

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт Теплофизики
им. С.С. Кутателадзе Сибирского отделения РАН

На правах рукописи



Андрющенко Владимир Андреевич

**ПРОЦЕССЫ РЕКОННЕКЦИЙ И СТОХАСТИЧЕСКАЯ
ДИНАМИКА КВАНТОВАННЫХ ВИХРЕВЫХ НИТЕЙ
В СВЕРХТЕКУЧЕМ ГЕЛИИ**

01.02.05 — механики жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
Немировский Сергей Карпович

Новосибирск — 2017

Оглавление

Введение	4
1 Динамика квантованных вихрей перед реконнекциями	18
1.1. Постановка задачи	18
1.2. Уравнение движения	21
1.3. Вычислительная схема	26
1.4. Характер динамики сближения вихревых нитей	29
1.5. Геометрическая конфигурация квантованных вихрей перед реконнекцией	38
1.6. Обсуждение и заключение	40
2 Моделирование сверхтекучей турбулентности в противотоке	42
2.1. Постановка задачи	42
2.2. Процессы реконнекций и уравнение движения	43
2.3. Вычислительная схема	45
2.4. Некоторые свойства вихревого клубка	50
2.5. Обсуждение и заключение	54
3 Энергетические спектры полей скорости, создаваемых квантованными вихрями	55
3.1. Постановка задачи	55
3.2. Свойства одиночных хаотических вихревых петель и спектры полей скоростей, создаваемых ими	60
3.2.1 Выражение для энергии и Гауссова модель вихревого клубка	60
3.2.2 Фрактальные свойства хаотических вихревых петель	65
3.2.3 Энергетические спектры полей скорости, создаваемых хаотической вихревой петлей	67
3.3. Энергетические спектры полей скорости, создаваемых различными вихревыми конфигурациями	76
3.3.1 Метод структурных функций	80

3.3.2	Энергетические спектры полей скорости, создаваемых кинками перед реконнекцией	82
3.3.3	Энергетические спектры полей скорости, создаваемых вихрями перед реконнекцией	83
3.3.4	Энергетические спектры полей скорости, создаваемых вихревыми клубками	86
3.4.	Обсуждение и заключение	89
Заключение		92
Литература		94

Введение

Объект исследования и актуальность темы.

Актуальность диссертации обусловлена фундаментальными научными проблемами теории квантовой турбулентности, а также прикладными проблемами, связанными с теплообменом в системах, функционирующих при температурах ниже 2 K . На сегодняшний день, при таких температурах единственным применяемым на практике хладагентом остается сверхтекучий гелий.

На гидродинамические и термодинамические процессы в сверхтекучем гелии существенно влияет вихревой клубок (совокупность переплетенных квантованных вихревых нитей). Структура такого вихревого клубка, в значительной степени, определяется динамикой вихревых нитей и процессами реконнекций. Изучение закономерностей, присущих процессам реконнекций, а также определение влияния процессов реконнекций на свойства вихревого клубка являются одними из ключевых задач теории квантовой турбулентности. В свою очередь, интерес к квантовой турбулентности обусловлен несколькими причинами:

Во-первых, мотивация исследования связана с необходимостью развития теории сверхтекучей турбулентности, которая является важной во различных прикладных задачах, непосредственно касающихся квантовых жидкостей. Более того, развитие многих отраслей науки и техники, требующих создания устойчиво функционирующих систем при сверхнизких температурах, существенно осложняется отсутствием теории, описывающей квантовую турбулентность.

Во-вторых, квантовая турбулентность, как часть теории сверхтекучести, неразрывно связана и с другими важными проблемами общей теории квантовых жидкостей, такими как генерация вихрей и их реконнекция, взаимодействие между близко расположенными вихревыми нитями и т.д.

В-третьих, мотивация тесно связана с идеей моделирования классической турбулентности набором хаотических квантованных вихрей. Идея о моделировании турбулентности дискретными вихрями в классической гидродинамике обсуждается давно, однако в квантовых жидкостях, где квантованные вихревые нити являются реальными объектами, она приобретает новый импульс. Кроме того, в ряде численных работ последних лет, посвященных моделированию сверхтекучей турбулентности, был получен спектр колмогоровского типа.

В-четвертых, развитие теории сверхтекучей турбулентности представляет огромное значение и интерес с точки зрения общей физики, т.к. подобные системы, образуемые неупорядоченными множествами одномерных особенностей, обнаружены во многих других физических полях. В качестве примеров можно указать полимерные цепи, дислокации в твердых телах, топологические дефекты в жидких кристаллах, космические струны и др.

Цель работы состоит в изучении свойств вихревого клубка и динамики квантовых вихревых нитей перед реконнекцией, а также определении энергетических спектров полей скорости, соответствующих различным вихревым конфигурациям. В соответствии с целью были поставлены и решены следующие задачи:

- Детально изучено влияние нормальной компоненты сверхтекучего гелия на динамику квантованных вихревых нитей перед реконнекциями при различных температурах и начальных условиях.
- Проведено моделирование динамики вихревого клубка в противотоке сверхтекучей и нормальной компонент гелия.
- Найдены энергетические спектры полей скорости, индуцируемых одиночной хаотической вихревой петлей при различных фрактальных размерностях.
- Найдены энергетические спектры полей скорости, создаваемых реконнектирующими вихревыми нитями.

- Найдены энергетические спектры полей скорости, создаваемых вихревыми клубками при различных температурах и скоростях противотока сверхтекучей и нормальной компонент гелия.

Научная новизна.

- Впервые детально изучено влияние нормальной компоненты сверхтекучего гелия на динамику квантованных вихрей перед реконнекциями при различных температурах. Установлено, что в динамике вихревых нитей перед реконнекцией можно выделить три временных интервала (различных по характеру сближения): универсальный, полууниверсальный и неуниверсальный. Найдена скорость сближения ближайших элементов вихревых нитей в универсальном и полууниверсальном интервалах. Установлены границы между этими интервалами.
- Установлена независимость геометрической конфигурации ближайших элементов вихревых нитей от температуры и начальных условий в универсальном интервале. В случае осуществления реконнекции, сближающиеся участки вихревых нитей переориентируются таким образом, чтобы направление векторов их циркуляции было противоположным.
- В рамках метода вихревой нити исследованы динамические характеристики вихревого клубка. При моделировании использован новый критерий реконнекций, основанный на анализе динамики элементов вихревых нитей. Установлены связи скорости реконнекций с плотностью вихревого клубка и плотности вихревого клубка со скоростью противотока нормальной и сверхтекучей компонент гелия.
- Найдены энергетические спектры полей скорости, индуцируемых одиночной Гауссовой хаотической вихревой петлей, подчиняющейся различным статистическим моделям.
- Впервые, используя метод корреляционных функций, получены энергетические спектры полей скорости, индуцированных реконнектирующими вихревыми нитями. Установлено, что конфигурации, образуемые ближайшими элементами вихревых нитей перед реконнекцией, создают поля скорости со спектрами близкими к колмогоровскому.
- Найдены энергетические спектры полей скорости, создаваемых вихревыми

клубками в противотоке нормальной и сверхтекучей компонент при различных температурах.

Практическая ценность работы.

На основании проведенных исследований сформулированы важные выводы и обобщения, способствующие построению новых моделей теории квантовой турбулентности. Проведенные исследования вносят существенный вклад в понимание как динамики и процессов реконнекций квантовых вихревых нитей при ненулевых температурах, так и влияния квантовых вихрей на перенос энергии в сверхтекучем гелии. Полученная детальная информация о динамике вихревых нитей перед реконнекцией может быть использована для усовершенствования критериев реконнекции и повышении точности программ, определяющих рабочие режимы криогенных установок.

Достоверность полученных результатов обусловлена использованием проверенных методик аналитического и численного решения физических задач. Алгоритм моделирования, используемый при получении результатов, тестировался на согласование с существующими аналитическими решениями, а также прошел тесты на устойчивость и сходимость. Полученные численные результаты качественно, а в ряде случаев и количественно согласуются с достоверными экспериментальными данными (Vinen W.F., Paoletti M.S. и др.) и известными аналитическими результатами других авторов (Немировский С.К., Tsubota M. и др.).

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Результаты исследования динамики квантовых вихревых нитей перед реконнекцией. Найдены характерные этапы эволюции вихревых нитей перед реконнекцией. Установлено влияние температуры и начальных условий на динамику вихревых нитей на каждом из этапов эволюции.
2. Результаты численного моделирования динамики вихревого клубка в противотоке нормальной и сверхтекучей компонент гелия. Установлены связи скорости реконнекций с плотностью вихревого клубка и плотности вихревого клубка с величиной тепловой нагрузки.

3. Результаты исследования энергетических характеристик полей скорости, индуцируемых одиночной хаотической петлей с различной фрактальной размерностью. Установлены связи между статистическими характеристиками вихревой петли и спектрами полей скорости, индуцируемыми ей.

4. Результаты исследования энергетических характеристик полей скорости, создаваемых реконnectирующими вихревыми нитями. Установлена определяющая роль процесса реконnectии в формировании энергетических спектров полей скорости на межвихревых масштабах, а также сам вид энергетических спектров при реконnectии.

5. Результаты исследования энергетических характеристик полей скорости, создаваемых вихревыми клубками при различных температурах и скоростях противотока нормальной и сверхтекучей компонент гелия. Установлено влияние температуры и тепловой нагрузки на энергетические спектры полей скорости, создаваемых вихревыми клубками на различных масштабах.

Личный вклад автора. Автор участвовал в разработке, отладке и тестировании программы, используемой для моделирования динамики вихревых нитей. Программа для нахождения энергетического спектра и модули программ для определения скорости сближения и геометрической конфигурации вихревых нитей разработаны и реализованы лично автором. Получение всех численных и аналитических результатов, представляемых в работе, их обработка и подготовка к публикации проведены лично автором. Общая постановка задач и обсуждение полученных результатов проводилась совместно с соавторами опубликованных работ.

Апробация работы проводилась на следующих научных мероприятиях: XII Всероссийская научная конференция студентов физиков (Россия, Новосибирск, 2006 г.); XLIV Международная научная студенческая конференция (Россия, Новосибирск, 2006 г.); Международные конференции по квантовым жидкостям и кристаллам QFS-2007, QFS-2016 (Россия, Казань, 2007 г.; Чехия, Прага, 2016 г.); XXXVII Собрание по физике низких температур (Россия, Казань, 2015 г.); Международная конференция: Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики (Россия, Новосибирск, 2015 г.);

Euromech colloquium 581. Dynamics of concentrated vortices (Россия, Новосибирск, 2016 г.); IX Всероссийская конференция: Физика ультрахолодных атомов (Россия, Новосибирск, 2016 г.); XXXIII Сибирский теплофизический семинар (Россия, Новосибирск, 2017 г.).

Краткое описание исследуемого объекта и структуры работы.

Изложенный в этом пункте материал носит вводный характер и не содержит деталей экспериментов и подробных теоретических выкладок. Более подробно представляемый материал изложен в вводных пунктах соответствующих глав диссертационной работы, а также широко представлен в научной литературе (см., например, [1, 2, 3, 4]). Среди многих интересных и важных явлений, открытых в физике прошлого века, сверхтекучесть занимает особое место. В течение первой половины XX века был накоплен громадный экспериментальный материал, в том числе было обнаружено множество удивительных эффектов, которые абсолютно не укладывались в рамки представлений о классических жидкостях. В качестве примеров можно привести: движение жидкости в сторону нагревателя, вытекания жидкости из сосудов по образованной ею пленке, фонтанный эффект и термический противоток, второй звук и др.

Ряд наблюдаемых эффектов были объяснены в рамках двухжидкостной гидродинамики, так согласно двухжидкостной модели, предложенной Тиссой [5] и развитой впоследствии Ландау [6], сверхтекучий гелий одновременно совершает два различных типа движения, т.е. жидкий гелий (ниже 2.17 К) ведет себя подобно смеси двух жидкостей: нормальной жидкости с обычной вязкостью и сверхтекучей жидкости, способной течь без трения через узкие каналы и мимо всевозможных препятствий. Каждое из этих движение имеет свою собственную локальную скорость: $\mathbf{V}_n$, $\mathbf{V}_s$ – скорость нормальной и сверхтекучей компонент соответственно. Предложенная теория прекрасно описывала все необычные эксперименты, выполненные ранее, а также предсказывала некоторые новые эффекты, такие как, существование критических скоростей для разрушения сверхтекучести и волнового распространение тепла (второй звук).

Серией экспериментов результаты которых противоречили теории Ландау, были исследования, связанные с вопросом о безвихревом движении сверхтекучей компоненты гелия, т.е. о невовлечении его во вращательное движение. Для подтверждения этого факта был реализован эксперимент по измерению глубины параболического мениска вращающегося гелия [7]. Известно, что классическая вращающаяся жидкость образует параболический мениск с глубиной, пропорциональной квадрату угловой скорости. С другой стороны, вследствие того, что сверхтекучая компонента не взаимодействует со стенками вращающегося сосуда, она не может быть вовлечена во вращательное движение. Ожидалось, что в соответствии с тем, что во вращении участвует лишь нормальная компонента гелия, глубина мениска будет в ρ/ρ_n (ρ и ρ_n – плотности жидкого гелия и его нормальной компоненты соответственно) раз меньше, чем в обычной жидкости (см. Рис. В.1(а)).

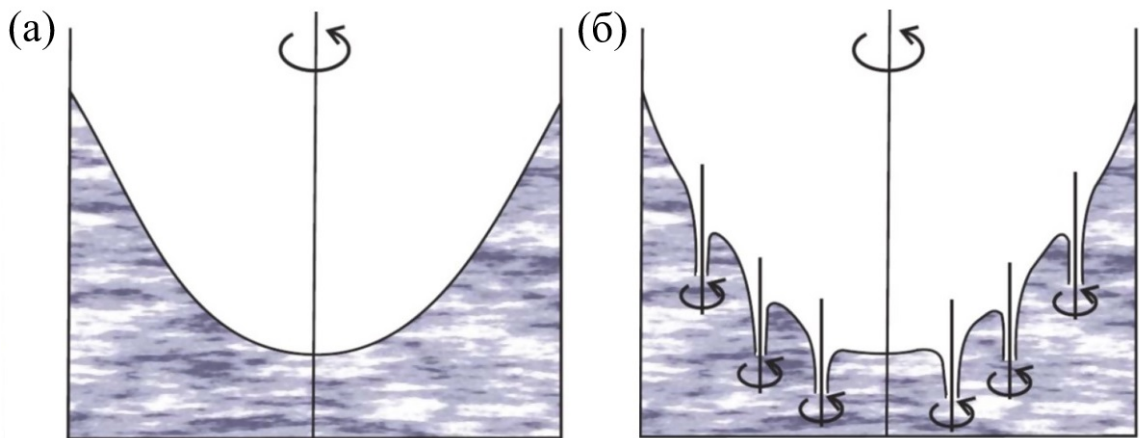


Рис. В.1: Схематичные изображения: (а) Эксперимент [7] по измерению глубины параболического мениска вращающегося гелия. Глубина мениска оказалась такой, как если бы вращалась вся жидкость, а не только ее нормальная компонента; (б) расположение вихревых нитей во вращающейся He II. Изображения взяты из книги [1].

Однако, опыт дал отрицательный результат. Мениск оказался глубже, причем именно таким, как если бы вся вращающаяся жидкость состояла из одной нормальной компоненты. Далее, в опытах Андроникашвили [8] было продемонстрировано, что во вращающемся He II имеет место термомеханический эффект, т.е. гидродинамика оставалась двухскоростной. Разрешение подоб-

ного парадокса связано с квантованными вихрями или топологическими одномерными особенностями, возникающими в сверхтекучей компоненте гелия. Так оказалось, что в результате взаимодействия нормальной и сверхтекучей компонент $He\ II$, в объеме возникали регулярно выстроенные квантованные вихри сверхтекучей компоненты, т.е. вихри для которых момент количества движения квантуется в единицах $\hbar$ (постоянная Планка). Стоит отметить, что пока это единственный пример макроскопической системы движение которой включает постоянную Планка. Таким образом, при ускоренном вращении сосуда со сверхтекучим гелием следует ожидать дискретный отклик системы, связанный с последовательным появлением вихревых нитей. Один из первых экспериментов, где такое поведение действительно наблюдалось, был выполнен Паккардом и Сандерсом [9]. Они провели измерение электрического тока ионов, проходящих сквозь гелий, во вращающемся с небольшим ускорением сосуде. Было продемонстрировано, что ток имеет ступенчатую структуру, связанную с образованием одиночных квантованных вихрей. Важным примером вихрей во вращающемся гелии являются вихревые решетки. Если вернуться к эксперименту [7] по измерению глубины мениска, то "отрицательный" результат объясняется тем, что в сверхтекучий компоненте вращающегося гелия возникает строй прямолинейных вихревых нитей. Наведенная ими суммарная циркуляционная скорость сверхтекучей компоненты является точно такой, чтобы имитировать полное вращение жидкости, схематически это изображено на Рис. В.1(б).

Другим важным свойством, с которыми столкнулись исследователи на ранней стадии изучения $He\ II$, была так называемая сверхтеплопроводность. С точки зрения двухскоростной гидродинамики это явление объясняется тем, что под действием перепада температуры ΔT возникает встречное движение нормальной и сверхтекучей компонент жидкого гелия (см. Рис. В.2). Тепло же переносится только нормальной "теплосодержащей" частью жидкости. При малых тепловых потоках, (плотность потока тепла – q порядка $1\ mW/cm^2$) наблюдается линейная зависимость: $\Delta T \sim q$. В сверхтекучем гелии: $q = \rho_s s T V_{ns}$, где ρ_s – плотность сверхтекучей компоненты гелия, s – энтропия на единицу массы, T – температура невозмущенной жидкости, а

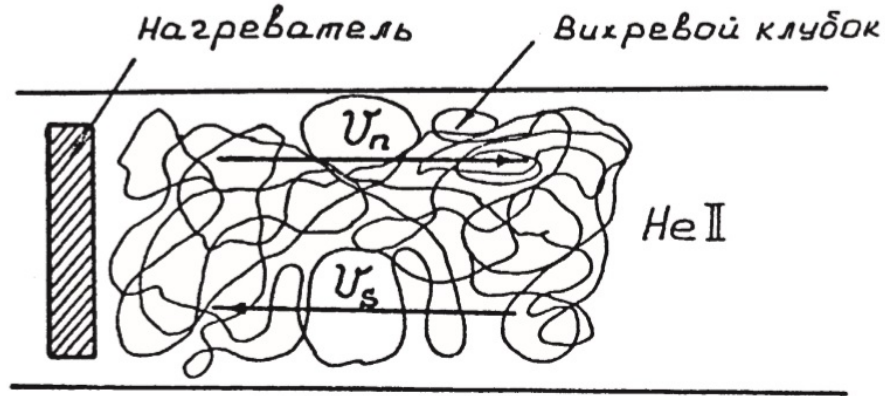


Рис. В.2: Схематическая иллюстрация противотока нормальной и сверхтекучей компонент гелия и вихревого клубка, возникающих при нагревании He II.

$V_{ns} = V_n - V_s$. В работе [10] было показано, что при достижении некоторой критической величины теплового потока, перепад температуры резко возрастает и становится пропорциональным кубу теплового потока, т.е. $\Delta T \sim q^3$. Это свидетельствует о том, что при данных условиях возникает новый сильный диссипативный механизм.

В работах Онзагера [11] и Фейнмана [12] было впервые дано феноменологическое описание этого механизма. Опираясь на квантово-механические свойства сверхтекучей жидкости, они предсказали, что вихревое движение He II реализуется очень специфическим способом. В частности они предположили, что в том случае, если разность скоростей нормальной и сверхтекучей компонент He II — V_{ns} превышает некоторое значение, то в объеме жидкого гелия возникают одномерные особенности, или вихревые нити, на которых нарушается условие $\nabla \times \mathbf{V}_s = 0$. Вокруг этих особенностей возможно круговое движение или циркуляция сверхтекучей компоненты гелия. Квантово-механические свойства сверхтекучей жидкости накладывают ограничения на круговое движение. В частности, циркуляция сверхтекучей скорости принимает только определенные, квантованные значения пропорциональные $\hbar$. Однако, в этом случае, в отличие от вращающегося гелия, вихри представляют собой неупорядоченную структуру (см. Рис. В.2). Когда участки вихревой линии, перемещаются со скоростью отличной от локальной скорости сверхтекучей компоненты, они испытывают действие силы Магнуса. В зависимо-

сти от ориентации, кривизны, а также скорости противотока возможно как увеличение длины некоторого элемента вихря, так и ее уменьшение. Фейнман предположил, что первая тенденция преобладает. По мере роста общей длины, вихревые линии все более плотно заполняют объем, что рано или поздно приводит к их пересечениям. При пересечении возможно перезамыкание нитей (реконнекция), т.е. слияние вихревых петель, либо их дробление. Реконнекции также могут приводить к увеличению или уменьшению длины вихрей. Далее следует предположение, что последнее свойство доминирует, т.е. в среднем, осуществляется дробление вихревых петель, что приводит к каскадному процессу возникновения все более и более мелких петель. Когда размеры мелких вихревых петель становятся порядка межатомных расстояний, вихревое движение переходит в тепловые возбуждения. Развивая идеи Фейнмана, Вайнен предположил [13], что изменение плотности вихревых линий (длины вихревых нитей в единице объема) $L(t)$ со временем описывается уравнением первого порядка (безинерционность). При этом производная $\frac{dL}{dt}$ представляет собой разность двух слагаемых:

$$\frac{dL}{dt} = \left(\frac{dL}{dt}\right)_{gen} - \left(\frac{dL}{dt}\right)_{ann}.$$

Здесь первое слагаемое соответствует росту плотности вихревых линий, связанному с силой Магнуса, второе – уменьшению плотности вихревых линий, из-за дробления вихревых колец. Для определения вида слагаемых использовались соображения размерности, аналогия с классической турбулентностью и полученный Вайненым и Холлом результат, касающийся динамики одиночного вихревого кольца [14, 15]. В результате уравнение Вайнена выглядит следующим образом:

$$\frac{dL}{dt} = \alpha_v |v_{ns}| L^{3/2} - \beta_v L^2.$$

Некоторые константы α_v и β_v определяются из эксперимента. В настоящее время это уравнение считается общепризнанным и используется в различных приложениях. Это уравнение может быть включено в систему уравнений

классической двухжидкостной гидродинамики [16], что значительно расширяет круг явлений описываемый ими, включая квантовую турбулентность. Система представлений, основанная Фейнманом, развитая затем Вайненом и другими, получила название теории сверхтекучей турбулентности.

В общем случае хаотическая динамика вихревых нитей относится к такому разделу физики неупорядоченных систем, как хаотическая динамика протяженных объектов. Квантованные вихри возникают в различных нелинейных полях и определяют многие свойства систем, описываемых этими полями. К таким системам относятся: полимеры, мембраны, релятивистские струны, линейные дефекты в твердых телах и многое другое.

В первой главе диссертационной работы представлены результаты детального изучения влияния нормальной компоненты сверхтекучего гелия на динамику вихревых нитей перед реконнекциями при различных температурах начальных условий. В пункте 1.1. приводится постановка задачи и основные существующие результаты, касающиеся исследуемой системы. Далее, в пункте 1.2. описывается метод вихревой нити и выводятся уравнения движения, используемые при моделировании. В пункте 1.3. детально описана вычислительная схема, соответствующая математической модели, описанной в пункте 1.2., а также приводятся результаты тестирования расчетного алгоритма и описание параметров моделирования. Пункт 1.4. содержит результаты, характеризующие динамику сближения вихревых нитей перед их реконнекцией. Пункт 1.5. посвящен описанию геометрических конфигураций реконнектирующих вихрей. В конце первой главы приводятся выводы и проводится их обсуждение.

Динамика вихревых структур в He II во многом определяет гидродинамические и термодинамические свойства сверхтекучей жидкости [17], поэтому важной задачей представляется исследование динамики вихревого клубка. Однако, динамика этой системы очень сложна для аналитического изучения, в связи с чем, именно, численное моделирование становится наиболее доступным методом изучения вихревого клубка.

Численное изучение совокупности вихревых нитей в сверхтекучем гелии проводившееся многим коллективами, также не является простой задачей.

Прежде всего это обусловлено необходимостью учитывать реконнекции вихревых нитей, аналитическое описание которых до сих пор не построено. В связи с чем на практике, как правило используются различные феноменологические модели, описывающие этот процесс (критерии реконнекции). В основе большинства критериев лежит выбор некоторого характерного расстояния. При нахождении элементов вихревых нитей на расстоянии меньше этого характерного, вихревые нити должны реконнектировать. Однако, при своем дальнейшем движении пересечение элементов вихревых нитей может и не произойти. Это обстоятельство может существенно исказить реальную динамику и приводить к качественно неправильным результатам. Например, в работах [18, 19] вихревой клубок распадался и превращался в набор редких, вытянутых от границе к границе вихревых нитей. В отличие от описанного подхода, предлагается новый алгоритм реконнекций, основанный на анализе динамики элементов вихревых нитей. Таким образом, вторая глава диссертационной работы посвящена численному моделированию динамики вихревого клубка в противотоке нормальной и сверхтекучей компонент гелия. В первом пункте главы приведена общая постановка задачи. В пункте 2.2. рассматривается математическая модель системы, включающая в себя процессы реконнекции и уравнение движения вихревой нити. Пункт 2.3. посвящен описанию численной реализации алгоритма реконнекций и оптимизации вычислительной схемы, включая локально-индуцированное приближение. В следующем пункте главы приводятся некоторые важные свойства вихревого клубка, полученные при моделировании. Завершает главу пункт посвященный обсуждению полученных результатов.

В последнее время появился ряд численных и экспериментальных исследований, показывающих что хаотические вихри в сверхтекучем гелии могут индуцировать движение жидкости, обладающее свойствами классической турбулентности: [20, 21, 22, 23] и др. Другими словами, вихревые клубки обладают некоторыми чертами классической турбулентности, такими как перенос энергии о масштабам, колмогоровский спектр поля скоростей, сходный закон затухания. Данное обстоятельство возродило очень давние надежды на то, что многие свойства классической турбулентности могут быть описаны в тер-

минах хаотических вихрей. Существует мнение, что вихревые трубки составляют "костяк" турбулентности, и, изучая динамику квантованных вихревых нитей, можно существенно продвинуться в построении теории гидродинамической турбулентности. Ближайший аналог квантовых вихрей в классической гидродинамике – это так называемые вихревые трубки. В классической жидкости, однако, они рассматриваются скорее как удобная и плодотворная математическая модель, нежели реальные объекты. Квантовые жидкости, где вихревые нити являются реальными объектами, дают отличную возможность для исследования вопроса о роли дискретных вихри в вихревых течениях жидкости, в частности, в турбулентных явлениях. Важно, что эти трубки являются очень устойчивыми образованиями (в отличие от концентрированных вихрей в классических средах) и могут быть базисом для экспериментальной проверки многих теоретических результатов, связанных с концепцией концентрированных вихрей (см., например, книгу [24]).

Таким образом, сверхтекучая турбулентность может служить некоторым "полигоном" для тестирования и возможного развития теории стохастической динамики протяженных объектов. Одним из важнейших первых шагов на этом пути является задача определения спектра энергии трехмерного течения жидкости, индуцируемого различными конфигурациями вихревых нитей, чему и посвящена третья глава диссертационной работы. Структура третьей главы работы следующая. В первом пункте главы приводится постановка задачи и обсуждается ее актуальность. Во втором пункте (3.2), разбитым на три подпункта, излагается материал, касающийся хаотической вихревой петли и спектров полей скорости индуцируемых ей. Так в первом подпункте (3.2.1) выводится формула для энергии потока, индуцируемого хаотической вихревой петлей и кратко обсуждается Гауссова модель вихревого клубка. Второй подпункт (3.2.2) посвящен обсуждению фрактальных свойств вихревых петель. В подпункте 3.2.3 находятся спектры энергии для различных моделей вихревых петель. Далее, в третьем пункте работы (3.3) исследуются энергетические спектры полей скорости, индуцируемых различными вихревыми конфигурациями. Третий пункт разбит на четыре подпункта в которых обсуждается метод структурных функций (3.3.1), а также энергетиче-

ческие спектры полей скорости индуцируемых: кинками перед реконнекцией (3.3.2), вихревыми петлями перед реконнекцией (3.3.3) и вихревыми клубками в противотоке нормальной и сверхтекучей компонент гелия при различных температурах (3.3.4). В последнем пункте третьей главы обсуждаются, полученные результаты.

В заключении диссертационной работы формулируются основные положения, выносимые на защиту, а также приводится список использованной литературы.

Я благодарен д.ф.-м.н. Сергею Карповичу Немировскому и д.ф.-м.н. Кондауровой Луизе Петровне за руководство моей научной работой и плодотворное сотрудничество. Я благодарен Сергею Федоровичу Чекмареву и Дмитрию Григорьевичу Архипову за полезное обсуждение части работы, представляемой в диссертации. Большое спасибо сотрудникам лабораторий 6.2 и 6.3 ИТ СО РАН за дружеское участие.

Глава 1

Динамика квантованных вихрей перед реконнекциями

1.1. Постановка задачи

Первая глава посвящена изучению динамики квантованных вихрей перед реконнекциями. Динамика квантованных вихревых нитей (и петель) существенно влияет на гидродинамические и термодинамические свойства сверхтекучего гелия [17]. Реконнектируя (перезамыкаясь), вихревые нити постоянно дробятся и сливаются друг с другом, образуя сложную структуру – так называемый вихревой клубок, который, в свою очередь, определяет основные макроскопические свойства сверхтекучего гелия. По этой причине исследование динамики вихревых нитей и закономерностей, связанных с их реконнекциями, чрезвычайно важно.

Несмотря на значительное количество работ, посвященных динамике коллапсирующих (реконнектирующих) линий как в классических, так и квантовых жидкостях (см., например, статьи [25, 26]), точная теория этого процесса не построена. Качественно, результаты существующих исследований весьма схожи, и могут быть описаны следующим образом. В следствии нелинейного взаимодействия между вихревыми нитями на больших расстояниях, вихри могут приближаться друг к другу. По мере приближения, их ближайшие сегменты начинают переориентироваться таким образом, чтобы занять антипараллельное положение. Более того, на приближающихся элементах двух вихревых линий появляются выступы или так называемые кинки (см., например, Рис. 1.1). Кривизна на кончиках этих выступов может быть настолько

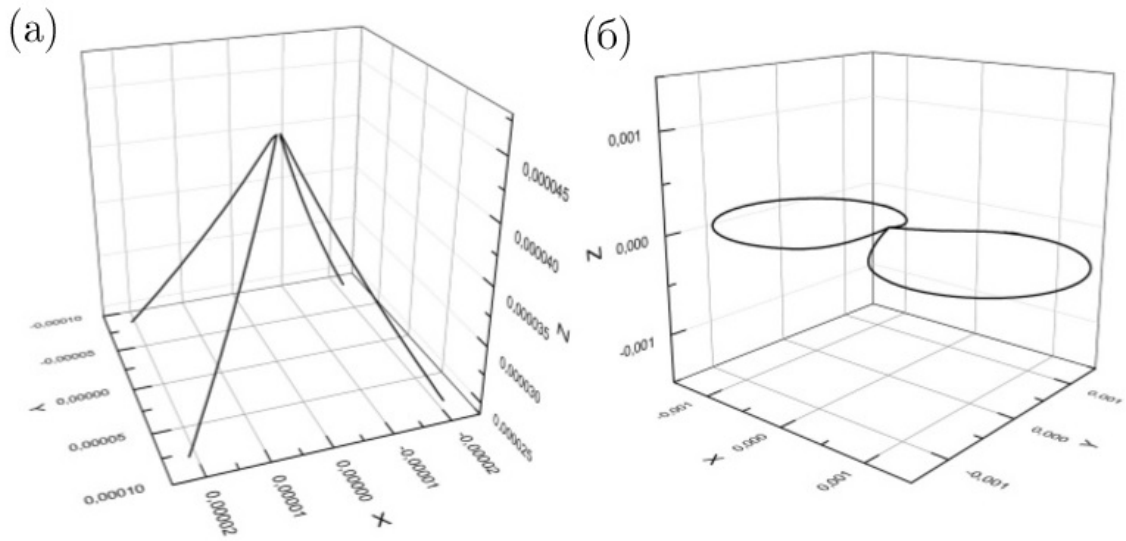


Рис. 1.1: (а) Геометрическая конфигурация кинков перед реконнекцией; (б) геометрическая конфигурация вихревых петель перед реконнекцией. Размеры расчетной области приведены в сантиметрах.

большой, что самоиндуцированная скорость каждого возмущения преодолевает нелокальное отталкивание от смежной вихревой линии. Далее, кинки продолжают расти и приближаться друг к другу, что увеличивает их кривизну и, соответственно, их индуцированные скорости. Особый интерес в динамике вихрей перед их реконнекцией (или кинков) представляет изменение минимального расстояния между ближайшими элементами вихревых петель, так как эта величина тесно связана со скоростью реконнекций (количеством реконнекций в единицу времени), а также изменение геометрической конфигурации вихревых нитей непосредственно перед реконнекцией, играющее определяющую роль в формировании трехмерного поля скорости, индуцированного сближающимися вихрями. Для изучения этих зависимостей использовались различные подходы: моделирование на основе уравнения Био-Савара в локальном приближении [27] или с учетом нелокальных эффектов [28], численное решение уравнения Гросса-Питаевского [29], аналитические оценки [26] и эксперименты [30, 31]. Было установлено, что при нулевой температуре, зависимость минимального расстояния между ближайшими элементами вихревых петель от времени $\delta(t)$ имеет универсальный вид [27], а

именно:

$$\delta(t) = \sqrt{(\kappa/2\pi)(t_* - t)}, \quad (1.1)$$

где $\kappa = \hbar/m_{He}$ – квант циркуляции, m_{He} – масса атома гелия, $\hbar$ – постоянная Планка, t_* – время реконнекции (временной промежуток от начального момента моделирования до момента реконнекции). Кроме того, было показано, что при нулевой температуре геометрическая конфигурация ближайших участков вихревых петель при сближении петель, также имеет универсальный вид – вид пирамидальной структуры или кинка (см. Рис. 1.1).

Эксперименты, проведенные в диапазоне температур от 1.7 K до 2.05 K , а, следовательно, при наличии трения в системе, свидетельствуют о том, что скорость приближения вихревых петель может существенно отличаться от скорости сближения в отсутствии трения [31]:

$$\delta(t) = A\sqrt{(\kappa)(t_* - t)}(1 - c|t_* - t|). \quad (1.2)$$

Экспериментальные значения коэффициента A распределены по закону близкому к нормальному с максимумом в области 1.24 ± 0.01 и значением полуширины на полувысоте равным 0.8 (от 0.8 до 1.6). Значения $c|t_* - t|$ также распределены по закону близкому к нормальному, причем $\overline{c|t_* - t|} \approx 0.15$ для $0 < |t_* - t| < 0.25\text{ c}$. Максимум значения коэффициента $c \approx 0$ с полушириной на полувысоте равной 2.1 c^{-1} (от -0.9 c^{-1} до 1.5 c^{-1}). Таким образом, отклонение экспериментальных данных от их средних значений, существенно для того, чтобы давать окончательное заключение о характере определяемой зависимости.

Численное изучение динамики вихревых нитей перед реконнекцией проводилось и при ненулевой температуре. Так в работе [28], на основе метода вихревой нити, было установлено, что $\delta(t) \sim \sqrt{(t_* - t)}$. К сожалению, в данной работе не приводится информация о геометрической конфигурации вихревых нитей перед реконнекцией. Численные результаты, полученные при решении данной задачи с помощью уравнения Гросса-Питаевского [29], неплохо согласуются с результатами экспериментов [31]. Однако, результат достигается с помощью специальной перенормировки. Более того, уравне-

ние Гросс-Питаевского не учитывает наличие нормальной компоненты гелия, поэтому не может корректно отражать зависимость динамики исследуемой системы от температуры. Таким образом, вопрос о применимости уравнения Гросса-Питаевского и корректности сравнения с экспериментальными данными при температурах поддерживаемых в эксперименте [31] остается открытым. В работе [29], также определялись геометрические характеристики пирамидальной структуры, формируемой ближайшими элементами вихревых нитей. Причем, полученные результаты не согласуются с данными работы [27]. В частности, углы при вершине пирамидальной структуры (прилежащей к ближайшим точкам вихрей) $\approx 61^\circ$ и 112° [29], в отличии от $\approx 25^\circ$ и $\approx 115^\circ - 135^\circ$, полученных в работе [27]. Таким образом, данные численных и аналитических исследований качественно согласуются между собой, но количественное расхождение некоторых данных достигает десятков процентов, т.е. на сегодняшний день не существует однозначного решения поставленной задачи.

Выяснение причин расхождения существующих численных результатов между собой и с данными экспериментов, а также изучение влияния трения и начальной конфигурации вихревых нитей на динамику их сближения являлись основными задачами первой главы диссертационной работы.

1.2. Уравнение движения

Данный раздел посвящен описанию метода, используемого при изучении динамики вихревых нитей. В качестве такого метода был выбран метод вихревой нити. Основная суть данного метода заключается в том, что незначительное изменение диаметра ядра квантовых вихрей, возникающих в сверхтекучем гелии, игнорируется, а вихри аппроксимируются "нитеями" с заданной структурой ядра. Непосредственно при моделировании, вихревая нить аппроксимируется совокупностью прямых отрезков, с размерами много меньшими межвихревого расстояния.

Рассмотрим ключевую составляющую численного эксперимента: уравнение движения вихревой нити. Для последовательного изложения основ ис-

пользуемого метода, рассмотрим уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости. Гидродинамика сверхтекучего гелия строится в терминах двухжидкостной модели Ландау [6]. Основная суть этой модели состоит в том, что жидкий гелий рассматривается как смесь двух жидкостей, так называемых нормальной и сверхтекучей компонент. Данные компоненты физически неразделимы и связаны со своим типом движения. Для математического описания такого объекта, каждой компоненте приписывается собственная плотность ρ_n, ρ_s и скорость $\mathbf{V}_n, \mathbf{V}_s$, причем суммарная плотность компонент равна плотности жидкого гелия $\rho = \rho_n + \rho_s$, а полная плотность потока жидкости определяется как $\mathbf{j} = \rho_n \mathbf{V}_n + \rho_s \mathbf{V}_s$. Уравнения движения вихревых нитей можно получить в рамках следующих рассуждений. Рассмотрим уравнение неразрывности для сверхтекучего гелия (смеси нормальной и сверхтекучей компонент):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \mathbf{j} = 0.$$

При фиксированной температуре отношение плотностей нормальной и сверхтекучей компоненты остается постоянным, т.е. $\rho_n/\rho_s = \text{const}$. Условие фиксированной температуры крайне важно потому, что плотности нормальной и сверхтекучей компонент существенно зависят от температуры, так при нуле градусов K все движение является сверхтекучем, соответственно, плотность нормальной компоненты равна нулю. При $T = 2.17 K$ (температуре фазового перехода в сверхтекучее состояние) вся жидкость совершает нормальное движение, соответственно, при этой температуре плотность сверхтекучей компоненты равна нулю. В рамках модели несжимаемой жидкости можно записать: $\rho_n \nabla \mathbf{V}_n + \rho_s \nabla \mathbf{V}_s = 0$ или $\nabla \mathbf{V}_n = 0$ и $\nabla \mathbf{V}_s = 0$. Квантовые вихри могут возникать только в сверхтекучей компоненте жидкого гелия, поэтому в дальнейших рассуждениях нас интересует только соотношение $\nabla \mathbf{V}_s = 0$, означающее соленоидальность поля скоростей. В этом случае скорость можно записать в виде ротора некоторого векторного потенциала $\mathbf{V}_s = \text{rot} \mathbf{A}$. Найдем завихренность поля скорости, взяв ротор $\boldsymbol{\omega} = \text{rot} \mathbf{V}_s$ или $\boldsymbol{\omega} = \text{rot} \text{rot} \mathbf{A}$. Используя соотношение известное из векторного анализа,

получаем, что $\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$. Векторный потенциал определен с точностью до градиента некоторой произвольной функции, поэтому, для определенности, можно наложить на него калибровку, например, Кулоновскую, т.е. $\text{div } \mathbf{A} = 0$. Отсюда, для поля завихренности, справедливо уравнение Пуассона: $\boldsymbol{\omega} = -\Delta \mathbf{A}$. Решение этого уравнения имеет вид:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}})}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|} dV,$$

где dV – элемент объема, $\tilde{\mathbf{r}}$ и $\mathbf{r}$ обозначают радиус-векторы, направленные из начала координат к некоторым точкам вихря и пространства соответственно. Взяв ротор от этого выражения, получаем уравнение для скорости сверхтекучей компоненты:

$$\mathbf{V}_s(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}})}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|^3} dV,$$

Для вычисления этого интеграла необходимо знание поля завихренности. Согласно Онзагеру [11] и Фейнману [12] циркуляция поля скорости сверхтекучей компоненты гелия квантована:

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{V}_s \cdot d\mathbf{l} = n\kappa.$$

Интегрирование проводится по замкнутой кривой C целиком расположенной в сверхтекучей компоненте гелия. Далее, из теоремы Стокса следует, что циркуляция равна потоку завихренности через открытую поверхность S , ограниченную этой кривой:

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{V}_s \cdot d\mathbf{l} = \int (\nabla \times \mathbf{V}_s) \cdot \mathbf{e} dS,$$

где $\mathbf{e}$ – единичный вектор, перпендикулярный поверхности dS . Если скорость непрерывна, а деформация контура является гладкой то, согласно теореме Кельвина, в идеальной жидкости циркуляция скорости по замкнутому контуру (в нашем случае сверхтекучей компоненте) является инвариантом, т.е. $d\Gamma/dt = 0$.

В сверхтекучем гелии образуются квантованные вихри с радиусом ядра порядка нескольких ангстрем, т.е. их завихренность, главным образом, сосредоточена вдоль некоторой линии. Эту линию называют бесконечно тонкой вихревой нитью. Для замкнутой вихревой нити вектор завихренности будет параллелен элементу нити ds . В этом случае из предыдущих уравнений получаем выражение для циркуляции скорости: $\Gamma = \omega \delta s = n\kappa$. Здесь и далее считаем $n = 1$, как наиболее энергетически выгодное состояние квантовых вихрей [1]. Далее, представляя элемент объема в виде произведения $\delta s ds$ – длины элемента вихревой нити и – площади поперечного сечения ($dV = \delta s ds$), с учетом предыдущих уравнений, получим уравнение для индуцированной скорости представляющее собой интеграл Био-Савара:

$$\mathbf{V}_B(\mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{s}_B(\mathbf{r})}{dt} = \frac{1}{4\pi} \lim_{\delta s \rightarrow 0} \oint_L \frac{\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{s} - \mathbf{r}) \delta s ds}{|\mathbf{s} - \mathbf{r}|^3} = \frac{\kappa}{4\pi} \oint_L \frac{(\mathbf{s} - \mathbf{r}) \times d\mathbf{s}}{|\mathbf{s} - \mathbf{r}|^3}.$$

Полученное соотношение определяет скорость жидкости в некоторой точке пространства $\mathbf{r}$. Для нахождения полной скорости вихревой нити, значение $\mathbf{r}$ должно пробегать значения всех элементов нити:

$$\mathbf{V}_B = \frac{d\mathbf{s}_B}{dt} = \frac{\kappa}{4\pi} \oint_L \frac{(\mathbf{s}(\xi', t) - \mathbf{s}(\xi, t)) \times \mathbf{s}'(\xi')}{|\mathbf{s}(\xi', t) - \mathbf{s}(\xi, t)|^3} d\xi', \quad (1.3)$$

где параметр ξ (длина элемента нити), который пробегает значения от 0 до полной длины вихревой нити L , $\mathbf{s}'$ – единичный касательный вектор (или производная радиус вектора по параметру ξ , см. Рис. 1.2). Интеграл (1.3) расходится в точках, где $\mathbf{s}(\xi', t) = \mathbf{s}(\xi, t)$. Для вычисления интеграла вводится некоторый специальный параметр обрезания σ [32, 33, 34]. Величина параметра σ вычисляется из: $\ln(2\sigma/a_0) = g$, где a_0 – радиус ядра квантованного вихря. Установлено, что скорость вихревого кольца, движущегося в сверхтекучем гелии, будет наилучшим образом соответствовать экспериментальным данным [35], если это будет вихрь Рэнкина. Другими словами, вихрь с ядром круглого сечения, постоянной завихренностью и параметром $g = 1/4$. В этом случае $\sigma = 0.64 \cdot a_0$

Полная скорость движения элементов квантованной вихревой нити $\mathbf{V}_{sl}$,

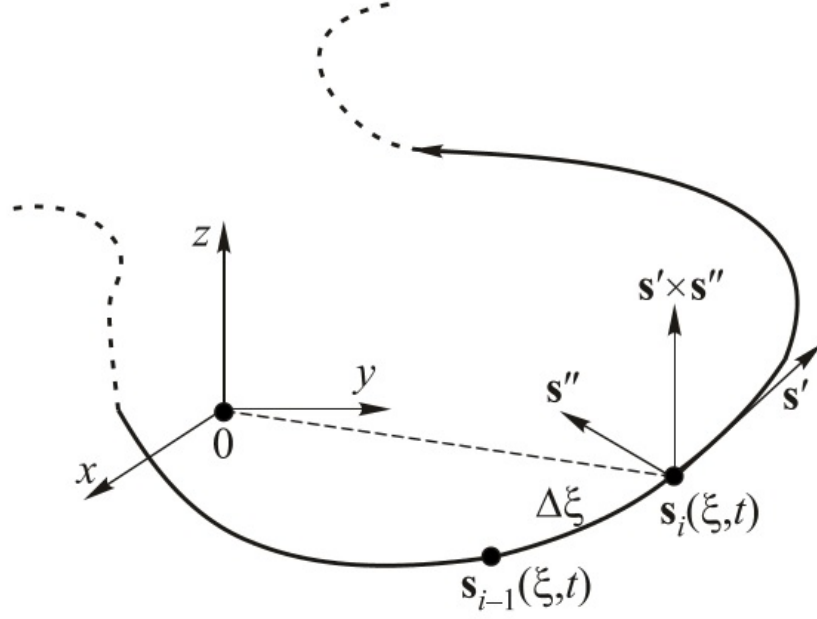


Рис. 1.2: Схематическая иллюстрация координатной системы. Вихревая нить задана в естественной параметризации с натуральным параметром ξ .

без учета их взаимодействия с нормальной компонентой жидкости, складывается из скорости движения $\mathbf{V}_B$, индуцированной всеми вихревыми нитями, присутствующими в системе, скорости сверхтекучей компоненты $\mathbf{V}_{s,e}$ и скорости, обусловленной граничными условиями. Для правильного описания динамики вихревого клубка, также необходимо учитывать силу трения $\mathbf{f}_D$ и силу типа "Магнуса", возникающие при взаимодействии вихрей с нормальной компонентой жидкости. Вследствие воздействия этих сил скорость элемента вихревой нити $\mathbf{V}_L$ отличается от скорости $\mathbf{V}_{sl}$. Так, согласно [18], действие силы "Магнуса" приводит к тому, что скорость элемента вихря:

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{s}' \times \mathbf{f}_D / \rho_s \kappa.$$

В свою очередь, согласно [3]:

$$\mathbf{f}_D = \rho_s \kappa [\alpha (\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_{sl}) - \alpha' \mathbf{s}' \times (\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_{sl})],$$

где $\mathbf{V}_n$ — скорость нормальной компоненты гелия, а α, α' — зависящие от температуры коэффициенты трения. Значения этих коэффициентов опреде-

ляются экспериментально. Пренебрегая граничными эффектами и учитывая, что $\mathbf{V}_{sl} = \mathbf{V}_{s,e} + \mathbf{V}_B$ получаем:

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{V}_B + \mathbf{V}_{s,e} + \alpha \mathbf{s}' \times (\mathbf{V}_{ns} - \mathbf{V}_B) - \alpha' \mathbf{s}' \times [\mathbf{s}' \times (\mathbf{V}_{ns} - \mathbf{V}_B)], \quad (1.4)$$

где $\mathbf{V}_{ns} = \mathbf{V}_n - \mathbf{V}_{s,e}$ – скорость противотока нормальной и сверхтекучей компонент гелия. В отсутствии движения нормальной и сверхтекучей компонент гелия, но при учете силы взаимного трения, уравнение движения элемента вихревой нити принимает следующий вид:

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{V}_B - \alpha \mathbf{s}' \times \mathbf{V}_B + \alpha' \mathbf{s}' \times [\mathbf{s}' \times \mathbf{V}_B], \quad (1.5)$$

При моделировании динамики реконнектирующих вихревых нитей используется уравнение (1.5), при моделировании динамики вихревого клубка в противотоке нормальной и сверхтекучих компонент гелия (см., вторую главу диссертационной работы) используется уравнение (1.4).

1.3. Вычислительная схема

В этом разделе приведено описание вычислительной схемы, используемой при моделировании динамики вихревых нитей (вычислению полного уравнения Био-Савара). Для нахождения скорости, индуцированной вихревыми нитями согласно уравнению (1.5), необходимо вычислить интеграл (1.3). При вычислении скорости вихревой точки $\mathbf{s}_i$ указанный интеграл можно представить в виде двух слагаемых:

$$\mathbf{V}_B(\mathbf{s}_i) = \beta \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' + \frac{\kappa}{4\pi} \int_L \frac{(\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i) \times d\mathbf{s}_j}{|\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i|^3}, \quad (1.6)$$

$$\beta = \frac{\kappa}{4\pi} \left[\frac{2\sqrt{l_+ l_-}}{e^{1/4} a_0} \right].$$

Первое слагаемое в полученном выражении – наведенная от соседних элементов нити скорость: $l_{\pm}$ – длины элементов нити, прилегающие к точке $\mathbf{s}_i$

или локальный вклад. Подробнее описание его нахождения приведено в разделе вычислительная схема второй главы диссертационной работы, там же обсуждаются методы оптимизации расчетной схемы. Здесь же остановимся лишь на некоторых особенностях вычисления второго слагаемого, тестировании расчетного алгоритма и приведении параметров моделирования динамики вихревых нитей перед реконнекцией.

При вычислении второго слагаемого уравнения (1.6), берется интеграл вдоль отрезка $\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_{j+1}$. Значение полученного интеграла определяется выражением:

$$\mathbf{v}_{nl}^j(\mathbf{s}_i) = \frac{\kappa}{4\pi} \frac{2}{4ac - b^2} \left[\frac{b + 2c}{\sqrt{a + b + c}} - \frac{b}{\sqrt{a}} \right] \mathbf{p} \times \mathbf{q}.$$

Здесь использованы следующие обозначения: $\mathbf{p} = \mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i$, $\mathbf{q} = \mathbf{s}_{j+1} - \mathbf{s}_j$, $a = |\mathbf{p}|^2$, $b = 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$, $c = |\mathbf{q}|^2$. В результате, полная наведенная скорость находится путем суммирования по всем элементам нити (нелокальный вклад), за исключением отрезков прилегающих к $\mathbf{s}_i$:

$$\mathbf{v}_{nl}(\mathbf{s}_i) = \sum_{j \neq i-1, j \neq i} \mathbf{v}_{nl}^j.$$

Первым этапом тестирования расчетного алгоритма было сопоставление расчетных и аналитических данных. Рассматривалось вихревое кольцо, находящееся в сверхтекучем гелии при нулевой температуре. Скорость такого кольца определяется как:

$$V = \frac{\kappa}{4\pi} \left[\ln \left(\frac{8R}{a_0} \right) - \frac{1}{4} \right],$$

смотри [36]. Для кольца радиуса $R = 10^{-5}$ м и шага сетки 10^{-7} м, после прохождения расстояния более ста диаметров кольца, разница вычисленной скорости и скорости, определенной аналитически не превышала 0.1 % при учете нелокального вклада в интеграл Био-Савара, при учете лишь локального вклада, разница скоростей не превышала 1 % . Далее проверялось вли-

яние пространственного разрешения на временную зависимость минимального расстояния между элементами вихревых петель при температуре $1.3 K$ (см. Рис. 1.3). Здесь и далее минимальное расстояние δ нормируется на на-

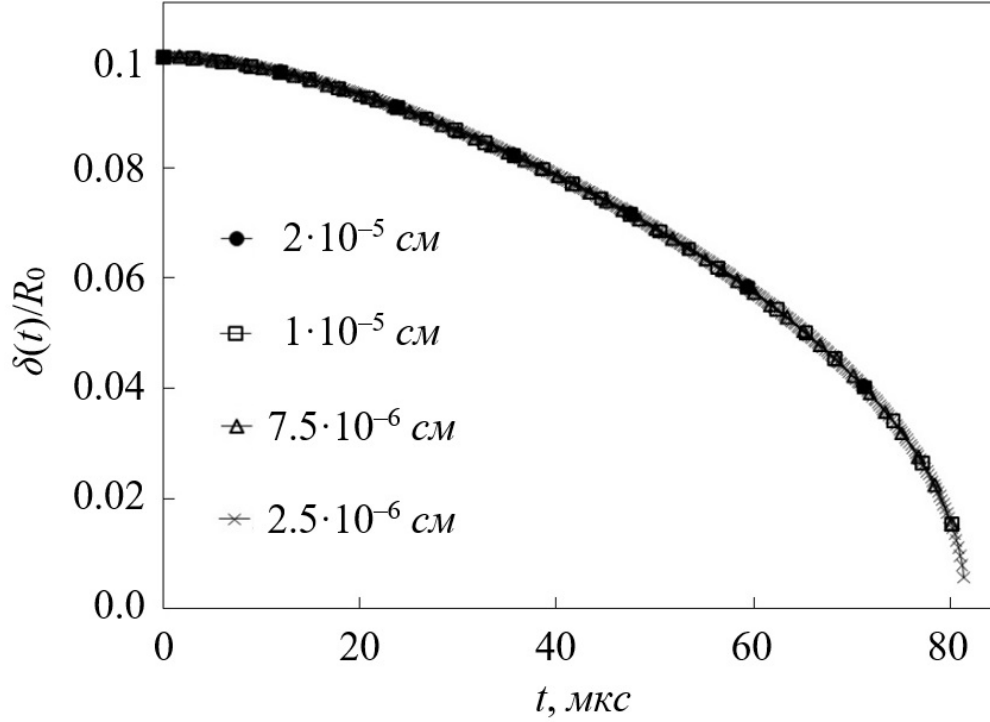


Рис. 1.3: Зависимость минимального расстояния между ближайшими элементами вихревых петель от времени для различных пространственных шагов сетки при $T = 1.3 K$, $\varphi = 0^\circ$, $\Delta = 2.1 \cdot 10^{-5} \text{ м}$. Все точки лежат на кривой, соответствующей уравнению (1.1).

чальный радиус вихревого кольца R_0 (в большинстве расчетов радиус равен 10^{-5} м). При этом, шаг по времени выбирался исходя из критерия устойчивости расчетной схемы Рунге-Кутты 4 порядка точности, которая была использована для интегрирования уравнений движения. Результаты моделирования для различных шагов сетки практически совпадают, что говорит об устойчивости работы выбранного алгоритма для данной задачи. Более того, с помощью применяемого алгоритма были успешно решены ряд других задач, связанных с динамикой вихревых петель, примеры можно найти в работах [37, 38, 39].

При моделировании динамики вихревых нитей перед реконнекцией в качестве начальной конфигурации системы выбирались два вихревых кольца

T, K	0	1.3	1.6	1.9
α	0	0.036	0.098	0.21
α'	0	0.014	0.016	0.0009

Таблица 1.1: Коэффициенты трения, соответствующие рассмотренным температурам.

одинакового диаметра, лежащие в плоскостях, расположенных под углами φ равными : 0° , 30° , 45° , 60° и 90° относительно друг друга. Начальные радиусы вихревых колец варьировались от 10^{-7} м до 10^{-5} м. Начальное расстояние между центрами вихревых колец Δ варьировалось от 2.1 до 2.5 начальных радиусов вихревых колец. При моделировании рассматривались температуры в диапазоне от $T = 0 K$ до $T = 1.9 K$, соответствующие им коэффициенты трения получены в работе [40] и приведены в Таблице 1.1.

1.4. Характер динамики сближения вихревых нитей

В этом разделе приводятся результаты изучения динамики вихревых нитей перед реконнекцией при различных температурах и начальных условиях. В результате систематического моделирования (более двухсот расчетов) были получены зависимости минимального расстояния между элементами вихревых петель от времени для различных начальных конфигураций и температур. В целом результаты, полученные при нулевой температуре, хорошо согласуются с результатами, полученными большинством других научных коллективов [26, 27, 28, 29].

Установлено, что при ненулевой температуре динамика вихревых нитей непосредственно перед реконнекцией (начиная с расстояний $0.07 - 0.08 R_0$ от точки реконнекции) носит универсальный характер, независящий от температуры и начального расположения вихревых нитей. Наблюдаемый тип динамики по своему характеру аналогичен характеру динамики вихревых петель при нулевой температуре, т.е. сближение элементов вихревых петель непосредственно перед реконнекцией хорошо описывается уравнением (1.1). Далее, этот интервал динамики условно назовем универсальным. На больших

расстояниях от точки реконнекции трение оказывает существенное влияние на динамику вихревых петель, что качественно согласуется с экспериментальными данными [31], смотри Рис. 1.4. Для адекватного описания динамики на этих масштабах, зависимость минимального расстояния между элементами вихревых петель от времени должна быть скорректирована. Несмотря на это обстоятельство, ее общий характер остается квадратичным (см. штрих-пунктирную линию в области $\sim 1500 - 2500$ мкс и сплошную линию в области $\sim 3000 - 4000$ мкс на Рис. 1.4). Далее этот интервал динамики условно назовем полууниверсальным. На еще больших расстояниях от точки реконнекции динамика вихревых петель в общем случае не является универсальной (см. штрих-пунктирную линию в области $\sim 0 - 1500$ мкс и сплошную линию в области $\sim 0 - 3000$ мкс на Рис. 1.4), что условно соответствует неуниверсальному интервалу.

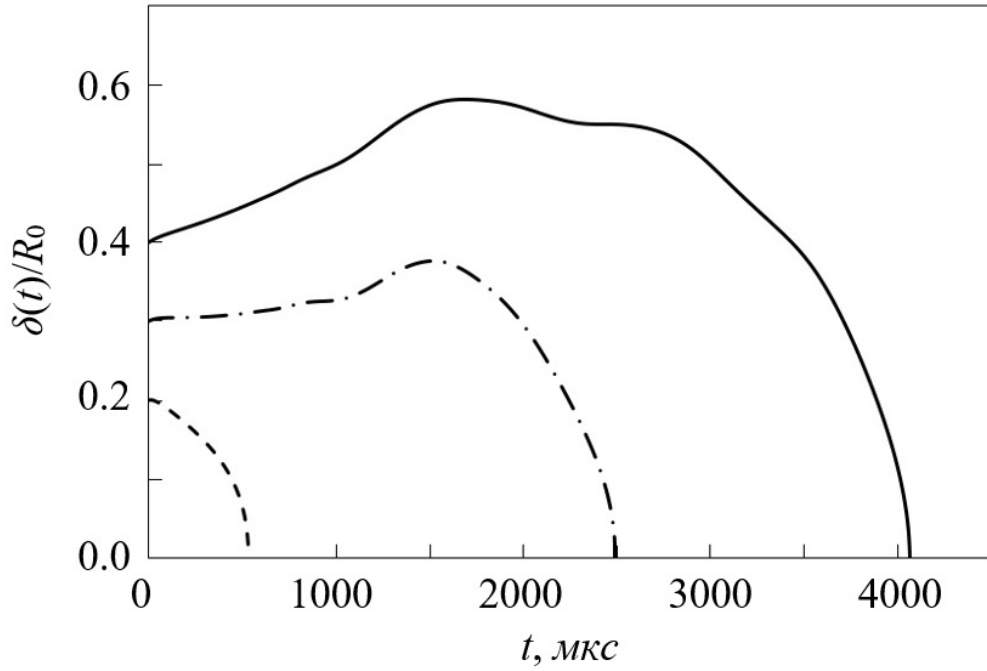


Рис. 1.4: Зависимость минимального расстояния между элементами вихревых петель от времени при $T = 1.6$ K, $\varphi = 0^\circ$, сплошная линия соответствует $\Delta = 2.4 \cdot 10^{-5}$ м, штрих-пунктирная линия соответствует $\Delta = 2.3 \cdot 10^{-5}$ м, штриховая линия соответствует $\Delta = 2.2 \cdot 10^{-5}$ м.

Иллюстрация зависимости $\delta(t)$, имеющей три характерных этапа сближения, представлена на Рис. 1.5. Штриховая и штрих-пунктирная линии

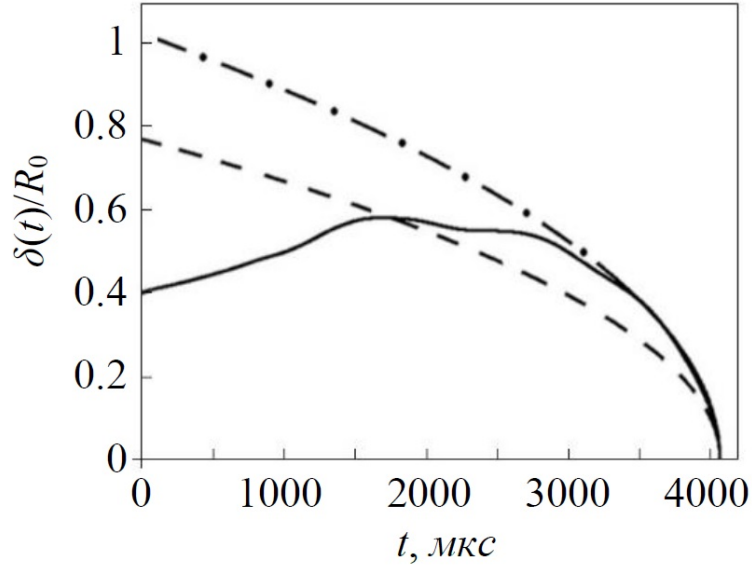


Рис. 1.5: Зависимость минимального расстояния между элементами вихревых петель от времени при $T = 1.6 \text{ K}$, $\varphi = 0^\circ$, $\Delta = 2.4 \cdot 10^{-5} \text{ м}$. Сплошная линия соответствует данным моделирования, штриховая – уравнению (1.1), штрихпунктирная – уравнению "типа" (1.2).

соответствуют уравнениям (1.1) и (1.2). В неуниверсальном интервале $\delta(t)$ испытывает несколько перегибов, в полууниверсальном интервале $\delta(t)$ наилучшим образом описывается уравнением типа (1.2), в последние 40 мкс до точки реконекции зависимость $\delta(t)$ наилучшим образом описывается уравнением (1.1).

Предложенный подход хорошо описывает динамику вихрей изначально лежащих в одной плоскости ($\varphi = 0^\circ$), так как в этом случае начальная относительная скорость вихревых петель равна нулю. В более общем случае, для вихревых петель изначально не расположенных в одной плоскости, эта скорость не равна нулю и зависимости $\delta(t)$ несколько отличаются от описанных ранее, смотри сплошную линию на Рис. 1.6 (а).

Для того чтобы определить степень влияния взаимодействия вихрей на их относительную скорость, необходимо вычесть значение относительной скорости вихревых колец, движущихся без взаимодействия друг с другом, из значения относительной скорости, полученной при моделировании методом вихревой нити. Поэтому, чтобы численно определить степень влияния взаимодействия вихрей на расстояние между ближайшими элементами вихрей $\delta'(t)$

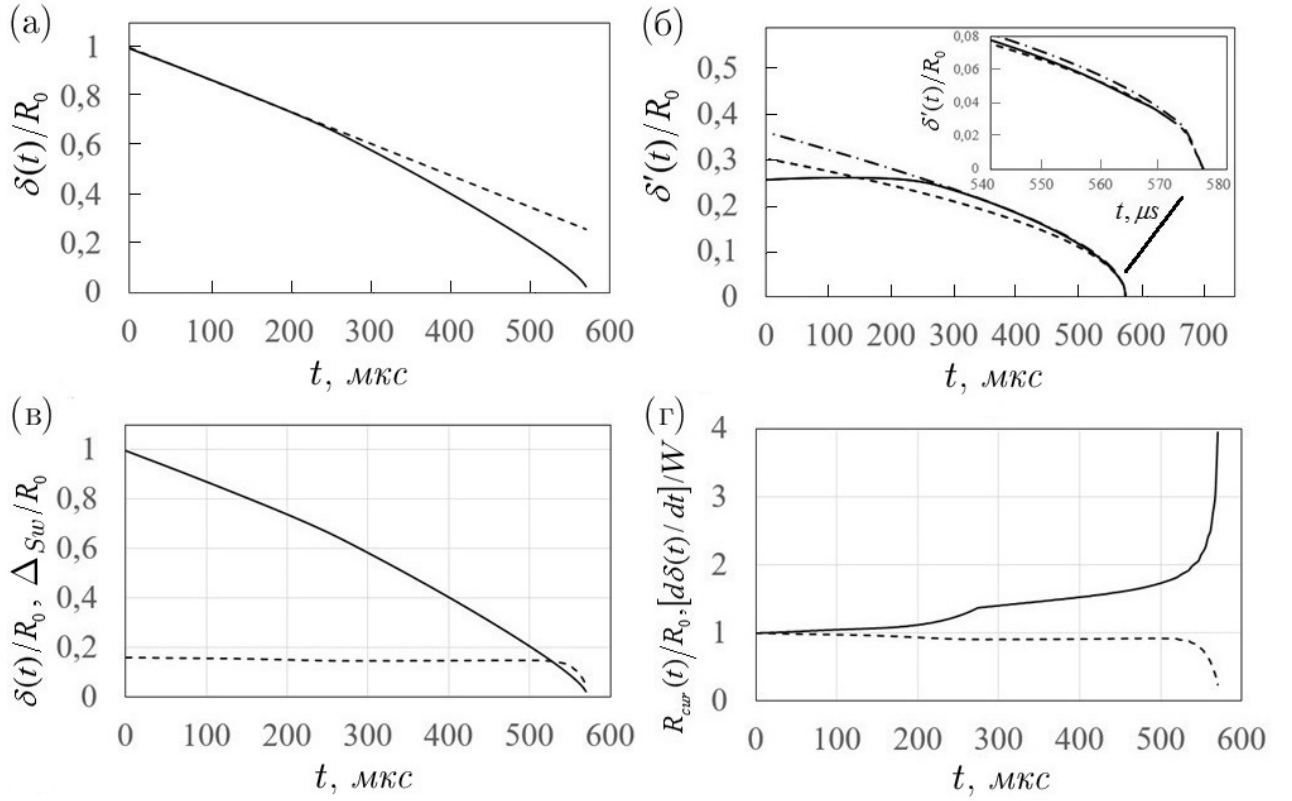


Рис. 1.6: Характерные зависимости от времени безразмерных параметров, описывающих динамику ближайших элементов вихрей. (а) Сплошная линия соответствует $\delta(t)/R_0$, полученному при моделировании, штриховая линия соответствует относительному движению невзаимодействующих вихрей; (б) сплошная линия соответствует $\delta'(t)/R_0$, штриховая линия соответствует уравнению (1.1), штрих-пунктирная линия соответствует уравнению (1.2) с $A = 1.07$ и $c|t_* - t| = 0.015$; (в) сплошная линия соответствует $\delta(t)/R_0$, штриховая – Δ_{sw}/R_0 ; (г) сплошная линия соответствует относительной скорости ближайших элементов вихревых нитей (нормированную на начальную относительную скорость вихревых петель – W), штриховая линия соответствует локальному радиусу кривизны, определенному в ближайших точках вихревых нитей. Вычисления проведены при $\varphi = 90^\circ$, $\Delta = 1$ и $T = 1.6 K$.

(здесь и ниже, $\delta'(t)$ – скорректированное расстояние), необходимо вычесть расстояние между ближайшими элементами вихревых колец, движущихся без взаимодействия друг с другом (см. штриховую линию на 1.6 (а)), из расстояния между ближайшими элементами вихрей, найденного при моделировании (и добавить некоторую константу для положительной определенности $\delta'(t)$). Полученная зависимость $\delta'(t)$ показана сплошной линией на Рис. 1.6 (б). Временная зависимость скорректированного расстояния $\delta'(t)$ ка-

чественно похожа на временные зависимости расстояния $\delta(t)$, полученные для вихрей изначально лежащих в одной плоскости, т.е. для вихрей с нулевой относительной начальной скоростью (см., например, Рис. 1.5). Анализ данных численного моделирования показывает, что подобная ситуация типична для скорректированных расстояний. В результате можно сделать вывод, что и для вихрей изначально не лежащих в одной плоскости существуют три характерных эволюционных интервала: неуниверсальный, полууниверсальный и полностью универсальный интервал. Универсальный интервал характеризуется квадратичной зависимостью (1.1) (см. штриховую линию на Рис. 1.6 (б)). Полууниверсальный интервал, с $\delta'(t)$ близкой к квадратичной зависимости, скорее характеризуется уравнением (1.2) с неуниверсальными параметрами A и $\overline{c|t_* - t|}$ (см. штрих-пунктирную линию на Рис. 1.6 (б)).

Для того чтобы получить более детальное представление о динамике исследуемой системы, вычислим расстояние, фигурирующее в широко используемом критерии реконнекции Шварца – $\Delta_{Sw} = 2R/(c' \ln(R/a_0))$ [18, 41] (штриховая линия на Рис. 1.6 (в)), здесь R – локальный радиус кривизны, $c' \sim 1.1$, a_0 – радиус вихревого ядра. Также вычислим радиус кривизны в ближайших точках вихрей (вычисления показывают, что радиусы кривизны в ближайших точках вихрей равны между собой), смотри пунктирную линию на Рис. 1.6 (г), и относительную скорость ближайших точек вихрей (сплошная линия на Рис. 1.6 (г)), т.е. $D\delta(t)/dt$. Значения Δ_{Sw} и $\delta(t)$ становятся равными примерно при 540 мкс (см. Рис. 1.6 (в)). В этот момент вклад локальных членов (от ближайших точек) в определении динамики точки, согласно уравнению Био-Савара (1.3), становится равным вкладу нелокальных членов. После этого момента, поведение системы существенно изменяется: радиусы кривизны в ближайших точках вихрей резко уменьшаются, а относительная скорость ближайших элементов вихрей резко возрастает, смотри Рис. 1.6 (г). Таким образом, Δ_{Sw} играет роль границы между универсальным и полууниверсальным интервалами, так как в этот момент динамика системы кардинально меняется. На границе между неуниверсальным и полууниверсальным интервалами, также изменяются радиусы кривизны и скорости ближайших точек (смотри, интервал 250 – 300 мкс на Рис. 1.6). Однако, эти изменения не

столь значительны, поскольку взаимодействие между вихрями по-прежнему не играет здесь ведущей роли. Также было установлено, что длина полууниверсального интервала уменьшается с увеличением температуры как $\sim 85 \cdot \alpha$ (в процентах), а длина универсального интервала практически не зависит от нее.

Как указывалось ранее, для описания динамики системы в полууниверсальном интервале, универсальная зависимость минимального расстояния между точками вихревых петель от времени (уравнение (1.1)) должна быть скорректирована. Корректирующие факторы определялись в виде, предложенном в уравнении (1.2). Корректирующие факторы, полученные при анализе данных моделирования, хорошо согласуются с экспериментальными данными [31], смотри сплошные линии на Рис. 1.7, там же на легендах приведены соответствующие корректирующие факторы. Естественно возникает вопрос о сопоставлении с экспериментальными данными и значения $\delta'(t)$, как величины иллюстрирующей взаимное влияние вихревых петель. При таком сопоставлении было установлено, что по мере приближения к точке реконнекции относительная скорость петель играет все меньшую роль, поэтому зависимости $\delta(t)$ и $\delta'(t)$ в универсальном интервале практически совпадают. В полууниверсальном интервале динамики $\delta(t)$ и $\delta'(t)$ качественно согласуются, однако коэффициенты A и $c|t_* - t|$, соответствующие уравнению (1.2), несколько отличаются. Стоит отметить, что несмотря на отличие этих коэффициентов, и для скорректированной зависимости (учитывающей относительную скорость вихревых петель) и для нескорректированной зависимости значения коэффициентов согласуются с экспериментальными данными работы [31], с учетом приведенной там дисперсии экспериментальных данных. Данные, относящиеся к длинам интервалов эволюции для $\delta'(t)$, верны и для $\delta(t)$.

В определенных ситуациях, например при высоких температурах, может реализоваться качественно другой сценарий эволюции петель. Так, вихревые петли могут коллапсировать (уменьшаться в размерах, превращаясь в тепловые возбуждения или излучая второй звук) до осуществления реконнекции. Представляется важным определить условия при которых реализуется

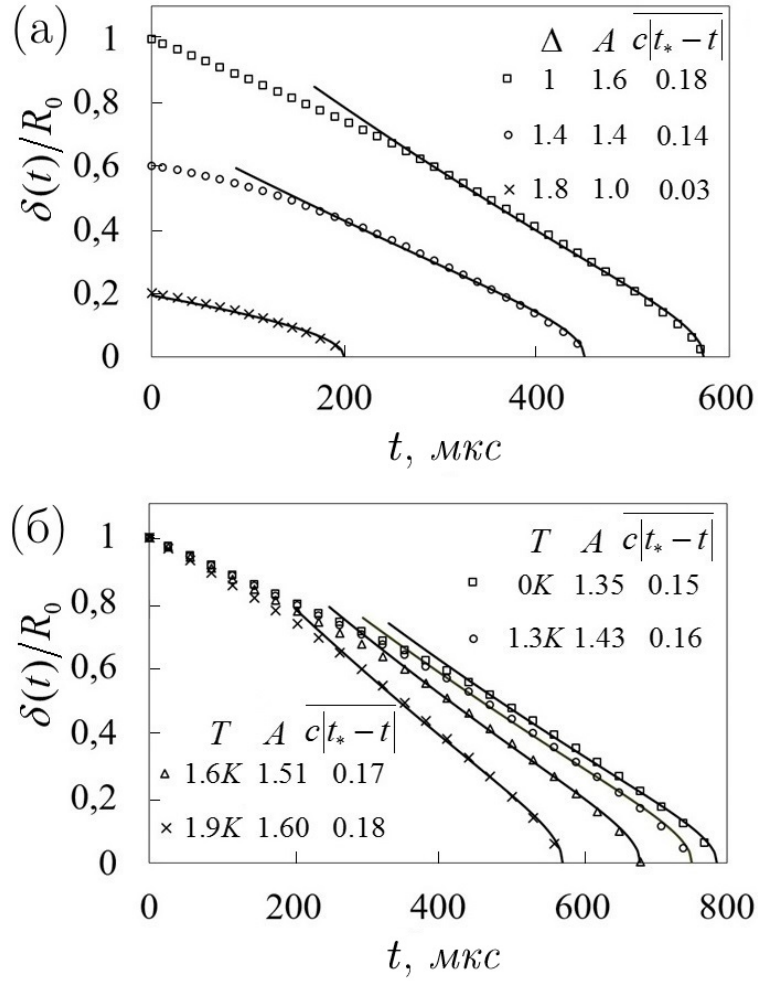


Рис. 1.7: Зависимость минимального расстояния между элементами вихревых петель от времени. Параметры соответствующие уравнению (1.2) приведены на легендах: (а) $T = 1.9 K$, $\varphi = 90^\circ$ для различных Δ ; (б) $\Delta = 1$, $\varphi = 90^\circ$ для различных T . Определения φ , Δ , T , R_0 даны в пункте 1.3.

T, K	$\delta(t) / R_0$				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.0	80.0	323.4	763.0	1410.7	2269.2
1.3	80.9	366.1	1025.6	2184.3	3022.0
1.6	81.7	529.5	2490.3	4064.8	5077.2
1.9	84.0	2406.4	2370.7	2358.8	2352.9

Таблица 1.2: Зависимость характерных времен эволюции вихревых петель (в микросекундах) от температуры и начального расстояния между петлями.

тот или иной сценарий. Например, имея информацию о плотности вихревого клубка, можно оценить характерное ("начальное") расстояние между вихревыми петлями. В результате, можно установить сценарий эволюции вихревого клубка, используя информацию о температуре, характерном расстоянии между петлями и $\delta(t)$.

Для того, чтобы оценить характерное время "эволюции" петель (время реконнекции или коллапса), рассмотрим динамику системы при различных температурах и начальных расстояниях. Соответствующие характерные времена, полученные при моделировании, представлены в Таблице 1.2. Верхняя часть таблицы соответствует сценарию, в котором вихревые петли реконнектируют друг с другом, нижняя часть таблицы (отделенная жирной линией) соответствует сценарию, при котором вихревые петли сжимаются и коллапсируют под действием силы трения до осуществления реконнекции. Время коллапса вихревых петель, движущихся в сверхтекучем гелии при ненулевой температуре, может быть оценено следующим образом [3]: рассмотрим уравнение (1.3) в локальном приближении (подробно локальное приближение описано в разделе вычислительная схема второй главы диссертационной работы):

$$\mathbf{V}_B = \beta \frac{\mathbf{s}' \times \mathbf{s}''}{|\mathbf{s}'|^3}, \quad \beta = \frac{\kappa}{4\pi} \ln \frac{\langle R \rangle}{a_0}.$$

Введем полярную систему координат с осью z , выбранной вдоль направления движения вихревого кольца. Проекция уравнения (1.5) на оси координат с

учетом сил трения будет иметь вид:

$$\mathbf{V}_B = \frac{\beta}{R(t)} \mathbf{e}_z - \frac{\alpha\beta}{R(t)} \mathbf{e}_R; \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\beta}{R(t)}, \quad \frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\alpha\beta}{R(t)}.$$

Путем интегрирования данного уравнения, можно получить оценку зависимости времени коллапса от начального размера кольца и коэффициента трения:

$$\tau = R_0^2 / 2\alpha\beta.$$

Для температур, равных 1.3 K , 1.6 K , 1.9 K (соответствующие коэффициенты трения приведены в Таблице 1.1) и начального радиуса колец $R_0 = 10^{-5}\text{ м}$, времена коллапса примерно равны 15167 мкс , 5570 мкс и 2600 мкс , соответственно. Эти значения хорошо согласуются с временами коллапса в Таблице 1.2. Таким образом, используя уравнения (1.1) или (1.2) и приведенную оценку времени коллапса, можно оценить эволюционный сценарий системы (реконнекция или коллапс вихревых петель). Следует отметить, что данные в Таблице 1.2 получены при нулевом коэффициенте трения – α' . Однако, установлено, что учет этого коэффициента не изменяет форму $\delta(t)$, а лишь увеличивает время реконнекции на $1 - 2\%$. Таким образом, влияние α' на динамику системы незначительно.

Как показывают данные моделирования, для вихрей изначально лежащих в одной плоскости при нулевой температуре всегда реализуется сценарий с осуществлением реконнекции, причем время реконнекции зависит от начального расстояния следующим образом: $t_* = C (\Delta/R_0)^2$, где $C \sim 9.4 \cdot 10^{-3}\text{ с}$.

Кроме того, система была проверена на наличие автомодельных решений. Непосредственно такие решения не должны наблюдаться из-за наличия диссипации в системе и наличия логарифмического множителя (в уравнении движения). Однако, было установлено, что при непосредственном приближении вихревых нитей, несмотря на наличие упомянутых факторов, система демонстрирует поведение близкое к автомодельному.

1.5. Геометрическая конфигурация квантованных вихрей перед реконнекцией

В этом разделе приводятся результаты, связанные с геометрической конфигурацией вихревых нитей перед реконнекцией. Расчеты показали, что в процессе эволюции вихревые петли приближались друг к другу, а их ближайшие элементы выходили из плоскостей петель, образуя пирамидальную структуру, смотри, например, Рис.1.1 и Рис. 1.8 (а). Такая картина качественно согласуется с результатами работ [26, 27, 29]. Однако, при увеличении температуры, как обсуждалось в предыдущем разделе, длина петель может уменьшаться из-за трения, и, как следствие, при определенных начальных условиях петли коллапсируют до момента реконнекции. В этом случае никаких пирамидальных структур не образуется, что противоречит утверждению работы [28] о слабой зависимости динамики сближающихся петель от их начального расположения.

Для того, чтобы проиллюстрировать геометрическую эволюцию ближайших элементов вихревых петель (и участков вихревых нитей непосредственно к ним прилегающих), рассмотрим сегменты, смежные с вершинами А и В, смотри Рис. 1.8 (а). Точки А и В, делят на две части (ветви) соответствующие им вихревые петли. Затем определим значения углов между сегментами, принадлежащими разным ветвям вихревых петель, но имеющих одинаковый порядковый номер, т.е. углы между k -ым сегментом ветви i и k -ым сегментом ветви j . Здесь нумерация сегментов начинается от "вершины" вихревой петли и идет вдоль соответствующих ветвей вихревой петли. Для различных начальных расстояний между центрами вихревых колец и для различных температур, но для одинаковых (в начальный момент времени) углов между плоскостями вихревых колец, значения рассматриваемых углов почти совпадают (см. Рис. 1.8 (б,в)). Однако, углы в верхней части пирамиды изменяются с изменением начальных углов между плоскостями колец. Рис. 1.8 (г) иллюстрирует зависимость углов между сегментами вихрей от номера сегмента для разных начальных ориентаций плоскостей вихревых колец. Значения углов между сегментами, принадлежащими ветвям вершин (1-2, 3-4),

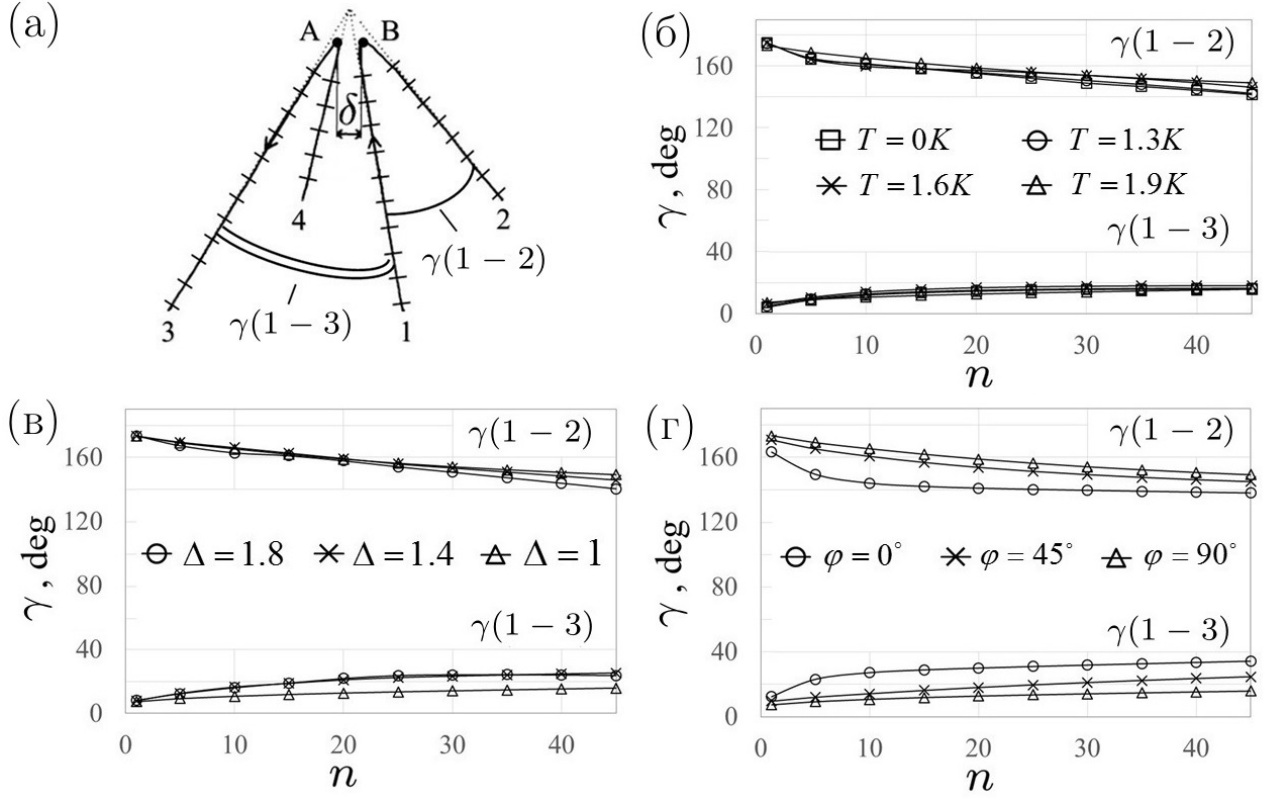


Рис. 1.8: (а) Схематичное изображение кинка перед реконнекцией и определения углов. Угол $\gamma(i-j)$ соответствует углу между сегментами (с одинаковым номером) "ветвей" вихрей i и j (нумерация начинается от вершины "пирамиды"). Зависимость углов между сегментами вихревых нитей от номера сегмента n : (б) при $\varphi = 90^\circ$, $\Delta = 1$ для различных T ; (в) при $\varphi = 90^\circ$, $T = 1.9 K$ для различных Δ ; (г) при $T = 1.9 K$, $\Delta = 1$ для различных φ . Размер сегмента $\sim R_0/100$.

возрастают на $10 - 20^\circ$, а для сегментов, принадлежащих ветвям (1-3, 2-4), уменьшаются на $5 - 20^\circ$ с увеличением начального угла между плоскостями вихревых петель.

Таким образом, при моделировании была получена зависимость углов при вершине пирамиды от температуры. Значения углов, полученные при нулевой температуре, практически совпадают со значениями углов, полученными в работе [27]. Исследование динамики пирамидальной структуры при приближении вихревых нитей друг к другу показало, что при попадании системы в универсальный интервал (смотри п. 1.4), углы при вершине пирамидальной структуры не изменяются со временем и практически не зависят от температуры и начальных условий, смотри Рис. 1.8 (б). Кроме того, их значения

соответствуют значениям углов при нулевой температуре. Данное явление обусловлено тем, что при непосредственном приближении вихревых петель силы, связанные с их взаимным влиянием, начинают доминировать над силами, связанными с взаимодействием вихревых нитей с нормальной компонентой гелия.

Согласно данным моделирования, при осуществлении реконнекции, сближающиеся участки вихревых нитей переориентируются таким образом (с существенной деформацией участков вихревых нитей, прилежащих к пирамидальной структуре), чтобы направление векторов их циркуляции было противоположным. Данное обстоятельство очень важно, поскольку, для сохранения спиральности, направление циркуляции этих сегментов должно быть антипараллельным [42, 43]. Ближайшие сегменты вихрей, ориентированные именно таким образом, что выражается в значениях углов между ними (см. Рис. 1.8 (б-г)).

1.6. Обсуждение и заключение

При моделировании динамики квантованных вихрей перед реконнекциями, установлены и проанализированы характер сближения и соответствующие конфигурации вихревых нитей. В частности, выделены три характерных этапа эволюции вихрей перед реконнекциями, а также установлены границы между ними. В каждом из этапов описана динамика ближайших элементов квантованных вихрей, обусловленная соотношением сил межвихревого взаимодействия и сил взаимодействия между вихрями и нормальной компонентой гелия. Влияние баланса сил на характер динамики вихревых нитей проиллюстрирован с помощью: скорости сближения элементов вихревых нитей, локального радиуса кривизны, Δ_{Sw} , отвечающего за соотношение локальных и нелокальных членов в интеграле Био-Савара, а также оценки времени коллапса вихревых петель.

В итоге, все полученные результаты хорошо согласуются с данными экспериментов (и некоторых расчетных работ) и, более того, дают детальное представление об эволюции вихревых петель в сверхтекучем гелии при нену-

левой температуре.

Результаты, полученные в первой главе диссертационной работы, опубликованы в двух статьях [44, 45], а также трудах и тезисах конференций [46, 47, 48, 49].

Глава 2

Моделирование сверхтекучей турбулентности в противотоке

2.1. Постановка задачи

Вторая глава посвящена моделированию сверхтекучей турбулентности в противотоке нормальной и сверхтекучей компонент гелия. Моделирование вихревого клубка в сверхтекучем гелии с использованием метода вихревой нити при различных начальных и граничных условиях проводилось многими научными группами [18, 19, 50, 51, 52, 53]. Обычно в качестве начальных условий задавалась относительно простая вихревая структура, представляющая из себя набор нескольких вихревых петель, после чего изучались ее свойства и динамика. При исследованиях наблюдалось, что вихревые петли в процессе своей эволюции претерпевают значительные изменения, превращаясь в запутанный вихревой клубок (см., например, Рис. В.2). При этом, как уже отмечалось в первой главе диссертационной работы, при своем движении вихревые нити могут реконнектировать (объединяться или дробиться при взаимном пересечении). Схематично эти процессы представлены на Рис. 2.1. Процессы реконнекции приводят к изменению топологии вихревых нитей, а также структуры и свойств вихревого клубка. В настоящее время процесс осуществления реонекции не описан аналитически, поэтому при моделировании используются феноменологические методы – критерии реонекции. Один из первых (и часто используемых) таких критериев был предложен Шварцем [18]. Суть его критерия заключается в следующем: для каждой точки вихревой нити определяется расстояние – (параметр) $\Delta_{Sw} = 2R/(c' \ln(R/a_0))$

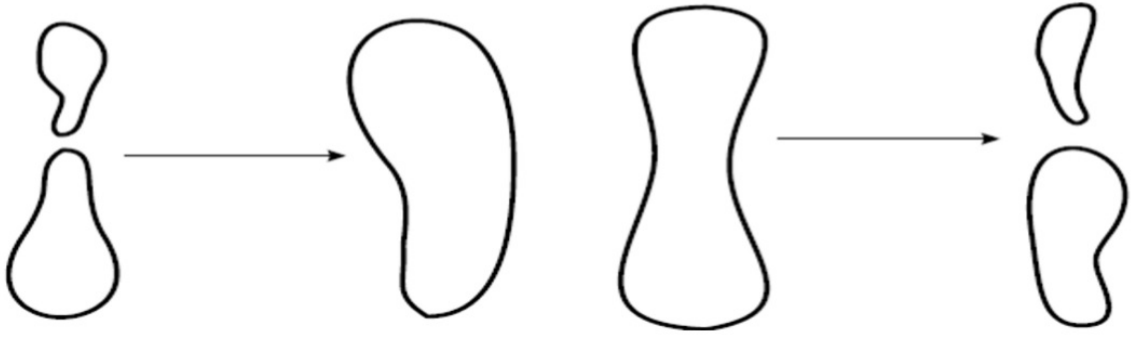


Рис. 2.1: Схематичные изображения процессов реконнекции, приводящих к слиянию и дроблению вихревых петель, взятые из работы [54].

(здесь R – радиус кривизны в данной точке, константа $c' \sim 1.1$, a_0 – радиус ядра вихря в сверхтекучем гелии) при котором вклад в динамику рассматриваемой точки от локальных и нелокальных членов (см. уравнение (1.6)) становится равным. В случае, если две точки принадлежащие одной вихревой нити (или разным вихревым нитям) подходят на расстояние меньшее Δ_{Sw} для одной из них, то сегменты, прилегающие к этим точкам, реконнектируют. Стоит отметить, что этот критерий не учитывает пространственное направление циркуляции реконнектирующих сегментов. В результате, реконнекция может осуществиться и для сегментов, которые бы не пересеклись при своем дальнейшем движении.

В представляемой работе был использован новый критерий осуществления реконнекций, который основывается на анализе движения вихревых нитей. Он будет описан в следующем пункте.

2.2. Процессы реконнекций и уравнение движения

Как указывалось ранее, уравнение движения вихревых нитей (1.4) не учитывает реконнекций вихревых нитей. В связи с необходимостью учитывать этот фактор, обратимся к рассмотрению процессов реконнекции вихревых нитей. При моделировании процессов реконнекций был использован новый метод, основанный на анализе динамики элементов вихревых нитей. Суть метода заключается в следующем: скорости сегментов вихревых нитей считаются постоянными (за время меньшее, либо равное временному шагу вы-

числительной схемы – τ), смотри Рис. 2.2, 2.3. В том случае, если за время τ

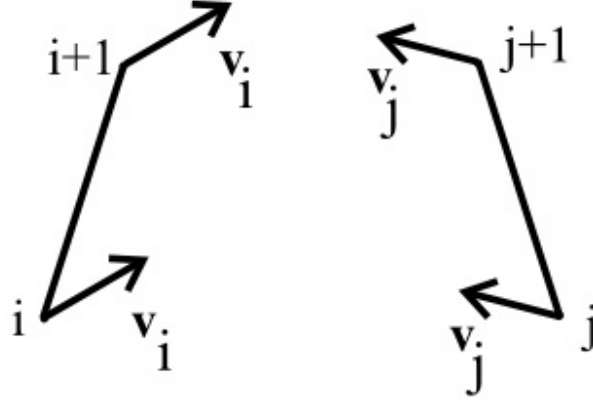


Рис. 2.2: Схематическая иллюстрация пересекающихся сегментов вихревых нитей перед реконнекцией.

сегменты вихревых нитей пересекают друг друга, то система возвращается в исходное положение, а на следующем шаге моделирования осуществляется процесс реконнекции.

С математической точки зрения, предложенный метод сводится к трем шагам: определению сегментов – кандидатов на осуществление реконнекции (подробнее смотри следующий раздел), проверка условия пересечения выбранных сегментов за время τ и, собственно, изменение вихревых конфигураций. Проверка условия пересечения элементов сводится к проверке условия совместности следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}
 x_i + V_{x,i}h + (x_{i+1} - x_i)s_1 &= x_j + V_{x,j}h + (x_{j+1} - x_j)s \\
 y_i + V_{y,i}h + (y_{i+1} - y_i)s_1 &= y_j + V_{y,j}h + (y_{j+1} - y_j)s \\
 z_i + V_{z,i}h + (z_{i+1} - z_i)s_1 &= z_j + V_{z,j}h + (z_{j+1} - z_j)s, \\
 0 \leq s_1 \leq 1; 0 \leq s \leq 1.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $(x_i, y_i, z_i, x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$, $(x_j, y_j, z_j, x_{j+1}, y_{j+1}, z_{j+1})$ – координаты пар точек, а $V_{x,i}, V_{y,i}, V_{z,i}, V_{x,j}, V_{y,j}, V_{z,j}$ – это проекции скоростей данных точек на координатные оси.

При выполнении условия пересечения вихревых сегментов, вихревая конфигурация перестраивается. В случае, если пересекающиеся сегменты при-

надлежат одной петле, то петля дробится на две, если же сегменты вихрей принадлежат разным петлям, то эти петли объединяются в одну (см. Рис. 2.1). Однако, в любом случае реконнекция осуществляется таким образом, чтобы циркуляция поля скорости не изменялась. Локально процесс перестройки вихревой конфигурации представлен на Рис. 2.3. Пересекшиеся

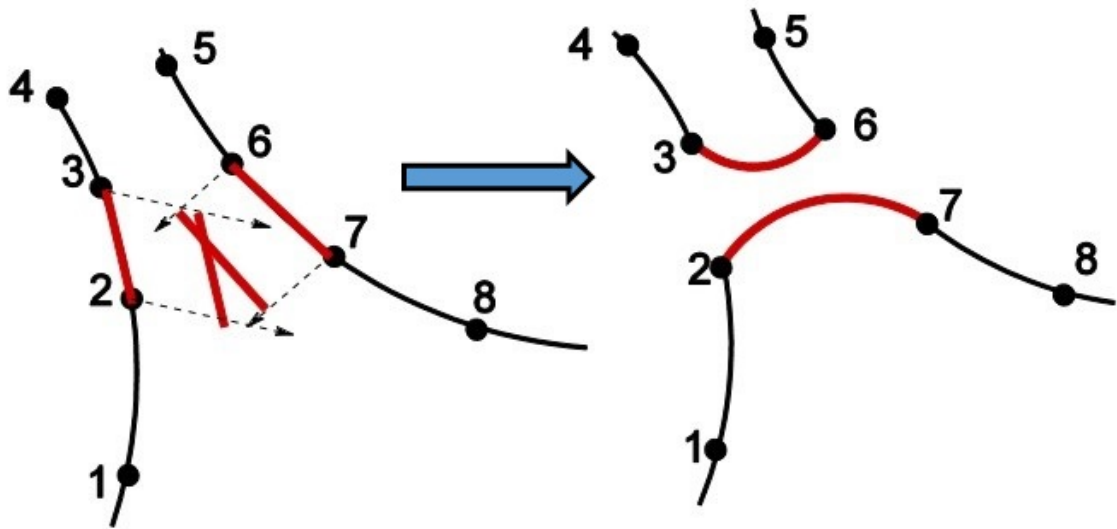


Рис. 2.3: Схема изменения топологии вихревых нитей при реконнекции. Реконнекция осуществляется, если сегменты (2-3) и (6-7) пересекаются в течении временного шага вычислительной схемы.

сегменты (2-3) и (6-7) удаляются, при этом в вихревую конфигурацию добавляются сегменты (2-7) и (3-6).

Уравнения движения с критериями реконнекции являются основой проводимого численного моделирования. При ненулевой температуре и наличии противотока нормальной и сверхтекучей компонент гелия в качестве уравнение движения используется уравнение (1.4).

2.3. Вычислительная схема

Рассмотрим численную реализацию определения условия пересечения вихревых сегментов, проводимую при используемом критерии реконнекции (подробнее смотри предыдущий раздел). Реализация сводится к решению систе-

мы уравнений (2.1) относительно времени $-h$. Решение этой системы уравнений имеет следующий вид:

$$h = -(- (x_{i+1} - x_i)(z_{j+1} - z_j)y_i + (x_{i+1} - x_i)(z_{j+1} - z_j)y_j + (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)z_i + (z_{j+1} - z_j)(y_{i+1} - y_i)x_i - (z_{j+1} - z_j)(y_{i+1} - y_i)x_j - (z_{i+1} - z_i)(x_{j+1} - x_j)y_j - (y_{i+1} - y_i)(x_{j+1} - x_j)z_i) - (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)z_j + (y_{i+1} - y_i)(x_{j+1} - x_j)z_j + (y_{j+1} - y_j)(z_{i+1} - z_i)x_j - (y_{j+1} - y_j)(z_{i+1} - z_i)x_i + (z_{i+1} - z_i)(x_{j+1} - x_j)y_i) / (- (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)V_{z,j} + (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)V_{z,i} + (x_{i+1} - x_i)(z_{j+1} - z_j)V_{y,j} - (z_{i+1} - z_i)(x_{j+1} - x_j)V_{y,j} + (y_{i+1} - y_i)(x_{j+1} - x_j)V_{z,j} + (y_{j+1} - y_j)(z_{i+1} - z_i)V_{x,j} - (y_{j+1} - y_j)(z_{i+1} - z_i)V_{x,i} - (y_{i+1} - y_i)(x_{j+1} - x_j)V_{z,i} - (x_{i+1} - x_i)(z_{j+1} - z_j)V_{y,i} + (z_{j+1} - z_j)(y_{i+1} - y_i)V_{x,i} - (z_{j+1} - z_j)(y_{i+1} - y_i)V_{x,j} + (z_{i+1} - z_i)(x_{j+1} - x_j)V_{y,i}).$$

Если это время оказывается меньше, временного шага вычислительной схемы, и $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq s1 \leq 1$ (выражения для них не приводятся из-за громоздкости), то осуществляется процесс реконнекции.

Для определения h и расчета динамики вихревого клубка необходимо решить уравнение (1.4), в свою очередь, для его решения требуется вычисление интеграла Био-Савара (1.3). Вследствие нелокальности (1.3), моделирование динамики вихревого клубка становится очень сложной и вычислительно затратной задачей. В связи с этим обстоятельством, важным является использование различных алгоритмов оптимизации вычислений. При моделировании вихревого клубка в противотоке нормальной и сверхтекучей компонент гелия для оптимизации вычислительного алгоритма использовались три подхода: вычисление интеграла (1.3) в локальном приближении, регулирование числа расчетных точек при вычислении производных и отбор ближайших сегментов вихревых нитей для проверки осуществления условия реконнекции. Рассмотрим эти подходы подробнее.

Первой оптимизирующая процедура – вычисление интеграла Био-Савара в локальном приближении. В таком приближении движение точки вихревой нити определяется только ближайшими к ней элементами. Рассмотрим уравнение (1.3) и разложим $\mathbf{s}(\xi')$ в ряд Тейлора в точке $\mathbf{s}(\xi)$ (для ближайших точек эта процедура справедлива): $\mathbf{s}(\xi') - \mathbf{s}(\xi) = \xi \mathbf{s}' + \xi^2 \mathbf{s}''/2 + \dots$. Полученное выражение продифференцируем по параметру ξ : $\mathbf{s}'(\xi') = \mathbf{s}' + \xi \mathbf{s}'' + \dots$

Подставив выражения для $s(\xi')$ и $\mathbf{s}'(\xi')$ в уравнение (1.3), получим:

$$\mathbf{V}_B = \frac{\kappa}{4\pi} \oint_L \frac{(\xi \mathbf{s}' + \xi^2 \mathbf{s}''/2 + \dots) \times (\mathbf{s}' + \xi \mathbf{s}'' + \dots)}{|\xi \mathbf{s}' + \xi^2 \mathbf{s}''/2 + \dots|^3} d\xi.$$

Пренебрегая производными высших порядков, получим скорость в локальном или, так называемом, самоиндуцированном приближении

$$\mathbf{V}_{si} = \frac{\kappa}{8\pi} \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' \oint_L |\xi|^{-1} (1 + O(\xi)) d\xi,$$

или

$$\mathbf{V}_{si} = \beta \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'', \quad \beta = c(\kappa/4\pi) \ln(R/a_0).$$

В работе [19] показано, что лучшая аппроксимация выражения (1.3) достигается при $c \sim 1.1$.

В локальном приближении скорость точки вихревой нити определяется величинами $\mathbf{s}'$ и $\mathbf{s}''$. Эти производные можно вычислить с использованием вспомогательных векторов: $\mathbf{l}_+ = \mathbf{s}_{i+1} - \mathbf{s}_i$ и $\mathbf{l}_- = \mathbf{s}_i - \mathbf{s}_{i-1}$. Если разложить вектора: $\mathbf{s}_{i+1}$ и $\mathbf{s}_{i-1}$ в ряд Тейлора в точке $\mathbf{s}_i$, то выражения для $\mathbf{l}_+$ и $\mathbf{l}_-$ будут иметь следующий вид:

$$\mathbf{l}_+ = s_+ \mathbf{s}' + \frac{s_+^2 \mathbf{s}''}{2} + \frac{s_+^3 \mathbf{s}'''}{6} + \frac{s_+^4 \mathbf{s}''''}{24} + \dots,$$

$$\mathbf{l}_- = s_- \mathbf{s}' - \frac{s_-^2 \mathbf{s}''}{2} + \frac{s_-^3 \mathbf{s}'''}{6} - \frac{s_-^4 \mathbf{s}''''}{24} + \dots,$$

где s_+ и s_- длины дуг между векторами $\mathbf{s}_{i+1}$, $\mathbf{s}_i$ и между векторами $\mathbf{s}_i$, $\mathbf{s}_{i-1}$ соответственно. Непосредственно из этих выражений можно построить аппроксимацию первой и второй производных для вычисления скорости в локальном приближении:

$$\mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' = \frac{-2}{|\mathbf{l}_+||\mathbf{l}_-||\mathbf{l}_+ + \mathbf{l}_-|} \mathbf{l}_+ \times \mathbf{l}_- + \epsilon_3,$$

ошибка в определении этой величины равна:

$$\epsilon_3 = \frac{s_+ - s_-}{3} \mathbf{s}' \times \mathbf{s}''' + \dots$$

Точность вычисления скорости в локальном приближении определяется величиной ϵ_3 . Соответственно, точность повышается для близких значений s_+ и s_- . Кроме того, в процессе моделирования происходит изменение расстояний между точками вихревых петель. Для поддержания точности вычисления производных на одном уровне используется специальная процедура. Суть процедуры заключается в следующем: если расстояние между точками становится в полтора и более раз меньше выбранного изначально пространственного шага, то промежуточная точка убирается. В случае, если расстояние между точками становится в полтора и более раз больше, чем пространственный шаг, то в промежутке между ними вставляется еще одна точка. Точка вставляется на середине дуги окружности радиуса:

$$R_{i'}^{-1} = |\mathbf{s}_{i'}''| = |(\mathbf{s}_i'' + \mathbf{s}_{i+1}'')/2|.$$

Координата вставляемой точки определяется следующим образом:

$$\mathbf{s}_{i'} = (\mathbf{s}_i + \mathbf{s}_{i+1})/2 + (\sqrt{R_{i'}^2 - |\mathbf{l}_+|^2/4} - R_{i'})R_{i'}\mathbf{s}_{i'}''.$$

В процессе расчета также убрались петли, состоящие из трех точек. Однако, изменение плотности вихревых нитей за счет данной процедуры оказалась на три порядка меньшей величиной, чем уменьшение плотности вихревых нитей за счет силы трения, т.е. предлагаемую процедуру можно не рассматривать как источник ошибок.

Еще одной процедурой оптимизации является отбор пар точек таких, что отрезки, концами которых эти точки являются, могли бы реконнектировать в течении временного шага. Для этой цели применялась специальная процедура: все пространство, в котором находился вихревой клубок, разбивалось на ячейки. Размеры этих ячеек определялись следующим образом: $\Delta x = V_x^{max} h$, $\Delta y = V_y^{max} h$, $\Delta z = V_z^{max} h$, где V_x^{max} , V_y^{max} , V_z^{max} – это максимальные проек-

ции скоростей точек вихревых нитей на оси координат, а h – шаг по времени. Кандидатами для осуществления реконнекции считались только те отрезки, что находились в соседних ячейках. Применение такой процедуры значительно сокращало вычислительные затраты по сравнению с той процедурой, в которой рассматривалось движение каждого отрезка для всех вихревых нитей.

Расчеты проводились при периодических, во всех направлениях, граничных условиях, т.е. если часть вихревой нити выходило за границы расчетной области с одной стороны, то такая же часть вставлялась со стороны противоположной границы, смотри Рис. 2.4. Другими словами: $\mathbf{V}_s(x) = \mathbf{V}_s(x + l_1)$, $\mathbf{V}_s(y) = \mathbf{V}_s(y + l_2)$, $\mathbf{V}_s(z) = \mathbf{V}_s(z + l_3)$, где $l_1 = (x_{max} - x_{min})$, $l_2 = (y_{max} - y_{min})$, $l_3 = (z_{max} - z_{min})$.

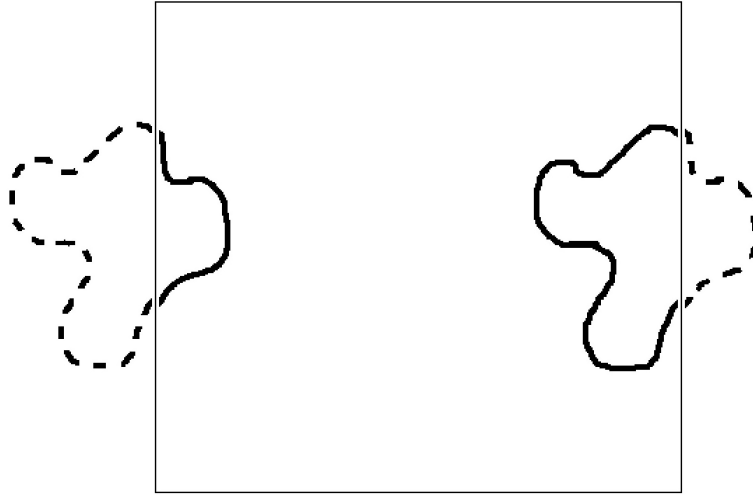


Рис. 2.4: Схематическая иллюстрация периодических граничных условий.

Моделирование было проведено при температуре $T = 1.6\text{ K}$ и скоростях противотока равных: 6, 8, 10 и 12 см/с . В качестве вычислительного объема был выбран куб с длиной ребра равной 50 мкм . В качестве начальной конфигурации системы задавались 24 случайно ориентированные вихревые кольца, но с суммарным импульсом равным нулю. Для интегрирования уравнения движения по времени, как и при моделировании динамики реконнектирующих петель, была использована схема Рунге-Кутты 4 порядка точности.

2.4. Некоторые свойства вихревого клубка

В данном разделе приводятся некоторые свойства вихревого клубка в стационарном состоянии. Начальная конфигурация вихревых петель, заданная в кубическом объеме эволюционировала согласно уравнению движения и критерию реконнекции, описанных в предыдущих пунктах главы. Рис. 2.5 иллюстрирует переход начальной конфигурации вихревых колец в плотный вихревой клубок. В процессе эволюции изначально гладкая система вихревых

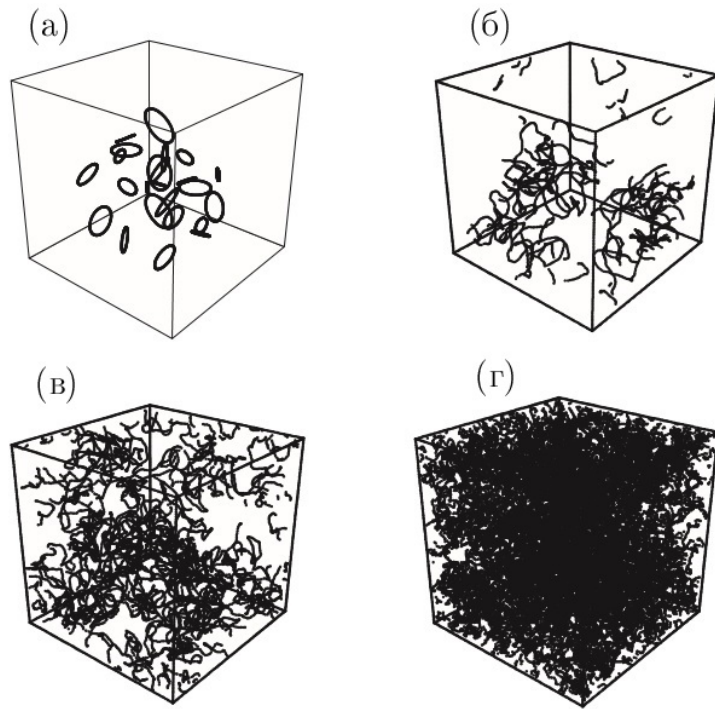


Рис. 2.5: Эволюция вихревого клубка при скорости противотока $V_{ns} = 12 \text{ см/с}$ в моменты времени: (а) $t = 0 \text{ мс}$; (б) $t = 2 \text{ мс}$; (в) $t = 7 \text{ мс}$; (г) $t = 10.8 \text{ мс}$.

колец постепенно трансформируется в запутанный вихревой клубок. С течением времени плотность вихревых нитей (длина вихревых нитей в единице объема) увеличивается (см. Рис. 2.6), количество петель и их конфигурация непрерывно изменяется. После некоторого переходного периода, длительность которого определяется скоростью противотока нормальной и сверхтекучей компонент гелия, вихревой клубок приходит в некоторое стационарное состояние. Это состояние характеризуется некоторыми средними значениями физических величин и их флуктуациями, амплитуда которых существенно меньше самих средних значений. Рис. 2.6, иллюстрирующий зависимость

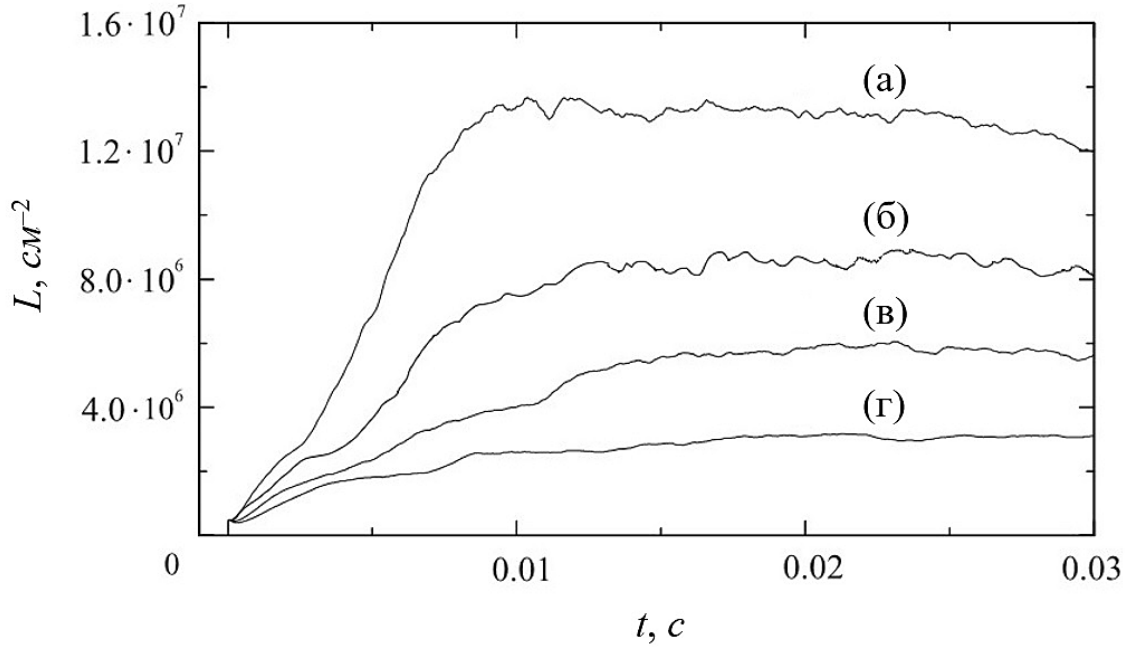


Рис. 2.6: Зависимость плотности вихревых нитей от времени для различных скоростей противотока: (а) $V_{ns} = 12$ см/с; (б) $V_{ns} = 10$ см/с; (в) $V_{ns} = 8$ см/с; (г) $V_{ns} = 6$ см/с.

плотности вихревых нитей от времени, указывает на то, что такое стационарное состояние достигнуто для всех скоростей противотока нормальной и сверхтекучей компонент гелия.

Очень важной зависимостью, характеризующей исследуемую систему, является связь плотности вихревых нитей и скорости противотока в стационарном состоянии. На Рис. 2.7 представлена такая зависимость, полученная при условиях моделирования, описанных ранее. Аппроксимация соответствующих данных дает:

$$L(\mathbf{V}_{ns}) = \gamma^2 \mathbf{V}_{ns}^2, \quad (2.2)$$

где $\gamma \approx 280$ с/см². Полученный результат качественно согласуется с результатами численных работ [19, 41, 53] и экспериментов [14], т.е. в них наблюдалась такая же зависимость между L и $\mathbf{V}_{ns}^2$. Стоит отметить, что в указанных численных работах стационарное состояние либо не достигалось, либо достигалось с использованием "специальных" процедур, также в них использовались другие критерии осуществления реконнекции, что давало значения $\gamma \approx 130$ с/см² в [19], $\gamma \approx 140$ с/см² в [41] и $\gamma \approx 200$ с/см² в [53].

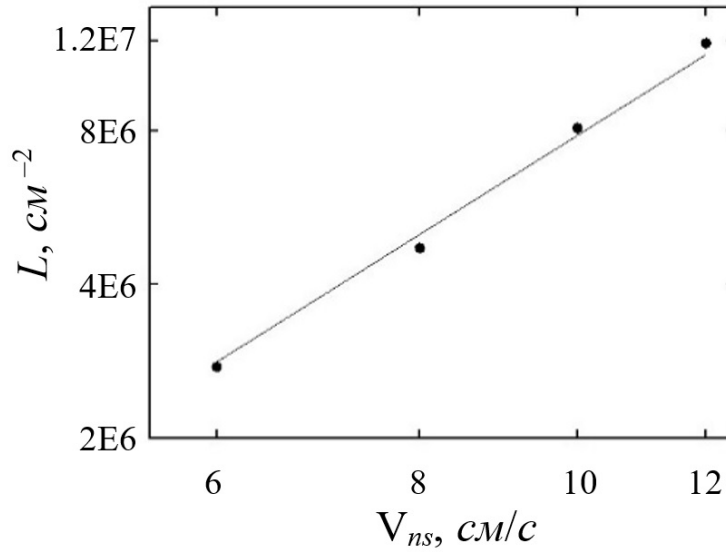


Рис. 2.7: Зависимость плотности вихревых нитей от скорости противотока. Точки соответствуют данным моделирования, сплошная линия соответствует уравнению (2.2).

Реконнекции между вихревыми нитями приводят к установлению стационарного состояния вихревого клубка, поэтому одна из важнейших характеристик стохастического вихревого клубка – количество реконнекций в единицу времени в единице объема (или скорость реконнекций) в стационарном состоянии. На Рис. 2.8 изображены зависимости числа реконнекций (приводящих к дроблению и слиянию вихревых петель) от времени при различных значениях скорости противотока сверхтекучей и нормальной компонент гелия. Верхние линии соответствуют процессу дробления петель, а нижние линии соответствуют процессу слияния петель. Скорости дробления и слияния петель очень близки к друг другу, однако скорость дробления немного превышает скорость образования петель (см. Рис. 2.8).

Полученная при моделировании зависимость скорости реконнекций от плотности вихревых нитей имеет вид:

$$dN_r/dt = C\kappa L^{5/2}, \quad C \sim 2.47, \quad (2.3)$$

смотри Рис. 2.9. Данный результат, включая значение константы C , согласуется с расчетными [52, 55] и теоретическими [56] предсказаниями.

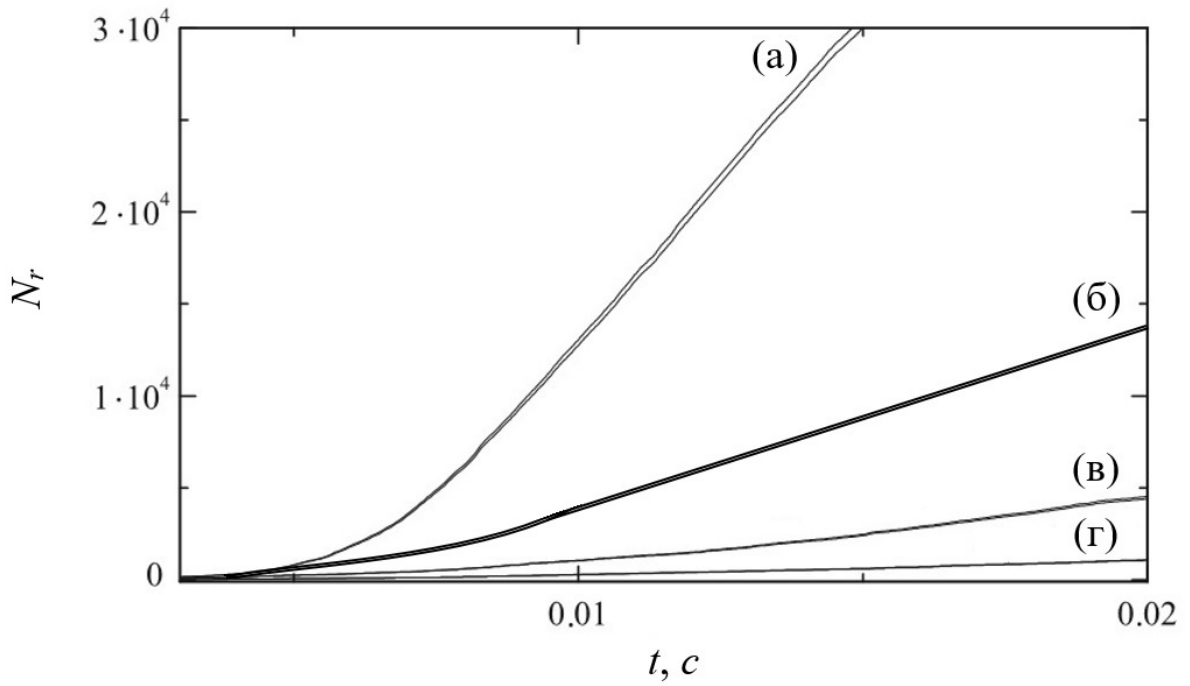


Рис. 2.8: Зависимость количества реконнекций N_r со слиянием и дроблением петель от времени для различных скоростей противотока: (а) $V_{ns} = 12 \text{ см/с}$; (б) $V_{ns} = 10 \text{ см/с}$; (в) $V_{ns} = 8 \text{ см/с}$; (г) $V_{ns} = 6 \text{ см/с}$. Верхние линии соответствуют процессу дробления петель, нижние линии соответствуют процессу слияния петель.

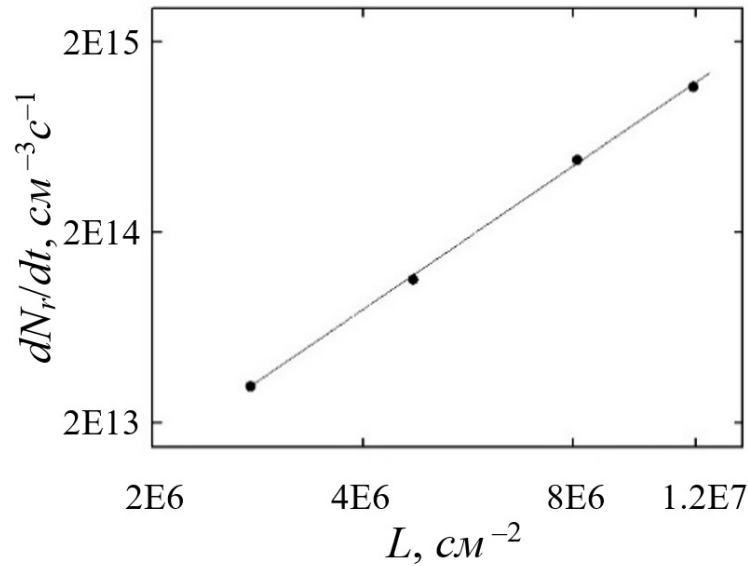


Рис. 2.9: Зависимость скорости реконнекций от плотности вихревых нитей. Точки соответствуют данным моделирования, сплошная линия соответствует уравнению (2.3).

2.5. Обсуждение и заключение

Результаты численного моделирования свидетельствуют о том, что гладкая система квантованных вихревых петель трансформируется в хаотический вихревой клубок. В отличие от предшествующих работ, в исследуемой системе удалось достигнуть стационарного состояния без введения каких-либо дополнительных "демпфирующих" процедур. В стационарном состоянии были определены зависимости плотности вихревых нитей и количества реконнекций от времени при различных скоростях противотока нормальной и сверхтекучей компонент гелия. Полученные результаты согласуются как с экспериментальными данными, так и с результатами, предсказанными в численных и теоретических работах. Получение стационарного состояния, а также согласованность полученных результатов с данными других научных коллективов, свидетельствует об адекватности предлагаемого критерия осуществления реконнекций.

Результаты, полученные во второй главе диссертационной работы, опубликованы в двух статьях [57, 58], а также в тезисах конференции [59].

Глава 3

Энергетические спектры полей скорости, создаваемых квантованными вихрями

3.1. Постановка задачи

В данной главе изучаются спектральные характеристики полей скорости, создаваемые различными конфигурациями квантованных вихрей.

Квантовая или сверхтекучая турбулентность привлекает значительное внимание как теоретиков, так и экспериментаторов. Обычно под сверхтекучей турбулентностью понимается клубок запутанных квантованных вихревых нитей, возникающий в сверхтекучей компоненте гелия. Причем такой вихревой клубок активно взаимодействует и, тем самым, поддерживается силой взаимного трения между вихревыми нитями и нормальной компонентой жидкого гелия. Подобная турбулентность не имеет непосредственного классического аналога. Несмотря на это, экспериментально установлено, что некоторые режимы течения сверхтекучей компоненты гелия поразительно похожи на турбулентное течение в классической жидкости при высоких числах Рейнольдса. Причем, это сходство существует несмотря на то, что в сверхтекучей компоненте гелия отсутствует вязкая диссипация, вращающееся движение существует только в виде набора дискретных квантованных вихревых нитей [3], а наиболее подходящее гидродинамическое описание строится в рамках двухжидкостной модели.

В значительной степени, мотивация, представляемого в данной главе исследования, связана с идеей описания свойств классической гидродинамической турбулентности в терминах хаотических вихревых нитей, появившейся

некоторые время назад [17, 60, 61]. Недавние результаты, полученные при прямом численном моделировании течения классической жидкости с числом Рейнольдса порядка 100, указывают на то, что поле завихренности состоит из хаотического множества тонких вихревых трубок. Подобная картина очень близка к картине, появляющейся при численном моделировании динамики квантованных вихревых нитей в сверхтекучем гелии [18, 52, 57, 62] и др. Конечно визуальное подобие нельзя рассматривать в качестве подтверждения некой эквивалентности этих систем. Кроме того, в классических жидкостях из-за наличия вязких эффектов концентрированные вихри могут рассматриваться только в качестве некоторой грубой модели. В квантовых жидкостях, напротив, модель концентрированных вихрей давно и с успехом используется.

С другой стороны, в последнее время появился ряд экспериментальных и численных работ, свидетельствующих о том, что квантованные вихри нити в сверхтекучем гелии могут индуцировать движение жидкости, обладающее свойствами классической турбулентности [20, 21, 22, 23]. В частности, перенос энергии по масштабам системы связан (образование каскада) с динамикой квантованных вихревых нитей. В различных классических системах передача энергии по масштабам, также связана с эволюцией вихревых структур (см., например, [63, 64, 65]).

Среди основных аргументов в поддержку идеи квазиклассического поведения квантовой турбулентности самым сильным, наверно, является характер энергетических спектров, получаемый в сверхтекучем гелии. Так, в ряде работ получены поля скоростей со спектральными характеристиками близкими к колмогоровским, т.е. $E(k) \sim k^{-5/3}$. В этих работах использовался метод вихревых нитей [66, 67, 68, 69] и метод основанный на решении уравнения Гросса-Питаевского [70, 71, 72]. Наличие спектров такого типа иллюстрирует возможную связь хаотичных вихревых нитей и классической турбулентности. *Несмотря на важность полученного результата, вопрос о том, каким образом возникает спектр колмогоровского типа остается открытым.* В связи с чем, представляется привлекательным найти механизм появления спектра типа Колмогорова, непосредственно опираясь на конфи-

гурации квантованных вихревых нитей. Далее будет рассмотрено два класса вихревых конфигураций, претендующих на роль генерации колмогоровского спектра – это хаотические (фрактальные) вихревые петли и реконнектирующие вихревые нити, динамика которых детально описана в первой главе диссертационной работы.

В начале этой главы будет вычислена спектральная плотность $E(k)$ трехмерного поля скорости, индуцируемого фрактальными вихревыми нитями с различной размерностью Хаусдорфа. При вычислении будет использована Гауссова модель вихревого клубка [73].

Идея формирования турбулентного спектра реконнектирующими (коллапсирующими) вихревыми нитями имеет более глубокий подтекст. Дело в том, что сингулярные решения подобные наблюдаемым при реконнекции присутствуют и ряду других систем. Так, в настоящее время интенсивно обсуждается роль гидродинамического коллапса (стремительно развивающихся сингулярных решений) в формировании турбулентных спектров различных см., например, [74, 75, 76]. К примерам таких систем можно отнести клинообразные волны (белые "барашки") на поверхности океана, создающие спектр Филлипса, или ударные волны в акустической турбулентности, создающие спектр Кадомцева-Петвиашвили [74, 75] и др. Волны Филлипса также, как и ударные волны-разрывы являются сингулярными структурами. Появление подобных структур – когерентный процесс, поэтому и возникающие сингулярные объекты являются когерентными структурами. Вопрос о взаимном влиянии турбулентности и когерентных структур является крайне важным [75].

В рамках классической гидродинамике известен сценарий коллапса, основанный на разрушении вихревых линий. Суть такого сценария состоит в формировании особенности поля завихренности – $\omega(\mathbf{r})$ в трехмерных уравнениях Эйлера (для несжимаемой жидкости). Данный сценарий был подробно проанализирован в ряде работ [74, 75, 77]. Схематично подобный процесс изображен на Рис. 3.1. В некоторой точке $\mathbf{a}_0$ возможно образование сингулярности поля завихренности. Рассматривая уравнение Эйлера в терминах завихренности, авторы работ [74, 75, 77] делают вывод о том, что в непосредственной

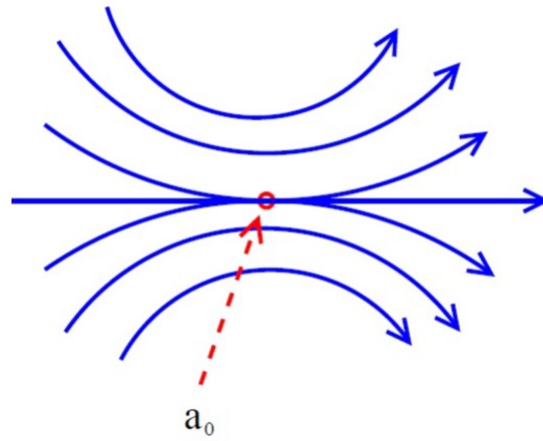


Рис. 3.1: Схематическая иллюстрация коллапса поля завихренности [75]. Изначально регулярное распределение завихренности спонтанно концентрируется в точке $\mathbf{a}_0$, тем самым формируя сингулярную структуру.

близости от точки $\mathbf{a}_0$, максимальное значение завихренности увеличивается взрывным образом, быстро достигая бесконечных значений в некоторый момент времени. При этом пространственная зависимость поля завихренности в поперечном к вихревому пучку направлении $-\rho_\perp$ имеет характерный вид $\omega \approx 1/\rho_\perp^{2/3}$, что эквивалентно колмогоровскому спектру. Таким образом, было установлено, что формирование сингулярных структур может приводить к формированию спектра колмогоровского типа. Для квантовых вихревых нитей подобными сингулярными структурами являются кинки, образуемые ими перед осуществлением реконнекции. Проводя аналогию с классическими сингулярностями, возможность формирования колмогоровского спектра реконнектирующими вихревыми нитями представляется вполне реальной. Проверке данной гипотезы будет посвящена значительная часть третьей главы диссертационной работы.

Дополнительные аргументы, поддерживающие идею квазиклассического поведения квантовой турбулентности, связаны с характером распада вихревого клубка. Так, существует ряд экспериментальных работ, направленных на определение спектрального характера течения сверхтекучей жидкости. Например, в работах [78] и [79] сверхтекучую жидкость пропускают через жесткие сетки. В области, расположенной за этими сетками, наблюдается уста-

новившиеся турбулентное движение нормальной и сверхтекучей компонент гелия. Теоретическая интерпретация этих экспериментов приведена в работе [80]. В частности утверждается, что характер распада вихревого клубка свидетельствует о том, что совокупность квантовых вихревых нитей может иметь некоторые основные свойства, присущие классической турбулентности или, даже, имитировать ее. Все возможные механизмы диссипации энергии, обсуждаемые как в этой работе, так и в ряде других источников, реализуются на малых масштабах. Отсюда возникает гипотеза о том, что распад квантовой турбулентности происходит вследствие некоторого стационарного потока энергии с масштабов порядка размеров системы к малым масштабам и ее последующей диссипацией, т.е. возникает некоторый аналог каскада Колмогорова, характерного для однородной изотропной турбулентности классической жидкости.

С другой стороны, в ряде экспериментальных [81, 82, 83, 84, 85, 86] и численных работ [66, 70, 87, 88, 89, 90, 91] было установлено, что вихревой клубок распадается при температурах очень близких к абсолютному нулю. В частности, распад поля завихренности происходит по степенному закону, характерному для классической турбулентности: $\sim t^{-3/2}$ [84]. Совершенно очевидно, что при сверхнизких температурах нормальная компонента сверхтекучего гелия и связанное с ней трение практически отсутствуют. Отсутствие традиционного механизма диссипации энергии свидетельствует о возможном наличии альтернативных механизмов диссипации, характеризующихся собственными энергетическими спектрами на соответствующих масштабах.

Одной из основных целей данной главы является исследование спектрального характера квантовой турбулентности в противотоке нормальной и сверхтекучей компонент гелия при различных температурах.

3.2. Свойства одиночных хаотических вихревых петель и спектры полей скоростей, создаваемых ими

3.2.1 Выражение для энергии и Гауссова модель вихревого клубка

Рассмотрим задачу о нахождении спектров полей скорости, создаваемых различными конфигурациями хаотических вихревых нитей.

Связь энергии вихревой системы с ее конфигурацией.

Средняя кинетическая энергия потока, создаваемого квантованной вихревой нитью, равна:

$$E = \left\langle \frac{\rho_s}{2} \int \mathbf{v}^2 d^3 \mathbf{r} \right\rangle,$$

где ρ_s - плотность сверхтекучей компоненты гелия, $\mathbf{v}$ - скорость жидкости, угловыми скобками обозначено усреднение по всем возможным конфигурациям вихревой системы. Для перехода от поля скорости к полю завихренности завихренности введем векторный потенциал:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\rho})}{|\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}|} d^3 \boldsymbol{\rho}.$$

В этих терминах выражение для энергии примет следующий вид:

$$\begin{aligned} E &= \left\langle \frac{\rho_s}{2} \int \mathbf{v} [\nabla \times \mathbf{A}] d^3 \mathbf{r} \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{\rho_s}{2} \int \nabla [\mathbf{A} \times \mathbf{v}] d^3 \mathbf{r} + \frac{\rho_s}{2} \int \mathbf{A} [\nabla \times \mathbf{v}] d^3 \mathbf{r} \right\rangle, \end{aligned}$$

первое слагаемое в правой части уравнения равно нулю, т.к. интегрирование дивергенции вектора по всему пространству дает нулевое значение. С учетом этого получаем:

$$E = \left\langle \frac{\rho_s}{2} \frac{1}{4\pi} \int \int \frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})}{|\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}|} d^3 \boldsymbol{\rho} d^3 \mathbf{r} \right\rangle.$$

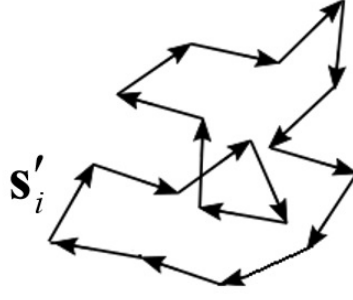


Рис. 3.2: Схематичная иллюстрация хаотической вихревой нити.

Для нахождения значения E в $\mathbf{k}$ пространстве, используем соотношение:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}|} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\pi d^3\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}.$$

Применив преобразования Фурье, получим:

$$E = \left\langle \frac{\rho_s}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}) \boldsymbol{\omega}(-\mathbf{k}) \right\rangle.$$

В сверхтекучей компоненте гелия завихренность сосредоточена вдоль вихревой нити, т.е. имеет вид:

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = \kappa \int_0^L \mathbf{s}'(\xi) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\xi)) d\xi.$$

Величины ξ , $\mathbf{s}(\xi)$, $\mathbf{s}'$ и κ соответствуют определениям введенным в первой главе диссертационной работы, подробнее смотри Рис. 1.2. Схематичный вид хаотической вихревой нити, в указанных обозначениях, представлен на Рис. 3.2.

Применим преобразование Фурье к $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$:

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}) = \kappa \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \int_0^L \mathbf{s}'(\xi) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\xi)) d\xi = \kappa \int_0^L \mathbf{s}'(\xi) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{s}(\xi)} d\xi,$$

подставляя полученное в выражение для энергии, окончательно получаем:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k} \left\langle \frac{1}{k^2} \frac{\rho_s k^2}{2} \int_0^L \int_0^L \mathbf{s}'(\xi_1) \mathbf{s}'(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 e^{i\mathbf{k}(\mathbf{s}(\xi_1) - \mathbf{s}(\xi_2))} \right\rangle. \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) соответствует кинетической энергии поля скорости, индуцируемого вихревыми петлями, выраженное в терминах конфигурации этих петель. Соотношение в угловых скобках является спектром энергии – одной из важнейшей характеристикой турбулентности.

Гауссова модель вихревого клубка.

Используем гауссову модель вихревого клубка [73] для усреднения (3.1) по всем возможным состояниям поля завихренности. Суть гауссоовой модели состоит в том, чтобы опираясь на известные экспериментальные данные, построить пробную функцию распределения вероятности реализации конфигурации вихревых нитей в пространстве петель – $\mathcal{P}(\mathbf{s})$. Пробная функция строится таким образом, чтобы усреднение по всем конфигурациям вихревых нитей, сделанное с ее помощью, давало известные значения определенных величин. При этом предполагается, что вихревые нити подчиняются гауссовой статистике. При сделанных предположениях, функция $\mathcal{P}(\mathbf{s})$ подчиняется обобщенному распределению Винера. В практических случаях, при вычислении различных средних величин, удобнее использовать не распределение Винера, а характеристический функционал, определяемый следующим образом:

$$W(\{\mathbf{P}(\xi)\}) = \left\langle \exp \left(i \int_0^L \mathbf{P}(\xi) \mathbf{s}'(\xi) d\xi \right) \right\rangle.$$

В этом соотношении усреднение производится по обобщенному распределению Винера. Поскольку в рамках используемой модели это распределение имеет гауссовый вид, то вычисление характеристического функционала легко осуществляется с помощью "процедуры полных квадратов". В результате

получаем:

$$W(\{\mathbf{P}^\alpha(\xi'), \mathbf{P}^\beta(\xi'')\}) = \exp \left(- \int_0^L \int_0^L \mathbf{P}^\alpha(\xi') N^{\alpha\beta}(\xi' - \xi'') \mathbf{P}^\beta(\xi'') d\xi' d\xi'' \right),$$

где $N^{\alpha\beta}(\xi' - \xi'')$ играет роль матрицы корреляций между касательными векторами $\mathbf{s}(\xi')$ и $\mathbf{s}(\xi'')$. С помощью функционального дифференцирования характеристического функционала, для вихревой петли можно получать различные средние величины. Например, непосредственно из определения характеристического функционала следует, что корреляционная функция между различными тангенциальными векторами на вихревой нити имеет следующий вид:

$$\langle \mathbf{s}'_\alpha(\xi_1) \mathbf{s}'_\beta(\xi_2) \rangle = \left. \frac{\delta^2 W}{i \delta \mathbf{P}^\alpha(\xi_1) i \delta \mathbf{P}^\beta(\xi_2)} \right|_{all \ \mathbf{P} = 0}.$$

В терминах характеристического функционала выражение для энергии (3.1) может быть переписано следующим образом:

$$\langle E \rangle = \frac{\rho_s \kappa^2}{2} \int_{\mathbf{k}} \frac{d^3 \mathbf{k}}{\mathbf{k}^2} \int_0^L \int_0^L d\xi_1 d\xi_2 \frac{\delta^2 W}{i \delta \mathbf{P}^\alpha(\xi_1) i \delta \mathbf{P}^\beta(\xi_2)}.$$

Характеристический функционал вычисляется при значении:

$$\mathbf{P}^\alpha(\xi) = \mathbf{k}^\alpha \theta(\xi - \xi_1) \theta(\xi_2 - \xi),$$

где θ - функция единичного скачка. Проварьируем $W(\{\mathbf{P}^\alpha(\xi'), \mathbf{P}^\beta(\xi'')\})$ по $\mathbf{P}^\alpha(\xi')$ для нахождения выражения для энергии в терминах корреляционных функций. При этом используем следующее тождество:

$$\frac{\delta \mathbf{P}^\alpha(\xi')}{\delta \mathbf{P}^\beta(\xi'')} = \delta(\xi' - \xi'') \delta_{\alpha\beta}.$$

Предполагая сферическую симметрию системы в $\mathbf{k}$ пространстве:

$$\frac{d^3\mathbf{k}}{k^2} = 4\pi dk, \quad N^{\alpha\beta}(\xi' - \xi'') = \delta_{\alpha\beta} N(\xi' - \xi''),$$

и воспользовавшись выражением: $\mathbf{P}^\alpha(\xi) = \mathbf{k}^\alpha \theta(\xi - \xi_1) \theta(\xi_2 - \xi)$, выполним суммирование по индексам. В результате проведенных процедур получаем:

$$E = 4\pi\rho_s\kappa^2 \int_0^L \int_0^L d\xi_1 d\xi_2 \int_0^\infty dk \left(3N(\xi_1 - \xi_2) - \right. \\ \left. - 4 \left(k \int_0^{\xi_2 - \xi_1} N(x) dx \right)^2 \right) \cdot \exp \left(-3k^2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} N(\xi' - \xi'') d\xi' d\xi'' \right).$$

Двойной интеграл в предэкспоненте можно упростить, повернув систему координат следующим образом: $V = \xi' + \xi'', U = \xi' - \xi''$. В результате чего интегральная область преобразуется из:

$$\int_0^L \int_0^L d\xi' d\xi''$$

в:

$$J \left(\int_{-L}^0 dU \int_{-U}^{2L+U} dV + \int_0^L dU \int_U^{2L-U} dV \right),$$

где переменная U изменяется в пределах от 0 до L , а модуль якобиана преобразования равен:

$$J = \left| \frac{\delta(\xi', \xi'')}{\delta(U, V)} \right| = \frac{1}{2}.$$

Аналогичным образом можно преобразовать интеграл в экспоненте. После выполнения указанных преобразований, выражение для энергии в новых ко-

ординатах примет следующий вид:

$$E = 8\pi\rho_s\kappa^2 \int_0^\infty dk \int_0^L dU (L - U) \left(6N(U) - 4 \left(k \int_0^U N(x) dx \right)^2 \right) \exp \left(-6k^2 \int_0^U (U - x) N(x) dx \right). \quad (3.2)$$

Полученное соотношение является ключевым для определения спектральной плотности трехмерного поля скорости. Однако, для его использования, необходимо уточнить вид функции $N(x)$. Ее нахождению посвящен следующий пункт.

3.2.2 Фрактальные свойства хаотических вихревых петель

Рассмотрим фрактальные свойства хаотических вихревых петель, подчиняющихся различным статистическим моделям. Модель вихревой нити – корреляционная функция, определяемая как среднее скалярное произведение касательных векторов к вихревой нити в различных точках. В этом пункте рассматриваются четыре модели вихревых нитей: гладкая, "степенная", "броуновская" и "реальная". Для каждой из моделей будет определено соотношение между длиной вихревой нити и средним квадратом расстояния между точками, принадлежащими вихревой нити, т.е. фрактальные свойства вихревых нитей. Фрактальная структура вихревой петли может быть следствием множества предшествующих реконнеций или существенного влияния границ, например, при нахождении пористой среде [92, 93].

Обратимся к рассмотрению выражения для корреляционной функции:

$$\langle \mathbf{s}'_\alpha(\xi') \mathbf{s}'_\alpha(\xi'') \rangle = \left. \frac{\delta^2 W}{i\delta \mathbf{P}^\alpha(\xi') i\delta \mathbf{P}^\alpha(\xi'')} \right|_{all \ \mathbf{P}=0} = N(\xi' - \xi'').$$

Проинтегрируем данное соотношение по ξ' и ξ'' в интервале от 0 до L . После

интегрирования левая часть этого уравнения будет иметь следующий вид:

$$\left\langle \left(\mathbf{s}(L) - \mathbf{s}(0) \right) \left(\mathbf{s}(L) - \mathbf{s}(0) \right) \right\rangle = \langle D^2 \rangle,$$

где $\langle D^2 \rangle$ – средний квадрат расстояния между точками ξ' и ξ'' , в правой же части анализируемого соотношения стоит двойной интеграл от корреляционной функции, характеризующей систему:

$$\langle D^2 \rangle = \int_0^L \int_0^L N(\xi' - \xi'') d\xi' d\xi''. \quad (3.3)$$

Вычисляя этот интеграл, можно получить некоторую функцию от L (полной длины вихревой нити). Проводя данную процедуру, можно вычислять зависимость между средним расстоянием между точками и линейным размером объекта, т.е. вычислять его размерность – основную характеристику фрактального объекта. Далее, вычислим Хаусдорфовы (фрактальные) размерности для нескольких важных моделей вихревых нитей, т.е. вычислим интегралы (3.3) для различных корреляционных функций $N(\xi' - \xi'')$.

Рассмотрим корреляционную функцию степенного вида:

$$N(\xi' - \xi'') = c(\xi' - \xi'')^\lambda,$$

где c – некоторая константа подходящей размерности. В результате интегрирования получаем: $\langle D^2 \rangle \sim L^{\lambda+2}$. Отсюда заключаем, что средний линейный размер трехмерной области занимаемой вихревой нитью, связан с ее длиной, а именно:

$$L \sim \langle D \rangle^{H_d},$$

т.е. вихревая нить является фрактальным объектом с размерностью Хаусдорфа равной: $H_d = \frac{2}{\lambda+2}$. Для гладкой линии показатель степени корреляционной функции равен нулю, т.е. $\lambda = 0$, в этом случае получаем известный результат: $H_d = 1$. Еще одной важной моделью вихревой нити является модель нити не

имеющей самопересечений, называемая в теории полимеров моделью Флори [94]. В рамках этой модели $\lambda = -\frac{4}{5}$, отсюда заключаем, что: $H_d = \frac{5}{3}$.

Далее рассмотрим случай дельта-корреляционной функции:

$$N(\xi' - \xi'') = c\delta(\xi' - \xi''),$$

что соответствует классической броуновской линии. При этом взаимодействуют только бесконечно близкие точки вихревой нити, т.е. реализуется случайное блуждание. Величина коэффициента c соответствует длине сегмента вихревой нити или элементарному шагу при случайном блуждании. Вычисления размерности приводят к: $L \sim D^2$, т.е. $H_d = 2$.

Вихревые петли в сверхтекучем гелии подчиняются гауссовой статистике, однако их корреляционная функция не является степенной [73]. На расстояниях порядка некоторого характерного масштаба $-R$ (порядка радиуса кривизны нити) нить является гладкой, но на больших расстояниях нить, скорее, обладает свойствами, схожими со случайным блужданием при котором величина R – элементарный шаг. Наилучшим образом подобное поведение может быть аппроксимировано функцией следующего типа:

$$N(\xi' - \xi'') = \frac{\pi/R}{1 + \left((\xi' - \xi'')/R\right)^2},$$

которая является "колоколообразной" функцией. Подобная корреляционная функция, соответствует модели "реальной" вихревой нити, т.е. нити гладкой на расстояниях: $\xi' - \xi'' \ll R$ и обладающей свойствами броуновской вихревой нити на расстояниях: $\xi' - \xi'' \gg R$.

3.2.3 Энергетические спектры полей скорости, создаваемых хаотической вихревой петлей

В этом пункте вычисляется энергетический спектр, создаваемый различными хаотическими вихревыми петлями. Вычисления проводятся на основе уравнения для энергетического спектра (3.2). Рассмотрим модели хаотических

вихревых нитей, введенные в предыдущем пункте. Конец вихревой нити не может находиться в объеме жидкости, т.е. вихревая нить может быть замкнутой (вихревая петля), либо ее конец находится на границе с другой средой (например, твердой стенкой). В используемой модели рассматривается поведение вихревых петель вдали от границ жидкой среды, поэтому при вычислении энергетического спектра необходимо учитывать замкнутость вихревых нитей. Условие замкнутости вихревой нити имеет следующий вид:

$$\langle D^2 \rangle = \int_0^L \int_0^L N(\xi' - \xi'') d\xi' d\xi'' = 0,$$

т.е. среднеквадратичное расстояние между "начальной" и "конечной" точками вихревой нити равно нулю. Отсюда возникают ограничения на вид корреляционной функции: интегрирование по всей области определения должно давать нулевое значение, кроме того, корреляционная функция должна быть симметрична относительно границ области интегрирования, т.е. точек 0 и L . Применение условий замкнутости, например, для броуновской вихревой нити, приводит к следующей корреляционной функции: $N(x) = c(\delta(x) - 1/L)$. Игнорирование данной процедуры, может привести к ошибкам при вычислении спектра для малых значений волновых чисел k . Однако, для получения асимптотических оценок, ею можно пренебрегать, например, при вычислении интеграла в экспоненте выражения (3.2).

Броуновская линия.

Рассмотрим случай случайного блуждания, характеризуемого корреляционной функцией вида: $N(x) = c\delta(x)$. Для вычисления энергетического спектра необходимо взять интеграл по U в уравнении (3.2). Начнем со взятия интеграла в экспоненте этого выражения:

$$-6k^2 \int_0^U (U - x) c \delta(x) dx = -3k^2 c U.$$

С учетом этого результата, энергетический спектр будет иметь следующий

вид:

$$E(k) = 8\pi\rho_s\kappa^2 \int_0^L (L - U) \left(3c(\delta(U) - 1/L) - \frac{k^2 c^2}{2} \right) e^{-3k^2 c U} dU.$$

Полученный интеграл вычисляется в аналитических функциях:

$$E(k) = 8\pi\rho_s\kappa^2 \frac{6 - 2\exp(-3ck^2L)(3 + ck^2L) + ck^2L(-16 + 21ck^2L)}{18k^4L}.$$

Рассмотрим случаи больших и малых значений k по сравнению с величиной $1/\sqrt{cL}$. Величина $\sqrt{cL}$ примерно равна линейным размерам трехмерной области в которой локализована рассматриваемая вихревая петля. Из полученного для спектра выражения следует, что при $k \ll \sqrt{cL}$, $E(k) \sim 8\pi\rho_s\kappa^2 c^2 k^2 L^2$, т.е. спектральная плотность возрастает пропорционально k^2 , другими словами $dE/d^3\mathbf{k}$ является константой.

Зачастую полученную квадратичную зависимость рассматривают в качестве доказательства термодинамически равновесного состояния. Однако стоит отметить, что полученное распределение энергии напрямую не связано с законом равномерного распределения, а скорее является следствием того, что на больших расстояниях скорость от вихревой нити убывает $\sim 1/r^3$. Это однозначно соответствует энергетическому спектру $\sim k^2$. Данный факт справедлив как для классической [95], так и для квантовой турбулентности [96].

При значениях $k \gg \sqrt{cL}$, величина $E(k)$ является почти постоянной и примерно равной: $9.33\pi\rho_s\kappa^2 cL$. Энергетический спектр для броуновской линии представлен на Рис. 3.3 (а). Вычисления выполнены при произвольно взятой длине вихревой нити ($L = 100$) и элементарным шагом ($c = 1$). Нижняя кривая, свидетельствует о том, что $E(k) \sim k^2$ при значениях k меньших $100^{-1/2}$ и не зависит от k для волновых чисел, превосходящих это значение.

Степенная корреляция.

Перейдем к нахождению энергетического спектра для вихревой нити, определяемой корреляционной функцией степенного типа: $N(x) = cx^\lambda$. Интеграл

в экспоненте уравнения (3.2) может быть вычислен следующим образом:

$$-6k^2c \int_0^U (U-x)x^\lambda dx = -6k^2c \left(\frac{U^{\lambda+2}}{\lambda+1} - \frac{U^{\lambda+2}}{\lambda+2} \right) = -\frac{6k^2cU^{\lambda+2}}{(\lambda+1)(\lambda+2)},$$

сделав замену

$$t = \frac{6k^2cU^{\lambda+2}}{(\lambda+1)(\lambda+2)},$$

и обозначив

$$\gamma = \left(\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{6c} \right),$$

получим:

$$U = \left(\frac{\gamma t}{k^2} \right)^{\frac{1}{\lambda+2}}, \quad dU = \left(\frac{\gamma}{k^2} \right)^{\frac{1}{\lambda+2}} \frac{t^{-\frac{\lambda+1}{\lambda+2}}}{\lambda+2} dt.$$

После преобразований энергетический спектр примет следующий вид:

$$\begin{aligned} E(k) = & \frac{8\pi\rho_s\tilde{\kappa}^2}{\lambda+2} \int_0^{k^2L^{\lambda+2}/\gamma} \left(L - \left(\frac{\gamma t}{k^2} \right)^{\frac{1}{\lambda+2}} \right) \left(3c \left(\frac{\gamma t}{k^2} \right)^{\frac{\lambda}{\lambda+2}} \right. \\ & \left. - \frac{2c^2k^2}{(\lambda+1)^2} \left(\frac{\gamma t}{k^2} \right)^{\frac{2(\lambda+1)}{\lambda+2}} \right) \left(\frac{\gamma}{k^2} \right)^{\frac{1}{\lambda+2}} t^{-\frac{\lambda+1}{\lambda+2}} e^{-t} dt, \end{aligned}$$

или

$$E(k) = \frac{8\pi\rho_s\kappa^2}{\lambda+2} \int_0^{k^2L^{\lambda+2}/\gamma} \left(L \left(\frac{\gamma}{k^2} \right)^{\frac{\lambda+1}{\lambda+2}} t^{-\frac{1}{\lambda+2}} - \frac{\gamma}{k^2} \right) \left(3 - \frac{2c\gamma t}{(\lambda+1)^2} \right) e^{-t} dt \quad (3.4)$$

Полученный интеграл является расходящимся. В связи с невозможностью аналитического взятия интеграла во всей области определения, получим его оценки для больших и малых значений k . Стоит отметить, что физической реальности соответствуют размерности Хаусдорфа $\in [1; 3]$, что соответствует

$\lambda \in [-\frac{4}{3}; 0]$. Отсюда непосредственно следует, что для всех возможных случаев $\frac{\lambda+1}{\lambda+2} < 1$. С учетом этого заключаем, что при больших значениях k первое слагаемое из первой скобки подынтегрального выражения $E(k)$ больше второго. Таким образом, при $k \gg 1$, $k^2 L^{\lambda+2}/\gamma \rightarrow \infty$, а $E(k)$ переходит в:

$$E(k) \sim \frac{8\pi\rho_s\kappa^2}{\lambda+2} L\left(\frac{\gamma}{k^2}\right)^{\frac{\lambda+1}{\lambda+2}} \int_0^\infty t^{-\frac{1}{\lambda+2}} \left(3 - \frac{2c\gamma t}{(\lambda+1)^2}\right) e^{-t} dt,$$

интегрирование по переменной t дает некоторую константу, независимую от k , из чего непосредственно следует:

$$E(k) \sim k^{-2\frac{\lambda+1}{\lambda+2}} = k^{H_d-2}.$$

Аналогичный результат, полученный из совершенно других предположений, ранее обсуждался в книге [61].

При малых волновых числах k необходимо, как и для броуновской вихревой нити, учитывать условие замкнутости. С учетом этого условия, степенная корреляционная функция имеет вид:

$$N(x) = c\left(x^\lambda - \frac{2L^\lambda}{(\lambda+1)(\lambda+2)}\right).$$

Вид энергетического спектра при малых k определяется уравнением (3.4). Условие замкнутости вихревой нити приводит к занулению интеграла от первого слагаемого второй скобки:

$$E(k) \sim 8\pi\rho_s\tilde{\kappa}^2 k^2 \int_0^L (U-L) \left(\int_0^U c\left(x^\lambda - \frac{2L^\lambda}{(\lambda+1)(\lambda+2)}\right) dx \right)^2 dU.$$

Подынтегральное выражение не зависит от k . Соответственно, результат интегрирования является некоторой величиной, независимой от волнового числа, т.е. при малых значениях k , $E(k) \sim k^2$, как и в случае броуновской вихревой нити. Результаты численного интегрирования, полученного выражения, представлены на Рис. 3.3 (а). Верхняя кривая Рис. 3.3 (а) соответствует глад-

кой нити ($\lambda = 0$) при малых значениях k : $E(k) \sim k^2$, при больших значениях k : $E(k) \sim k^{-1}$, переход между ними реализуется в области $k \sim 100^{-1}$. Для вихревой нити не имеющей самопересечений наблюдается похожее поведение, т.е.: $E(k) \sim k^2$ при $k < 100^{-3/5}$. При больших значениях k : $E(k) \sim k^{-1/3}$. Стоит отметить, что для модели Флори $H_d = 5/3$ и энергетический спектр (как получено выше) должен быть $\sim k^{H_d-2}$, что подтверждается результатами численного интегрирования.

Реальная вихревая нить.

Как указывалось ранее, модель "реальной" вихревой нити отражает свойства полуфрактального объекта, т.е. такая нить является гладкой на масштабах $\xi' - \xi'' \ll R$ и имеет структуру броуновской нити (случайного блуждания) при увеличении $\xi' - \xi''$. Выражения для спектральной плотности в такой модели является необычайно громоздким, что крайне осложняет проведение аналитического анализа. Однако, основываясь на результатах, полученных при анализе других моделей вихревых нитей, можно сделать определенные предположения относительно модели реальной вихревой нити. В этом случае область волновых чисел k может иметь три характерных подобласти. В первой подобласти $k \ll \frac{1}{\sqrt{LR}}$, т.е. волновые числа меньше обратного размера области локализации вихревой петли. Такие волновые числа описывают большие пространственные масштабы и, как и в случае рассмотренных ранее моделей, здесь должно быть справедливо соотношение: $E(k) \sim k^2$. Подобласть $\frac{1}{\sqrt{LR}} \ll k \ll 1/R$ соответствует масштабам большим, чем элементарный шаг R но меньшим, чем размер характерный размер системы. В этой подобласти, по аналогии с броуновской вихревой нитью, энергетический спектр должен не зависеть от волнового числа k . В подобласти меньшей и соизмеримой с размерами элементарного шага R , фрактальность отсутствует и $E(k)$, как и в случае гладкой вихревой нити, должен быть пропорционален k^{-1} .

Численное определение энергетического спектра "реальной" вихревой нити, подтверждают сделанные предположения, смотри Рис. 3.3 (б). Верхняя кривая соответствует нити с параметрами $L = 100$ и $R = 0.01$, нижняя кривая соответствует с параметрами $L = 100$ и $R = 1$. Как и предполагалось выше, $E(k)$ изменяет свой характер в точках $k = \frac{1}{\sqrt{LR}} = 1$ и $k \ll 1/R = 100$ для

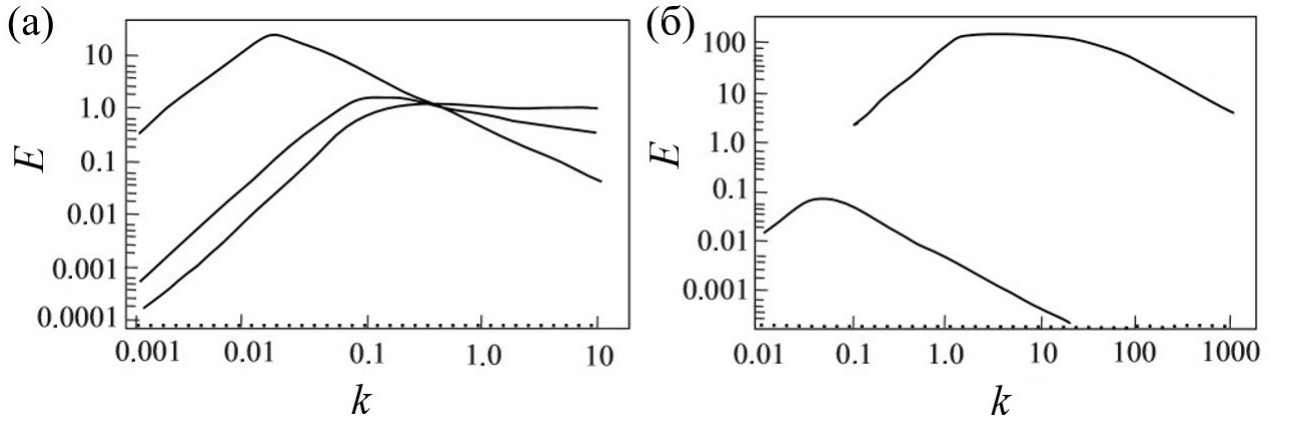


Рис. 3.3: (а) Спектры энергии полей скорости, создаваемых фрактальными вихревыми нитями с различной размерностью Хаусдорфа ($H_D = 1, 5/3, 2$). На малых $E(k) \sim k^2$, на больших $k \sim E(k) \sim k^{H_D-2}$; (б) спектры энергии полей скорости, создаваемых "реальными" вихревыми нитями.

верхней кривой и, соответственно, в точках $k = \frac{1}{\sqrt{LR}} \sim 0.03$ и $k \ll 1/R = 0.1$ для нижней.

В результате получаем, что для малых волновых чисел k в рамках всех рассмотренных моделей вихревых нитей: $E(k) \sim k^2$. При больших волновых числах в рамках различных моделей получены различные спектры $E(k)$, однако ни одна из моделей не дает спектр колмогоровского типа. Возможная причина данного факта может заключаться в том, что в реальном турбулентном потоке вихревые структуры существенно взаимодействуют друг с другом, порождая сингулярности типа "кинков" (подробнее смотри первую главу диссертационной работы), что не учитывается в рамках рассмотренной модели хаотической вихревой петли.

Энергия вихревой петли.

Прежде чем перейти к нахождению спектральных характеристик вихревых структур, полученных при численном моделировании, рассмотрим еще одну важную величину – энергию вихревой нити. Данная величина может быть полезна для углубления понимания применимости моделей хаотических вихревых нитей, а также для различных аналитических оценок и развития моделей квантовой турбулентности. Далее ограничим рассмотрение моделью, характеризуемой степенной корреляционной функцией. Для удобства дальнейших рассуждений, переопределим ее следующим образом: $N(x) =$

$c(x/R)^\lambda$, где c – безразмерная константа, подлежащая дальнейшему определению, а R – обезразмеривающий параметр порядка длины звена, введенного в гауссовой модели вихревого клубка.

Для нахождения полной энергии возьмем интеграл по k , а затем по U в правой части уравнения (3.2). Взяв интеграл в экспоненте, обозначим его за t :

$$t = \frac{k^2 U^{\lambda+2}}{\gamma}, \quad \gamma = \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)R^\lambda}{6c},$$

откуда получаем:

$$k = \sqrt{\frac{\gamma t}{U^{\lambda+2}}}, \quad dk = \frac{dt}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{t U^{\lambda+2}}}.$$

С учетом этих преобразований, выражение для энергии принимает вид:

$$E = 8\pi\rho_s\kappa^2 \int_0^L \int_0^\infty \left(L - U \right) \left(3 \left(\frac{U}{R} \right)^\lambda - \frac{2\gamma t}{(\lambda+1)^2} \left(\frac{U}{R^2} \right)^\lambda \right) \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{t} U^{\frac{\lambda+2}{2}}} \frac{e^{-t}}{2} dt dU.$$

Полученное уравнение можно проинтегрировать по t , учитывая выражения для гамма-функций ($\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ и $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$) получаем:

$$E = 4\pi^{3/2}c\rho_s \frac{\kappa^2}{R^\lambda} \int_0^L \left(L - U \right) \left(3 - \frac{\gamma}{(\lambda+1)^2 R^\lambda} \right) \sqrt{\gamma} U^{\frac{\lambda-2}{2}} dU. \quad (3.5)$$

Рассмотрение начнем с гладкой вихревой нити ($\lambda = 0$). Для указанной модели полученный интеграл ограничен на нижнем пределе некоторой величиной – a (по порядку равной радиусу ядра вихревой линии), что обусловлено невозможностью рассмотрения процессов на масштабах меньших a в рамках гауссовой модели вихревого клубка:

$$E = 4\pi^{\frac{3}{2}}c\rho_s\kappa^2 \int_a^L \left(L - U \right) \left(3U^{-1} - \frac{U^{-1}}{3} \right) \sqrt{\frac{1}{3}} dU,$$

интегрируя, получаем:

$$E = \frac{32}{3\sqrt{3}}\pi^{\frac{3}{2}}c\rho_s\kappa^2\left(L\ln\frac{L}{a} - (L - a)\right) \simeq 4\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{3}{2}}c\rho_s\kappa^2L\ln\frac{L}{ea}.$$

Результат интегрирования, с точностью до постоянного множителя, совпадает с классическим результатом [3]:

$$E = \frac{\rho_s\kappa^2}{4\pi}L\ln\frac{L}{ea}.$$

Стоит отметить, что в приведенных выше вычислениях константа c являлась свободным параметром, поэтому можно определить ее таким образом, чтобы энергия для гладкой вихревой нити точно совпала с классическим результатом. Таким образом, во всех предыдущих и последующих вычислениях: $c = \frac{1}{12}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{-5/2}$.

Гладкая линия не является фрактальным объектом, поэтому в выражение для энергии не вошла основная характеристика фрактальности – размерность Хаусдорфа. Для определения характеристик фрактальной вихревой нити, перепишем уравнение (3.5) в терминах размерности Хаусдорфа ($H_d = \frac{2}{\lambda+2}$):

$$E = 4\pi^{3/2}c\rho_s\kappa^2\frac{R^{-\frac{1}{H_d}+1}}{H_d}\left(3 - \frac{1}{3(2 - H_d)}\right)\sqrt{\frac{2 - H_d}{3}}\int_0^L\left(LU^{\frac{1}{H_d}-2} - U^{\frac{1}{H_d}-1}\right)dU.$$

Как отмечалось ранее, гауссова модель не применима на масштабах меньших некоторых характерных, отражающих размер элементарного звена – R , в связи чем полученный интеграл должен обрезаться на нижнем пределе величиной R . С учетом этого факта, интегрирование дает следующее выражение:

$$E = 4\pi^{3/2}c\rho_s\kappa^2\frac{R^{-\frac{1}{H_d}+1}}{H_d}\left(3 - \frac{1}{3(2 - H_d)}\right)\sqrt{\frac{2 - H_d}{3}} \cdot \left(\frac{H_d}{1 - H_d}\left(L^{\frac{1}{H_d}} - LR^{\frac{1}{H_d}-1}\right) - H_d\left(L^{\frac{1}{H_d}} - R^{\frac{1}{H_d}}\right)\right),$$

или

$$E = 4\pi^{3/2}c\rho_s\kappa^2 \frac{R^{-\frac{1}{H_d}+1}}{H_d} \left(3 - \frac{1}{3(2-H_d)}\right) \sqrt{\frac{2-H_d}{3}} \cdot \left(\frac{H_d}{H_d-1} \left(LR^{\frac{1}{H_d}-1} - H_d L^{\frac{1}{H_d}}\right)\right),$$

после некоторых упрощений, получаем:

$$E = \frac{4\pi^{3/2}c\rho_s\kappa^2}{H_d-1} \left(\sqrt{3(2-H_d)} - \frac{1}{\sqrt{3(2-H_d)}}\right) \left(L - H_d \left(\frac{L}{R}\right)^{\frac{1}{H_d}} R\right),$$

Таким образом, энергия поля скорости, индуцируемого хаотической вихревой нитью существенно зависит от ее фрактальных характеристик. Стоит отметить, что в последнем выражении при $H_d \rightarrow 1$ (одномерная нить) энергия становится равной энергии гладкой нити.

Отдельный интерес представляет, обсуждавшаяся выше, вихревая нить не имеющая самопересечений ($\lambda = -\frac{4}{5}$). Выражение для ее энергии имеет следующий вид:

$$E = 4\pi^{3/2}c\rho_s\kappa^2 \left(L - \frac{5}{3} \left(\frac{L}{R}\right)^{\frac{3}{5}} R\right).$$

3.3. Энергетические спектры полей скорости, создаваемых различными вихревыми конфигурациями

Динамика квантованных вихревых нитей неразрывно связана с полями скоростей и их энергетическими характеристиками. В связи с чем, для последовательного изложения полученных результатов, относящихся к энергетическим характеристикам исследуемых систем, сначала кратко рассмотрим их характерные свойства.

Динамика вихревых петель или, состоящих из них, вихревых клубков определяется рядом факторов. Главным факторами являются влияние вихревых нитей друг на друга и сила трения между вихревыми нитями и нор-

мальной компонентой сверхтекучего гелия. Наличие двух основных факторов, определяющих динамику вихревых нитей, существенно ограничивает количество возможных сценариев эволюции вихревых петель. На практике, как правило, реализуется, либо сближение петель и их последующая реконнекция, либо ускоренное движение петель и их сжатие под действием трения, подробнее смотри первую главу диссертационной работы. При наличии противотока нормальной и сверхтекучей компонент гелия, вихревые петли будут разворачиваться, стремясь перейти в плоскость перпендикулярную направлению $\mathbf{V}_{ns}$. Кроме того, они будут сжиматься или раздуваться в зависимости от угла между нормалью к плоскости петли и направлением вектора $\mathbf{V}_{ns}$, в соответствии с уравнением (1.4). В случае близкого расположения вихревых петель, их взаимное влияние будет приводить к деформации ближайших элементов петель с образованием пирамидальных структур (кинков), подробнее смотри последний раздел первой главы диссертационной работы.

Для оценки характера энергетического спектра на масштабах порядка размеров вихревых петель, далее будет рассмотрено несколько различных конфигураций вихревых петель непосредственно перед реконнекциями, смотри, например, Рис. 3.4. Соответствующие начальные условия приведены в разделе первого параграфа диссертационной работы, описывающем вычислительную схему. Выбор конфигураций непосредственно перед осуществлением реконнекции мотивирован желанием оценить влияние кинков на спектральные характеристики исследуемой системы.

При нахождении энергетического спектра вихревого клубка в противотоке нормальной и сверхтекучей компонент гелия были использованы вихревые конфигурации, полученные в работе [97]. Для понимания основных физических характеристик исследуемого объекта, кратко опишем рассмотренные в этой работе вопросы и некоторые основные (касающиеся структуры вихревого клубка и силы трения) результаты. В работе [97] было проведено детальное исследование средних характеристик вихревого клубка, а именно были получены: зависимости скорости реконнекций, плотности вихревого клубка, анизотропии, средне-квадратичных значений кривизны, а также скорости дрейфа и силы трения от температуры и скорости противотока нормальной и

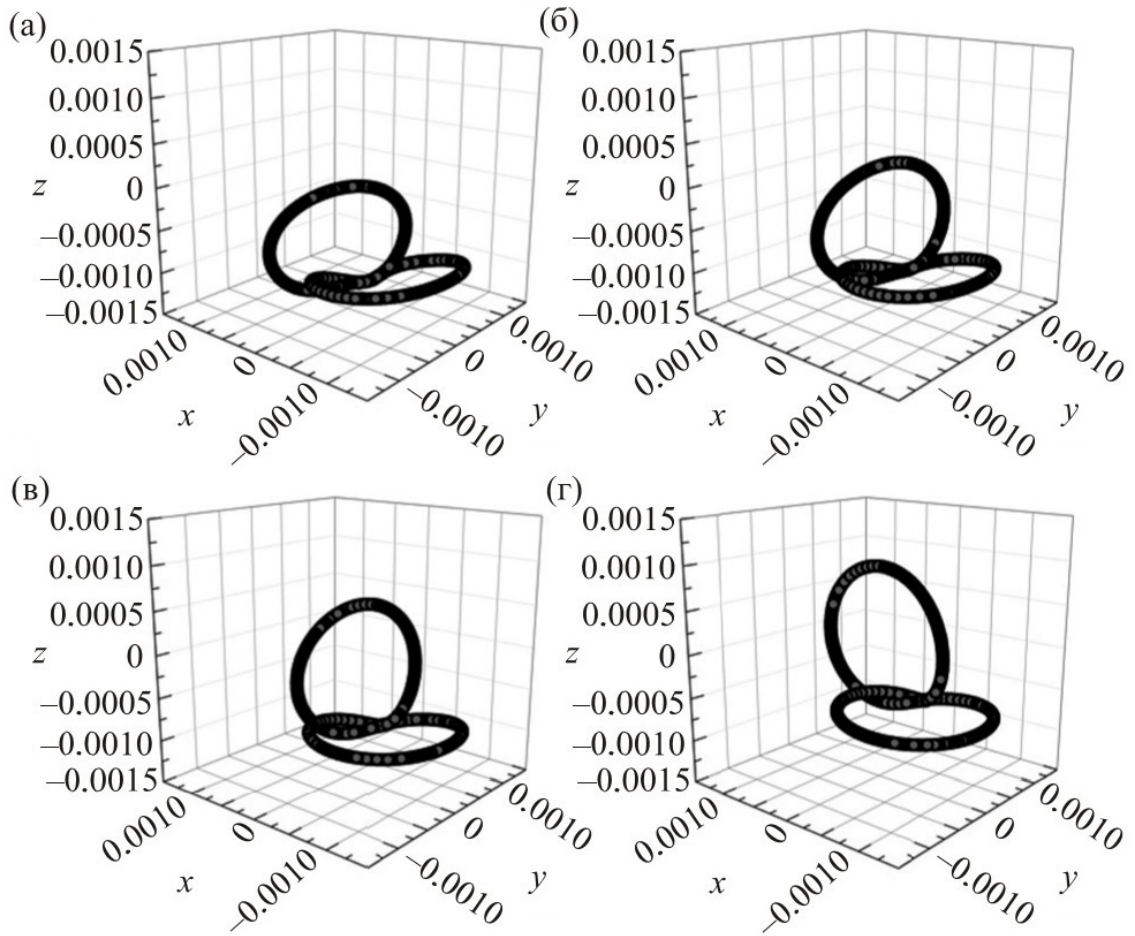


Рис. 3.4: Конфигурации вихревых петель перед реконнекциями для различных начальных углов между плоскостями петель: (а) 30° , (б) 45° , (в) 60° , (г) 90° . Размеры расчетной области приведены в сантиметрах.

сверхтекучей компонент гелия. Кроме того, была получена подробная статистическая информация о локальных и общих свойствах вихревой структуры: распределение петель по длинам, корреляционные функции для ориентации вихревых нитей, соотношения между кривизной петель и их длиной, функции распределения кривизны нитей и др.

Все величины рассчитывались в стационарном состоянии (подробнее стационарное состояние в качественно похожей системе описано во второй главе диссертационной работы), которое было достигнуто для системы при всех значениях температур и $\mathbf{V}_{ns}$. Характерные примеры вихревых конфигураций в стационарном состоянии для различных температур приведены на Рис. 3.5. Кроме того, в работе проводилось исследование анизотропии вихревого клуб-

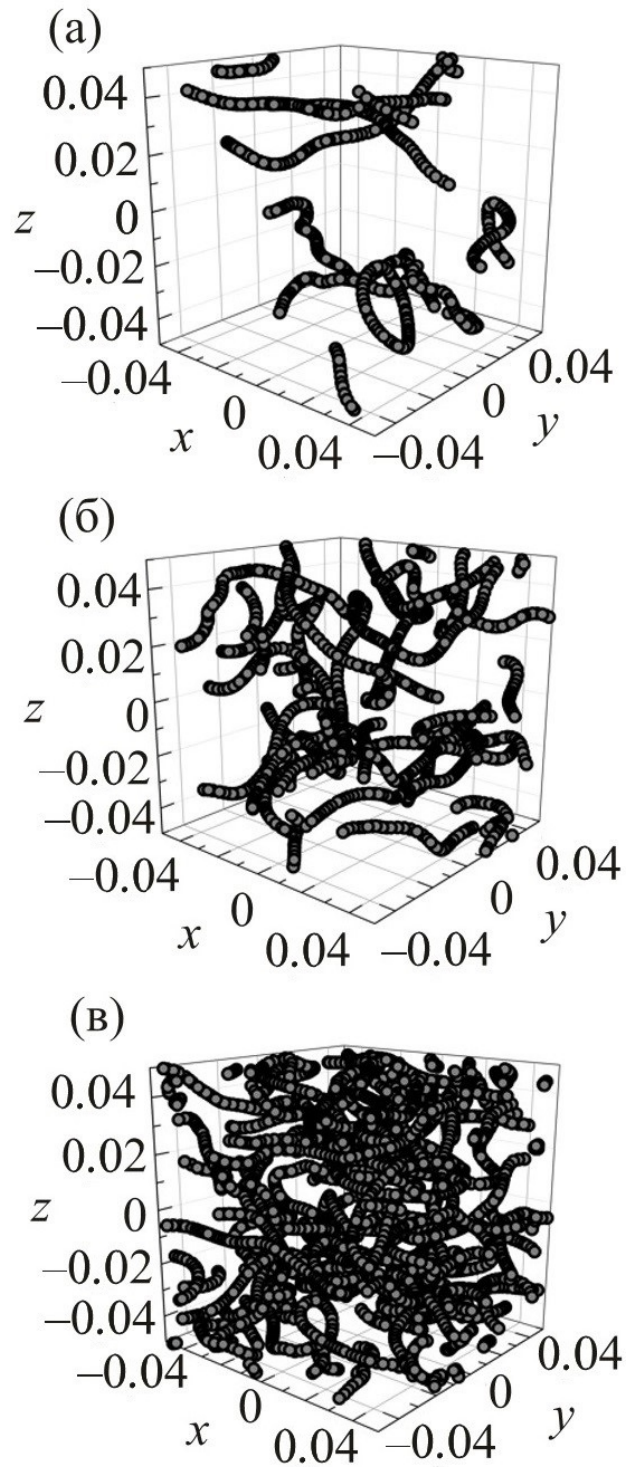


Рис. 3.5: Характерные структуры вихревых клубков при скорости противотока $V_{ns} = 0,5 \text{ см/с}$ для различных температур: (а) $T = 1.3 \text{ K}$; (б) $T = 1.6 \text{ K}$; (в) $T = 1.9 \text{ K}$. Размеры расчетной области приведены в сантиметрах.

ка и характеризующих его индексов. Было показано, что с повышением тем-

пературы вихревой клубок становился более ориентированным в направлении, перпендикулярном к скорости противотока нормальной и сверхтекучей компонент гелия (т.е. становился более сплюснутым), также показано, что анизотропные индексы очень слабо зависят от скорости противотока.

При анализе структуры вихревого клубка с помощью автокорреляционной функции, построенной для вихревой ориентации, установлено, что корреляция скоростей элементов вихревого клубка $\langle \mathbf{s}'(r_1) \mathbf{s}'(r_2) \rangle$ падает до значений близких к нулевым на межвихревых расстояниях $\tilde{l}$. На основании этого, в работе делается вывод о том, что конфигурация сегментов вихревых нитей напоминает случайное блуждание с длиной корреляции по порядку величины равной межвихревому расстоянию, т.е., что не существует когерентных вкладов вихревых нитей в поле скорости на расстояниях больше межвихревых. Также, в работе [97] делается предположение, что характер энергетического спектра $-E(k)$ для вихревого клубка, в значительной степени связан со вкладами отдельных вихревых нитей на масштабах, где справедливо: $k\tilde{l} \ll 1$, вплоть до размера клубка.

Как указывалось ранее, далее будут определены спектры полей скорости для вихревых клубков конфигураций которых были получены в работе [97]. Кроме того, для анализа спектральных характеристик на масштабах межвихревых расстояний, дополнительно была исследована динамика пар реконnectирующих вихревых петель. Для определения характера спектра энергии исследуемых систем мы использовали метод структурных функций с успехом применяемый при исследовании классической турбулентности. Описание данного метода приведено в следующем пункте.

3.3.1 Метод структурных функций

Для нахождения характера спектра поля скорости можно воспользоваться структурной функцией второго порядка, как описано, например, в работах [61, 95, 98, 99, 100, 101]. Рассмотрим структурную функцию для векторного поля. Структурная функция второго порядка определяется следующим образом: изменение скорости между двумя точками пространства, проектируется на

отрезок соединяющий эти две точки (и нормируется на длину отрезка l):

$$C_{ll}(l) = \langle \delta v_{||}(l)^2 \rangle, \quad (3.6)$$

где

$$\delta v_{||}(l) = [\mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \mathbf{v}(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{l}/l.$$

Под угловыми скобками подразумевается усреднение по всему ансамблю. В теории Колмогорова (К41) установлено, что для однородной изотропной турбулентности в несжимаемой жидкости $C_{ll}(l) \sim l^{2/3}$. В k пространстве данной зависимости соответствует энергетический спектр: $E(k) \sim k^{-5/3}$. Используя преобразование Фурье, можно показать, что в общем случае зависимостям типа: $C_{ll}(l) \sim l^\alpha$ в пространстве координат соответствуют зависимости $E(k) \sim k^{-\alpha-1}$ в пространстве волновых чисел. Для нахождения структурной функции необходимо вычислить поле скорости, создаваемое вихревыми нитями. Описанию алгоритма вычисления вихревых конфигураций и соответствующих им полей скорости посвящены пункты: уравнение движения и вычислительная схема первой главы диссертационной работы.

Таким образом, алгоритм определения спектральных характеристик системы сводится к следующему: проводится вычисление интересующей вихревой конфигурации, после чего в окружающей области находится поле скоростей, соответствующее найденной конфигурации (см., например, Рис. 3.6). Для найденного поля, согласно уравнению (3.6), находится структурная функция второго порядка и применяется преобразование Фурье для перехода в пространство волновых векторов. Во всех приведенных в следующих пунктах случаях, вычисление значений полей скорости проводилось в 25000 точках, выбранных случайным образом из области, занимаемой вихревой конфигурацией.

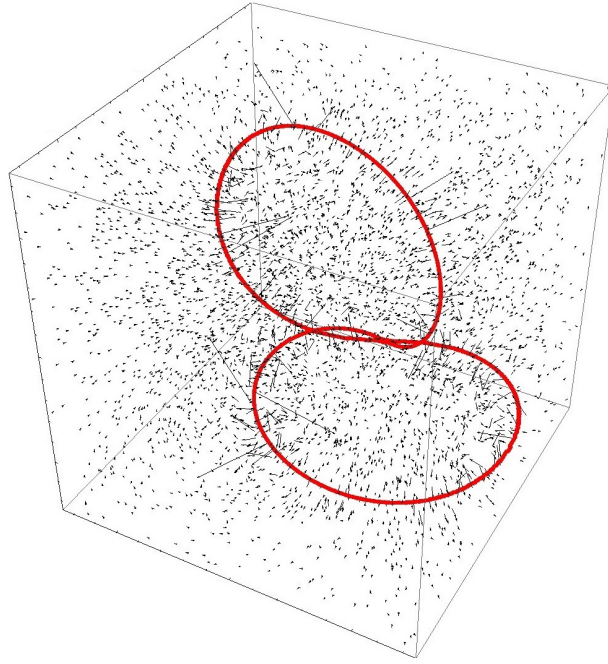


Рис. 3.6: Пример поля скорости, создаваемого двумя вихревыми петлями.

3.3.2 Энергетические спектры полей скорости, создаваемых кинками перед реконнекцией

В этом пункте определяются энергетические спектры полей скорости, создаваемых ближайшими элементами вихревых нитей перед их реконнекцией. Определим структурные функции второго порядка для полей скоростей, соответствующих конфигурациям, описанным в первой главе диссертационной работы. В области непосредственно вблизи точки осуществления реконнекции, для двух несколько отличающихся вихревых конфигураций, получены качественно похожие спектры: на масштабах порядка размеров пирамидальных структур – кинков: $C_{ii}(l) \sim l^{2/3}$, на меньших масштабах: $C_{ii}(l) \sim l^0$, смотри сплошные линии на Рис. 3.7. Такой характер структурных функций соответствует спектрам $E(k) \sim k^{-5/3}$ и $E(k) \sim k^{-1}$, соответственно. Другими словами, на масштабах порядка пирамидальных структур, образующихся в следствии интенсивного взаимодействия вихревых нитей перед реконнекцией, можно ожидать спектр колмогоровского типа. На меньших масштабах наблюдается спектр соответствующий спектру создаваемому гладкой вихревой нитью, подробнее смотри первую часть третьей главы диссертационной рабо-

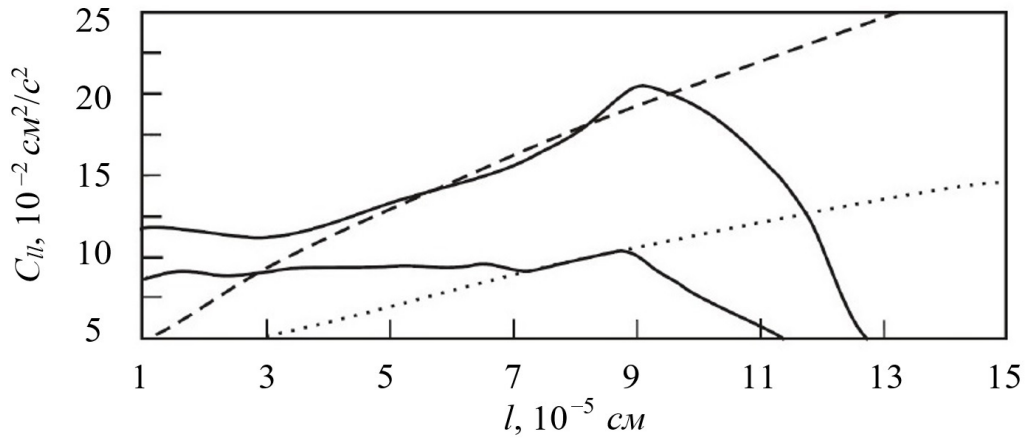


Рис. 3.7: Структурным функциям полей скорости в окрестности кинка соответствуют сплошные линии. Некоторые функции пропорциональные $l^{2/3}$ представлены штриховой и пунктирной линиями.

ты. Стоит отметить, что интенсивность диссипации непосредственно связанная с амплитудой структурной функции (для классической турбулентности $C_{II}(l) \sim \varepsilon^{2/3}$, где ε - плотность диссипации энергии) существенно возрастает при сближении вихревых нитей (верхняя сплошная линия на Рис. 3.7 соответствует вихревой конфигурации находящейся ближе к точке реконнекции, чем нижняя).

3.3.3 Энергетические спектры полей скорости, создаваемых вихрями перед реконнекцией

Для определения роли пространственной неоднородности (кинка) на спектр вихревой системы на масштабах больших самого кинка, вычислена структурная функция второго порядка в области, где были расположены обе вихревых петли до момента реконнекции: $2 R_0 \times 2 R_0 \times 2 R_0$. Полученная C_{II} представлена на Рис. 3.8. На масштабах порядка характерного размера кинка: $C_{II}(l) \sim l^{0.6}$, что соответствует спектру: $E(k) \sim k^{-1.6}$, на больших масштабах: $C_{II}(l) \sim l^{0.45}$, что соответствует спектру: $E(k) \sim k^{-1.45}$, на масштабах порядка характерного размера рассматриваемой вихревой системы: $C_{II}(l) \sim l^{-3}$, что соответствует: $E(k) \sim k^2$ на малых k . Результат полученные для малых волновых чисел в согласуется с результатами, полученными для всех моделей хаотических вихревых нитей, подробнее смотри первую части текущей

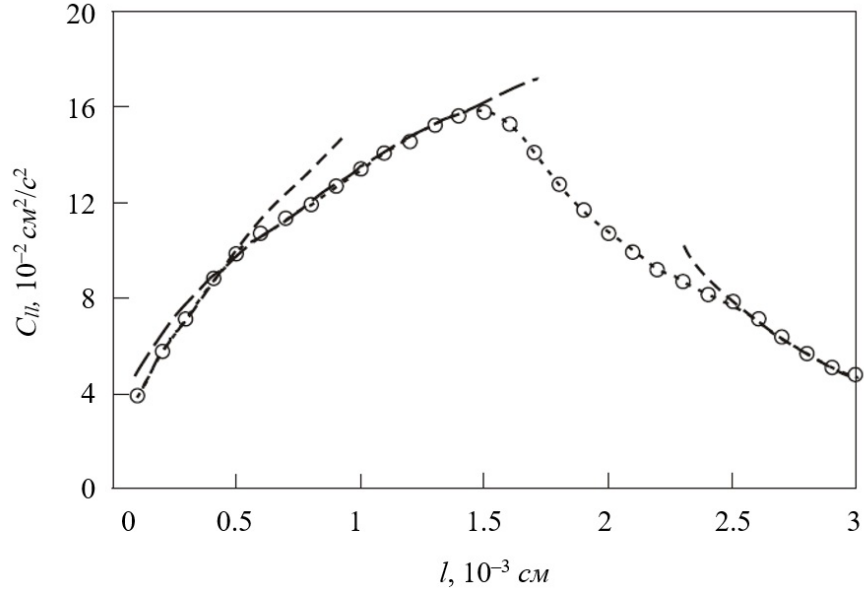


Рис. 3.8: Структурная функция для системы двух взаимодействующих вихревых петель, изначально принадлежащих в одной плоскости. Структурной функции соответствует пунктирная линия с круглыми маркерами. Штриховые линии — степенные аппроксимации: $l^{0.6}$, $l^{0.45}$, l^{-3} на соответствующих масштабах l .

главы.

Кроме того, на масштабах порядка межвихревых расстояний, характерных для вихревых клубков (которые будут рассмотрены подробнее в следующем пункте этой главы), вычислены спектральные характеристики полей скоростей создаваемых вихревыми конфигурациями, представленными на Рис. 3.4. Соответствующие результаты представлены на Рис. 3.9.

Полученные таким образом, структурные функции второго порядка могут быть представлены в виде нескольких характерных диапазонов протяженность которых зависит от конфигурации вихревых нитей. Наклон аппроксимирующих кривых (см., сплошные линии на Рис. 3.9) уменьшается с увеличением угла между плоскостями начального расположения петель, т.е. для менее пространственно скоррелированных вихревых конфигураций. Значения углов наклона кривых аппроксимирующих функцию C_l изменяется в диапазоне от 0.45 до 0.66, что соответствует энергетическим спектрам в диапазоне от $E(k) \sim k^{-1.45}$ до $E(k) \sim k^{-5/3}$, соответственно. Стоит отметить, что для вихревых петель удаленных от точки реконнекции, т.е. не имеющих

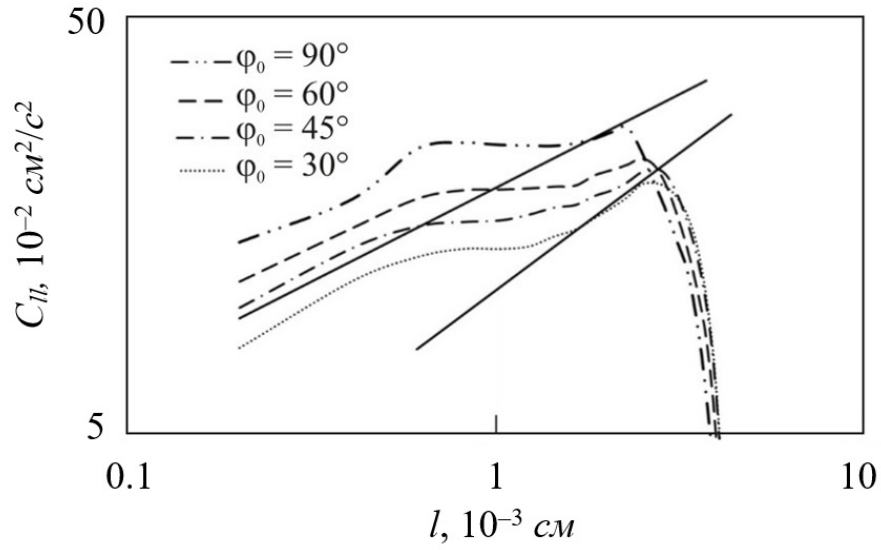


Рис. 3.9: Структурная функция для вихревых конфигураций, соответствующих Рис. 3.4.

характерных пирамидальных деформаций, подобные зависимости в области больших l не наблюдались.

Таким образом, единичная неоднородность типа кинка не может создавать поле скорости со спектром подобным колмогоровскому спектру, тем более на масштабах системы. Однако, во всех рассмотренных случаях наличие кинков приводит к характерным особенностям в спектре энергии. Стоит ожидать, что наличие множества кинков, например, в плотном вихревом клубке (характеризуемом большим количеством реконнекций, подробнее смотри вторую главу диссертационной работы), возможно, могли бы создавать спектр колмогоровского типа. Более того, число кинков существенно растёт с увеличением плотности вихревого клубка и числа реконнекций, которые, в свою очередь, растут с увеличением температуры и скорости противотока нормальной и сверхтекучей компонент гелия. Поэтому, при более высоких температурах и значениях V_{ns} , на межвихревых масштабах должен наблюдаться более крутой наклон в зависимостях $E(k)$, чем при более низких. Подробнее этот вопрос обсуждается в следующем пункте главы.

3.3.4 Энергетические спектры полей скорости, создаваемых вихревыми клубками

В данном пункте вычисляются структурные функции второго порядка для различных конфигураций вихревых клубков, а также находятся соответствующие им энергетические спектры. Для минимизации погрешности вычислений, проводилось усреднение структурных функций, полученных для десяти различных конфигураций вихревого клубка в стационарном состоянии. Все десять конфигураций вихревого клубка, принадлежащих стационарному состоянию, выбирались случайным образом. Процедура усреднения проводилась для всех рассмотренных температур и скоростей противотока. Зависимости C_{II} от пространственного масштаба l при температуре $T = 1.6\text{ K}$ и различных скоростях противотока нормальной и сверхтекучей компонент гелия приведены на Рис. 3.10. Все приведенные на Рис.3.10 зависимости имеют

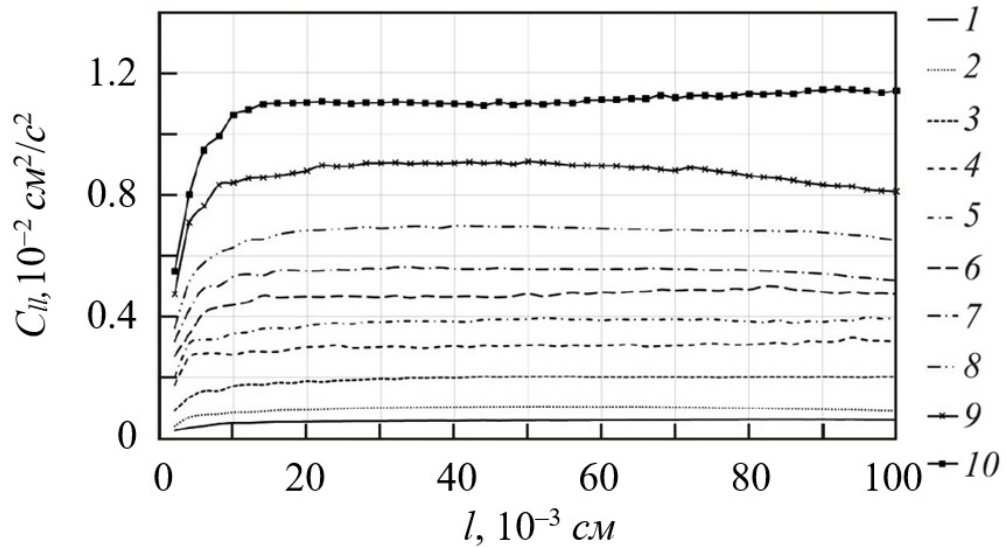


Рис. 3.10: Структурные функции для вихревых клубков, полученные при $T = 1.6\text{ K}$ и различных значениях V_{ns} , cm/s : (1) 0.3; (2) 0.4; (3) 0.5; (4) 0.6; (5) 0.7; (6) 0.8; (7) 0.9; (8) 1; (9) 1.1; (10) 1.2.

два характерных участка. На масштабах меньших и порядка межвихревых расстояний наблюдается рост значений структурных функций второго порядка с увеличением аргумента l . На больших масштабах структурные функции почти не зависят от величины l , а именно: $C_{II}(l) \sim l^{0.05}$. Стоит отметить, что

характерные межвихревые расстояния, как было получено в работе [97], изменяются в пределах от 0.005 до 0.04 см в зависимости от температуры и скорости противотока нормальной и сверхтекучей компонент гелия. В общем случае, увеличение температуры и скорости противотока приводит к уменьшению межвихревых расстояний. Для температур $T = 1.3\text{ K}$ и $T = 1.9\text{ K}$ зависимости структурных функций от значений l при различных V_{ns} качественно похожи на зависимость, полученную при $T = 1.6\text{ K}$. Отличия выражаются в значениях структурных функций (значение структурной функции и соответствующая интенсивность диссипации растет с температурой) и наклоне кривых в области межвихревых масштабов, которые будут описаны подробнее далее.

Рассмотрим зависимости $C_u(l)$ на масштабах порядка межвихревых. Во всех рассмотренных случаях, при фиксированном значении температуры, зависимости структурных функций от l при различных значениях скоростей противотока имели почти одинаковый наклон, смотри, например, Рис. 3.10. Поэтому, после получения уравнений кривых для различных значений скоростей противотока нормальной и сверхтекучей компонент гелия, было проведено усреднение по их наклонам. Полученные результаты представлены на Рис. 3.11, также на рисунке приведены функции $C_u(l)$ при $V_{ns} = 0.5\text{ см/с}$ для соответствующих температур.

Наклоны аппроксимирующих кривых оказались равными: 0.3, 0.35 и 0.4 для температур: $T = 1.3\text{ K}$, $T = 1.6\text{ K}$ и $T = 1.9\text{ K}$, соответственно. Данные значения соответствуют спектрам энергии: $E(k) \sim k^{-1.3}$, $E(k) \sim k^{-1.35}$ и $E(k) \sim k^{-1.4}$. Таким образом, с увеличением температуры, а следовательно и числа реконнекций, спектр поля скорости, создаваемый вихревым клубком на межвихревых масштабах, становится все более похожим на колмогоровский, что согласуется с полученными результатами и поддерживает гипотезы выдвинутые в предыдущих пунктах главы. На масштабах больших межвихревых, энергетический спектр имеет вид $E(k) \sim k^{-1}$.

Отдельно рассмотрим зависимости значений структурных функций от скоростей противотока нормальной и сверхтекучей компонент гелия. Как показано на Рис. 3.10, значения структурных функций на масштабах больших

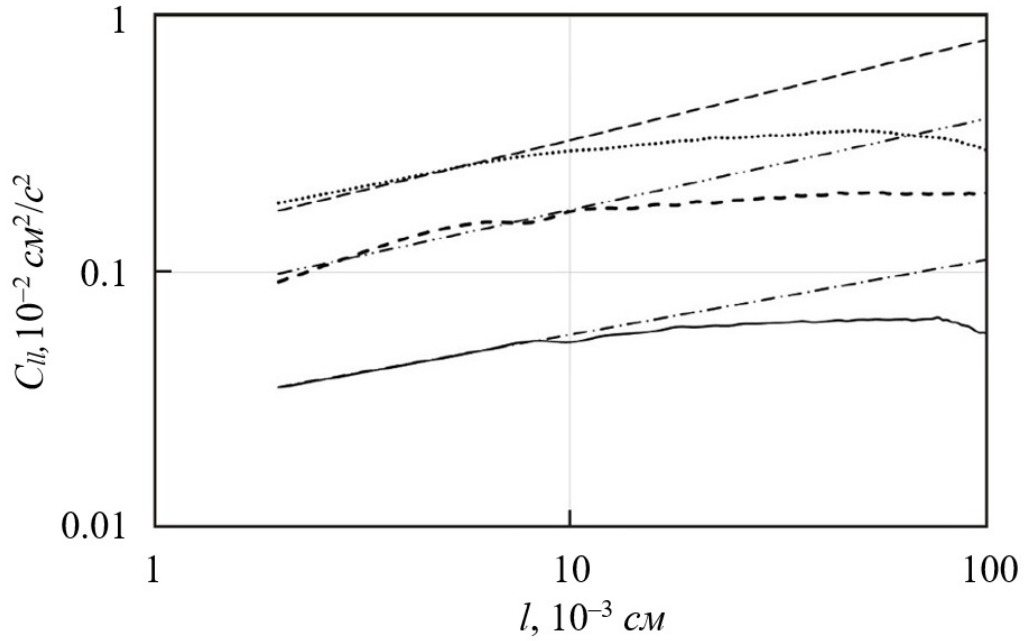


Рис. 3.11: Структурные функции вихревых клубков, полученные при $V_{ns} = 0,5 \text{ см/с}$ для: $T = 1.3 \text{ K}$ — сплошная, $T = 1.6 \text{ K}$ — штриховая, $T = 1.9 \text{ K}$ и пунктирная линии соответственно. Аппроксимации, построенные в области межвихревых расстояний, обозначены линией с длинными штрихами и штрих-пунктирными линиями. Аппроксимации строились при фиксированных значениях температуры путем усреднения наклонов линий, полученных при различных V_{ns} .

межвихревых практически не зависят от l , но существенно увеличиваются при увеличении скорости противотока. Для выяснения характера этой зависимости, были вычислены средние значения структурных функций второго порядка C_{II} на масштабах больших межвихревых для всех температур и скоростей противотока, смотри Рис. 3.12.

Полученные зависимости хорошо аппроксимируются квадратичными функциями, смотри сплошную, штриховую и пунктирную линии на Рис. 3.12, т.е. $C_{II}(l) \sim V_{ns}^2$, что можно связать с увеличением плотности вихревого клубка, наблюдаемом при увеличении скорости противотока нормальной и сверхтекучей компонент гелия (подробнее смотри вторую главу диссертационной работы).

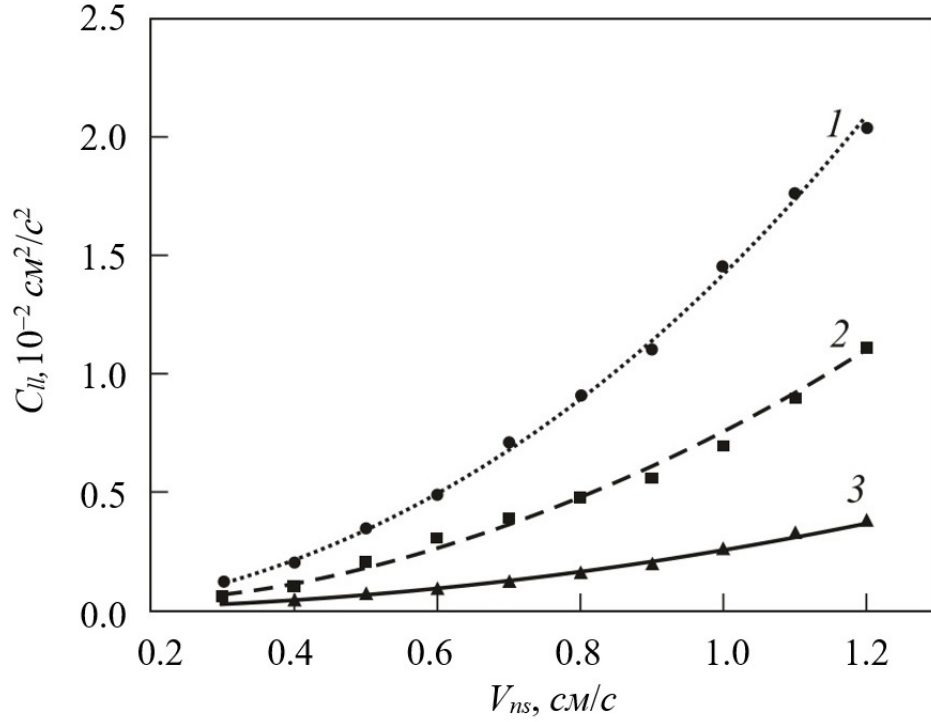


Рис. 3.12: Зависимость среднего значения структурной функции (усреднение проводилось на масштабах больше межвихревого расстояния) от V_{ns} для различных температур. Уравнения аппроксимирующих кривых, соответствующие значения коэффициента детерминации – R^2 и температуры: (1) $C_{II} = 0.0143V_{ns}^{2.0872}$, $R^2 = 0.999$, $T = 1.9 \text{ K}$; (2) $C_{II} = 0.0075V_{ns}^{2.0632}$, $R^2 = 0.9914$, $T = 1.6 \text{ K}$; (3) $C_{II} = 0.0025V_{ns}^{2.06}$, $R^2 = 0.9971$, $T = 1.3 \text{ K}$.

3.4. Обсуждение и заключение

Используя Гауссову модель вихревого клубка, вычислены энергетические спектры трехмерного случайного поля скорости, индуцируемого хаотической вихревой петлей, и соответствующая энергия вихревой петли. Предполагалось, что вихревые петли могут иметь структуру случайного блуждания (Броуновские линии) с различной размерностью Хаусдорфа H_D , которая была определена. Показано, что для фрактальной вихревой петли, характеризующейся размерностью Хаусдорфа, энергетический спектр поля скорости для больших волновых чисел k имеет вид: $E(k) \sim k^{H_D-2}$, в то время как для малых k он имеет универсальный характер, а именно: $E(k) \sim k^2$. Размерность Хаусдорфа имеет физический смысл только в диапазоне $\in [1; 3]$. Данный факт означает, что показатель степени в энергетическом спектре $E(k)$ пробегает

значения от -1 до 1 , т.е. значение $-5/3$, соответствующее колмогоровскому спектру не достигается в рамках использованной модели. Последнее, по всей видимости, обусловлено тем, что в реальном турбулентном потоке вихревые нити существенно "поляризованы" вследствие взаимодействия между собой (кроме того, могут содержать структуры типа кинков), что не учитывается в рамках используемой модели хаотической вихревой петли.

При вычислении энергии вихревой нити показано, что ее кинетическая энергия, связанная со взаимным расположением элементов вихревой нити, зависит от фрактальной размерности нити. Для гладкой нити, полученный результат совпал с классическим, а именно: $E = \frac{\rho_s \kappa^2}{4\pi} L \ln \frac{L}{ea}$.

В рамках альтернативного подхода к изучению спектральных характеристик полей скорости: метода структурных функций, установлено, что кинки, образуемые ближайшими элементами вихревых нитей перед реконнекцией, могут создавать поля скорости со спектральными характеристиками близкими к спектральным характеристикам классической изотропной турбулентности. Данное утверждение справедливо на масштабах порядка характерных размеров кинка. Спектральные характеристики системы реконнектирующих петель на масштабах порядка размера особенности (размера кинка), также связаны с характером этой особенности. Указанный факт выражается в зависимости: $C_{ll}(l) \sim l^{0.6}$, что несущественно отличается от Колмогоровского спектра $C_{ll}(l) \sim l^{2/3}$, смотри Рис. 3.8. На больших масштабах для уединенных конфигураций (например для пар вихревых колец см., Рис. 3.4) зависимость имеет более гладкий вид, что логично ожидать для гладких вихревых нитей.

В реальных вихревых клубках, особенно при больших температурах и скоростях противотока нормальной и сверхтекучей компонент гелия, вихревые нити имеют множество особенностей, обусловленных их высокой плотностью и постоянными процессами реконнекции. По всей видимости, это обстоятельство могло бы приводить к образованию спектра колмогоровского типа, по крайней мере, на масштабах особенностей. Для прояснения данного вопроса были изучены спектральные характеристики вихревых клубков при различных температурах и скоростях противотока. На масштабах больше межвихревых наблюдался спектр близкий к $E(k) \sim k^{-1}$, т.е. спектр по-

добный спектру характерному для гладкой вихревой нити. Однако, рассмотренная система, т.е. сверхтекучая турбулентность при наличии противотока нормальной и сверхтекучей компонент гелия по сути является анизотропной из-за выделенного направления скорости противотока. Наличие противотока приводит к некоторой поляризации вихревого клубка, что было установлено при анализе анизотропных индексов в работе [97], и сближает систему с системами, обладающими осевой симметрией, например, с гладкой или, даже, прямой вихревой нитью. В исследуемом случае сходство выразилось в характере спектра на больших масштабах. На масштабах порядка межвихревых расстояний, спектр энергии имеет вид: $E(k) \sim k^{-\beta}$, где $1.3 < \beta < 1.4$. Причем большие значения β соответствуют большим температурам. На примере реконnectирующих вихревых петель, показано, что такое поведение может быть связано с наличием характерных особенностей – кинков и увеличением их числа с ростом температуры.

Стоит отметить, что в квантовых жидкостях завихренность в значительной степени локализована, т.е. сосредоточена в вихревых нитях, поэтому описанные выше сценарии могут не реализоваться для классических жидкостей. В этом случае, подобные особенности могут возникать при столкновении и перезамыкании взаимодействующих вихревых трубок, наблюдаемом экспериментально (см., например, работу [102]). Результатом сближения вихревых трубок перед перезамыканием является их существенная деформация (по аналогии с кинком), причем энергия взаимодействия между близко расположенными элементами вихревых трубок может значительно превышать собственную энергию этих элементов, что может, в свою очередь, оказывать существенное влияние на спектральные характеристики системы, как и в случае описанных выше систем.

Результаты, полученные в третьей главе диссертационной работы, опубликованы в трех статьях [103, 104, 105], а также в тезисах конференций [106, 107, 108, 109].

Заключение

В результате выполнения диссертационной работы были получены ряд важных результатов, расширяющих представление о динамике квантованных вихревых нитей при конечной температуре перед их реконнекцией. Кроме того, аналитически и численно определены спектральные характеристики для широкого класса вихревых конфигураций, как модельных так и наблюдаемых в численном эксперименте, что позволяет существенно продвинуться в понимании возможных механизмов диссипации энергии в сверхтекучем гелии. В качестве результатов проведенного исследования, на защиту выносятся следующие основные положения:

- 1) Проведено детальное изучение динамики квантованных вихревых нитей перед реконнекциями при различных температурах и начальных условиях. Установлено, что в этой динамике можно выделить три характерных этапа: универсальный, в котором расстояние между ближайшими элементами вихревых нитей $\delta(t) = \sqrt{(\kappa/2\pi)(t_* - t)}$, полууниверсальный, где $\delta(t) = A\sqrt{(\kappa)(t_* - t)(1 - c|t_* - t|)}$, а коэффициенты A и c зависят от температуры и неуниверсальный, где выделить общий характер зависимости не представляется возможным.
- 2) Установлено, что длина универсального интервала не зависит от температуры, а универсального уменьшается при увеличении температуры, пропорционально коэффициенту трения.
- 3) Найдено, что граница между универсальным и полууниверсальным интервалами соответствует расстоянию на котором нелокальный вклад в уравнение Био-Савара сравнивается с локальным, т.е. взаимное взаимодействие вихревых нитей начинает доминировать над взаимодействием вихревых нитей с нормальной компонентой жидкости. При достижении ближайшими элементами вихревых нитей такого расстояния, поведение системы резко меняется:

скорость сближения элементов вихревых нитей растет, а локальный радиус кривизны уменьшается.

4) Установлено, что в полууниверсальном интервале эволюции, ближайшие участки вихревых нитей начинают деформироваться, образуя пирамидальную структуру, причем изменение углов при вершине пирамидальной структуры зависит от температуры. В универсальном интервале угол при верхней вершине пирамиды практически не зависит от времени и температуры.

5) Установлено, что при осуществлении реконнекции, сближающиеся элементы вихревых нитей переориентируются таким образом, чтобы направление векторов их циркуляции было противоположным.

6) Впервые исследована динамика вихревого клубка с применением нового критерия реконнекций, основанного на анализе динамики элементов вихревых нитей. Получены связи скорости реконнекций с плотностью вихревого клубка $dN_r/dt \approx 2.47\kappa L^{5/2}$ и плотности вихревого клубка со скоростью противотока нормальной и сверхтекучей компонент гелия $L = \gamma^2 V_{ns}^2$ ($\gamma \approx 280 \text{ с/см}^2$).

7) Проведено изучение спектральных характеристик полей скорости, создаваемых одиночной хаотической вихревой петлей, подчиняющейся различным статистическим моделям. Установлено, что при малых волновых числах для всех моделей вихревых петель $E(k) \sim k^2$, при больших k наблюдаются различия, так гладкая и реальные петли дают $E(k) \sim k^{-1}$, броуновская $E(k) \sim \text{const}$, степенная $E(k) \sim k^{H_d-2}$ (H_d - хаусдорфова размерность), т.е. в рамках модели хаотической вихревой петли не может быть получен спектр колмогоровского типа.

8) Найдены энергетические спектры полей скорости, индуцированных реконнектирующими вихревыми нитями. Установлено, что конфигурации, образуемые ближайшими элементами вихревых нитей перед реконнекцией (в универсальном интервале эволюции), создают поля скорости со спектрами близкими к колмогоровскому, на соответствующих масштабах.

9) Найдены спектры энергии полей скорости, создаваемых вихревыми клубками в противотоке при различных температурах. На межвихревых масштабах $E(k) \sim k^{-\beta}$, причем значение коэффициента β увеличивается от 1.3 до

1.4 при увеличении температуры от 1.3 K до 1.9 K , что может быть обусловлено увеличением числа реконнекций, связанных с увеличением плотности вихревого клубка. На масштабах больше межвихревых $E(k) \sim k^{-1}$. Установлено, что интенсивность диссипации энергии увеличивается при увеличении скорости противотока.

Литература

- [1] Тилли Д.Р., Тилли Дж. Сверхтекучесть и сверхпроводимость // Москва, Мир, 1977. — 304 с.
- [2] Паттерман С. Гидродинамика сверхтекучей жидкости // Москва, Мир, 1978. — 520 с.
- [3] Donnelly R.J. Quantized vortices in helium II // Cambridge, Cambridge University Press, 1991. — 368 p.
- [4] Sonin E.B. Dynamics of quantised vortices in superfluids // Cambridge, Cambridge University Press, 2016. — 400 p.
- [5] Tisza L. Transport phenomena in helium II // Nature. — 1938. — V. 141, Issue. 3577. — P. 913.
- [6] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика // Москва, Наука, 1986. — 736 с.
- [7] Osborne D.V. The rotation of liquid helium II // Proceedings of the Physical Society. Section A. — 1950. — V. 63, Issue. 8. — P. 909.
- [8] Андроникашвили Э.Л., Каверкин И.П. Вращение гелия II при больших скоростях // ЖЭТФ. — 1955. — Т. 126, №. 28.
- [9] Packard R.E., Sanders Jr T. Detection of single quantized vortex lines in rotating He II // Physical Review Letters. — 1969. — V. 22, №. 16. — P. 823.
- [10] Gorter C.J., Mellink J.H. On the irreversible processes in liquid helium II // Physica. — 1949. — V. 15. — P. 258-304.

- [11] Onsager L. Statistical hydrodynamics // II Nuovo Cimento – 1949. – V. 6. – P. 279-287.
- [12] Feynman R.P. Application of quantum mechanics to liquid helium // Progress in Low Temperature Physics. – 1955. – V. 1. – P. 17-53.
- [13] Vinen W.E. Mutual friction in a heat current in liquid helium II. Critical heat currents in wide channels // Proc. R. Soc. Lond. – 1958. – V. 243. – P. 400-413.
- [14] Hall H.E., Vinen W.F. The rotation of liquid helium II: I. Experiments on the propagation of second sound in uniformly rotation helium II // Proc. R. Soc. Lond. – 1956. – V. 238. – P. 204-214.
- [15] Hall H.E., Vinen W.F. The rotation of liquid helium II: II. The theory of mutual friction in uniformly rotation helium II // Proc. R. Soc. Lond. – 1956. – V. 238. – P. 215-234.
- [16] Немировский С.К., Лебедев В.В. Гидродинамика сверхтекучей турбулентности // ЖЭТФ – 1983. – V. 84, №. 5. – С. 1729-1742.
- [17] Nemirovskii S.K. Quantum turbulence: Theoretical and numerical problems // Physics Reports. – 2013. – V. 524, Issue. 3. – P. 85-202.
- [18] Schwarz K.W. Three-dimensional vortex dynamics in superfluid He 4: Line-line and line-boundary interactions // Physical Review B. – 1985. – V. 31, Issue. 9. – P. 5782-5804.
- [19] Aarts R.G.K.M. A numerical study of quantized vortices in He II // Technische Universiteit Eindhoven, 1993. – 116 p.
- [20] Maurer J., Tabeling P. Local investigation of superfluid turbulence // Europhysics Lett. – 1998. – V. 43, №. 1. – P. 29.
- [21] Vinen W.F. Classical character of turbulence in a quantum liquid // Physical Review B. – 2000. – V. 61, №. 2. – P. 1410.

- [22] Volovik G.E. Classical and quantum regimes of superfluid turbulence // JETP Letters. – 2003. – V. 78, №. 9. – P. 533-537.
- [23] Skrbek L. A flow phase diagram for helium superfluids // Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters. – 2004. – V. 80, №. 7. – P. 474-478.
- [24] Alekseenko S.V., Kuibin P.A., Okulov V.L. Theory of concentrated vortices: an introduction // Springer, 2007. – 494 p.
- [25] Siggia E.D. Collapse and amplification of a vortex filament // Phys. Fluids. – 1985. – V. 28, Issue. 3. – P. 794-805.
- [26] Boue L., Khomenko D., L'vov V.S., Procaccia I. Analytic solution of the approach of quantum vortices towards reconnection // Physical Review Letters. – 2013. – V. 111, Issue. 14. – 145302.
- [27] De Waele A., Aarts R. Route to vortex reconnection // Physical Review Letters. – 1994. – V. 72, Issue. 4. – P. 482-485.
- [28] Hanninen R. Dissipation enhancement from a single vortex reconnection in superfluid helium // Physical Review B. – 2013. – V. 88, Issue. 5. – 054511.
- [29] Tebbs R., Youd A.J., Barenghi C.F. The approach to vortex reconnection // Journal of Low Temperature Physics. – 2011. – V. 162, Issue. 3-4. – P. 314-321.
- [30] Bewley G.P., Paoletti M.S., Sreenivasan K.R., Lathrop D.P. Vortex-swapping in superfluid helium // PNAS. – 2008. – V. 105, Issue. 37. – P. 13697-13698.
- [31] Paoletti M.S., Fisher M.E., Lathrop D.P. Reconnection dynamics for quantized vortices // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2010. – V. 239, Issue. 14. – P. 1367–1377.
- [32] Saffman P.G. The velocity of viscous vortex rings // Stud. Appl. Maths. – 1970. – V. 49. – P. 371-380.

- [33] Moore D.W., Saffman P.G. The motion of a vortex filament with axial flow // Philos. Trans. R. Soc. – 1972. – V. 272. – P. 403-429.
- [34] Saffman P.G., Baker G.R. Vortex interactions // Annual Review of Fluids Mechanics. – 1979. – V. 11. – P. 95-122.
- [35] Rayfield G.W., Reif F. Quantized vortex rings in superfluid helium // Phys. Rev. – 1964. – V. 136. – P. 1194-1208.
- [36] Ламб Г. Гидродинамика // Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1947. – 929 с.
- [37] Kondaurova L.P., Nemirovskii S.K. Full Biot-Savart numerical simulation of vortices in He II // Journal of Low Temperature Physics. – 2005. – V. 138, Issue. 3-4. – P. 555-560.
- [38] Kondaurova L.P., Nemirovskii S.K. Numerical study of decay of vortex tangles in superfluid helium at zero temperature // Physical Review B. – 2012. – V. 86, Issue. 13. – 134506.
- [39] Kondaurova L., L'vov V., Pomyalov A., Procaccia I. Structure of a quantum vortex tangle in 4 He counterflow turbulence // Physical Review B. – 2014. – V. 89, Issue. 1. – 014502.
- [40] Donnelly R.J., Barenghi C.F. The observed properties of liquid helium at the saturated vapor pressure // J. Phys. Chem. Ref. Data. – 1998. – V. 27, Issue. 6. – P. 1217-1274.
- [41] Schwarz K.W. Three-dimensional vortex dynamics in superfluid He 4: Homogeneous superfluid turbulence // Physical Review B. – 1988. – V. 38, №. 4. – P. 2398.
- [42] Pumir A., Siggia E.D. Vortex dynamics and the existence of solutions to the Navier-Stokes equations // The Physics of fluids. – 1987. – V. 30, №. 6. – P. 1606-1626.

- [43] Zuccher S., Ricca R.L. Helicity conservation under quantum reconnection of vortex rings // *Physical Review E*. – 2015. – V. 92, №. 6. – P. 061001.
- [44] Andryushchenko V.A., Kondaurova L.P., Nemirovskii S.K. Dynamics of quantized vortices before reconnection // *Journal of Low Temperature Physics*. – 2016. – V. 185, Issue. 5. – P. 377-383.
- [45] Andryushchenko V.A., Kondaurova L.P., Nemirovskii S.K. Dynamics of nonplanar quantized vortex rings before reconnection at finite temperatures // *Journal of Low Temperature Physics*. – 2017. – V. 187, Issue. 5/6. – P. 523-530.
- [46] Андрющенко В.А., Кондаурова Л.П., Немировский С.К. Динамика квантованных вихревых нитей перед перезамыканием // XXXVII Собрание по физике низких температур: программа и тезисы докладов. Казань, 29 июня – 3 июля 2015. – С. 251-252.
- [47] Андрющенко В.А., Кондаурова Л.П., Немировский С.К. Численное моделирование динамики коллапсирующих вихревых петель в сверхтекучем гелии // Международная конференция: Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики. Тезисы. Новосибирск, 19–23 октября 2015. – С. 115.
- [48] Андрющенко В.А., Кондаурова Л.П., Немировский С.К. Численное моделирование динамики коллапсирующих вихревых петель в сверхтекучем гелии // Труды международной конференции: Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики. 2015. – С. 56-61.
- [49] Andryushchenko V.A., Kondaurova L.P., Nemirovskii S.K. Reconnections of quantized vortices at finite temperatures // *Euromech colloquium 581. Dynamics of concentrated vortices*, Novosibirsk, May 30 – June 1 2016. – P. 20-21.
- [50] Buttke T.F. A numerical study of superfluid turbulence in the self-induction approximation // *Journal of Computational Physics*. – 1988. – V. 76, №. 2. – P. 301-326.

- [51] Samuels D.C. Velocity matching and Poiseuille pipe flow of superfluid helium // Physical Review B. – 1992. – V. 46, №. 18. – P. 11714.
- [52] Tsubota M., Araki T., Nemirovskii S.K. Dynamics of vortex tangle without mutual friction in superfluid 4 He // Physical Review B. – 2000. – T. 62, №. 17. – P. 11751.
- [53] Adachi H., Fujiyama S., Tsubota M. Steady-state counterflow quantum turbulence: Simulation of vortex filaments using the full Biot-Savart law // Phys. Rev. B. – 2010. – V. 81. – P. 104511.
- [54] Nemirovskii S. K. Kinetics of a network of vortex loops in He II and a theory of superfluid turbulence // Phys. Rev. B. — 2008. — V. 77, Issue. 21. — P. 214509.
- [55] Barenghi C.F., Samuels D.C. Scaling laws of vortex reconnections // Journal of Low Temperature Physics. – 2004. – V. 136, №. 5-6. – P. 281-293.
- [56] Nemirovskii S.K. Evolution of a network of vortex loops in He-II: exact solution of the rate equation // Physical Review Letters. – 2006. – V. 96, №. 1. – P. 015301-015304.
- [57] Kondavrova L.P., Andryushchenko V.A., Nemirovskii S.K. Numerical simulation of superfluid turbulence under periodic conditions // Journal of Low Temperature Physics. – 2008. – V. 150, Issue. 3/4. – P. 415-419.
- [58] Кондаурова Л.П., Андрющенко В.А., Немировский С.К. Численное моделирование динамики вихревого клубка в сверхтекучем гелии // Вычислительные технологии. – 2010. – Т. 15, №. 2. – С. 41-51.
- [59] Kondavrova L.P., Andruschenko V.A., Nemirovskii S.K. Numerical simulation of superfluid turbulence under periodic conditions // International Symposium on Quantum Fluids and Solids, Kazan, 1–6 August 2007. – P. 152.
- [60] Chorin A.J. Vorticity and turbulence // New York, Springer-Verlag, 1994. – 176 p.

- [61] Frisch U. Turbulence // Cambridge, Cambridge University Press, 1995. – 296 p.
- [62] Nemirovskii S.K., Fiszdon W. Chaotic quantized vortices and hydrodynamic processes in superfluid helium // Reviews of Modern Physics. – 1995. – V. 67, №. 1. – P. 37.
- [63] Григорьев Ю.Н., Ершов И.В. Диссипация вихревых возмущений в колебательно-неравновесном двухатомном газе // Теплофизика и аэромеханика. – 2012. – Т. 19, № 3. – С. 291-300.
- [64] Grigoryev Y.N., Ershov I.V. Evolution of a large-scale vortex in shear flow of a relaxing molecular gas // Fluid Mechanics and its Applications. – 2017. – V.117. – P.153-169.
- [65] Grigoryev Y.N., Ershov I.V. Dissipation of the Kelvin–Helmholts waves in a relaxing molecular gas // Fluid Mechanics and its Applications. – 2017. – V. 117. – P.171-198.
- [66] Araki T., Tsubota M., Nemirovskii S.K. Energy spectrum of superfluid turbulence with no normal-fluid component // Physical Review Letters. – 2002. – V. 89, №. 14. – P. 145301.
- [67] Kivotides D., Vassilicos C.J., Samuels D.C., Barenghi C.F. Velocity spectra of superfluid turbulence //EPL (Europhysics Letters). – 2002. – V. 57, №. 6. – P. 845.
- [68] Kivotides D., Vassilicos C.J., Samuels D.C., Barenghi C.F. Kelvin waves cascade in superfluid turbulence // Physical Review Letters. – 2001. – V. 86, №. 14. – P. 3080.
- [69] Baggaley A.W. The importance of vortex bundles in quantum turbulence at absolute zero // Physics of Fluids. – 2012. – V. 24, №. 5. – P. 055109.
- [70] Nore C., Abid M., Brachet M.E. Kolmogorov turbulence in low temperature superflows // Phys. Rev. Lett. – 1997. – V. 78. – P. 38966.

- [71] Kobayashi M., Tsubota M. Kolmogorov spectrum of superfluid turbulence: Numerical analysis of the Gross-Pitaevskii equation with a small-scale dissipation // Physical Review Letters. – 2005. – V. 94, №. 6. – P. 065302.
- [72] Sasa N., Kano T., Machida M., L'vov V.S., Rudenko O., Tsubota M. Energy spectra of quantum turbulence: Large-scale simulation and modeling // Physical Review B. – 2011. – V. 84, №. 5. – P. 054525.
- [73] Nemirovskii S.K. Gaussian model of vortex tangle in He II // Physical Review B. – 1998. – V. 57, №. 10. – P. 5972.
- [74] Kuznetsov E.A., Ruban V.P. Collapse of vortex lines in hydrodynamics // Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 2000. – V. 91, №. 4. – P. 775-785.
- [75] Kuznetsov E.A. Collapse and kolmogorov spectra // Proceedings of scientific school "Nonlinear waves-2012 Eds. AG Litvak and VI Nekorkin, Institute for Applied Physics, Nizhnii Novgorod, 26, 2013.
- [76] Kerr R.M. Swirling, turbulent vortex rings formed from a chain reaction of reconnection events // Physics of Fluids. – 2013. – V. 25, №. 6. – P. 065101.
- [77] Agafontsev D.S., Kuznetsov E.A., Mailybaev A.A. Development of high vorticity structures in incompressible 3D Euler equations // Physics of Fluids. – 2015. – V. 27, №. 8. – P. 085102.
- [78] Smith M.R., Donnelly R.J., Goldenfeld N., Vinen W.F. Decay of vorticity in homogeneous turbulence // Physical Review Letters. – 1993. – V. 71, №. 16. – P. 2583.
- [79] Stalp S.R., Skrbek L., Donnelly R.J. Decay of grid turbulence in a finite channel // Physical Review Letters. – 1999. – V. 82, №. 24. – P. 4831.
- [80] Vinen W.F. Classical character of turbulence in a quantum liquid // Physical Review B. – 2000. – V. 61, №. 2. – P. 1410.

- [81] Davis S.I., Hendry P.C., McClintock P.V.E. Decay of quantized vorticity in superfluid ^4He at mK temperatures // *Physica B: Condensed Matter*. – 2000. – V. 280, №. 1. – P. 43-44.
- [82] Schoepe W. Fluctuations and stability of superfluid turbulence at mK temperatures // *Physical Review Letters*. – 2004. – V. 92, №. 9. – P. 095301.
- [83] Bradley D.I., Clubb D.O., Fisher S.N., Guenault A.M., Haley R.P., Matthews C.J., Pickett G.R., Tsepelin V., Zaki K. Decay of pure quantum turbulence in superfluid ^4He // *Physical Review Letters*. – 2006. – V. 96, №. 3. – P. 035301.
- [84] Walmsley P.M., Golov A.I., Hall H.E., Levchenko A.A., Vinen W.F. Dissipation of quantum turbulence in the zero temperature limit // *Physical Review Letters*. – 2007. – V. 99, №. 26. – P. 265302.
- [85] Eltsov V., R. de Graaf, Hanninen R., Krusius M., Solntsev R., L'vov V., Golov A., Walmsley P. in *Progress in Low temperature physics: quantum turbulence* (Elsevier, 2009), vol. 16 of *Progress in Low Temperature Physics*, P. 45-146.
- [86] Schoepe W. Statistics of intermittent switching between potential flow and turbulence around an oscillating sphere in superfluid ^4He below 0.5 K // *Journal of Low Temperature Physics*. – 2010. – V. 161, №. 5. – P. 526-535.
- [87] Samuels D.C., Barenghi C.F. Vortex heating in superfluid helium at low temperatures // *Physical Review Letters*. – 1998. – V. 81, №. 20. – P. 4381.
- [88] Tsubota M., Araki T., Nemirovskii S.K. Decay of vortex tangle in superfluid ^4He at very low temperatures // *Physica B: Condensed Matter*. – 2000. – V. 284. – P. 79-80.
- [89] Araki T., Tsubota M. Cascade process of vortex tangle dynamics in superfluid ^4He without mutual friction // *Journal of Low Temperature Physics*. – 2000. – V. 121, №. 5-6. – P. 405-410.

- [90] Leadbeater M., Samuels D.C., Barenghi C.F., Adams C.S. Decay of superfluid turbulence via Kelvin-wave radiation // *Physical Review A*. – 2003. – V. 67, №. 1. – P. 015601.
- [91] Fujiyama S., Mitani A., Tsubota M., Bradley D.I., Fisher S.N., Guenault A.M., Haley R.P., Pickett G.R., Tsepelin V. Generation, evolution, and decay of pure quantum turbulence: A full Biot-Savart simulation // *Physical Review B*. – 2010. – V. 81, №. 18. – P. 180512.
- [92] Tayurskii D.A., Lysogorskiy Yu.V. Superfluid hydrodynamic in fractal dimension space // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2012. – V. 394, Issue. 1. – Art. 012004.
- [93] Лысогорский Ю.В., Таюрский Д.А. Моделирование жидкого гелия-4 в аэрогеле методом теории функционала плотности // *Письма в журнал экспериментальной и теоретической физики*. – 2013. – Т. 98, №. 3-4. – С. 236-241.
- [94] Doi M., Edwards S. *The Theory of Polymer Dynamics* // Oxford, Clarendon, 1986. – 406 p.
- [95] Monin A.S., Yaglom A.M. *Statistical Fluid Mechanics, Pt.2* // Cambridge, MIT Press, 1975. – 896 p.
- [96] Chu H.-C., Williams G. Nonequilibrium vortex dynamics in superfluid phase transitions and superfluid turbulence // *Quantized Vortex Dynamics and Superfluid Turbulence* / Ed. by C. Barenghi, R. Donnelly, W. Vinen. — Springer Berlin / Heidelberg, 2001. — V. 571 of *Lecture Notes in Physics*. — P. 226–232.
- [97] Kondaurova L., L'vov V., Pomyalov A., Procaccia I. Structure of a quantum vortex tangle in 4He counterflow turbulence // *Physical Review B*. – 2014. – V. 89, №. 1. – P. 014502.

- [98] Kolmogorov A.N. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1941. – V. 299, №. 30 – P. 9-13.
- [99] Kolmogorov A.N. Dissipation of energy in locally isotropic turbulence // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – V. 32, №. 19. – P. 19-21.
- [100] Landau L.D., Lifshitz E.M. Fluid Mechanics // New York, Pergamon, 1987. – 532 p.
- [101] Lesieur M. Turbulence in fluids. Fluid mechanics and its applications // Dordrecht, Springer, 1997. – 288 p.
- [102] Алексеенко С.В., Куйбин П.А., Шторк С.И., Скрипкин С.Г., Цой М.А. Явление вихревого перезамыкания в закрученном потоке // Письма в ЖЭТФ. – 2016. – Т. 103, №. 7-8. – С. 516-521.
- [103] Немировский С.К., Андрющенко В.А. Энергетический спектр поля скорости, индуцируемого фрактальной вихревой нитью в сверхтекучем гелии // Физика низких температур. – 2008. – Т. 34, №. 4/5. – С. 373-379.
- [104] Андрющенко В.А., Немировский С.К. Коллапсирующие вихревые нити и спектр квантовой турбулентности // Физика низких температур. – 2017. – Т. 43, №. 1. – С. 150-159.
- [105] Андрющенко В.А., Кондаурова Л.П. Энергетические спектры квантовой турбулентности при наличии противотока для различных температур // Физика низких температур. – 2017. – Т. 43, №. 2. – С. 245-252.
- [106] Андрющенко В.А. Энергия стохастической вихревой нити в сверхтекучем гелии // Всероссийская научная конференция студентов физиков – 12, Новосибирск, 23–29 марта 2006. – С. 382.
- [107] Андрющенко В.А. Энергия стохастической вихревой нити в сверхтекучем гелии // Международная научная студенческая конференция – 44, Новосибирск, 11–13 апреля 2006. – С. 24.

- [108] Андриющенко В.А., Немировский С.К. Роль коллапсирующих вихревых нитей в формировании спектра квантовой турбулентности // XXXIII Сибирский теплофизический семинар: тезисы докладов. Новосибирск, 6-8 июня 2017. – С. 25.
- [109] Андриющенко В.А., Кондаурова Л.П. Энергетические спектры квантовой турбулентности в противотоке нормальной и сверхтекучей компонент гелия // XXXIII Сибирский теплофизический семинар: тезисы докладов. Новосибирск, 6-8 июня 2017. – С. 25.