P., Monkewitz P. A. Local and global instabilities of spatially developing flows // [Annual Review of Fluid Mechanics](#). — 1990. — Vol. 22. — P. 473–537.
21. Böberg L., Brösa U. Onset of turbulence in a pipe // [Zeitschrift für Naturforschung A](#). — 1988. — Vol. 43. — P. 697–726.
22. Gustavsson H. Energy growth of three-dimensional disturbances in plane Poiseuille flow // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1991. — Vol. 224. — P. 241–260.
23. Butler K. M., Farrell B. F. Three-dimensional optimal perturbations in viscous shear flows // [Physics of Fluids A](#). — 1992. — Vol. 4. — P. 1637–1650.
24. Reddy S. C., Schmid P. J., Henningson D. S. Pseudospectra of the Orr-Sommerfeld operator // [SIAM Journal of Applied Mathematics](#). — 1993. — Vol. 53. — P. 15–47.
25. Reddy S. C., Henningson D. S. Energy growth in viscous channel flows // [Physics of Fluids](#). — 1993. — Vol. 252. — P. 209–238.

26. Trefethen L., Trefethen A., Reddy S., Driscoll T. Hydrodynamic stability without eigenvalues // [Science](#). — 1993. — Vol. 261. — P. 578–584.
27. Kerswell R. R. Recent progress in understanding the transition to turbulence in a pipe // [Nonlinearity](#). — 2005. — Vol. 18. — P. R17–R44.
28. Kerswell R. R. Nonlinear nonmodal stability theory // [Annual Review of Fluids Mechanics](#). — 2018. — Vol. 50. — P. 319–345.
29. Wygnanski I. J., Champagne F. H. On transition in a pipe. Part 1. The origin of puffs and slugs and the flow in a turbulent slug // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1973. — Vol. 59, no. 2. — P. 281–335.
30. Wygnanski I. J., Sokolov M., Friedman D. On transition in a pipe. Part 2. The equilibrium puff // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1975. — Vol. 69, no. 2. — P. 283–304.
31. Faisst H., Eckhardt B. Traveling waves in pipe flow // [Physical Review Letters](#). — 2003. — Vol. 91. — P. 224502.
32. Wedin H., Kerswell R. R. Exact coherent structures in pipe flow: travelling wave solutions // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2004. — Vol. 508. — P. 333–371.
33. Hof B., van Doorne C. W., Westerweel J., Nieuwstadt F.T., Faisst H., Eckhardt B., Wedin H., Kerswell R.R., Waleffe F. Experimental observation of nonlinear traveling waves in turbulent pipe flow // [Science](#). — 2004. — Vol. 305. — P. 1594–1598.
34. Priymak V. G., Miyazaki T. Direct numerical simulation of equilibrium spatially localized structures in pipe flow // [Physics of Fluids](#). — 2004. — Vol. 16, no. 12. — P. 4221–4234.
35. Peixinho J., Mullin T. Decay of turbulence in pipe flow // [Physical Review Letters](#). — 2006. — Vol. 96, no. 9. — P. 094501.
36. Hof B., Westerweel J., Schneider T.M., Eckhardt B. Finite lifetime of turbulence in shear flows // [Nature](#). — 2006. — Vol. 443. — P. 59–62.
37. Willis A. P., Kerswell R. R. Critical behavior in the relaminarization of localized turbulence in pipe flow // [Physical Review Letters](#). — 2007. — Vol. 98, no. 1. — P. 014501.
38. Hof B., de Lozar A., Kuik D.J., Westerweel J. Repeller or attractor? Selecting the dynamical model for the onset of turbulence in pipe flow // [Physical Review Letters](#). — 2008. — Vol. 101, no. 21. — P. 214501.

39. Kuik D. J., Poelma C., Westerweel J. Quantitative measurement of the lifetime of localized turbulence in pipe flow // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2010. — Vol. 645. — P. 529–539.
40. Avila K., Moxey D., de Lozar A., Avila M., Barkley D., Hof B. The onset of turbulence in pipe flow // [Science](#). — 2011. — Vol. 333, № 6039. — P. 192–196.
41. Avila M., Mellibovsky F., Roland N., Hof B. Streamwise-localized solutions at the onset of turbulence in pipe flow // [Physical Review Letters](#). — 2013. — Vol. 110, no. 22. — P. 224502.
42. Nikitin N. V., Pimanov V. O. Numerical study of localized turbulent structures in a pipe // [Fluid Dynamics](#). — 2015. — Vol. 50, no. 5. — P. 655–664.
43. Barkley D., Song B., Mukund V., Lemoult G., Avila M., Hof B. The rise of fully turbulent flow // [Nature](#). — 2015. — Vol. 526. — P. 550–553.
44. Ritter P., Mellibovsky F., Avila M. Emergence of spatio-temporal dynamics from exact coherent solutions in pipe flow // [New Journal of Physics](#). — 2016. — Vol. 18. — P. 083031.
45. Song B., Barkley D., Hof B., Avila M. Speed and structure of turbulent fronts in pipe flow // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2017. — Vol. 813. — P. 1045–1059.
46. Ritter P., Zammert S., Song B., Eckhardt B., Avila M. Analysis and modeling of localized invariant solutions in pipe flow // [Physical Review Fluids](#). — 2018. — Vol. 3. — P. 013901.
47. Budanur N. B., Short K. Y., Farazmand M., Willis A.P., Cvitanović P. Relative periodic orbits form the backbone of turbulent pipe flow // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2017. — Vol. 833. — P. 274–301.
48. Kline S. J., Reynolds W. C., Schraub F.A., Runstadler P.W. The structure of turbulent boundary layers // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1967. — Vol. 30. — P. 741–773.
49. Townsend A. A. The structure of the turbulent boundary layer // [Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society](#). — 1951. — Vol. 47. — P. 375–395.
50. Smith C. R., Metzler S. P. The characteristics of low-speed streaks in the near-wall region of a turbulent boundary layer // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1983. — Vol. 129. — P. 27–54.
51. Jeong J., Hussain F., Schoppa W., Kim J. Coherent structures near the wall in a turbulent channel flow // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1997. — Vol. 332. — P. 185–214.

52. del Álamo J. C., Jiménez J. Spectra of the very large anisotropic scales in turbulent channels // [Physics of Fluids](#). — 2003. — Vol. 15. — P. L41.
53. del Álamo J. C., Jiménez J., Zandonade P., Moser R. D. Scaling of the energy spectra of turbulent channels // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2004. — Vol. 500. — P. 135–144.
54. Adrian R. J. Hairpin vortex organization in wall turbulence // [Physics of Fluids](#). — 2007. — Vol. 19. — P. 041301.
55. Brown G. L., Roshko A. On density effects and large structure in turbulent mixing layers // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1974. — Vol. 64. — P. 775–816.
56. Crow S. C., Champagne F. H. Orderly structure in jet turbulence // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1971. — Vol. 48, № 3. — P. 547–591.
57. Roshko A. On the development of turbulent wakes from vortex streets // Technical Report NACA 1191. — 1954.
58. Tsuji Y. High-reynolds-number experiments: the challenge of understanding universality in turbulence // [Fluid Dynamics Research](#). — 2009. — Vol. 41. — P. 064003.
59. Kaneda Y., Morishita K. Small-scale statistics and structure of turbulence – in the light of high resolution Direct numerical simulation // Ten Chapters in Turbulence / Ed. by P. A. Davidson, Y. Kaneda, K. R. Sreenivasan. — UK : Cambridge University Press, 2012. — P. 1–42.
60. Tsinober A. An Informal Conceptual Introduction to Turbulence. — Springer, 2009. — 464 p.
61. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Доклады Академии Наук СССР. — 1941. — Т. 30. — С. 299–303.
62. Hussain A. K. F. M. Coherent structures – reality and myth // [Physics of Fluids](#). — 1983. — Vol. 26, № 10. — P. 2816–2850.
63. Hussain A. K. M. F. Coherent structures and turbulence // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1986. — Vol. 173. — P. 303–356.
64. Hussain A. K. M. F., Reynolds W. C. The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1970. — Vol. 41, № 2. — P. 241–261.

65. Malkus W. V. Outline of a theory of turbulent shear flow // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1956. — Vol. 1. — P. 521–539.
66. Landahl M. T. A wave-guide model for turbulent shear flow // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1967. — Vol. 29. — P. 441–459.
67. del Álamo J. C., Jiménez J. Linear energy amplification in turbulent channels // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2006. — Vol. 559. — P. 205–213.
68. Pujals G., García-Villalba M., Cossu C., Depardon S. A note on optimal transient growth in turbulent channel flows // [Physics of Fluids](#). — 2009. — Vol. 21. — P. 015109.
69. Chan Y.-Y. Spatial waves in turbulent jets // [The Physics of Fluids](#). — 1974. — Vol. 17. — P. 46–53.
70. Petersen R. A., Samet M. M. On the preferred mode of jet instability // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1988. — Vol. 194. — P. 153–173.
71. Fiedler H. E. Coherent structures in turbulent flows // [Progress in Aerospace Sciences](#). — 1988. — Vol. 25, № 3. — P. 231–269.
72. Ho C.-M., Huerre P. Perturbed free shear layers // [Annual Review of Fluid Mechanics](#). — 1984. — Vol. 16. — P. 365–422.
73. Fiedler H. E., Mensing P. The plane turbulent shear layer with periodic excitation // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1985. — Vol. 150. — P. 281–309.
74. Kibens V. Discrete noise spectrum generated by acoustically excited jet // [AIAA Journal](#). — 1980. — Vol. 18. — P. 434–441.
75. Mumford J. C. The structure of the large eddies in fully developed turbulent shear flows. Part 1. The plane jet // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1982. — Vol. 118. — P. 241–268.
76. Nieberle R. Entwicklung einer methode der mustererkennung zur analyse kohirenter structkturen und ihre anwendung ira turbulenten freistrah. — 1986.
77. Ničeno B. Kohärente Wirbelstrukturen im Nachlauf einer ruhenden und einer schwingungserregten Kreisscheibe : Ph.D. thesis / B. Ničeno ; Technical University of Berlin. — 1985.

78. Lumley J. L. The structure of inhomogeneous turbulent flows // Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation / Ed. by A. M. Yaglom, V. I. Tatarski. — Moscow : Nauka, 1967. — P. 166–178.
79. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — Наука, 1974. — 713 с.
80. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Том VI. Гидродинамика. — Москва : Наука, 1986. — 736 с.
81. Pope S. B. Turbulent flows. — Cambridge University Press, 2000. — 771 p.
82. Townsend A. A. Structure of Turbulent Shear Flow. — Cambridge University Press, 1976. — 438 p.
83. Gutmark E., Ho C.-M. Preferred modes and the spreading rates of jets // [Physics of Fluids](#). — 1983. — Vol. 26, № 10. — P. 2932–2938.
84. Wygnanski I., Champagne F., Marasli B. On the large-scale structures in two-dimensional, small-deficit, turbulent wakes // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1986. — Vol. 168. — P. 31–71.
85. George W. K. The self-preservation of turbulent flows and its relation to initial conditions and coherent structures // Advances in turbulence 2 / Ed. by H.-H. Fernholz, H. E. Fiedler. — Berlin : Springer, 1989. — P. 39–73.
86. Moin P., Mahesh K. Direct numerical simulation: A tool in turbulence research // [Annual Review of Fluid Mechanics](#). — 1998. — Vol. 30. — P. 539–578.
87. Hanjalić K., Launder B. Modelling Turbulence in Engineering and The Environment: Second-Moments Route to Closure. — Cambridge University Press, 2011. — 379 p.
88. Sagaut P. Large Eddy Simulation for Incompressible Flows: An Introduction. — Springer, 2006. — 557 p.
89. Schmitt F. G. About Boussinesq's turbulent viscosity hypothesis: historical remarks and a direct evaluation of its validity // [Comptes Rendus Mécanique](#). — 2007. — Vol. 335, № 9–10. — P. 617–627.
90. Boussinesq J. Essai sur la théorie des eaux courantes // Mémoires présentés par divers savants à l'Académie e des Sciences XXIII. — 1877. — Vol. 1. — P. 1–680.
91. Wilcox D. C. Turbulence modeling for CFD. — DCW Industries, Inc., 1994. — 477 p.

92. Spalart P. R., Allmaras S. R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // *La Recherche Aéronautique*. — 1994. — Vol. 1. — P. 5–21.
93. Колмогоров А.Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // *Известия АН СССР*. — 1942. — Т. 6, № 1–2. — С. 56–58.
94. Jones W. P., Launder B. E. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. — 1972. — Vol. 15, № 2. — P. 301–314.
95. Launder B. E., Sharma B. I. Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc // *Letters in Heat and Mass Transfer*. — 1974. — Vol. 1, № 2. — P. 131–137.
96. Durbin P. Near-wall turbulence closure modeling without “damping functions” // *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*. — 1991. — Vol. 3, № 1. — P. 1–13.
97. Van Driest E. R. On turbulent flow near a wall // *Journal of the Aeronautical Sciences*. — 1956. — Vol. 23, № 11. — P. 1007–1011.
98. Hanjalić K., Popovac M., Hadžiabdić M. A robust near-wall elliptic-relaxation eddy-viscosity turbulence model for CFD // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. — 2004. — Vol. 25, № 6. — P. 1047–1051.
99. Hanjalić K., Jakirlić S. Contribution towards the second-moment closure modelling of separating turbulent flows // *Computers and Fluids*. — 1998. — Vol. 27. — P. 137–156.
100. Jakirlić S., Hanjalić K. A new approach to modelling near-wall turbulence energy and stress dissipation // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2002. — Vol. 459. — P. 139–166.
101. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations: I. The basic experiment // *Monthly Weather Review*. — 1963. — Vol. 91, № 3. — P. 99–164.
102. Germano M., Piomelli U., Moin P., Cabot W. H. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model // *Physics of Fluids A*. — 1991. — Vol. 3, № 7. — P. 1760–1765.
103. Lilly D. K. A proposed modification of the germano subgrid-scale closure method // *Physics of Fluids A*. — 1992. — Vol. 4, № 3. — P. 633–635.
104. Yang K. S., Ferziger J. H. Large-eddy simulation of turbulent obstacle flow using a dynamic subgrid-scale model // *AIAA Journal*. — 1993. — Vol. 31, № 8. — P. 1406–1413.

105. Zang Y., Street R. L., Koseff J. R. A dynamic mixed subgrid-scale model and its application to turbulent recirculating flows // [Physics of Fluids A](#). — 1993. — Vol. 5, № 12. — P. 3186–3196.
106. Kim J. W., Sandberg R. D. Efficient parallel computing with a compact finite difference scheme // [Computers and Fluids](#). — 2012. — Vol. 58. — P. 70–87.
107. Sandberg R. D. Compressible-flow DNS with application to airfoil noise // [Flow, Turbulence and Combustion](#). — 2015. — Vol. 95, № 2–3. — P. 211–229.
108. Ničeno B. An unstructured parallel algorithm for large eddy and conjugate heat transfer simulations : Ph.D. thesis / B. Ničeno ; Delft University of Technology. — 2001. — P. 175.
109. Ničeno B., Hanjalić K. Unstructured large eddy and conjugate heat transfer simulations of wall-bounded flows // *Modelling and Simulation of Turbulent Heat Transfer* / Ed. by B. Sunden, M. Faghri. — WIT Press, 2005. — P. 32–73.
110. White F. M. *Viscous Fluid Flow*. — McGraw-Hill, 1991. — 614 p.
111. Kim J. W. Optimised boundary compact finite difference schemes for computational aeroacoustics // [Journal of Computational Physics](#). — 2007. — Vol. 225. — P. 995–1019.
112. Bogey C., Cacqueray N. D., Bailly C. A shock-capturing methodology based on adaptative spatial filtering for high-order non-linear computations // [Journal of Computational Physics](#). — 2009. — Vol. 228, № 5. — P. 1447–1465.
113. Sandberg R. D. An axis treatment for flow equations in cylindrical coordinates based on parity conditions // [Computers and Fluids](#). — 2011. — Vol. 49, № 1. — P. 166–172.
114. Kennedy C., Carpenter M., Lewis R. Low-storage, explicit Runge–Kutta schemes for the compressible Navier–Stokes equations // [Applied Numerical Mathematics](#). — 2000. — Vol. 35, № 3. — P. 177–219.
115. Kennedy C., Gruber A. Reduced aliasing formulations of the convective terms within the Navier–Stokes equations for a compressible fluid // [Journal of Computational Physics](#). — 2008. — Vol. 227, № 3. — P. 1676–1700.
116. Sandberg R. D., Sandham N. D. Nonreflecting zonal characteristic boundary condition for direct numerical simulation of aerodynamic sound // [AIAA Journal](#). — 2006. — Vol. 44, № 2. — P. 402–405.

117. Ferziger J. H., Peric M. Computational Methods for Fluid Dynamics. — 3rd edition. — Springer Science & Business Media, 2011. — 426 p.
118. Rhie C. M., Chow W. L. Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation // [AIAA Journal](#). — 1983. — Vol. 21, № 11. — P. 1525–1532.
119. Holmes P., Lumley J. L., Berkooz G., Rowley C. W. Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry. — 2nd edition. — Cambridge University Press, 2012. — 403 p.
120. Sirovich L. Turbulence and the dynamics of coherent structures. I. Coherent structures // Quarterly of applied mathematics. — 1987. — Vol. 45, № 3. — P. 561–571.
121. George W. K. A 50-year retrospective and the future // Whither Turbulence and Big Data in the 21st Century? / Ed. by A. Pollard, L. Castillo, L. Danail, M. Glauser. — Springer, 2017. — P. 13–43.
122. Khorrami M. R., Malik M. R., Ash R. L. Application of spectral collocation techniques to the stability of swirling flows // [Journal of Computational Physics](#). — 1989. — Vol. 81, № 1. — P. 206–229.
123. Khorrami M. R. A Chebyshev spectral collocation method using a staggered grid for the stability of cylindrical flows // [International Journal for Numerical Methods in Fluids](#). — 1991. — Vol. 12, № 9. — P. 825–833.
124. Абдуракипов С. С. Особенности спиральных структур в закрученных струях и пламени : Дисс. . . кандидата наук / Абдуракипов С. С. ; Институт теплофизики СО РАН им. С.С. Кутателадзе, Новосибирск, Россия. — 2016. — 209 с.
125. Schlichting H. Laminare strahlausbreitung // [ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik](#). — 1933. — Vol. 13, № 4. — P. 260–263.
126. Bickley W. G. The plane jet // [The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science](#). — 1937. — Vol. 23, № 156. — P. 727–731.
127. Jeffery G. B. The two-dimensional steady motion of a viscous fluid // [The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science](#). — 1915. — Vol. 29, № 172. — P. 455–465.

128. Hamel G. Spiralförmige bewegungen zäher flüssigkeiten // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. — 1916. — Vol. 25. — P. 34–60.
129. Слѣзкин М. А. Об одном случае интегрируемости полных дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости // Учёные записки МГУ. — 1934. — Т. 2. — С. 89–90.
130. Ландау Л. Д. Об одном новом точном решении уравнений Навье-Стокса // Доклады АН СССР. — 1944. — Т. 43, № 7. — С. 299–301.
131. Squire H. B. The round laminar jet // [The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics](#). — 1951. — Vol. 4, № 3. — P. 321–329.
132. Румер Ю. Б. Задача о затопленной струе // Прикладная математика и механика. — 1952. — Т. 16, № 2. — С. 255–256.
133. Гольдштик М. А., Яворский Н. И. О затопленных струях // Прикладная математика и механика. — 1986. — Т. 50, № 4. — С. 573–583.
134. Гольдштик М. А., Штерн В. Н., Яворский Н. И. Вязкие течения с парадоксальными свойствами. — Новосибирск : Наука, 1989. — 336 с.
135. Яворский Н. И. Теория затопленных струй и следов. — Новосибирск : Институт теплофизики СО РАН, 1998. — 242 с.
136. Kurdyumov V. N. Far-field description of the flow produced by a source of both momentum and mass // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2005. — Vol. 532. — P. 191–198.
137. Цуккер М. С. Закрученная струя, распространяющаяся в пространстве, затопленном той же жидкостью // Прикладная математика и механика. — 1955. — Т. 19, № 4. — С. 500–503.
138. Лойцянский Л. Г. Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью // Прикладная математика и механика. — 1953. — Т. 17, № 1. — С. 14–27.
139. Яворский Н. И. Неосесимметричные затопленные струи // Прикладная математика и механика. — 1988. — Т. 52. — С. 760–772.
140. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. — Clarendon, 1961. — 652 p.
141. Betchov R., Criminale W. O. Stability of Parallel Flows. — Academic Press, 1967. — 344 p.

142. Joseph D. D. Stability of Fluid Motions I. — Springer-Verlag, 1976. — 282 p.
143. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. — Наука, 1972. — 392 с.
144. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. — Наука, 1977. — 368 с.
145. Юдович В. И. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. — РГУ, 1984. — 191 с.
146. Boiko A. V., Grek G. R., Dovgal A. V., Kozlov V. V. The Origin of Turbulence in Near-Wall Flows. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013. — 265 p.
147. Örlu R., Alfredsson P. H. The life of a vortex in an axisymmetric jet // [Journal of Visualization](#). — 2011. — Vol. 14, № 1. — P. 5–6.
148. Batchelor G. K., Gill A. E. Analysis of the stability of axisymmetric jets // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1962. — Vol. 14, № 4. — P. 529–551.
149. Michalke A. On the inviscid instability of the hyperbolic-tangent velocity profile // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1964. — Vol. 19, № 4. — P. 543–556.
150. Michalke A. On spatially growing disturbances in an inviscid shear layer // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1965. — Vol. 23, № 3. — P. 521–544.
151. Monkewitz P. A., Huerre P. Influence of the velocity ratio on the spatial instability of mixing layers // [Physics of Fluids](#). — 1982. — Vol. 25, № 7. — P. 1137–1143.
152. Michalke A., Hermann G. On the inviscid instability of a circular jet with external flow // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1982. — Vol. 114. — P. 343–359.
153. Keiderling F., Kleiser L., C. B. Numerical study of eigenmode forcing effects on jet flow development and noise generation mechanisms // [Physics of Fluids](#). — 2009. — Vol. 21. — P. 045106.
154. Kambe T. The stability of an axisymmetric jet with parabolic profile // [Journal of the Physical Society of Japan](#). — 1969. — Vol. 26, № 2. — P. 566–575.
155. Lessen M., Singh P. J. The stability of axisymmetric free shear layers // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1973. — Vol. 60, № 3. — P. 433–457.

156. Mollendorf J. C., Gebhart B. An experimental and numerical study of the viscous stability of a round laminar vertical jet with and without thermal buoyancy for symmetric and asymmetric disturbances // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1973. — Vol. 61, № 2. — P. 367–399.
157. Reynolds A. J. Observations of a liquid-into-liquid jet // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1962. — Vol. 14, № 4. — P. 552–556.
158. Viilu A. An experimental determination of the minimum reynolds number for instability in a free jet // [Journal of Applied Mechanics](#). — 1962. — Vol. 29, № 3. — P. 506–508.
159. McNaughton K. J., Sinclair C. G. Submerged jets in short cylindrical flow vessels // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1966. — Vol. 25, № 2. — P. 367–375.
160. Козлов Г. В., Грек Г. Р., Сорокин А. М., Литвиненко Ю. А. Влияние начальных условий на срезе сопла на структуру круглой струи // Теплофизика и аэромеханика. — 2008. — Т. 15, № 1. — С. 59–73.
161. Козлов В. В., Грек Г. Р., Козлов Г. В., Литвиненко М. В. Дозвуковая круглая и плоская макро- и микроструи в поперечном акустическом поле // Вестник НГУ. Серия: Физика. — 2010. — Т. 5, № 2. — С. 28–42.
162. Леманов В. В., Терехов В. И., Шаров К. А., Шумейко А. А. Экспериментальное исследование затопленных струй при низких числах Рейнольдса // Письма в журнал технической физики. — 2013. — Т. 39, № 9. — С. 34–40.
163. Tatsumi T., Kakutani T. The stability of a two-dimensional laminar jet // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1958. — Vol. 4, № 3. — P. 261–275.
164. Ling C.-H., Reynolds W. C. Non-parallel flow corrections for the stability of shear flows // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1973. — Vol. 59, № 3. — P. 571–591.
165. Garg V. K. Spatial stability of the non-parallel bickley jet // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1981. — Vol. 102. — P. 127–140.
166. Tam K. K. Linear stability of the non-parallel bickley jet // Canadian Applied Mathematics Quarterly. — 1995. — Vol. 3, № 1. — P. 99–110.
167. McAlpine A., Drazin P. G. On the spatio-temporal development of small perturbations of jeffery-hamel flows // [Fluid Dynamics Research](#). — 1998. — Vol. 22. — P. 123–138.

168. Лихачев О. А. Анализ устойчивости автомодельной круглой струи с учётом эффектов непараллельности // Журнал прикладной механики и технической физики. — 1990. — Т. 4, № 4. — С. 118–124.
169. Shtern V., Hussain F. Effect of deceleration on jet instability // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2003. — Vol. 480. — P. 283–309.
170. Garnaud X., Lesshafft L., Schmid P. J., Huerre P. Modal and transient dynamics of jet flows // [Physics of Fluids](#). — 2013. — Vol. 25. — P. 044103.
171. Lesshafft L. Artificial eigenmodes in truncated flow domains // [Theoretical and Computational Fluid Dynamics](#). — 2017.
172. Andrade E. N. da C., Tsien L. C. The velocity-distribution in a liquid-into-liquid jet // Proceedings of the Physical Society. — 1937. — Vol. 49, № 4. — P. 381–391.
173. Rankin G. W., Sridhar K., Arulraja M., Kumar K. R. An experimental investigation of laminar axisymmetric submerged jets // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1983. — Vol. 133. — P. 217–231.
174. Boersma B. J., Brethouwer G., Nieuwstadt F. T. M. A numerical investigation on the effect of the inflow conditions on the self-similar region of a round jet // [Physics of Fluids](#). — 1998. — Vol. 10, № 4. — P. 899–909.
175. Шапеев А. В. Нестационарное автомодельное течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском диффузоре // Известия РАН. Механика жидкости и газа. — 2004. — Т. 1, № 1. — С. 41.
176. Шапеев А. В. Исследование смешанной спектрально-разностной аппроксимации на примере задачи о вязком течении в диффузоре // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2005. — Т. 8. — С. 149–162.
177. Sozou C., Pickering W. M. The round laminar jet: the development of the flow field // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1977. — Vol. 80. — P. 673–683.
178. Sozou C. Development of the flow field of a point force in an infinite fluid // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1979. — Vol. 91. — P. 541–546.
179. Cantwell B. J. Transition in the axisymmetric jet // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1981. — Vol. 104. — P. 369–386.

180. Мулладжанов Р. И. Затопленные струйные МГД течения : Дисс... кандидата наук / Мулладжанов Р. И. ; Институт теплофизики СО РАН им. С.С. Кутателадзе, Новосибирск, Россия. — 2012. — 108 с.
181. Shtern V., Hussain F. Instabilities of conical flows causing steady bifurcations // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1998. — Vol. 366. — P. 33–85.
182. Mullyadzhanov R. I., Yavorsky N. I. On the self-similar exact MHD jet solution // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2014. — Vol. 746. — P. 5–30.
183. Morris P. J. The spatial viscous instability of axisymmetric jets // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1976. — Vol. 77, № 3. — P. 511–529.
184. Van Dyke M. An Album of Fluid Motion. — The Parabolic Press, 1982. — 177 p.
185. Dimotakis P. E., Miake-Lye R. C., Papantoniou D. A. Structure and dynamics of round turbulent jets // [Physics of Fluids](#). — 1983. — Vol. 26, № 11. — P. 3185–3192.
186. Tollmien W. Berechnung turbulenter ausbreitungsvorgänge // [ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik](#). — 1926. — Vol. 6, № 6. — P. 468–478.
187. Букреев В. И., Васильев О. Ф., Лыткин Ю. М. О влиянии формы тела на характеристики автомодельного осесимметричного следа // Доклады АН СССР. — 1972. — Т. 207, № 4. — С. 804–807.
188. Черепанов П. Я., Дмитренко Ю. М. О влиянии формы тела на характеристики автомодельного плоского следа // Инженерно-физический журнал. — 1988. — Т. 54, № 6. — С. 912–919.
189. Ghosal S., Rogers M. M. A numerical study of self-similarity in a turbulent plane wake using large-eddy simulation // [Physics of Fluids](#). — 1997. — Vol. 9, № 6. — P. 1729–1739.
190. Moser R. D., Rogers M. M., Ewing D. W. Self-similarity of time-evolving plane wakes // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1998. — Vol. 367. — P. 255–289.
191. Slessor M. D., Bond C. L., Dimotakis P. E. Turbulent shear-layer mixing at high Reynolds numbers: effects of inflow conditions // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1998. — Vol. 376. — P. 115–138.

192. Johansson P. B. V., George W. K., Gourlay M. J. Equilibrium similarity, effects of initial conditions and local reynolds number on the axisymmetric wake // [Physics of Fluids](#). — 2003. — Vol. 15, № 3. — P. 603–617.
193. Mi J., Nobes D. S., Nathan G. J. Influence of jet exit conditions on the passive scalar field of an axisymmetric free jet // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2001. — Vol. 432. — P. 91–125.
194. Wygnanski I., Fiedler H. Some measurements in the self-preserving jet // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1969. — Vol. 38, № 3. — P. 577–612.
195. Panchapakesan N. R., Lumley J. L. Turbulence measurements in axisymmetric jets of air and helium. Part 1. Air jet. // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1993. — Vol. 246. — P. 197–223.
196. Hussein H. J., Capp S. P., George W. K. Velocity measurements in a high-Reynolds-number, momentum-conserving, axisymmetric, turbulent jet // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1994. — Vol. 258. — P. 31–75.
197. Boguslavski L., Popiel C. O. Flow structure of the free round turbulent jet in the initial region // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1979. — Vol. 90, № 3. — P. 531–539.
198. Weisgraber T. H., Liepmann D. Turbulent structure during transition to self-similarity in a round jet // [Experiments in Fluids](#). — 1998. — Vol. 24. — P. 210–224.
199. Ferdman E., Otügen M. V., S. K. Turbulent structure during transition to self-similarity in a round jet // [Journal of Propulsion and Power](#). — 2000. — Vol. 16, № 4. — P. 676–686.
200. Xu G., Antonia R. A. Effect of different initial conditions on a turbulent round free jet // [Experiments in Fluids](#). — 2002. — Vol. 33, № 5. — P. 677–683.
201. Quinn W. R. Upstream nozzle shaping effects on near field flow in round turbulent free jets // [European Journal of Mechanics-B/Fluids](#). — 2006. — Vol. 25, № 3. — P. 279–301.
202. Fellouah H., Ball C. G., Pollard A. Reynolds number effects within the development region of a turbulent round free jet // [International Journal of Heat and Mass Transfer](#). — 2009. — Vol. 52, № 17–18. — P. 3943–3954.
203. Vouros A. P., Panadis T. Turbulent properties of a low Reynolds number, axisymmetric, pipe jet // [Experimental Thermal and Fluid Science](#). — 2013. — Vol. 44. — P. 42–50.

204. Mullyadzhanov R., Abdurakipov S., Hanjalic K. Helical structures in the near field of a turbulent pipe jet // [Flow, Turbulence and Combustion](#). — 2017. — Vol. 98, № 2. — P. 367–388.
205. George W. K. Some new ideas for similarity of turbulent shear flows // *Turbulence, Heat, and Mass Transfer 1* / Ed. by K. Hanjalic, J. F. C. Pereira. — Begell House, 1995. — P. 13–24.
206. Tennekes H., Lumley J. L. *A First Course in Turbulence*. — MIT Press, 1972. — 310 p.
207. Ewing D. On multi-point similarity solutions in turbulent free-shear flows : Ph.D. thesis / D. Ewing ; State University of New York at Buffalo. — 1995. — P. 261.
208. Ewing D., Frohnapfel B., George W. K., Pedersen J. M., Westerweel J. Two-point similarity in the round jet // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2007. — Vol. 577. — P. 309–330.
209. Cantwell B. J. Organized motion in turbulent flow // [Annual Review of Fluid Mechanics](#). — 1981. — Vol. 13, № 1. — P. 457–515.
210. Ball C. G., Fellouah H., Pollard A. The flow field in turbulent round free jets // [Progress in Aerospace Sciences](#). — 2012. — Vol. 50. — P. 1–26.
211. Jordan P., Colonius T. Wave packets and turbulent jet noise // [Annual Review of Fluid Mechanics](#). — 2013. — Vol. 45. — P. 173–195.
212. Antonia R. A., Zhao Q. Effect of initial conditions on a circular jet // [Experiments in Fluids](#). — 2001. — Vol. 31, № 3. — P. 319–323.
213. George W. K. Asymptotic effect of initial and upstream conditions on turbulence // [Journal of Fluids Engineering](#). — 2012. — Vol. 134, № 6. — P. 061203.
214. Hickey J. P., Hussain F., Wu X. Role of coherent structures in multiple self-similar states of turbulent planar wakes // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2013. — Vol. 731. — P. 312–363.
215. Obligado M., Dairay T., Vassilicos J. C. Nonequilibrium scalings of turbulent wakes // [Physical Review Fluids](#). — 2017. — Vol. 1, № 4. — P. 044409.
216. Yule A. J. Large-scale structure in the mixing layer of a round jet // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1978. — Vol. 89, № 3. — P. 413–432.
217. Garnaud X., Lesshafft L., Schmid P. J., Huerre P. The preferred mode of incompressible jets: linear frequency response analysis // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2013. — Vol. 716. — P. 189–202.

218. Liepmann D., Gharib M. The role of streamwise vorticity in the near-field entrainment of round jets // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1992. — Vol. 245. — P. 643–668.
219. Kozlov V. V., Grek G. R., Dovgal A. V., Litvinenko Y. A. Stability of subsonic jet flows // [Journal of Flow Control, Measurement & Visualization](#). — 2013. — Vol. 1, № 3. — P. 94–101.
220. Zarruk G. A., Cowen E. A. Simultaneous velocity and passive scalar concentration measurements in low Reynolds number neutrally buoyant turbulent round jets // [Experiments in Fluids](#). — 2008. — Vol. 44, № 6. — P. 865–872.
221. Capone A., Soldati A., Romano G. P. Mixing and entrainment in the near field of turbulent round jets // [Experiments in Fluids](#). — 2013. — Vol. 54, № 1. — P. 1–14.
222. Lockwood F. C., Moneib H. A. Fluctuating temperature measurements in a heated round free jet // [Combustion Science and Technology](#). — 1980. — Vol. 22, № 1–2. — P. 63–81.
223. Pitts W. M., Koshiwagi T. The application of laser-induced Rayleigh light scattering to the study of turbulent mixing // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1984. — Vol. 141. — P. 391–429.
224. Örlü R., Alfredsson P. H. An experimental study of the near-field mixing characteristics of a swirling jet // [Flow Turbulence and Combustion](#). — 2008. — Vol. 80, № 3. — P. 323–350.
225. Cintrini J. H., George W. K. Reconstruction of the global velocity field in the axisymmetric mixing layer utilizing the proper orthogonal decomposition // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2000. — Vol. 418. — P. 137–166.
226. Jung D., Gamard S., George W. K. Downstream evolution of the most energetic modes in a turbulent axisymmetric jet at high Reynolds number. Part 1. The near-field region // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2004. — Vol. 514. — P. 173–204.
227. Gamard S., Jung D., George W. K. Downstream evolution of the most energetic modes in a turbulent axisymmetric jet at high Reynolds number. Part 2. The far-field region // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2004. — Vol. 514. — P. 205–230.
228. Iqbal M. O., Thomas F. O. Coherent structure in a turbulent jet via a vector implementation of the proper orthogonal decomposition // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2007. — Vol. 571. — P. 281–326.
229. Freund J. B., Colonius T. Turbulence and sound-field POD analysis of a turbulent jet // [International Journal of Aeroacoustics](#). — 2009. — Vol. 8. — P. 337–354.

230. Freund J. B. Noise sources in a low-Reynolds-number turbulent jet at Mach 0.9 // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2001. — Vol. 438. — P. 277–305.
231. Danaila I., Dušek J., Anselmet F. Coherent structures in a round, spatially evolving, unforced, homogeneous jet at low Reynolds numbers // [Physics of Fluids](#). — 1997. — Vol. 9. — P. 3323–3342.
232. Mattingly G. E., Chang C. C. Unstable waves on an axisymmetric jet column // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1974. — Vol. 65, № 3. — P. 541–560.
233. Chan Y. Y. Wavelike eddies in a turbulent jet // [AIAA Journal](#). — 1977. — Vol. 15, № 7. — P. 992–1001.
234. Tso J., Kovasznay L. S. G., Hussain F. Organized motions in a fully developed turbulent axisymmetric jet // [Journal of Fluids Engineering](#). — 1981. — Vol. 103. — P. 503–508.
235. Tso J., Hussain F. Organized motions in a fully developed turbulent axisymmetric jet // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1989. — Vol. 203. — P. 425–448.
236. Mungal M. G., Hollingsworth D. K. Organized motion in a very high Reynolds number jet // [Physics of Fluids A](#). — 1989. — Vol. 1, № 10. — P. 1615–1623.
237. Yoda M., Hesselink L., Mungal M. G. The evolution and nature of large-scale structures in the turbulent jet // [Physics of Fluids](#). — 1992. — Vol. 4, № 4. — P. 803–811.
238. Yoda M., Hesselink L., Mungal M. G. Instantaneous three-dimensional concentration measurements in the self-similar region of a round high-Schmidt-number jet // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1994. — Vol. 279. — P. 313–350.
239. Agrawal A., Prasad A. Properties of vortices in the self-similar turbulent jet // [Experiments in fluids](#). — 2002. — Vol. 33, № 4. — P. 565–577.
240. Shinneeb A.-M., Balachandar R., Bugg J. D. Analysis of coherent structures in the far-field region of an axisymmetric free jet identified using particle image velocimetry and proper orthogonal decomposition // [Journal of Fluids Engineering](#). — 2008. — Vol. 130, № 1. — P. 011202.
241. Wänström M., George W. K., Meyer K. E. Stereoscopic PIV and POD applied to the far turbulent axisymmetric jet // [AIAA Journal](#). — 2005. — Vol. 3368. — P. 1–16.

242. Wänström M., George W. K., Meyer K. E. Streamwise and radial decomposition of a turbulent axisymmetric jet // Progress in Turbulence and Wind Energy IV / Ed. by M. Oberlack, J. Peinke, A. Talamelli et al. — Springer, 2012. — P. 147–150.
243. Ryu J., Lele S. K., Viswanathan K. Study of supersonic wave components in high-speed turbulent jets using an LES database // [Journal of Sound and Vibration](#). — 2014. — Vol. 333, № 25. — P. 6900–6923.
244. Ryu J., Lele S. K. Instability waves in high-speed jets: Near- and far-field DNS/LES data analysis // [International Journal of Aeroacoustics](#). — 2015. — Vol. 14, № 3–4. — P. 643–674.
245. Bodony D. J., Lele S. K. On using large-eddy simulation for the prediction of noise from cold and heated turbulent jets // [Physics of Fluids](#). — 2005. — Vol. 17, № 8. — P. 085103.
246. Ryu J. Study of high-speed turbulent jet noise using decomposition methods : Ph.D. thesis / J. Ryu ; Stanford University, USA. — 2010. — P. 205.
247. Hunt J. C. R., Wray A. A., Moin P. Eddies, streams, and convergence zones in turbulent flows // Proceedings of the CTR Summer Program. — 1988. — P. 193–208.
248. Eggels J. G., Unger F., Weiss M. H., Westerweel J., Adrian R. J., Friedreich F., Nieuwstadt F. T. M. Fully developed turbulent pipe flow: a comparison between direct numerical simulation and experiment // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1994. — Vol. 268. — P. 175–209.
249. Wu X., Moin P. A direct numerical simulation study on the mean velocity characteristics in turbulent pipe flow // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2008. — Vol. 608. — P. 81–112.
250. Kim J., Choi H. Large eddy simulation of a circular jet: effect of inflow conditions on the near field // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2009. — Vol. 620. — P. 383–411.
251. Sandberg R. D., Sandham N. D., Saponitsky V. DNS of compressible pipe flow exiting into a coflow // [International Journal of Heat and Fluid Flow](#). — 2012. — Vol. 35. — P. 33–44.
252. Duggeby A., Ball K. S., Paul M. R., Fischer P. F. Dynamical eigenfunction decomposition of turbulent pipe flow // [Journal of Turbulence](#). — 2007. — Vol. 8, № 43. — P. 1–24.
253. Oberleithner K., Paschereit C. O., Seele R., Wygnanski I. Formation of turbulent vortex breakdown: intermittency, criticality, and global instability // [AIAA Paper](#). — 2012. — Vol. 50, № 7. — P. 1437–1452.

254. Sirovich L., Ball K. L., Keefe L. R. Plane waves and structures in turbulent channel flow // [Physics of Fluids A](#). — 1990. — Vol. 2. — P. 2217–2226.
255. Ball K. S., Sirovich L., Keefe L. R. Dynamical eigenfunction decomposition of turbulent channel flow // [International Journal of Numerical Methods in Fluids](#). — 1991. — Vol. 12. — P. 585–604.
256. Sirovich L., Ball K. S., Handler R. A. Propagating structures in wall-bounded turbulent flows // [Theoretical and Computational Fluid Dynamics](#). — 1991. — Vol. 2. — P. 307–317.
257. Davoust S., Jacquin L., Leclaire B. Dynamics of $m = 0$ and $m = 1$ modes and of streamwise vortices in a turbulent axisymmetric mixing layer // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2012. — Vol. 709. — P. 408–444.
258. Toubert E., Sandham N. D. Large-eddy simulation of low-frequency unsteadiness in a turbulent shock-induced separation bubble // [Theoretical and Computational Fluid Dynamics](#). — 2009. — Vol. 23. — P. 79–107.
259. Burattini P., Antonia R. A., Danaila L. Similarity in the far field of a turbulent round jet // [Physics of Fluids](#). — 2005. — Vol. 17, № 2. — P. 025101.
260. Lau T., Nathan G. The effect of Stokes number on particle velocity and concentration distributions in a well-characterised, turbulent, co-flowing two-phase jet // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2016. — Vol. 809. — P. 72–110.
261. Gupta A. K., Lilley D. G., Syred N. Swirl Flows. — Abacus Press, 1984. — 488 p.
262. Panda J., McLaughlin D. K. Experiments on the instabilities of a swirling jet // [Physics of Fluids](#). — 1994. — Vol. 6, № 1. — P. 263.
263. Oljaca M., Gu X., Glezer A., Baffico M., Lund F. Ultrasound scattering by a swirling jet // [Physics of Fluids](#). — 1998. — Vol. 10, № 4. — P. 886–898.
264. Billant P., Chomaz J., Huerre P. Experimental study of vortex breakdown in swirling jets // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1998. — Vol. 376. — P. 183–219.
265. Alekseenko S. V., Dulin V. M., Kozorezov Yu. S., Markovich D. M. Effect of axisymmetric forcing on the structure of a swirling turbulent jet // [International Journal of Heat and Fluid Flow](#). — 2008. — Vol. 29. — P. 1699–1715.

266. Leclaire B., Jacquin L. On the generation of swirling jets: high-Reynolds-number rotating flow in a pipe with a final contraction // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2012. — Vol. 692. — P. 78–111.
267. Örlü R. Experimental studies in jet flows and zero pressure-gradient turbulent boundary layers : Ph.D. thesis / R. Örlü ; KTH, Stockholm, Sweden. — 2009. — P. 287.
268. Rose W. G. A swirling round turbulent jet: 1 – Mean-flow measurements // [Journal of Applied Mechanics](#). — 1962. — Vol. 29, № 4. — P. 615–625.
269. Pratte B. D., Keffer J. F. The swirling turbulent jet // [Journal of Basic Engineering](#). — 1972. — Vol. 94, № 4. — P. 739–747.
270. Mehta R. D., Wood D. H., Clausen P. D. Some effects of swirl on turbulent mixing layer development // [Physics of Fluids A](#). — 1991. — Vol. 3. — P. 2716.
271. Facciolo L., Alfredsson P. H. The counter-rotating core of a swirling turbulent jet issuing from a rotating pipe flow // [Physics of Fluids](#). — 2004. — Vol. 16. — P. L71–L73.
272. Facciolo L., Tillmark N., Talamelli A., Alfredsson P. H. A study of swirling turbulent pipe and jet flows // [Physics of Fluids](#). — 2007. — Vol. 19. — P. 035105.
273. Maciel Y., Facciolo L., Duwig C., Fuchs L., Alfredsson P. H. Near-field dynamics of a turbulent round jet with moderate swirl // [International Journal of Heat and Fluid Flow](#). — 2008. — Vol. 29. — P. 675–686.
274. Liang H., Maxworthy T. An experimental investigation of swirling jets // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2005. — Vol. 525. — P. 115–159.
275. Lucca-Negro O., O'Doherty T. Vortex breakdown: a review // [Progress in Energy and Combustion Science](#). — 2001. — Vol. 27, № 4. — P. 431–481.
276. Syred N. A review of oscillation mechanisms and the role of the precessing vortex core (PVC) in swirl combustion systems // [Progress in Energy and Combustion Science](#). — 2006. — Vol. 32, № 2. — P. 93–161.
277. Luginsland T., Kleiser L. Effects of boundary conditions on vortex breakdown in compressible swirling jet flow simulations // [Computers and Fluids](#). — 2015. — Vol. 109. — P. 72–84.
278. Luginsland T. How the nozzle geometry impacts vortex breakdown in compressible swirling-jet flows // [AIAA Journal](#). — 2015. — Vol. 53, № 10. — P. 2936–2950.

279. Luginsland T., Gallaire F., Kleiser L. Impact of rotating and fixed nozzles on vortex breakdown in compressible swirling jet flows // [European Journal of Mechanics B/Fluids](#). — 2016. — Vol. 57. — P. 214–230.
280. Sanmiguel-Rojas E., Burgos M. A., del Pino C., Fernandez-Feria R. Three-dimensional structure of confined swirling jets at moderately large Reynolds numbers // [Physics of Fluids](#). — 2008. — Vol. 20. — P. 044104.
281. Miranda-Barea A., Martinez-Arias B., Parras L., Burgos M. A., del Pino C. Experimental study of rotating Hagen-Poiseuille flow discharging into a 1:8 sudden expansion // [Physics of Fluids](#). — 2015. — Vol. 27. — P. 034104.
282. McIlwain S., Pollard A. Large eddy simulation of the effects of mild swirl on the near field of a round free jet // [Physics of Fluids](#). — 2002. — Vol. 14. — P. 653.
283. Orlandi P., Fatica M. Direct simulations of turbulent flow in a pipe rotating about its axis // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1997. — Vol. 343. — P. 43–72.
284. Gallaire F., Chomaz J.-M. Mode selection in swirling jet experiments: a linear stability analysis // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2004. — Vol. 494. — P. 223–253.
285. Sheen H. J., Chen W. J., Jeng S. Y. Recirculation zones of unconfined and confined annular swirling jets // [AIAA Journal](#). — 1996. — Vol. 34, № 3. — P. 572–579.
286. Wang P., Bai X.-S., Wessman M., Klingman J. Large eddy simulation and experimental studies of a confined turbulent swirling flow // [Physics of Fluids](#). — 2002. — Vol. 16, № 9. — P. 3306–3324.
287. Al-Abdeli Y. M., Masri A. R. Recirculation and flow field regimes of unconfined non-reacting swirling flows // [Experimental Thermal and Fluid Science](#). — 2003. — Vol. 27, № 5. — P. 655–665.
288. Vanoverberghe K. P., Van Den Bulck E. V., Tummers M. J. Confined annular swirling jet combustion // [Combustion Science and Technology](#). — 2003. — Vol. 175, № 3. — P. 545–578.
289. Al-Abdeli Y. M., Masri A. R. Precession and recirculation in turbulent swirling isothermal jets // [Combustion science and technology](#). — 2004. — Vol. 176, № 5–6. — P. 645–665.
290. Vanierschot M., Van den Bulck E. Hysteresis in flow patterns in annular swirling jets // [Experimental Thermal and Fluid Science](#). — 2007. — Vol. 31, № 6. — P. 545–578.

291. Vanierschot M., Van den Bulck E. Influence of swirl on the initial merging zone of a turbulent annular jet // [Physics of Fluids](#). — 2008. — Vol. 20. — P. 105104.
292. Litvinov I. V., Shtork S. I., Kuibin P. A., Alekseenko S. V., Hanjalic K. Experimental study and analytical reconstruction of precessing vortex in a tangential swirler // [International Journal of Heat and Fluid Flow](#). — 2013. — Vol. 42. — P. 251–264.
293. Markovich D. M., Abdurakipov S. S., Chikishev L. M., Dulin V. M., Hanjalic K. Comparative analysis of low-and high-swirl confined flames and jets by proper orthogonal and dynamic mode decompositions // [Physics of Fluids](#). — 2014. — Vol. 26, № 6. — P. 065109.
294. Pierce C. D., Moin P. Large eddy simulation of a confined coaxial jet with swirl and heat release // [AIAA Journal](#). — 1998. — P. 2892.
295. Lu X., Wang S., Sung H.-G., Hsieh S.-Y., Yang V. Large-eddy simulations of turbulent swirling flows injected into a dump chamber // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2005. — Vol. 527. — P. 171–195.
296. Moin P., Apte S. V. Large-eddy simulation of realistic gas turbine combustors // [AIAA Journal](#). — 2006. — Vol. 44, № 4. — P. 698–708.
297. Garcia-Villalba M., Fröhlich J. LES of a free annular swirling jet—dependence of coherent structures on a pilot jet and the level of swirl // [International Journal of Heat and Fluid Flow](#). — 2006. — Vol. 27, № 5. — P. 911–923.
298. Garcia-Villalba M., Fröhlich J., Rodi W. Identification and analysis of coherent structures in the near field of a turbulent unconfined annular swirling jet using large eddy simulation // [Physics of Fluids](#). — 2006. — Vol. 18, № 5. — P. 055103.
299. Jones W. P., Lyra S., Navarro-Martinez S. Large eddy simulation of turbulent confined highly swirling annular flows // [Flow Turbulence and Combustion](#). — 2012. — Vol. 89, № 3. — P. 361–384.
300. Cheng L., Dianat M., Spencer A., McGuirk J. J. Validation of LES predictions of scalar mixing in high-swirl fuel injector flows // [Flow Turbulence and Combustion](#). — 2012. — Vol. 88, № 1–2. — P. 143–168.
301. Selle L., Lartigue G., Poinot T., Koch R., Schildmacher K.-U., Krebs W., Prade B., Kaufmann P., Veynante D. Compressible large eddy simulation of turbulent combustion

- in complex geometry on unstructured meshes // [Combustion and Flame](#). — 2004. — Vol. 137, № 4. — P. 489–505.
302. Moureau V., Domingo P., Vervisch L. From Large-eddy simulation to Direct numerical simulation of a lean premixed swirl flame: Filtered laminar flame–PDF modeling // [Combustion and Flame](#). — 2011. — Vol. 158, № 7. — P. 1340–1357.
303. Vanierschot M., Van den Bulck E. Influence of the nozzle geometry on the hysteresis of annular swirling jets // [Combustion Science and Technology](#). — 2007. — Vol. 179, № 8. — P. 1451–1466.
304. Ogus G., Baelmans M., Vanierschot M. On the flow structures and hysteresis of laminar swirling jets // [Physics of Fluids](#). — 2016. — Vol. 28. — P. 123604.
305. Falese M., Gicquel L. Y. M., Poinso T. LES of bifurcation and hysteresis in confined annular swirling flows // [Computers and Fluids](#). — 2014. — Vol. 89. — P. 167–178.
306. Hermeth S., Staffelbach G., Gicquel L. Y. M., Anisimov V., Cirigliano C., Poinso T. Bistable swirled flames and influence on flame transfer functions // [Combustion and Flame](#). — 2014. — Vol. 161, № 1. — P. 184–196.
307. Hübner A. W., Tummers M., Hanjalic K., Van der Meer Th. H. Experiments on a rotating-pipe swirl burner // [Experimental Thermal and Fluid Science](#). — 2003. — Vol. 27, № 4. — P. 481–489.
308. Tummers M., Hübner A. W., van Veen E. H., Hanjalic K., Van der Meer Th. H. Hysteresis and transition in swirling nonpremixed flames // [Combustion and Flame](#). — 2009. — Vol. 156, № 2. — P. 447–459.
309. Hübner A. W. (unfinished) : Ph. D. thesis / A. W. Hübner ; Delft University of Technology. — 2010.
310. Provansal M., Mathis M., Boyer L. Bénard – von Kármán instability: transient and forced regimes // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1987. — Vol. 182. — P. 1–22.
311. Sreenivasan K. R., Strykowski P. J., Olinger D. J. Hopf bifurcation, landau equation, and vortex shedding behind circular cylinders // Forum on Unsteady Flow Separation / Ed. by K. N. Ghia. — 1987. — Vol. 52. — P. 1–13.

312. Williamson C. H. K. Vortex dynamics in the cylinder wake // [Annual Review of Fluid Mechanics](#). — 1996. — Vol. 28, № 1. — P. 477–539.
313. Bearman P. W. Vortex shedding from oscillating bluff bodies // [Annual Review of Fluid Mechanics](#). — 1984. — Vol. 16, № 1. — P. 195–222.
314. Sarpkaya T. A critical review of the intrinsic nature of vortex-induced vibrations // [Journal of Fluids and Structures](#). — 2004. — Vol. 19, № 4. — P. 389–447.
315. Blevins R. D. Flow Induced Vibrations. — 2nd edition. — Krieger Publishing Company, 1990. — 477 p.
316. Williamson C. H. K. Three-dimensional wake transition // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1996. — Vol. 328. — P. 345–407.
317. Bloor M. S. The transition to turbulence in the wake of a circular cylinder // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1964. — Vol. 19, № 2. — P. 290–304.
318. Williamson C. H. K. The existence of two stages in the transition to three-dimensionality of a cylinder wake // [Physics of Fluids](#). — 1988. — Vol. 31, № 11. — P. 3165–3168.
319. Roshko A. Experiments on the flow past a circular cylinder at very high Reynolds number // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1961. — Vol. 10, № 3. — P. 345–356.
320. Achenbach A. Distribution of local pressure and skin friction around a circular cylinder in cross-flow up to $Re = 5 \times 10^6$ // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1968. — Vol. 34, № 4. — P. 625–639.
321. Lehmkuhl O., Rodríguez I., Borrell R., Chiva J., Oliva A. Unsteady forces on a circular cylinder at critical Reynolds numbers // [Physics of Fluids](#). — 2014. — Vol. 26, № 12. — P. 125110.
322. Rodríguez I., Lehmkuhl O., Chiva J., Borrell R., Oliva A. On the flow past a circular cylinder from critical to super-critical Reynolds numbers: wake topology and vortex shedding // [International Journal of Heat and Fluid Flow](#). — 2015. — Vol. 55. — P. 91–103.
323. Hosseini S. M., Vinuesa R., Schlatter P., Hanifi A., Henningson D. S. Direct numerical simulation of the flow around a wing section at moderate Reynolds number // [International Journal of Heat and Fluid Flow](#). — 2016. — Vol. 61. — P. 117–128.

324. Carpy S., Manceau R. Turbulence modelling of statistically periodic flows: synthetic jet into quiescent air // [International Journal of Heat and Fluid Flow](#). — 2006. — Vol. 27, № 5. — P. 756–767.
325. Fadai-Ghotbi A., Manceau R., Borée J. Revisiting URANS computations of the backward-facing step flow using second moment closures. Influence of the numerics // [Flow Turbulence and Combustion](#). — 2008. — Vol. 81. — P. 395–414.
326. Benhamadouche S., Laurence D. LES, coarse LES, and transient RANS comparisons on the flow across a tube bundle // [International Journal of Heat and Fluid Flow](#). — 2004. — Vol. 24, № 4. — P. 470–479.
327. Slotnick J., Khodadoust A., Alonso J., Darmofal D., Gropp W., Lurie E., Mavriplis D. CFD vision 2030 study: A path to revolutionary computational aerosciences // Technical Report NASA/CR2014-21817. — 2014.
328. Breuer M. Large eddy simulation of the subcritical flow past a circular cylinder: numerical and modeling aspects // [International Journal for Numerical Methods in Fluids](#). — 1998. — Vol. 28. — P. 1281–1302.
329. Kravchenko A. G., Moin P. Numerical studies of flow over a circular cylinder at $Re_D=3900$ // [Physics of Fluids](#). — 2000. — Vol. 12, № 2. — P. 403–417.
330. Dong S., Karniadakis G. E., Ekmekci A., Rockwell D. A combined direct numerical simulation–particle image velocimetry study of the turbulent near wake // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2006. — Vol. 569. — P. 185–207.
331. Parnaudeau P., Carlier J., Heitz D., Lamballais E. Experimental and numerical studies of the flow over a circular cylinder at Reynolds number 3900 // [Physics of Fluids](#). — 2008. — Vol. 20, № 8. — P. 085101.
332. Lehmkuhl O., Rodriguez I., Borrell R., Oliva A. Low-frequency unsteadiness in the vortex formation region of a circular cylinder // [Physics of Fluids](#). — 2013. — Vol. 25. — P. 085109.
333. Rodi W. On the simulation of turbulent flow past bluff bodies // [Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics](#). — 1993. — Vol. 46. — P. 3–19.
334. Travin A., Shur M., Strelets M., Spalart P. Detached-eddy simulations past a circular cylinder // [Flow, Turbulence and Combustion](#). — 2000. — Vol. 63, № 1–4. — P. 293–313.

335. Lo S. C., Hoffmann K. A., Dietiker J. F. Numerical investigation of high Reynolds number flows over square and circular cylinders // [Journal of Thermophysics and Heat Transfer](#). — 2005. — Vol. 19, № 1. — P. 72–80.
336. Moussaed C., Salvetti M. V., Wornom S., Koobus B., Dervieux A. Simulation of the flow past a circular cylinder in the supercritical regime by blending RANS and variational-multiscale LES models // [Journal of Fluids and Structures](#). — 2014. — Vol. 47. — P. 114–123.
337. Xu J., Ma H. Applications of URANS on predicting unsteady turbulent separated flows // [Acta Mechanica Sinica](#). — 2009. — Vol. 25. — P. 319–324.
338. Rosetti G. F., Vaz G., Fajarra A. L. URANS calculations for smooth circular cylinder flow in a wide range of Reynolds numbers: solution verification and validation // [Journal of Fluids Engineering](#). — 2012. — Vol. 134, № 12. — P. 121103.
339. Stringer R. M., Zang J., Hillis A. J. Unsteady RANS computations of flow around a circular cylinder for a wide range of Reynolds numbers // [Ocean Engineering](#). — 2014. — Vol. 87. — P. 1–9.
340. Catalano P., Wang M., Iaccarino G., Moin P. Numerical simulation of the flow around a circular cylinder at high Reynolds numbers // [International Journal of Heat and Fluid Flow](#). — 2003. — Vol. 24, № 4. — P. 463–469.
341. Breuer M. A challenging test case for large eddy simulation: high Reynolds number circular cylinder flow // [International Journal of Heat and Fluid Flow](#). — 2000. — Vol. 21, № 5. — P. 648–654.
342. Trembley P. Direct and large-eddy simulation of flow around a circular cylinder at subcritical Reynolds numbers : Ph. D. thesis / P. Trembley ; Technische Universit at Munchen. — 2002. — P. 146.
343. Cantwell B., Coles D. An experimental study of entrainment and transport in the turbulent near wake of a circular cylinder // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1983. — Vol. 136. — P. 321–374.
344. Afgan I., Kahil Y., Benhamadouche S., Sagaut P. Large eddy simulation of the flow around single and two side-by-side cylinders at subcritical Reynolds numbers // [Physics of Fluids](#). — 2011. — Vol. 23, № 7. — P. 075101.

345. Lardeau S., Leschziner M. A. Unsteady RANS modelling of wake-blade interaction: computational requirements and limitations // [Computers and Fluids](#). — 2005. — Vol. 34, № 1. — P. 3–21.
346. Young M. E., Ooi A. Comparative assessment of LES and URANS for flow over a cylinder at a Reynolds number of 3900 // 16th Australian Fluid Mechanics Conference. — 2007. — P. 1063–1070.
347. Gatski T., Rumsey C., Manceau R. Current trends in modelling research for turbulent aerodynamic flow // [Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences](#). — 2007. — Vol. 365, № 1859. — P. 2389–2418.
348. Franke R., Rodi W., Schönung B. Analysis of experimental vortex-shedding data with respect to turbulence modelling // 7th Symposium on Turbulent Shear Flows. — Vol. 2. — 1989. — P. 24.4.1–24.4.6.
349. Hodžić I., Hanjalić K., Laurence D. Modeling the response of turbulence subjected to cyclic irrotational strain // [Physics of Fluids](#). — 2001. — Vol. 13, № 6. — P. 1739–1747.
350. Bourguet R., Braza M., Perrin R., Harran G. Anisotropic eddy-viscosity concept for strongly detached unsteady flows // [AIAA Journal](#). — 2007. — Vol. 45, № 5. — P. 1145–1149.
351. Revell A., Craft T., Laurence D. Turbulence modelling of unsteady turbulent flows using the stress strain lag model // [Flow Turbulence and Combustion](#). — 2011. — Vol. 86, № 1. — P. 129–151.
352. Hadžić I., Hanjalić K. Separation-induced transition to turbulence: Second-moment closure modelling // [Flow, Turbulence and Combustion](#). — 2000. — Vol. 63, № 1. — P. 153–173.
353. Menter F. R., Egorov Y. The scale-adaptive simulation method for unsteady turbulent flow predictions. Part 1: theory and model description // [Flow, Turbulence and Combustion](#). — 2010. — Vol. 85, № 1. — P. 113–138.
354. Girimaji S. S. Partially-averaged Navier–Stokes model for turbulence: A Reynolds-averaged Navier–Stokes to direct numerical simulation bridging method // [Journal of Applied Mechanics](#). — 2006. — Vol. 73, № 3. — P. 413–421.
355. Jirka G. H. Large scale flow structures and mixing processes in shallow flows // [Journal of Hydraulic Research](#). — 2001. — Vol. 39, № 6. — P. 567–573.

356. Jirka G. H., Uijttewaal W. S. J. Shallow flows: a definition // Shallow Flows / Ed. by G. H. Jirka, W. S. J. Uijttewaal. — UK : Taylor and Francis, 2004. — P. 3–11.
357. Uijttewaal W. S. J. Hydrodynamics of shallow flows: application to rivers // [Journal of Hydraulic Research](#). — 2014. — Vol. 52, № 2. — P. 157–172.
358. Giger M., Dracos T., Jirka G. H. Entrainment and mixing in plane turbulent jets in shallow water // [Journal of Hydraulic Research](#). — 1991. — Vol. 29, № 5. — P. 615–642.
359. Dracos T., Giger M., Jirka G. H. Plane turbulent jets in a bounded fluid layer // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1992. — Vol. 241. — P. 587–614.
360. Chen D., Jirka G. H. LIF study of plane jet bounded in shallow water layer // [Journal of Hydraulic Research](#). — 1999. — Vol. 125, № 8. — P. 817–826.
361. Landel D., Jirka G. H. Meandering due to large eddies and the statistically self-similar dynamics of quasi-two-dimensional jets // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2012. — Vol. 692, № 8. — P. 347–368.
362. Shestakov M. V., Dulin V. M., Tokarev M. P., Sikovsky D. Ph., Markovich D. M. PIV study of large-scale flow organisation in slot jets // [International Journal of Heat and Fluid Flow](#). — 2015. — Vol. 51. — P. 335–352.
363. Chen D., Jirka G. H. Linear stability analysis of turbulent mixing layers and jets in shallow water layers // [Journal of Hydraulic Research](#). — 1998. — Vol. 36, № 5. — P. 815–830.
364. Holdeman J. D., Foss J. F. The initiation, development, and decay of the secondary flow in a bounded jet // [Journal of Fluids Engineering](#). — 1975. — Vol. 97, № 3. — P. 342–352.
365. Rockwell J. D., Foss J. F. Vortex stretching due to shear layer instability // [Journal of Fluids Engineering](#). — 1977. — Vol. 99, № 1. — P. 240–243.
366. van Heijst G. J. F., Clercx H. J. H. Studies on quasi-2D turbulence – the effect of boundaries // [Fluid Dynamics Research](#). — 2009. — Vol. 41, № 6. — P. 064002.
367. Akkermans R. A. D., Cieslik A. R., Kamp L. P. J., Trieling R. R., Clercx H. J. H., van Heijst G. J. F. The three-dimensional structure of an electromagnetically generated dipolar vortex in a shallow fluid layer // [Physics of Fluids](#). — 2008. — Vol. 20, № 11. — P. 116601.

368. Rowland J. C., Stacey M. T., Dietrich W. E. Turbulent characteristics of a shallow wall-bounded plane jet: experimental implications for river mouth hydrodynamics // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2009. — Vol. 627. — P. 423–449.
369. Simpson R. L. Junction flows // [Annual Review of Fluid Mechanics](#). — 2001. — Vol. 33. — P. 415–443.
370. Fu H., Rockwell D. Shallow flow past a cylinder: control of the near wake // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2005. — Vol. 539. — P. 1–24.
371. Fu H., Rockwell D. Shallow flow past a cylinder: transition phenomena at low reynolds number // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2005. — Vol. 540. — P. 75–97.
372. Chen D., Jirka G. H. Experimental study of plane turbulent wakes in a shallow water layer // [Fluid Dynamics Research](#). — 1995. — Vol. 16, № 1. — P. 11–41.
373. Armellini A., Casarsa L., Giannattasio P. Separated flow structures around a cylindrical obstacle in a narrow channel // [Experimental Thermal and Fluid Science](#). — 2009. — Vol. 33, № 4. — P. 604–619.
374. Sommeria J. Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1986. — Vol. 170. — P. 139–168.
375. Lardeau S., Ferrari S., Rossi L. Three-dimensional direct numerical simulation of electromagnetically driven multiscale shallow layer flows: Numerical modeling and physical properties // [Physics of Fluids](#). — 2008. — Vol. 20, № 12. — P. 127101.
376. Shats M., Byrne D., Xia H. Turbulence decay rate as a measure of flow dimensionality // [Physical Review Letters](#). — 2010. — Vol. 105, № 26. — P. 264501.
377. Kelley D. H., Ouellette N. T. Onset of three-dimensionality in electromagnetically driven thin-layer flows // [Physics of Fluids](#). — 2011. — Vol. 23, № 4. — P. 045103.
378. Xia H., Byrne D., Falkovich G., Shats M. Upscale energy transfer in thick turbulent fluid layers // [Nature Physics](#). — 2011. — Vol. 7, № 4. — P. 321–324.
379. Akkermans R. A. D., Holten A. P. C., Kamp L. P. J., Clerx H. J. H., van Heijst G. J. F. Arrays of vortices in shallow fluids: Three-dimensional structure and dispersion // [European Journal of Mechanics-B/Fluids](#). — 2012. — Vol. 34. — P. 131–145.

380. Lin J.-C., Ozgoren M., Rockwell D. Space-time development of the onset of a shallow-water vortex // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2003. — Vol. 485. — P. 33–66.
381. Sous D., Bonneton N., Sommeria J. Turbulent vortex dipoles in a shallow water layer // [Physics of Fluids](#). — 2004. — Vol. 16, № 8. — P. 2886–2898.
382. Sous D., Bonneton N., Sommeria J. Transition from deep to shallow water layer: formation of vortex dipoles // [European Journal of Mechanics-B/Fluids](#). — 2005. — Vol. 24, № 1. — P. 19–32.
383. Akkermans R. A. D., Kamp L. P. J., Clercx H. J. H., van Heijst G. J. F. Intrinsic three-dimensionality in electromagnetically driven shallow flows // [EPL \(Europhysics Letters\)](#). — 2008. — Vol. 83, № 2. — P. 24001.
384. Duran R. A. D., Kamp L. P. J., Clercx H. J. H., van Heijst G. J. F. Dynamics and structure of decaying shallow dipolar vortices // [Physics of Fluids](#). — 2010. — Vol. 22, № 11. — P. 116606.
385. Kraichnan R. H. Inertial ranges in twodimensional turbulence // [Physics of Fluids](#). — 1967. — Vol. 10. — P. 1417.
386. Vinuesa R., Noorani A., Lozano-Durán A., Khoury G. K. E., Schlatter P., Fischer P. F., Nagib H. M. Aspect ratio effects in turbulent duct flows studied through direct numerical simulation // [Journal of Turbulence](#). — 2014. — Vol. 15, № 10. — P. 677–706.
387. Albertson M. L., Dai Y. B., Jensen R. A., Rouse H. Diffusion of submerged jets // *Transactions of the American Society of Civil Engineers*. — 1950. — Vol. 115, № 1. — P. 639–664.
388. Ramaprian B. R., Chandrasekhara M. S. LDA measurements in plane turbulent jets // [Journal of Fluids Engineering](#). — 1985. — Vol. 107, № 2. — P. 264–271.
389. Zhang J., Constantinescu G. Flow and coherent structures around circular cylinders in shallow water // [Physics of Fluids](#). — 2017. — Vol. 29, № 6. — P. 066601.
390. Ozturk N. A., Akkoca A., Sahin B. PIV measurements of flow past a confined cylinder // [Experiments in Fluids](#). — 2008. — Vol. 44, № 6. — P. 1001–1014.
391. Serrin J. On the stability of viscous fluid motions // [Archive for Rational Mechanics and Analysis](#). — 1959. — Vol. 3, № 1. — P. 1–13.

392. Blasius H. Grenzsichten in flüssigkeiten mit kleiner reibung // Zeitschrift fur angewande Mathematik and Physik. — 1908. — Vol. 56. — P. 1–37.
393. Noether F. Das turbulenzproblem // [ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik](#). — 1921. — Vol. 1, № 2. — P. 125–138.
394. Eckert M. Fluid mechanics in Sommerfeld's school // [Annual Review of Fluid Mechanics](#). — 2015. — Vol. 47. — P. 1–20.
395. Choi H., Jeon W. P., Kim J. Control of flow over a bluff body // [Annual Review of Fluid Mechanics](#). — 2008. — Vol. 40. — P. 113–139.
396. Lin J. C., Towfighi J., Rockwell D. Near-wake of a circular cylinder: control by steady and unsteady surface injection // [Journal of Fluids and Structures](#). — 1995. — Vol. 9, № 6. — P. 659–669.
397. Arcas D. R., Redekopp L. G. Aspects of wake vortex control through base blowing/suction // [Physics of Fluids](#). — 2004. — Vol. 16, № 2. — P. 452–456.
398. Chen W. L., Xin D. B., Xu F., Li H., Ou J. P., Hu H. Suppression of vortex-induced vibration of a circular cylinder using suction-based flow control // [Journal of Fluids and Structures](#). — 2013. — Vol. 42. — P. 25–39.
399. Kim J., Choi H. Distributed forcing of flow over a circular cylinder // [Physics of Fluids](#). — 2005. — Vol. 17, № 3. — P. 033103.
400. Poncet P., Hildebrand R., Cottet G. H., Koumoutsakos P. Spatially distributed control for optimal drag reduction of the flow past a circular cylinder // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2008. — Vol. 599. — P. 111–120.
401. Shih W. C. L., Wang C., Coles D., Roshko A. Experiments on flow past rough circular cylinders at large Reynolds numbers // [Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics](#). — 1993. — Vol. 49, № 1–3. — P. 351–368.
402. Bearman P. W., Harvey J. K. Control of circular cylinder flow by the use of dimples // [AIAA Journal](#). — 1993. — Vol. 31, № 10. — P. 1753–1756.
403. Roshko A. On the drag and shedding frequency of two-dimensional bluff bodies // NASA TN 3196. — 1954.

404. Lim H. C., Lee S. J. Flow control of circular cylinders with longitudinal grooved surfaces // [AIAA Journal](#). — 2002. — Vol. 40, № 10. — P. 2027–2036.
405. Strykowski P. J., Sreenivasan K. R. On the formation and suppression of vortex ‘shedding’ at low Reynolds numbers // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1990. — Vol. 218. — P. 2027–2036.
406. Lam K., Lin Y. F. Effects of wavelength and amplitude of a wavy cylinder in cross-flow at low Reynolds numbers // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2009. — Vol. 620. — P. 195–220.
407. Gao D. L., Chen W. L., Li H., Hu H. Flow around a circular cylinder with slit // [Experimental Thermal and Fluid Science](#). — 2017. — Vol. 82. — P. 287–301.
408. Kim S. J., Lee C. M. Investigation of the flow around a circular cylinder under the influence of an electromagnetic force // [Experiments in Fluids](#). — 2000. — Vol. 28, № 3. — P. 252–260.
409. You D., Moin P. Effects of hydrophobic surfaces on the drag and lift of a circular cylinder // [Physics of Fluids](#). — 2007. — Vol. 19, № 8. — P. 081701.
410. Mittal S., Kumar B. Flow past a rotating cylinder // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2003. — Vol. 476, № 4. — P. 081701.
411. Moin P., Bewley T. Feedback control of turbulence // [Applied Mechanics Review](#). — 1994. — Vol. 47, № 6. — P. S3–S13.
412. Brunton S. L., Noack B. R. Closed-loop turbulence control: progress and challenges // [Applied Mechanics Review](#). — 2015. — Vol. 67, № 5, no. 5. — P. 050801.
413. Flinois T. L. B., Colonius T. Optimal control of circular cylinder wakes using long control horizon // [Physics of Fluids](#). — 2015. — Vol. 27. — P. 087105.
414. Protas B., Styczek A. Optimal rotary control of the cylinder wake in the laminar regime // [Physics of Fluids](#). — 2002. — Vol. 14, № 7, no. 7. — P. 2073–2087.
415. Fujisawa N., Kawaji Y., Ikemoto K. Feedback control of vortex shedding from a circular cylinder by rotational oscillations // [Journal of Fluids and Structures](#). — 2001. — Vol. 15, no. 1. — P. 23–37.
416. Cheng M., Chew Y. T., Luo S. C. Numerical investigation of a rotationally oscillating cylinder in mean flow // [Journal of Fluids and Structures](#). — 2001. — Vol. 15, № 7. — P. 981–1007.

417. Tokumaru P. T., Dimotakis P. E. Rotary oscillation control of a cylinder wake // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 1991. — Vol. 224. — P. 77–90.
418. Shields D., Leonard A. Rotary oscillation control of a cylinder wake // [Journal of Fluid Mechanics](#). — 2001. — Vol. 431. — P. 77–90.
419. Sengupta T. K., Deb K., Talla S. B. Control of flow using genetic algorithm for a circular cylinder executing rotary oscillation // [Computers and Fluids](#). — 2007. — Vol. 36, № 3. — P. 578–600.
420. Du L., Dalton C. LES calculation for uniform flow past a rotationally oscillating cylinder // [Journal of Fluids and Structures](#). — 2013. — Vol. 42. — P. 40–54.
421. Mahfouz F. M., Badr H. M. Flow structure in the wake of a rotationally oscillating cylinder // [Journal of Fluids Engineering](#). — 2000. — Vol. 122, № 2. — P. 290–301.
422. Zeng J., Constantinescu G. Flow and coherent structures around circular cylinders in shallow water // [Physics of Fluids](#). — 2017. — Vol. 29, № 6. — P. 066601.

Приложение А

Аналитические решения линейной задачи устойчивости для струи Ландау

Рассмотрим поле скорости и давления как суперпозицию решения Ландау и бесконечно малых возмущений $\mathbf{v}$ и χ :

$$\mathbf{u} = \frac{\nu}{R}\mathbf{u}_L(\theta) + \mathbf{v}, \quad \frac{p}{\rho} = \frac{\nu^2}{R^2}p_L(\theta) + \chi. \quad (\text{A.1})$$

Из соображений размерности будем искать возмущения в следующем классе:

$$v_R = \frac{\nu}{R}f(\psi, \eta)e^{im\phi}, \quad v_\theta = -\frac{\nu}{R\sqrt{1-\psi^2}}g(\psi, \eta)e^{im\phi}, \quad (\text{A.2})$$

$$v_\phi = -\frac{\nu}{R\sqrt{1-\psi^2}}ih(\psi, \eta)e^{im\phi}, \quad \chi = \frac{\rho\nu^2}{R^2}q(\psi, \eta)e^{im\phi}, \quad (\text{A.3})$$

где ψ , как и прежде, обозначает $\cos\theta$, в то время как переменная $\eta = R/\sqrt{4\nu t}$. Только в данной главе в переменную η добавлен дополнительный множитель $1/2$.

Эволюция возмущения описывается линеаризованными уравнениями Навье–Стокса. Уравнение неразрывности дает:

$$E_c = f + \eta f_\eta + g_\psi - \frac{mh}{1-\psi^2} = 0. \quad (\text{A.4})$$

Далее мы будем использовать символ E и соответствующий нижний индекс для обозначения уравнений. Из закона сохранения импульса получим:

$$\begin{aligned} E_R = (1-\psi^2)f_{\psi\psi} - 2\psi f_\psi - y f_\psi + \eta y f_\eta + \eta^2 f_{\eta\eta} + 2\eta^3 f_\eta - 2yf - \frac{2f}{1-\psi^2} \\ - 2f - 2g_\eta + y_{\psi\psi}g + \frac{2(yg + mh)}{1-\psi^2} - \eta q_\eta + 2q = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} E_\theta = (1-\psi^2)g_{\psi\psi} - yg_\eta - y_\psi g + \eta^2 g_{\psi\psi} + \eta y_\psi g_\eta + 2\eta^3 g_\eta - \frac{2\psi yg + m^2 g}{1-\psi^2} \\ + 2(1-\psi^2)f_\eta - \frac{2m\psi h}{1-\psi^2} - (1-\psi^2)q_\eta = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} E_\phi = (1-\psi^2)h_{\eta\eta} - y h_\psi + \eta y_\psi h_\eta + \eta^2 h_{\eta\eta} + 2\eta^3 h_\eta - \frac{m^2 h}{1-\psi^2} + 2mf \\ - \frac{2m\psi g}{1-\psi^2} - mq = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Исключим функцию давления $q(\psi, \eta)$ следующим образом:

$$E_{R\theta} = (1-\psi^2)\frac{\partial E_R}{\partial \psi} + 2E_\theta - 2\eta\frac{\partial E_\theta}{\partial \eta} = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$E_{\phi R} = mE_R + 2E_\phi - \eta\frac{\partial E_\phi}{\partial \eta} = 0. \quad (\text{A.9})$$

Для течения при очень малых скоростях потока удобно рассмотреть приближение $\mathbf{u}_L = 0$ или $y = 0$. Последующая цепочка преобразований позволит получить одно относительно компактное уравнение. Используя (A.4), исключим производные по ψ из (A.8):

$$E_g = \frac{\partial E_{R\theta}}{\partial \psi} + (1 - \psi^2)\eta \frac{\partial^2 E_c}{\partial \eta^2} - 2\psi\eta \frac{\partial^2 E_c}{\partial \psi \partial \eta} + \eta^3 \left(\frac{\partial^3 E_c}{\partial \eta^3} + 2\eta \frac{\partial^2 E_c}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial E_c}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (\text{A.10})$$

После некоторых преобразований получим уравнение на функцию f :

$$E_f = E_g - \frac{m}{1 - \psi^2} E_{\phi R} - \frac{m^2 \eta}{1 - \psi^2} \frac{\partial E_c}{\partial \eta} = 0, \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} E_f = & (1 - \psi^2)^2 f_{\psi\psi\psi\psi} - 8\psi(1 - \psi^2) f_{\psi\psi\psi} - 12(1 - \psi^2) f_{\eta\eta} - 2(m^2 - 4) F_{\psi\psi} \\ & + \frac{m^2(m^2 - 4)}{(1 - \psi^2)^2} f + 2(1 - \psi^2) \eta^2 f_{\psi\psi\eta\eta} + 2(1 - \psi^2) f_{\psi\psi\eta} - 4\psi\eta^2 F_{\psi\eta\eta} \\ & - 4\psi\eta^3 f_{\psi\eta} + \eta^4 f_{\eta\eta\eta\eta} + 2\eta^3(2 + \eta^2) f_{\eta\eta\eta} + 8\eta^4 f_{\eta\eta} \\ & - \frac{m^2 \eta^2}{1 - \psi^2} f_{\eta\eta} + 4\eta^3 f_{\eta} - \frac{2m^2}{1 - \psi^2} f_{\eta} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Несмотря на громоздкий вид уравнения (A.12), допускается разделение переменных:

$$f(\psi, \eta) = F(\psi)Q(\eta). \quad (\text{A.13})$$

Предположим, что справедливо равенство

$$(1 - \psi^2) F_{\psi\psi} - 2\psi F_{\psi} + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \psi^2} \right) F = 0, \quad (\text{A.14})$$

тогда получим

$$\begin{aligned} & \eta^4 Q_{\eta\eta\eta\eta} + 2\eta^3(2 + \eta^2) Q_{\eta\eta\eta} + 8\eta^4 Q_{\eta\eta} - 2n(n+1)\eta^2 Q_{\eta\eta} - 2(n-1)(n+2)\eta^3 Q_{\eta} \\ & + (n-1)n(n+1)(n+2)Q = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Уравнение (A.14) имеет решение

$$F(\psi) = A_1 P_n^m(\psi) + A_2 Q_n^m(\psi), \quad (\text{A.16})$$

где P_n^m и Q_n^m есть полиномы Лежандра первого и второго типа, соответственно. Требование аналитичности решения накладывает условие $A_2 = 0$. Кроме того, n должно быть целым числом. Решение уравнения (A.15) можно выписать как

$$\begin{aligned} Q(\eta) = & B_1 \eta^n {}_1F_1\left(\frac{n}{2}; n + \frac{3}{2}; -\eta^2\right) + B_2 \eta^n \\ & + B_3 \eta^{-n-1} {}_1F_1\left(-\frac{n+1}{2}; -n + \frac{1}{2}; -\eta^2\right) + B_4 \eta^{-n-1}, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

где ${}_1F_1$ обозначает гипергеометрическую функцию Куммера. В состоянии покоя ($\mathbf{u}_L = 0$) возмущения должны быть ограничены и асимптотически затухать. Это требование накладывает ограничения $B_2 = B_3 = B_4 = 0$ при неотрицательных значениях n . Без потери общности

можем положить $A_1 = B_1 = 1$, тогда

$$Q(\eta) = \eta^n {}_1F_1\left(\frac{n}{2}; n + \frac{3}{2}; -\eta^2\right), \quad F(\psi) = P_n^m(\psi), \quad m \leq n. \quad (\text{A.18})$$

Должно быть возможным разделить переменные также и для остальных функций задачи

$$g(\psi, \eta) = G(\psi)T(\eta), \quad h(\psi, \eta) = H(\psi)Y(\eta). \quad (\text{A.19})$$

Тогда из уравнения неразрывности следует, что

$$\text{если } m = 0, \text{ тогда } \begin{cases} T(\eta) = Q(\eta) + \eta Q_\eta(\eta), \\ F(\psi) + G_\psi(\psi) = 0; \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

$$\text{если } m \neq 0, \text{ тогда } \begin{cases} T(\eta) = Y(\eta) = Q(\eta) + \eta Q_\eta(\eta), \\ F(\psi) + G_\psi(\psi) - mH(\psi)/(1 - \psi^2) = 0. \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

Из последних соотношения для $m = 0$ получим

$$G(\psi) = - \int_{-1}^{\psi} F(x) dx = (P_{n-1}(\psi) - P_{n+1}(\psi))/(2n + 1), \quad (\text{A.22})$$

$$T(\eta) = Q(\eta) + \eta Q_\eta(\eta). \quad (\text{A.23})$$

Соотношение (A.22) накладывает ограничение $n > 0$, поскольку $G(\pm 1) = 0$ в силу граничных условий, вытекающих из представления (A.2).

Аналогичный анализ можно провести для осесимметричных азимутальных возмущений. Уравнение (A.7) дает

$$(1 - \psi^2)h_{\psi\psi} + \eta^2 h_{\eta\eta} + 2\eta^3 h_\eta = 0. \quad (\text{A.24})$$

Согласно (A.19) получим

$$(1 - \psi^2)H_{\psi\psi} + 2k(2k - 1)H = 0, \quad (\text{A.25})$$

$$\eta^2 Y_{\eta\eta} + 2\eta^3 Y_\eta - 2k(2k - 1)Y = 0. \quad (\text{A.26})$$

Накладывая условие ограниченности на решение, получим что

$$\text{если } k < 0, \text{ тогда } \begin{cases} h(\psi) = {}_2F_1(-k + 1/2, k, 3/2, \psi^2), \\ Y(\eta) = \eta^{1-2k} {}_1F_1(-k + 1/2, -2k + 3/2, -\eta^2), \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

$$\text{если } k > 0, \text{ тогда } \begin{cases} h(\psi) = {}_2F_1(k - 1/2, -k, 1/2, \psi^2), \\ Y(\eta) = \eta^{2k} {}_1F_1(k, 2k + 1/2, -\eta^2); \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

где ${}_2F_1$ есть гипергеометрическая функция. Стоит отметить, что (A.18) справедливо для любого значения m . Тем не менее, нам не удалось получить аналитические решения для функций g и h .