

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
образования

«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»



Люшнин Андрей Витальевич

Динамика ультратонкого слоя жидкости

Специальность: 01.02.05 – «Механика жидкости газа и плазмы»

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Пермь 2019

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	7
Глава 1. Анализ состояния проблемы	16
1.1. Свободная энергия межмолекулярного взаимодействия	16
1.2. Уравнение эволюции тонкого слоя	33
1.3. Испарение и эффект Марангони для тонкого слоя жидкости	37
1.4. Механизмы проводимости в тонком слое слабопроводящей полярной жидкости	51
1.5. Влияние сурфактантов на структурообразование поверхности тонкого слоя жидкости	61
Основные выводы по Главе 1.	72
Глава 2. Исследование процессов динамики и структурообразования тонкого слоя полярной жидкости	74
2.1. Постановка задачи	75
2.2. Методика и некоторые результаты численных вычислений	77
2.3. Исследование устойчивости движения фронта	83
2.4. Исследование длинноволновой неустойчивости	92
2.5. Двумерные компьютерные вычисления	103
2.6. Исследование влияния неоднородности твердой подложки на пальцеобразную неустойчивость тонкого слоя испаряющейся полярной жидкости	106
2.7. Сравнение теоретических данных с экспериментальными данными	110
Основные выводы по Главе 2.	129
Глава 3. Исследование влияния термокапиллярного эффекта на динамику движения тонкого слоя полярной жидкости	130
3.1. Постановка задачи	131
3.2. Граничные условия задачи	132
3.3. Длинноволновое приближение	139
3.4. Уравнение эволюции тонкой жидкой пленки	146

3.5. Решение задачи	151
3.5.1 Построение системы конечно-разностных уравнений.....	151
3.5.2 Построение прогоночной схемы.....	155
3.5.3 Алгоритм решения уравнения	159
3.6. Результаты моделирования задачи	161
3.7. Линейный анализ устойчивости.....	165
3.7.1. Возмущения, направленные поперек фронта жидкости	169
Основные выводы по Главе 3.	183
Глава 4. Исследование взаимодействия термокапиллярного и инжекционного механизмов неустойчивости слоя слабопроводящей жидкости со свободной деформируемой границей.....	
4.1. Постановка задачи	187
4.2. Граничные условия задачи	188
4.3. Исследование устойчивости системы	190
4.4. Анализ решения	193
Основные выводы по Главе 4.	200
Глава 5. Солютокапиллярный эффект в тонких пленках полярной жидкости с растворенным поверхностно-активным веществом	
5.1. Постановка задачи	203
5.2. Граничные условия задачи	205
5.3. Уравнения для концентрации.....	206
5.4. Длинноволновое приближение. Уравнения эволюции толщины пленки и концентрации сурфактанта	208
5.5. Решение задачи	213
5.5.1. Построение системы конечно-разностных уравнений.....	213
5.5.2. Построение прогоночной схемы.....	217
5.5.3. Алгоритм решения уравнения	218
5.6. Результаты моделирования.....	219
5.7. Анализ устойчивости системы	223
5.8. Постановка задачи	236
5.9. Граничные условия задачи	238

5.10. Длинноволновое приближение. Эволюционные уравнения.....	241
5.11. Исследование устойчивости	244
Основные выводы по Главе 5.	251
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	253
Список литературы	257

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

Греческие символы

α	химическая активность жидкости
α_{th}	коэффициент теплопереноса
β	коэффициент распределения ПАВ
Γ	поверхностная концентрация сурфактанта
ε	малый параметр
$\varepsilon_a, \varepsilon_l$	диэлектрическая проницаемость воздуха, жидкости
η	коэффициент динамической вязкости жидкости
ν	коэффициент кинематической вязкости жидкости
K	параметр испарения
ϑ	температурный коэффициент поверхностного натяжения
ϑ_c	концентрационный коэффициент поверхностного натяжения
μ	химический потенциал
ρ	плотность жидкости
σ	коэффициент поверхностного натяжения
ξ	Коэффициент проскальзывания жидкости
φ	расклинивающее давление
ϕ	электрический потенциал
Φ	энергия межмолекулярного взаимодействия
χ	коэффициент температуропроводности
ω	декремент затухания

Латинские символы

A	константа Гамакера
b_a, b_l	подвижность свободных зарядов в воздухе, жидкости
c	объемная концентрация сурфактанта
d_0	радиус межмолекулярного взаимодействия
D_b	коэффициент объемной диффузии сурфактанта
D_s	коэффициент поверхностной диффузии сурфактанта
G	свободная энергия Гиббса
E	вектор напряженности электрического поля
h	толщина слоя жидкости
H	кривизна свободной поверхности
J	плотность электрического тока
k	волновое число
k_1, k_2	коэффициенты адсорбции, десорбции

k_{th}	коэффициент теплопроводности
L	характерный горизонтальный размер
l_0	корреляционная длина
R	универсальная газовая постоянная
S^{LW}	ван-дер-ваальсовое слагаемое коэффициента растекания
S^P	дипольное слагаемое коэффициента растекания
T	температура
K	безразмерный коэффициент десорбции сурфактанта
U	скорость движения испаряющегося слоя жидкости
V	разность потенциалов
V_m	молярный объем

Основные безразмерные параметры

$\chi = 1/l_0 \cdot (6\pi S^{PN}/A)^{\frac{1}{3}}$	безразмерный коэффициент корреляционного расстояния
$\Omega = 18\pi\kappa\eta\sigma/\rho(6\pi A^2 S^{PN})^{\frac{1}{3}}$	безразмерный коэффициент испарения
$B = \alpha_{th} h / k_{th}$	безразмерное число Био
$Bo = g\rho h^2 / \sigma$	безразмерное число Бонда
$Ca = \varepsilon^3 \sigma / \mu U$	безразмерное капиллярное число
$K_{1,2} = k_{1,2} U / L$	безразмерный коэффициент адсорбции-десорбции
$M = gT / 2\sigma$	модифицированное безразмерное число Марангони
$Ma = gTh / \rho\nu\chi$	безразмерное число Марангони
$Ma_c = \vartheta_c c / \sigma$	концентрационное безразмерное число Марангони
$Pe_b = LU / D_b$	объемное безразмерное число Пекле
$Pe_s = LU / D_s$	поверхностное безразмерное число Пекле
$Pj = \nu / b_l V$	безразмерное число, описывающее подвижность заряда
$Pr = \nu / \chi$	безразмерное число Прандтля
$Ra = \varepsilon V / b_l \rho \nu$	безразмерное число Рэлея
$S = \rho \mu_{\text{vapor}} / S^{PN}$	безразмерное число, характеризующее потенциал пара
$W = RT / V_m S^{PN}$	безразмерное число, описывающее сурфактанта в жидкости

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность проблемы

На протяжении нескольких десятилетий, с развитием нанотехнологий, особый интерес представляет исследование поведения поверхности раздела двух сред, а также изучение межмолекулярных и поверхностных сил. Свободная энергия слоя жидкости складывается из суммы его объемной и поверхностных энергий. При уменьшении толщины слоя жидкости его объемная энергия уменьшается, а поверхностные межмолекулярные взаимодействия становятся основным фактором, который определяет движения слоя жидкости. Задача динамики движения и вопросы структурообразования поверхности тонкого слоя испаряющейся пленки жидкости на твердой горизонтальной подложке имеют большое практическое применение, а результаты используются во многих технологических процессах, как, например, при создании устойчивых наноструктур, в медицинской диагностике и при модификации структур ДНК. Макроскопические тонкие пленки, порядка 10–100 нанометров, играют важную роль в таких областях научного знания, как физика, биофизика, химия, а также находят свое применение в различных технологических приложениях. Все это позволяет говорить об актуальности выбранной тематики исследования и её практической значимости.

Цели и задачи исследования

Диссертация посвящена теоретическому исследованию динамики движения и структурообразования поверхности тонкой пленки полярной жидкости при воздействии различных поверхностных эффектов и внешних сил. Для достижения цели были поставлены следующие основные задачи:

1. Изучение поведения тонкого слоя полярной жидкости, расположенного на твердой подложке и имеющего свободную границу «жидкость – пар» при наличии испарения. Сравнение полученных теоретических и численных результатов с экспериментальными данными.
2. Проведение исследования эволюционного уравнения, описывающее

влияния эффекта Марангони на динамику движения свободной поверхности «жидкость – пар» тонкого слоя испаряющейся полярной жидкости.

3. Исследование устойчивости тонкого слоя полярной жидкости, при наличии термокапиллярного эффекта, относительно продольных и поперечных возмущений на межфазной границе «жидкость – пар». Определение диапазонов параметров, для которых имеет место пальцеобразная неустойчивость.
4. Рассмотрение задачи о взаимодействии термокапиллярного и инжекционного механизмов неустойчивости для двухслойной системы «жидкость – воздух», находящейся в электрическом поле.
5. Исследование системы эволюционных уравнений в рамках длинноволнового приближения для толщины слоя и объемной концентрации для испаряющегося тонкого слоя полярной жидкости при наличии растворимого сурфактанта. Изучение различных типов неустойчивости данной системы.
6. Анализ устойчивости тонкого слоя испаряющейся жидкости в присутствии сурфактанта на обеих межфазных границах. Изучение механизмов взаимодействия различных видов неустойчивости.

Научная новизна

В диссертации проведено теоретическое исследование динамики движения тонкого слоя полярной жидкости. Особенность полярной жидкости состоит в том, что энергия межмолекулярного взаимодействия слоя жидкости является немонотонной функцией от его толщины. Она складывается из суммы ван-дер-ваальсовский (дисперсионной) силы притяжения и электрических сил отталкивания. Силы электрического отталкивания двух одинаковых частиц изменяются по экспоненциальному закону, а дисперсионные силы – по степенному. Таким образом, на суммарной кривой энергии межмолекулярного взаимодействия, в некотором диапазоне, имеется потенциальный барьер.

В рамках длинноволнового приближения получено эволюционное уравнение, описывающее динамику изменения толщины слоя со временем. Впервые получены профили движения фронта испаряющейся жидкости. Определена линейная связь между безразмерным параметром испарения и скоростью распространения фронта жидкости. Проведено исследование устойчивости фронта относительно поперечных возмущений. Найдено, что при больших значениях безразмерного параметра испарения фронт движения испаряющейся жидкости устойчив к возмущениям, тогда как при малых значениях безразмерного параметра испарения имеет место область неустойчивости для малых значений волнового числа. В пределе длинноволновых возмущений получено уравнение для декремента возмущений во втором порядке малости. Впервые проведено численное исследование уравнения эволюции в трехмерном виде и для малых значений безразмерного числа испарения обнаружен «пальцеобразный» тип неустойчивости. В ходе сравнения численного эксперимента с экспериментальными данными обнаруживается качественное сходство результатов.

В длинноволновом приближении исследовано влияние зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры на устойчивость движения тонкого слоя испаряющейся полярной пленки при подогреве со стороны твердой подложки. Обнаружено, что термокапиллярный эффект приводит к изменению профиля движения фронта испаряющейся жидкости по сравнению с задачей, где эффект Марангони отсутствует. В диапазоне малых значений безразмерного параметра испарения, где имеет место неустойчивость относительно поперечных возмущений, эффект Марангони приводит к увеличению области неустойчивости. Также стоит отметить, что впервые было показано, что при увеличении безразмерного числа Марангони происходит повышение устойчивости системы относительно длинноволновой моды. При дальнейшем росте безразмерного числа испарения, когда движение фронта

жидкости устойчиво по отношению к любым модам возмущений, наличие эффекта Марангони влечет за собой уменьшение устойчивости.

Автором впервые была математически выведена система эволюционных уравнений относительно толщины слоя и сурфактанта для описания динамики поведения тонкого слоя полярной жидкости, расположенной на твердой подложке, в рамках длинноволнового приближения. На свободной границе раздела двух сред «жидкость – пар» в начальный момент времени располагается растворимый сурфактант. Задается величина и характер растворения сурфактанта с межфазной границы «жидкость – пар» в объем жидкости. Исследована устойчивость движения фронта испаряющегося тонкого слоя полярной жидкости при наличии сурфактанта на свободной поверхности для особенного, «замороженного» стационарного состояния. Для такого состояния обнаружены две независимые моды возмущения, одна из которых определяет поведение концентрационных возмущений, а вторая показывает эволюцию возмущений в процессе движения жидкости при испарении. Найдены диапазоны параметров, при которых первоначально устойчивое состояние тонкого слоя жидкости переходит в неустойчивое. Обнаружено, что голдстоуновская мода неустойчивости относительно испарения всегда устойчива по отношению к возмущениям. Численные расчеты качественно подтверждают результаты линейной теории. Новизна полученного результата заключается в том, что тип структурообразования на поверхности испаряющейся пленки при наличии сурфактанта имеет существенные отличия от испаряющейся пленки в отсутствие сурфактанта.

Исследована устойчивость движения фронта испаряющегося ультратонкого слоя полярной жидкости при наличии сурфактанта на обеих межфазных поверхностях. Для стационарного состояния обнаружены три независимые моды возмущения. Две из мод определяют поведение концентрационных возмущений на границах раздела, а третья показывает эволюцию возмущений в процессе движения жидкости при испарении. Для рассматриваемой нами «сэндвич»-

структуры обнаружен колебательный режим, что также имеет место и в эксперименте. Найдены качественные совпадения результатов теоретического исследования с полученными в эксперименте данными.

В рамках линейной теории устойчивости изучается двухслойная система «жидкий полярный диэлектрик – воздух», заключенная между обкладками плоского конденсатора. Инжекция заряда происходит в жидкость через свободную деформируемую поверхность неизотермической жидкости, коэффициент поверхностного натяжения которой линейно зависит от температуры. Было найдено, что взаимодействие инжекционного и капиллярного механизмов приводит к дестабилизации относительно монотонных возмущений при подогреве со стороны твердой границы. При подогреве со стороны свободной поверхности наблюдается повышение устойчивости системы. Для инжекционного механизма электроконвективной неустойчивости найдены две нижние моды. Обнаружены параметры системы, при которых имеется колебательная мода неустойчивости, найдена зависимость частоты колебаний от волнового числа.

Личный вклад автора и роль соавторов

Личное участие автора в результатах, изложенных в диссертации, заключается в постановке задачи, создании математических моделей, создании программных средств для решения задач, проведении вычислений, анализе результатов. В работе [102] автору принадлежат постановка задачи, численный расчет и анализ полученного решения. В работе [103] автору принадлежат вывод системы ЭГД-уравнений в данной постановке, вычисления и анализ полученных результатов. В работе [234] автору принадлежат вывод эволюционного уравнения в безразмерном виде, все расчеты, вывод уравнения для поперечных возмущений относительно движения фронта тонкого слоя полярной жидкости. Вывод уравнения и анализ эволюции для второй поправки малости для декремента поперечных возмущений. Также автору принадлежат все трехмерные вычисления. В серии работ [231–233] вклад автора состоит в

численном моделировании и анализе полученных результатов, а также в их сравнении с экспериментальными данными. Вкладом автора в работы [170–175] является постановка задачи, анализ полученных результатов, а также трехмерные вычисления. Наконец, в работе [45] автору принадлежат постановка задачи и анализ полученных результатов.

Автор благодарен своим учителям Г. З. Гершуни, Р. В. Бириху, Л. М. Писмену, а также В. М. Мызникову, В. И. Чернатынскому, В. А. Брискману, В. И. Якушину, В. Г. Козлову, Ю. К. Братухину, Д. А. Брацуну за многочисленные полезные обсуждения. Автор также благодарен коллегам и соавторам А. А. Головину, И. Лейзерсону, С. Д. Липсону, В. Ю. Гордеевой, в тесном сотрудничестве с которыми были получены результаты данной работы.

Практическая ценность работы

Полученные результаты могут быть использованы в области нанотехнологий, биохимических структур и полимерных пленок. Следует отметить, что часть задач, представленных в диссертации, была предложена создателями физических и химических экспериментов по исследованию структурообразования на поверхности водяной тонкой пленки. На основе численных и экспериментальных результатов группой соавторов была разработана методика измерения толщины и профиля испарения тонких водяных пленок и получен патент (I.Leizerson, S.G. Lipson Determination of thin film topography US10829880).

Исследования, представленные в диссертационной работе, выполнялись при поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований (97-01-00707, 99-02-26848-з, 04-01-96043-р2004урал_а, 07-01-97612-р_офи, 10-01-96036-р_урал_а, 14-01-96021, 1997–2014 гг.), грантов Министерства образования и науки РФ (1.3103.2011, 2011–2013 гг.), Министерства образования Пермского края (С-26/244, 2012–2014 гг., и С-26/004.4, 2014–2017 гг.), а также Израильского научного фонда (ТН18-00, 2000–2002 гг.), израильского фонда «Минерва»

(нелинейные системы) (MF-VK-23, 2001–2003 гг.) и Фонда Техниона для перспективных исследований (TF-03-16, 2002–2004 гг.).

Методология и методы диссертационного исследования

При решении поставленных задач были использованы различные методики из теории возмущений. В главах 2, 3, 5, 6 был использован метод длинноволновых возмущений, а в главе 4 применялся метод линейной теории устойчивости относительно равновесного состояния. Кроме этого, при получении значения второго члена в разложении для декремента возмущений в главе 2 была использована теория Фредгольма для дифференциальных уравнений, являющаяся разделом теории дифференциальных уравнений. При численном моделировании были использованы метод конечных разностей и численные алгоритмы для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Достоверность результатов работы

Достоверность результатов исследования по второй главе подтверждается достаточно хорошим соответствием результатов численного моделирования с экспериментальными данными. Полученные аналитические зависимости из третьей главы находятся в качественном соответствии с результатами работ других авторов. Результаты численного эксперимента, проведенный в пятой главе диссертации, согласуются с данными, которые экспериментально были получены группой Вернера. Колебательная мода и механизм её неустойчивости, описанный в главе шесть, позволяет объяснить появление пальцеобразных форм в эксперименте.

Основные результаты, выносимые на защиту

1. Результаты расчетов по профилю фронта движения испаряющейся тонкой пленки при различных значениях безразмерного параметра испарения.
2. Проведение анализа устойчивости уравнения эволюции для возмущений, направленных перпендикулярно по отношению движения фронта пленки полярной жидкости.
3. Результаты расчетов трехмерной задачи по изучению проведения

движения тонкой пленки испаряющейся полярной жидкости.

4. Вывод уравнения в длинноволновом приближении для определения значения декремента затухания поперечных возмущений во втором порядке малости.
5. Вывод уравнения эволюции для возмущений, направленных как продольно, так и перпендикулярно по отношению движения фронта пленки полярной жидкости при наличии эффекта Марангони на свободной межфазной границе «жидкость – пар» и анализ результатов дисперсионных соотношений для продольных и поперечных возмущений относительно движения испаряющегося слоя тонкой полярной пленки в присутствии термокапиллярного эффекта.
6. Результаты задачи конвективной неустойчивости слабопроводящей полярной неизотермической жидкости при инъекции свободного заряда в жидкость через межфазную границу «жидкость – воздух» и наличии на этой границе термокапиллярного эффекта.
7. Вывод эволюционного уравнения толщины слоя испаряющейся жидкости при наличии на поверхности растворимого сурфактанта. Обсуждается различие процессов структурообразования на свободной поверхности при наличии и отсутствии сурфактанта.
8. Найденные различные по своему характеру эволюции моды неустойчивости для «замороженного» состояния испаряющейся пленки при наличии на свободной поверхности растворимого сурфактанта.
9. Результаты расчетов по профилю фронта движения испаряющейся тонкой пленки при различных значениях безразмерного параметра концентрационного числа Марангони.
10. Результаты задачи устойчивости тонкой испаряющейся пленки при наличии на обеих границах сурфактанта.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на Международной зимней школе по механике сплошных сред (Пермь, 1998–2012), III Международной конференции «Современные проблемы электрогидродинамики и электрофизики жидких диэлектриков», (С.-Петербург, 1994), International workshop «Non-gravitational mechanism of convection and heat/mass transfer» (Zvenigorod, 1994), XII International Conference on Conduction and Breakdown in Dielectric Liquid (Roma, 1996), XIII International Conference of Dielectric Liquid, Japan, Nara, 1999, 3-й Всероссийской научно-практической конференции ИММОД-2007 (С. -Петербург, 2007), 6th Conference of the International Marangoni Assosiation (Haifa, 2012), International Conference «Fluxes and structures in fluids», (S.-Peterburg, 2013), 8th International Topical Team Workshop on Two-Phase Systems for Ground and Space Applications (Bremen, 2013), XXII Международной конференции «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность» («Не-За-Те-Ги-Ус») (Звенигород, 2016), 8th Conference of the International Marangoni Assosiation (Bonn, 2016), 8th International Conference on Technological Advances on Thin Filma and Coating Technologies (Singapour, 2016), 6-й Всероссийской конференции с международным участием «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения» (Барнаул, 2017). Кроме этого, результаты работ по теме диссертации докладывались и обсуждались на Пермском гидродинамическом семинаре им. Г. З. Гершуни и Е. М. Жуховицкого.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, обзора литературы, четырех глав с изложением результатов, заключения и списка цитированной литературы, включающего 374 наименования. Общий объем работы – 296 страниц, включая 70 рисунков.

Глава 1. Анализ состояния проблемы

1.1. Свободная энергия межмолекулярного взаимодействия

Характер движения жидкостной пленки определяется как физико-химическими свойствами самой жидкости, так и свойствами граничащих с ней твердой и газовой сред. Считается, что тонкий слой жидкости представляет собой систему, состоящую из трех слоев. Средний слой такой системы представляет собой объемную фазу жидкости. Этот слой соприкасается с двумя межфазными переходными слоями «жидкость – газ» и «жидкость – твердое тело». В случае изотропных жидкостей межфазный слой «жидкость – твердое тело» может составлять несколько молекулярных слоев жидкости, толщина межфазного слоя «жидкость – пар» может варьироваться в диапазоне десятков-сотен ангстрем. В этих слоях имеется специфическое поле молекулярных и электрических сил, затухающее при углублении в каждую из смежных фаз. Свойства жидкости в этих межфазных слоях могут существенно отличаться от свойств объемной жидкой фазы. В большинстве случаев в тонком слое жидкости имеются все три описанных выше слоя и процессы, проходящие в межфазных слоях, не оказывают сильного влияния на поведение объемной фазы. В процессе испарения происходит уменьшение толщины объемной фазы слоя, тогда как толщины межфазных слоев остаются практически неизменными. В дальнейшем при уменьшении толщины слоя жидкости до толщины порядка сотни ангстрем слой объемной фазы исчезает и происходит перекрытие межфазных переходных слоев. В этом случае термодинамические характеристики системы, такие как свободная энергия, не могут быть вычислены как простое суммирование энергий различных фаз. В жидких пленках с такой толщиной имеют место специфические эффекты, такие как капиллярный осмос, термоосмос, диффузиофорез и другие.

Свободная энергия Гиббса слоя жидкости складывается из суммы его объемной и поверхностных энергий $G = G_v + G_\sigma$. При последовательном

уменьшении толщины слоя объемная энергия уменьшается, и для малых значений толщин, порядка $10\text{--}1000\text{\AA}$, энергия поверхностей может существенно влиять на динамику движения тонкого слоя жидкости. Рассмотрим слой жидкости, который располагается на твердой подложке, свободная поверхность является границей раздела «жидкость – пар». Пусть тонкий слой жидкости имеет длину L_0 и высоту $h(x)$, объем слоя можно получить по формуле $\int_0^{L_0} h(x) dx$.

Равновесная форма пленки может быть найдена путем минимизации свободной энергии:

$$G_\sigma = (\sigma_{SL} + \sigma_{LV} - \sigma_{SV})L_0 + \int_0^{L_0} \frac{\sigma_{LV}}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 dx \quad (1.1)$$

где σ_{ij} есть поверхностные энергии единичных поверхностей между различными фазами i и j (S, L, V есть обозначение подложки, жидкости и вакуума соответственно). Интегральное слагаемое является результатом искривления поверхности, что приводит к увеличению площади, считаем также, что $|\partial h / \partial x|$ мало.

Если толщину слоя плавно уменьшать, то при некоторой конечной толщине возникает дополнительная энергия $\Phi(h)$, которая является дополнением к подинтегральному слагаемому. Дополнительная энергия представляет собой взаимодействие единиц площадей поверхностей «твердое тело – жидкость» и «жидкость – вакуум» при некоторой фиксированной толщине. Очевидно, что при $h \rightarrow \infty$ энергия взаимодействия $\Phi(h) \rightarrow 0$. В случае положительного и монотонного значения $\Phi(h)$ слой жидкости имеет тенденцию к увеличению толщины, и мы имеем классическую ситуацию смачивания [147, 150]. Поэтому обобщенная формула для свободной энергии Гиббса будет выглядеть следующим образом:

$$G_\sigma = (\sigma_{SL} + \sigma_{LV} - \sigma_{SV})L_0 + \int_0^{L_0} \left[\frac{\sigma_{LV}}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \Phi(h) \right] dx \quad (1.2)$$

в итоге поверхностная энергия на единицу площади для границы раздела «жидкость – твердое тело» принимает значение:

$$g_{\sigma}(h) = \sigma_{SL} + \sigma_{LV} - \sigma_{SV} + \frac{\sigma_{LV}}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \Phi(h) \quad (1.3)$$

Для описания изменения свободной энергии Гиббса удобно воспользоваться понятием «химический потенциал». Для плоского слоя жидкости химический потенциал имеет значение:

$$\mu = \frac{1}{L_0} \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{p,T} \quad (1.4)$$

здесь n обозначено количество частиц в единице поверхности. Следовательно, для одной молекулы химический потенциал может быть представлен в виде $\mu = (1/\rho) d\Phi/dh$. Здесь ρ обозначает плотность (число частиц в единице объема). В случае искривленного слоя химический потенциал слоя может быть записан в следующем виде:

$$\mu = \frac{1}{\rho} \left(\frac{d\Phi}{dh} - \sigma_{LV} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) \quad (1.5)$$

Изучение эффектов, которые происходят в тонких слоях жидкости, началось с работы [14], где впервые было введено понятие «расклинивающее давление». В этой работе дается определение расклинивающего давления: «Расклинивающее давление есть разность между давлением на обе поверхности тонкого слоя (оно может быть и отрицательным, т. е. сводиться к притяжению) и давлением в объемной фазе, частью которой он является и с которой находится в состоянии термодинамического равновесия». Механизм возникновения такого эффекта обусловлен разностью свойств жидкости в межфазных переходных слоях. Ван-дер-Ваальс в своих работах сформулировал понятие внутреннего давления среды, обусловленного межмолекулярным взаимодействием. В объемной фазе это давление определяется взаимодействием только молекул жидкости. В межфазных слоях на это взаимодействие накладывается воздействие молекул

контактирующих с жидкостью фаз. Это приводит к появлению разности давлений в тонком слое жидкой пленки [15, 16, 54].

В теории Лифшица-Ван-дер-Ваальса [17, 18, 44, 55] было показано, что дополнительная свободная энергия межмолекулярного взаимодействия двух единичных поверхностей «твердое тело – жидкость» и «жидкость – вакуум» может быть представлена в виде:

$$\Phi(h) = -A/12\pi h^2 \quad (1.6)$$

где $A = \pi^2 \rho_1 \rho_2 C$ определяется как константа Гамакера, C – это постоянная, которая характеризует силу взаимодействия между двумя различными молекулами, которые находятся на двух различных поверхностях, а ρ_1 и ρ_2 есть плотности соответствующих поверхностей. Большинство значений константы Гамакера заключено в диапазоне $10^{-19} - 10^{-20}$ джоулей [52] и она может быть определена из значений диэлектрических постоянных соответствующих сред. Ван-дер-ваальсовое взаимодействие считается дальнодействующим и может быть значительным на расстояниях порядка 100 нм. В случае $A > 0$ учет межмолекулярного взаимодействия границ разделов двух сред приводит к уменьшению расстояния между поверхностями, и наоборот.

Молекулы жидкости обычно не заряжены, но некоторые из них представляют собой электрические диполи. Например, в молекуле воды атом кислорода стягивает на себя электронную плотность, и поэтому вода является постоянным диполем. Такие молекулы называют полярными. Дипольный момент полярной молекулы равен произведению заряда на расстояние между зарядами. Постоянными дипольными моментами обладают только несимметричные молекулы. В таких молекулах наличие дипольного момента объясняется ассиметричным смещением электронной плотности вдоль ковалентных связей. Дипольный момент молекулы воды составляет 1.85 дебая. К дипольным молекулам относят молекулы воды, бензола, молекулы гексановой и бензольной групп. Неполярными молекулами являются алканы, бензол, углеводороды. В работе [36] экспериментально исследовалось влияние квазиоднородного

электрического поля на скорость испарения полярной жидкости (воды) и неполярной (углеводорода, додекан $C_{12}H_{26}$), было обнаружено, что:

1. полярная жидкость испаряется гораздо быстрее, чем неполярная;
2. скорость испарения тонкого слоя жидкости снижается под действием вертикального электрического поля, причем у полярной жидкости это снижение на порядок заметнее, чем у неполярной;
3. снижение скорости испарения у полярной жидкости заметнее при $\vec{E}$, направленном сверху вниз (как атмосферное), чем снизу вверх. У неполярной жидкости направление электрического поля не влияет на скорость испарения.

В данной работе считается, что причину этих явлений следует искать в приграничном слое, где образуется двойной электрический слой [42, 43]. Учет энергии двойного электрического слоя полярной жидкости в общей свободной энергии Гиббса показан на Рис. 1.1.

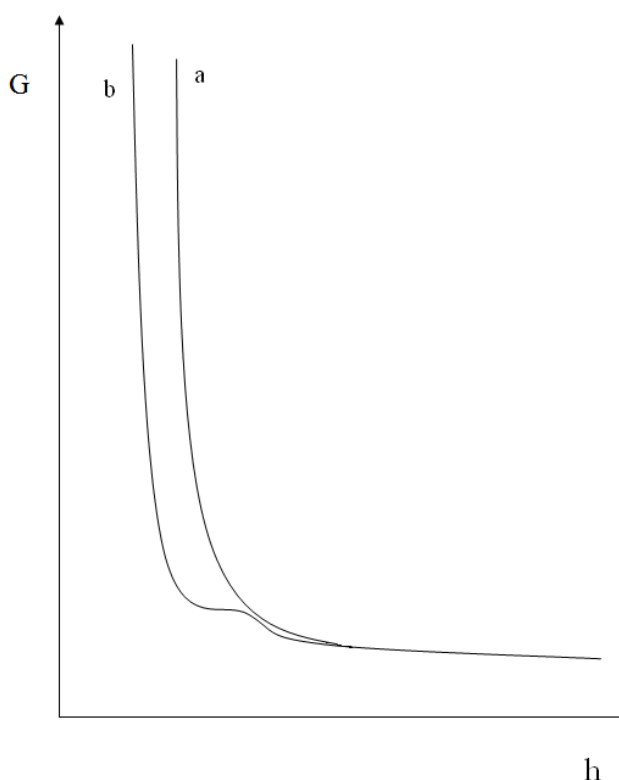


Рис.1.1 – Свободная поверхностная энергия Гиббса как функция толщины слоя для неполярной (кривая а) и полярной жидкостей (кривая b). Константа Гамакера имеет отрицательное значение.

В полярных жидкостях молекулы вблизи свободной поверхности испытывают некое ориентирующее влияние поверхности: для молекулы энергетически выгодна такая пространственная ориентация, когда один из ее полюсов (допустим, отрицательный) направлен наружу из объема. Тепловое движение молекул жидкости может несколько нарушать ориентацию в расположении молекул, но общая тенденция к упорядочению сохраняется. Это приводит к тому, что вблизи свободной поверхности на расстоянии нескольких молекулярных слоев положительные заряды диполей молекул, которые ориентированы вглубь жидкости, притягивают к поверхности отрицательные ионы, существующие в жидкости благодаря диссоциации молекул или наличию примесей. В итоге в объеме жидкости вблизи ее поверхности, в слое толщиной порядка нескольких нанометров, формируется объемный отрицательный электрический заряд. Все отмеченные эффекты, приводящие к возникновению двойного электрического слоя, вызывают изменение поверхностной энергии, что ведет к изменению коэффициента поверхностного натяжения [74]. Результаты, приведенные в работе [8], описывают явление релаксации поверхностного натяжения: если после формирования двойного электрического слоя воздействовать на поверхность некой внешней силой, то поверхностная энергия, а с ней и величина коэффициента поверхностного натяжения, достигнут своих максимумов. Затем, за некоторое характерное время, поверхностная энергия, а следовательно, и величина коэффициента поверхностного натяжения будут стремиться к равновесному значению по мере того, как будет восстанавливаться двойной электрический слой.

Этот феномен называется эффектом динамического поверхностного натяжения. Для разных жидкостей характерное время релаксации различно и, как правило, лежит в пределах от десятых долей до единиц миллисекунд. Однако, согласно экспериментальным данным [105], для растворов поверхностно-активных веществ с малоподвижными молекулами, которые медленно выходят из объема на поверхность, характерное время восстановления

двойного электрического слоя может измеряться часами. Это обстоятельство существенно расширяет список физических явлений, в которых может проявляться эффект динамического поверхностного натяжения. Также для тонких слоев жидкости, находящихся под воздействием электрического поля, большое значение имеет эффект инъекции свободного заряда в объем жидкости. Исследование влияния внешнего электрического поля на движение и устойчивость слоя жидкости проведено в работах [4, 102, 235, 242, 260].

В настоящее время существует довольно большое количество книг, обзоров и публикаций [42, 71–73, 106, 130, 135, 196, 265, 314, 330, 349, 369–371], в которых изучаются в том числе процесс испарения тонкого слоя жидкости и образование структур на свободной поверхности жидкой пленки. В экспериментальных работах [123, 222] было показано, что в результате испарения тонкого слоя неполярной жидкости толщина монотонно уменьшается до ее полного испарения. Энергия межмолекулярного взаимодействия является монотонно убывающей функцией [199], что хорошо согласуется с результатами эксперимента.

Особенностью испарения полярной жидкости (например, воды) является тот факт, что при некоторой критической толщине происходит спонтанное разделение слоя на две характерные толщины («толстый» и «тонкий») с образованием контактной линии между ними [287]. Толщина «толстого» слоя, согласно [328] может варьироваться в пределах 20–80 нанометров, а толщина «тонкого» слоя изменяется в диапазоне нескольких нанометров. При дальнейшем испарении такой специфической двухуровневой пленки область «толстого» слоя уменьшается, и в финальной стадии остается только одно «тонкое» значение толщины слоя жидкости.

В работе [310] приводится следующее теоретическое объяснение данного эффекта. В отличие от неполярных жидкостей, где энергия межмолекулярного взаимодействия имеет монотонный вид и убывает пропорционально квадрату расстояния, для описания поведения испарения тонких полярных пленок

жидкости вводится помимо дальнедействующего (в данном случае) взаимодействия Ван-дер-Ваальса еще и короткодействующее взаимодействие двойных электрических слоёв, образующихся на границе «жидкость-пар» и «жидкость-подложка»:

$$\Phi(h) = \frac{S^{LW} d_0^2}{h^2} + S^P \exp\left[\frac{d_0 - h}{l_0}\right] \quad (1.7)$$

Здесь $S^{LW} d_0^2 = -A/12\pi$, d_0 обозначается характерное расстояние борновской энергии отталкивания (порядка 0.2 нм для воды) и l_0 является характерной длиной взаимодействия между молекулами (около 0.6 нм для воды). Значение параметра S^P определяется как дипольная компонента коэффициента растекания $S = S^{LW} + S^P$ [310]. Электростатическое взаимодействие возникает в связи с перекрытием энергии межмолекулярного взаимодействия для двойного электрического слоя обеих границ.

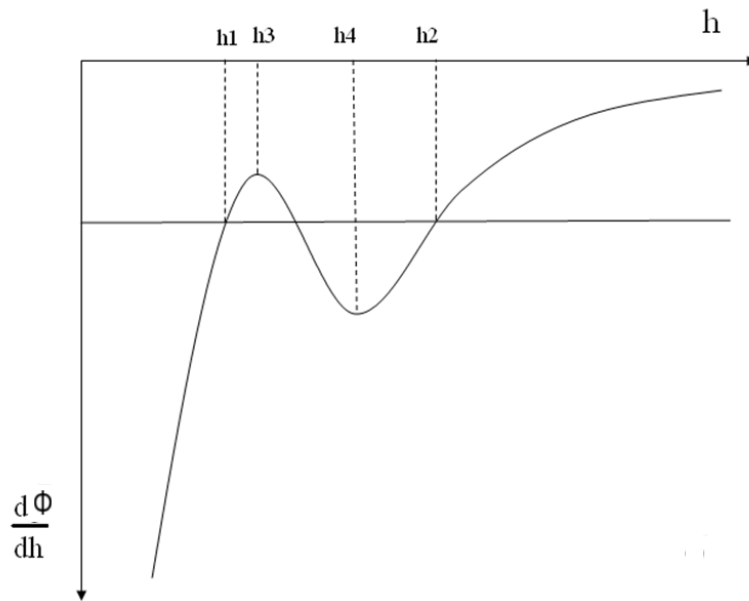


Рис.1.2 График зависимости значения $d\Phi/dh$ от толщины слоя.

Из представленной формулы видно, что свободная энергия поверхности полярной жидкости является немонотонной функцией. На Рис. 1.2 представлены графики зависимости функции $d\Phi/dh$ от толщины слоя. Для некоторого фиксированного значения химического потенциала $\rho^{-1} d\Phi(h)/dh$ имеют место два устойчивых состояния слоя, которые на рисунке соответствуют значениям

h_2 и h_1 . При значении $h > h_2$ и $h < h_1$ имеется устойчивое состояние слоя жидкости. Когда $h_4 > h > h_2$ или $h_1 > h > h_3$, слой жидкости находится в метастабильном состоянии и может распасться на двухфазную систему с толщинами h_2 и h_1 . И наконец, когда $h_3 > h > h_4$, имеет место неустойчивость слоя жидкости, которая проявляется в виде спинодального распада [60, 69, 124, 257]. Это особый случай начальной стадии фазового превращения, когда систему предварительно удастся перевести в неустойчивое состояние. В этом случае поведение определяется термодинамическими флуктуациями параметров системы. Для такого состояния необходимо, чтобы $\Phi_{hh} < 0$. Главным отличием спинодального распада от распада в метастабильных фазах является то, что спинодальный распад происходит равномерно по всему объекту и проявляется в образовании мелкомасштабных периодических структур на свободной поверхности слоя.

Для тонкого слоя спинодальный распад может проявляться в виде очагов уменьшения толщины слоя на свободной поверхности пленки из-за наличия так называемых дефектов. Которые, в свою очередь, могут быть вызваны наличием неоднородности подложки, существованием загрязнения на свободной поверхности жидкости или химической неоднородностью сурфактанта. Эти флуктуации порождают градиенты химического потенциала или поверхностного натяжения, которые в работах [328, 248] именуются «гетерогенным механизмом зарождения неустойчивости». Если значение толщины слоя таково, что значение Φ_{hh} близко к смене знака, то в этом случае механизм неустойчивости, связанный со смачиванием, называется «гомогенным механизмом зарождения неустойчивости» [104]. Различие механизмов показано на Рис. 1.3.

В этом случае оба («толстый» и «тонкий») смачивающих слоя имеют неустойчивость в диапазоне длинных волн [96], причем для «толстого» слоя «однородное зарождение» неустойчивости наступает быстрее. Плодотворная дискуссия о стабильных, метастабильных и неустойчивых состояниях для такой системы имеется в работе [330].

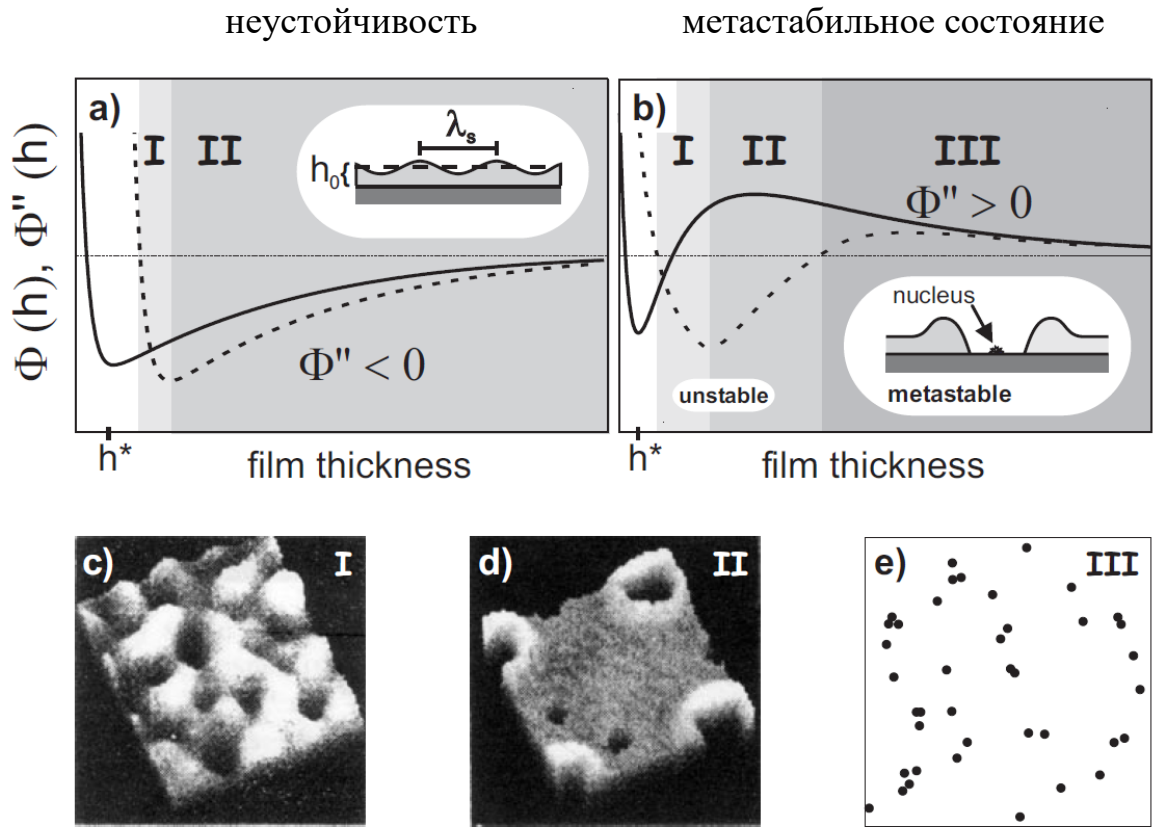


Рис.1.3 График зависимости Φ (сплошная линия) и Φ'' (пунктирная линия) от толщины слоя для неустойчивого (a) и метастабильного (b) состояний. На рисунках (c) и (d) представлены результаты вычислительного эксперимента работы [311]. Все расчеты приведены для случайного распределения для 40 «дырок» (e).

В работах [203, 310] вводится обозначение $\varphi = d\Phi/dh$ имеющее размерность давления, которую в дальнейшем будем именовать как «дополнительное» давление (по аналогии с расклинивающим давлением $\Pi = -\varphi$) и для полярных жидкостей значение φ имеет вид:

$$\varphi = \frac{A}{6\pi h^3} - S_0^P \cdot \exp\left[-\frac{h}{l_0}\right], \text{ где } S_0^P = S^P \cdot \exp\left[\frac{d_0}{l_0}\right] \quad (1.8)$$

В случае, когда присутствует только ван-дер-ваальсовое взаимодействие (дальнодействующее), так что $S_0^P = 0$, плоская свободная граница «жидкость – пар» устойчива при $A < 0$ и неустойчива для положительного значения константы Гамакера.

Полярные силы можно считать незначительными при условии, что в слое жидкости по крайней мере одна из сред является неполярной. В этом случае выражение для величины φ приведено в работах [249, 250, 264, 306]

$$\varphi = \frac{A}{6\pi h_{\min}^n} \left[\left(\frac{h_{\min}}{h} \right)^n - \left(\frac{h_{\min}}{h} \right)^m \right] \quad (1.9)$$

где $m > n > 1$ и второе слагаемое описывает борновское отталкивание.

Отметим, что $\varphi(h_{\min}) = 0$ и типичное значение $h_{\min} \approx 2 \text{ \AA}$. При $(n, m) = (3, 9)$ φ соответствует потенциалу Леннарда-Джонса. В работе [251] были объединены в одно слагаемое короткодействующие слагаемые (борновое и электростатическое отталкивание) и было показано, что включение сил отталкивания необходимо для математического описания процесса образования провалов в слое жидкости и образования «тонкого» слоя жидкости. Также в этой работе было найдено, что такая формула может быть использована для моделирования поведения слоя жидкости с участием контактной линии.

Другой способ выведения уравнения для расклинивающего давления был предложен в работе [276]. Подход этих авторов основывался на системе уравнений для гидродинамики неравновесных систем [85], где плотность рассматривалась как дополнительная динамическая фаза некой переменной. Объектом исследования являлись контактные линии «жидкость – вакуум» и «жидкость – твердое тело». Формула расклинивающего давления была получена из формы границы раздела двух сред. Работа [106] является развитием метода, предложенного выше. Большое количество экспериментов по смачивающим жидкостям в качестве основы используют полистирол. Это обусловлено слабой зависимостью его физических параметров от температуры, также он химически инертный. Тонкие слои полистирола, растворенного в подходящем растворителе (например, толуоле), размещаются на твердую подложку (например, кремниевые пластины или листы слюды). В процессе выпаривания растворителя на подложке образуются слои полистирола, толщина которого варьируется от нескольких нанометров до нескольких микрометров. Для изучения и измерения толщины

пленки и ее рельефа используется электронный микроскоп [308]. При нагревании начинается процесс структурообразования свободной поверхности, он начинается с разрыва пленки и формирования «дыр» на поверхности, за которым следуют расширение «дыр» с образованием сухих зон. В дальнейшем происходит процедура распада ограниченных поверхностей в капли (Рис. 1.4).

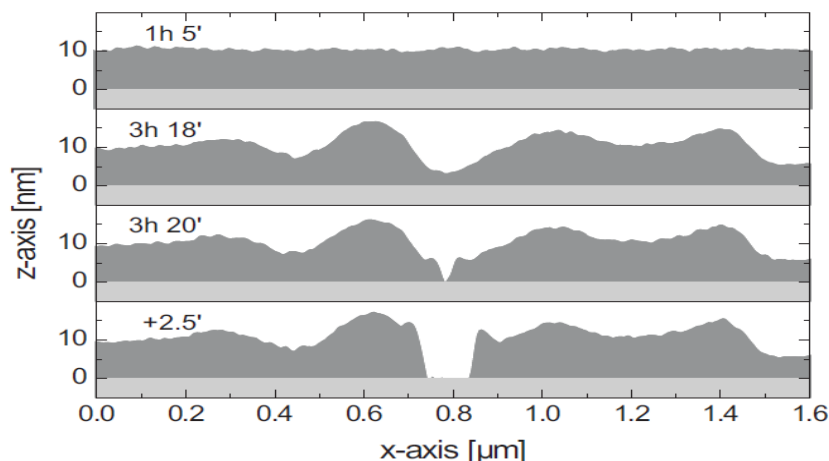


Рис.1.4 Эволюция профиля слоя полистирола на силиконовой подложке [309], показывающая метастабильный механизм зарождения неустойчивости.

Различие между начальным процессом зарождения неустойчивости поверхности и спинодальным распадом делается путем измерения среднего значения радиуса образовавшейся «дырки». Однако проводить такие измерения довольно сложно, особенно для толстых пленок, так как у них скорость спинодального распада довольно низка, кроме этого, в экспериментах неизменно присутствие химических неоднородностей, которые создают локальные неоднородности для свободной энергии межмолекулярного взаимодействия [187, 200, 221]. В экспериментальной работе [96] для теоретического согласования результатов образования неоднородностей применяется функционал Минковского. С помощью него удастся получить переменную, характеризующую центр зарождения неоднородности («дырки»), и определить их статистику распределения.

Основной идеей использования данного функционала является попытка нахождения корреляции между расположением центров образования

неустойчивости [201]. Функционалы Минковского дают стабильные результаты с небольшой статистической погрешностью даже для малых выборок, которые имеют особое значение для анализа экспериментальных данных. Наличие таких пространственных корреляций является признаком спинодального распада, а их отсутствие часто показывает пространственно неоднородный тип зарождения неустойчивости [200, 286]. В работе [348] показано, что такую корреляцию можно описать с помощью спинодальной длины волны λ_s . Таким образом, функционалы Минковского могут быть использованы для определения типа механизма неустойчивости в начальной фазе для свободной поверхности тонкого слоя.

Опыты [306, 308] с тонким слоем полистирола на кремниевой подложке были проведены с целью физического изучения различия между спинодальным способом образования неустойчивости на свободной поверхности, гомогенным и гетерогенным механизмами. Для того чтобы была возможность поменять знак для энергии межмолекулярного взаимодействия Φ , толщина подложки изменялась в диапазоне от 2 до 200 нанометров. Увеличение толщины подложки приводит к отрицательному значению в ван-дер-ваальсовом (длинноволновом) слагаемом. На Рисунке 1.5 приведены снимки (с использованием атомного микроскопа) различных поверхностных структур полистирола при различной толщине самого слоя и силиконовой подложки. На данном рисунке приведены три разных механизма образования неустойчивости, также в работе обсуждаются механизмы приведения данной системы в различные варианты неустойчивости. Различие в видах неустойчивости объясняется соотношением толщины слоя к толщине подложки и их межмолекулярным взаимодействием.

В работе [297] была найдена зависимость спинодальной длины волны λ_s от Φ_{hh} :

$$\lambda_s = \left(-8\pi^2 \alpha / \Phi_{hh} \right)^{1/2} \quad (1.10)$$

Эта формула иллюстрирует, что $\lambda_s > 0$ только тогда, когда $\Phi_{hh} < 0$ и в пределе $\lambda_s \rightarrow \infty$ при $\Phi_{hh} \rightarrow 0$. Зная контактный угол смачивания α и измеряя в

эксперименте λ_s для различных значений толщин слоя h , мы можем определить Φ_{hh} , который, в свою очередь, позволяет найти $\Phi(h)$.

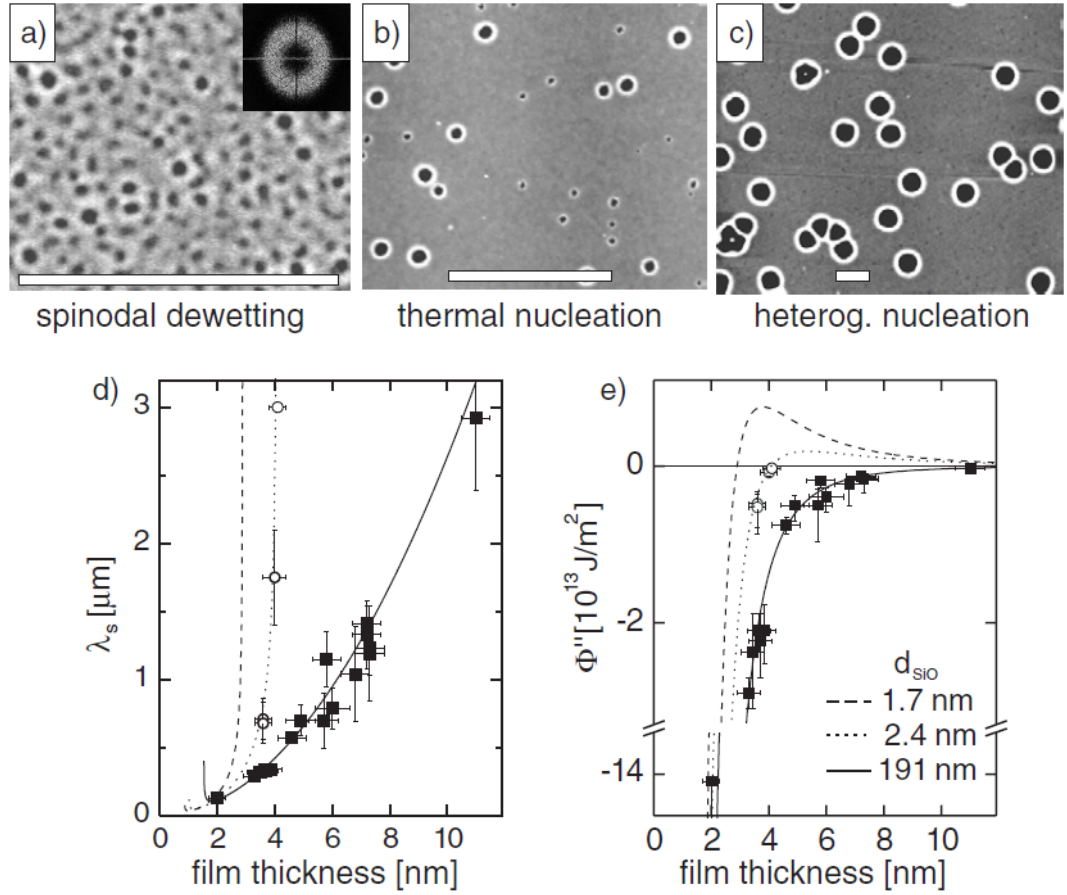


Рис.1.5 Снимки поверхностных структур полистирола [306] первоначально плоской поверхности толщиной h , расположенной на силиконовой подложке толщиной d . На рисунках (а), (в) и (с) приведены отношения $(h,d) = (3.9,191)$, $(4.1,2.4)$ и $(6.6,1.7)$, которые показывают спинодальный, гомогенный и гетерогенный процессы образования неустойчивости соответственно. Для каждого рисунка белая полоса показывает характерное расстояние в 5μ , толщина слоя изменяется в диапазоне от 0 (черный цвет) до 20 нанометров (белый цвет). На (d) показана зависимость спинодального волнового числа λ_s как функция толщины слоя. График зависимости второй производной от эффективного поверхностного потенциала Φ'' от h приведен на (е).

Диаграмма, показывающая типы неустойчивости относительно толщины слоя h и подложки d , приведена на Рис. 1.6. Для малой толщины слоя h и

большого значения толщины подложки d структуры на поверхности характеризуются достаточно хорошо выраженной длиной волны, что соответствует спиновальному механизму неустойчивости.

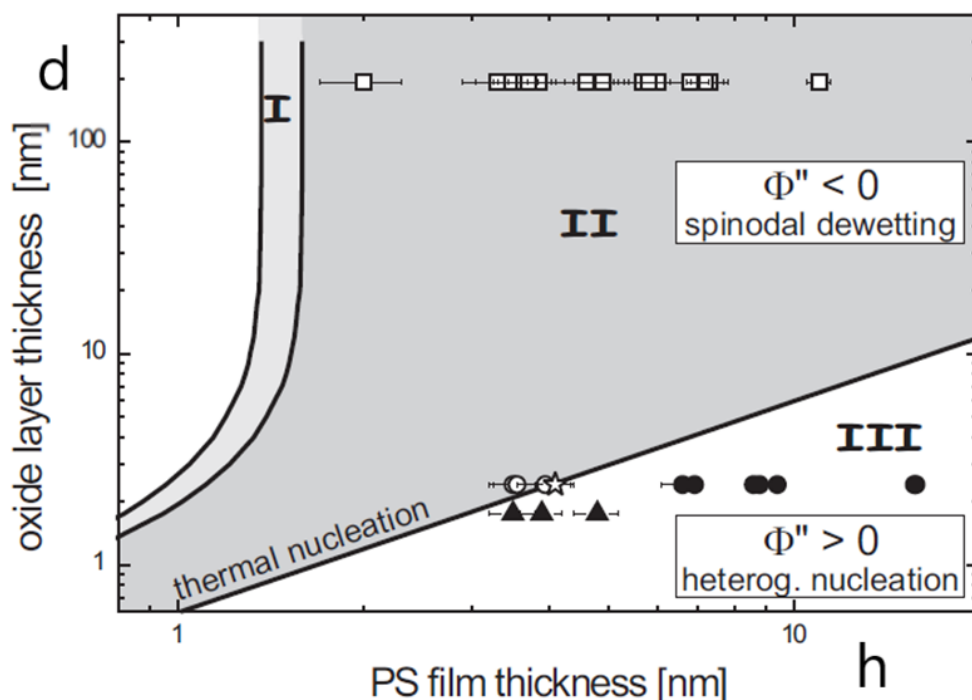


Рис.1.6 Диаграмма устойчивости, показывающая области зарождения спиновального, гомогенного и гетерогенного механизмов неустойчивости в зависимости от толщины подложки (оксида кремния) и слоя полистирола, взято из работы [307].

Для обратного случая ($d \ll h$) не удастся найти параметр корреляции между центрами зарождения неустойчивости поверхности. В этой области имеет место гетерогенный механизм образования неустойчивости. Отдельно стоит вопрос эволюции и динамики центров неустойчивости. Типичный сценарий образования «дыр» на поверхности приведен в работе [307]. Когда глубина «сухой» зоны становится достаточно большой, в соответствии с законом непрерывности на контактной линии «жидкость – твердое тело» образуется капиллярный гребень (соответствует белой области на Рис. 1.7). В зависимости от типа жидкости поведение контактной линии «жидкость – твердое тело» может быть различным. Исследование динамики изменения радиуса «сухой» зоны R со временем приведено в [114–116, 284, 288].

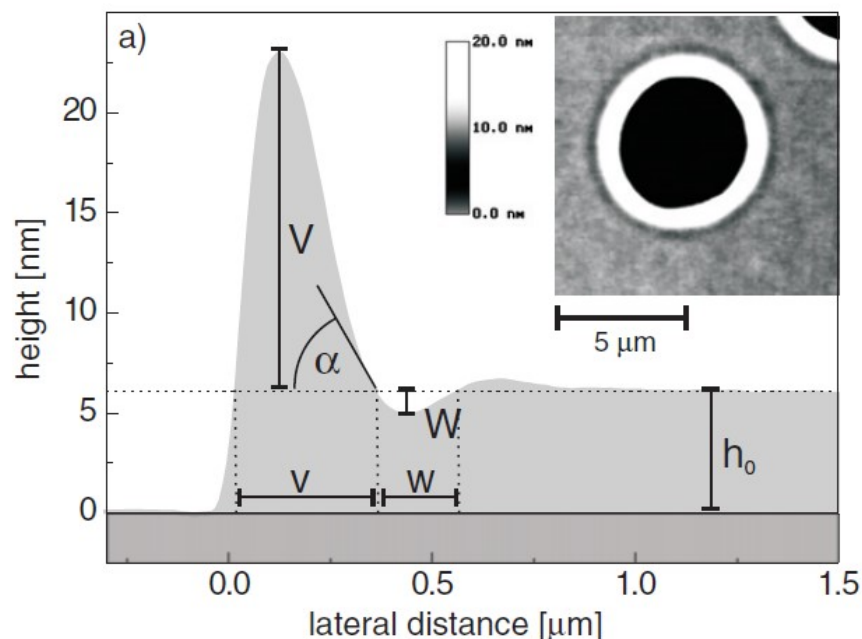


Рис.1.7 Снимок из работы [189], с использованием атомного микроскопа, отверстия в слое полистирола толщиной 6.6 nm, расположенного на силиконовой подложке толщиной 191 nm.

Для слоев жидкости, у которых на границе выполняется условие прилипания рост радиуса «сухой» зоны пропорционален времени $R \sim t$, Рис. 1.8(a), в противоположном случае $R \sim t^{2/3}$, Рис. 1.8(b) [116].

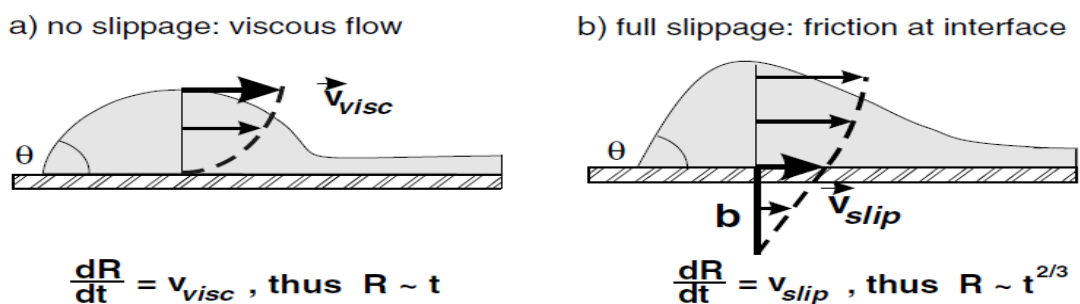


Рис.1.8. Два возможных механизма движения и закон роста отверстия R [116].

Дальнейшие исследования зависимость $R(t)$ были проведены в работах [200, 259, 302], где было показано, что на ранней стадии роста «сухой» зоны выполняется закон $R \sim t$, а в более позднее время $R \sim t^{2/3}$. Экспериментальные результаты [29, 32–34, 164, 263, 287, 313] показывают, что во время роста

«сухой» зоны величина контактного угла «жидкость – твердое тело», а также профиль капиллярного гребня не меняются.

В некоторых случаях профиль капиллярного гребня может оказаться неустойчивым относительно пространственных возмущений, что приводит к образованию пальцеобразной неустойчивости (Рис. 1.9) [55, 62, 287, 312]. Образование пальцеобразной неустойчивости имеет пространственно колебательный характер и происходит на движущейся границе капиллярного гребня.

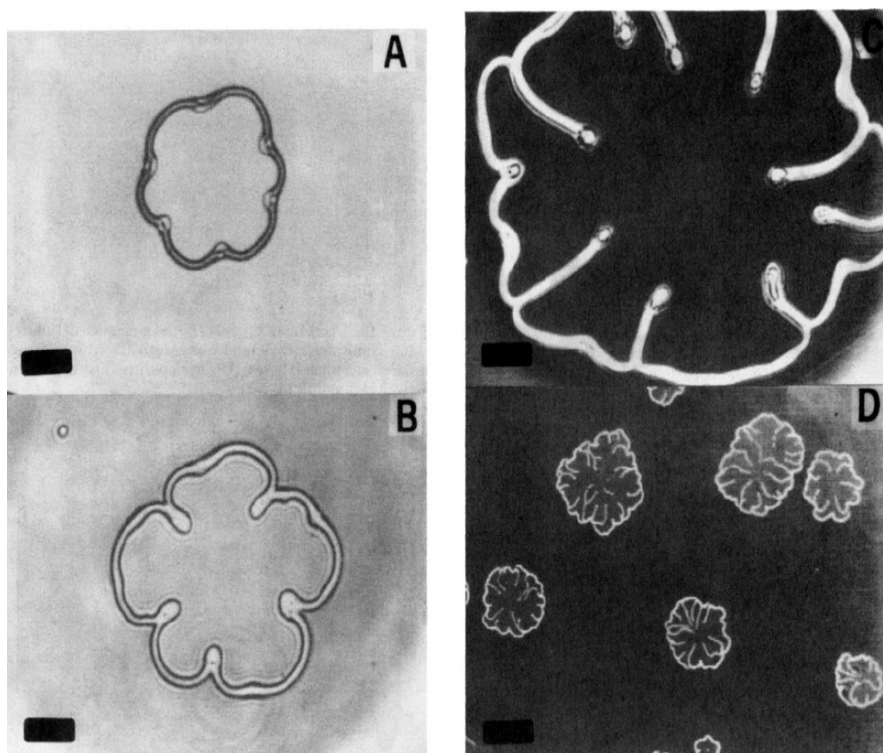


Рис.1.9. Различные стадии эволюции пальчиковой неустойчивости слоя полистирола на силиконовой подложке. Длина черной полосы для А, В, С – $10\ \mu\text{m}$ и $100\ \mu\text{m}$ для D.

Использованы результаты из работы [287].

Численное моделирование таких динамических трехмерных структур представляет собой довольно сложную задачу [335].

1.2. Уравнение эволюции тонкого слоя

Численное моделирование процесса возникновения неоднородности на свободной поверхности тонкого слоя и дальнейшая динамика поведения были исследованы в длинноволновом пределе с использованием вышеупомянутой величины φ в качестве дополнительного давления в уравнении сохранения импульса многими авторами [91, 98, 133, 207, 229, 286, 314, 315, 330, 359]. Уравнение эволюции и различные формулы для описания свободной энергии взаимодействия в безразмерном виде имеют вид:

$$h_t - \nabla \left[\frac{h^3}{3} \nabla (-\nabla^2 h + \varphi) \right] = 0, \quad (1.11)$$

$$\varphi = \frac{1}{h^3} - S \cdot \exp \left[\delta_l \left(1 - \frac{h}{h_{\min}} \right) \right], \quad \delta_l = \frac{h_{\min}}{l} \ll 1, \quad S = (S^P/l) / (A/6\pi h^2), \quad (1.12)$$
$$\varphi = \frac{1}{h_{\min}^n} \left[\left(\frac{h_{\min}}{h} \right)^n - \left(\frac{h_{\min}}{h} \right)^m \right].$$

Уравнение (1.11) было использовано для исследования процесса возникновения неоднородности поверхности тонкой пленки с использованием уравнения (1.12) без рассмотрения короткодействующего взаимодействия двойных электрических слоев на границах «жидкость – твердое тело» и «жидкость-пар» в декартовых [9, 11, 196, 197, 297, 309, 359] и полярных [86, 346, 360, 372] координатах, а также в присутствии сурфактанта [204, 228, 351]. Эти исследования показали, что ван-дер-ваальсовы силы растут в местах неоднородности жидкости, выталкивая жидкость из этих мест, что в свою очередь приводит к локальному уменьшению толщины слоя и в конечном итоге к образованию «сухих» зон. В работе [372] было показано, что локальное уменьшение толщины слоя происходит автомодельным образом с временным масштабом $h \sim (t - t_r)^{-1/5}$, где t_r есть характерное время образования «сухой» зоны, которое определяется балансом ван-дер-ваальсовых и капиллярных сил. Этот масштаб сохраняется даже в присутствии сурфактанта [351].

Моделирование процедуры высыхания слоя с учетом короткодействующего взаимодействия двойных электрических слоёв показало, что данная сила оказывает дестабилизирующую роль в процессе образования пространственных неоднородностей на свободной поверхности тонкого слоя жидкости. Методика исследования в одномерной постановке данной задачи заключалась в следующем: на начальное распределение толщины слоя налагались случайные возмущения малой амплитуды и для области параметров, где имеет место быть спинодальный распад, детально изучалась динамика уменьшения тонкого слоя жидкости. Результаты линейной теории хорошо согласуются с экспериментальными данными [164, 217, 310, 311, 314]. Дальнейшее развитие этих исследований было проведено в работах [266, 269], где было проведено исследование уменьшения толщины слоя в зависимости от эффектов испарения-конденсации. Также следует отметить работу [326], в которой предполагалось, что величина смачиваемости подложки зависит от времени, в уравнении для φ значения $(n, m) = (3, 4)$. В работе [329] был определен диапазон параметров, где доминирует спинодальный механизм процесса осушки, также было отмечено, что наблюдалась сильная зависимость от начальных значений амплитуды возмущений. Важным результатом данной работы является тот факт, что спинодальный распад не всегда является определяющим фактором для описания линейной неустойчивости слоя жидкости в данном диапазоне толщин. Этот результат согласуется с данными работы [201], где авторы получали случайные структуры в той области параметров, где ожидалось периодические спинодальные волны. Используя линейную теорию устойчивости, применяя методы асимптотического разложения и численные методы, в рамках данной модели удастся получить «пальцеобразную» неустойчивость [138, 219, 254, 340], также в работах [156, 198, 202] было исследовано изменение профиля контактной линии «жидкость – твердое тело» при затухающих колебаниях на поверхности, такое эластичное поведение характерно для полимеров [188, 189, 300, 316]. Для анализа дальнейших результатов полезно ввести «критическую»

толщину слоя h_{cr} , которое может быть найдено из условия $\Phi_{hh}(h_{cr}) = 0$. Поэтому для начальной толщины слоя меньшей, чем h_{cr} , следует ожидать спинодальный характер процесса высыхания слоя жидкости.

В настоящее время, в дополнение к указанным выше одномерным исследованиям, появилось большое количество исследований [38, 39, 141, 170, 232, 234, 301], которые численно моделировали эволюции процесса уменьшения тонкого слоя жидкости на твердой поверхности. Под термином «трехмерное пространство» понимается уравнение (1.11) $h = h(x, y, t)$, а зависимость толщины слоя от вертикальной координаты z получается при использовании длинноволнового приближения.

Подробно длинноволновое приближение рассматривается в Главе 3, но суть этого математического приема состоит в следующем: поскольку найти точное решение системы дифференциальных уравнений Навье-Стокса можно лишь для отдельных весьма частных классов, возникает задача о построении приближенного решения. Оно может быть найдено следующим образом: уравнения и начальные (граничные) условия содержат параметр L и решение известно (или его можно считать известным) при $L=L_0$; требуется построить приближенное решение при значениях параметра L , близких к L_0 , т. е. построить асимптотику решения при $\varepsilon \rightarrow 0$, где $\varepsilon = L - L_0$. Для нашей задачи роль малого параметра ε играет отношение вертикальной толщины слоя к характерному горизонтальному расстоянию. Далее физические величины, используемые в системе уравнений Навье-Стокса, раскладываются в ряд относительно этого малого параметра. В результате, решая полученные уравнения для одинаковых степеней параметра малости, мы получаем соответствующие эволюционные уравнения.

Результаты численного моделирования показали, что процесс структурообразования сильно зависит способа задания возмущений, а также от начальной толщины слоя h_{cr} . Для толщины слоя меньшей, чем h_{cr} , наблюдается хорошее соответствие между численными результатами и экспериментальными

данными [92, 96, 99, 100, 218, 267, 312, 314]. На Рис. 1.10 показано сравнение результатов, полученных с использованием атомного микроскопа, процесса осушки полистирола, расположенного на силиконовой подложке, и численного моделирования уравнения (1.11) при $(n, m) = (3, 9)$ [96]. Соответствие между структурами поверхности и временными масштабами в двух этих случаях можно считать достаточно хорошим.

Когда начальная толщина слоя приближается к h_{cr} , снизу наблюдается повышение чувствительности динамики поведения к различным неоднородностям. Структуры, наблюдаемые в эксперименте и численном моделировании, отражают комбинацию спинодального и гетерогенного механизмов неустойчивости на поверхности, которые возникают в процессе уменьшения толщины слоя [210, 221, 314, 374]. Сосуществование структур в спинодальном режиме, чьи механизмы различны, было показано в работах [245, 254, 314, 329, 347].

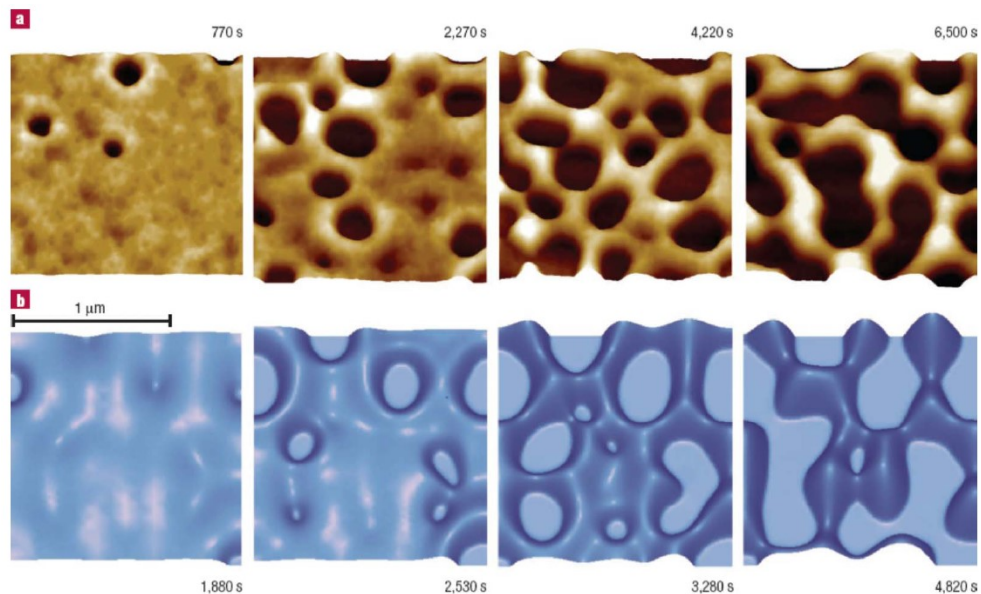


Рис.1.10. Сравнение в работе [96] между экспериментом (а) и численным моделированием (б) для полистирола толщиной 3.9 nm, расположенного на силиконовой подложке.

Для толщины слоя большей, чем h_{cr} , доминирует гетерогенный механизм зарождения «сухих» зон. Он ассоциируется с существованием неоднородностей на поверхности и на подложке. В численном эксперименте этот механизм

моделируется возмущениями большой амплитуды. Также было показано, что в зависимости от случайных начальных пространственных неоднородностей сильно меняется характерное время образования пространственных поверхностных структур, но не их структура [330]. Наличие пространственных неоднородностей может приводить в конце концов к появлению поверхностных структур, имеющих локальный порядок. Химическая неоднородность, приводящая к образованию градиента для потенциала взаимодействия Φ , может быть использована в создании периодических конструкций в тонких пленках на микро- и наноуровнях, что имеет большое количество технических приложений [93, 119, 137, 210, 211–213, 227, 256, 282, 290, 320, 321, 330, 362, 366].

1.3. Испарение и эффект Марангони для тонкого слоя жидкости

Исследования влияния испарения на межфазные потоки имеют долгую историю, которая начинается с работы Марангони, опубликованной в 1865 году, и сила, пропорциональная градиенту поверхностного натяжения, носит его имя. Теория, лежащая в основе развития длинноволновой модели в случае испарения тонкого слоя жидкости, приводится в [10, 27, 35, 117, 134]. Предполагается, что отношение плотности, вязкости и теплопроводности газа относительно аналогичных величин для жидкости является малой величиной, что приводит к значительному упрощению задачи [265, 268, 317]. Типичное эволюционное уравнение в длинноволновом приближении для слоя испаряющейся жидкости, расположенной на твердой подложке и ограниченной сверху невязким газом (например, воздухом) в безразмерном виде имеет вид:

$$h_t = -\frac{E}{h+K} + \nabla \cdot \left[\frac{h^3}{3} \nabla \cdot \left(-\frac{1}{Ca} \nabla \nabla h + \frac{R}{(h+K)^2} \right) - \frac{K}{2} \frac{Mh^2 \nabla h}{(h+K)^2} \right] \quad (1.13)$$

Здесь имеются следующие безразмерные параметры: Ca – капиллярный параметр, E имеет смысл меры испарения, K определяется как мера кривизны, безразмерный параметр R определяется как мера давления паров газа на

границу раздела «жидкость – газ», наконец, M есть безразмерное число Марангони. В обзоре [265] были подведены промежуточные итоги исследований динамики и эволюции тонкого слоя жидкости в присутствии процессов испарения и конденсации. Там же были приведены соответствующие уравнения, описывающие данные процессы в пределе, когда динамикой паровой фазы удастся пренебречь. Для тонкого слоя со свободной поверхностью, равномерно нагретого снизу, имеет место длинноволновая неустойчивость Марангони. Как было отмечено в [118, 266], слой должен быть такой толщины, чтобы в нем мы могли пренебречь гравитационными эффектами. Эксперименты [343, 344] с нагревом тонкого ($70\text{--}250\text{ }\mu\text{m}$) слоя нефти показали, что в данной системе существуют длинноволновый и коротковолновый механизмы неустойчивости. Результаты экспериментов хорошо согласуются с теоретическими предсказаниями, полученными в работах [167, 285]. Следует отметить работы [107], где на основе полных уравнений Навье-Стокса в одномерном случае и [267] в длинноволновом приближении были получены эволюционные уравнения, описывающие профиль тонкого слоя жидкости при испарении (Рис. 1.11).

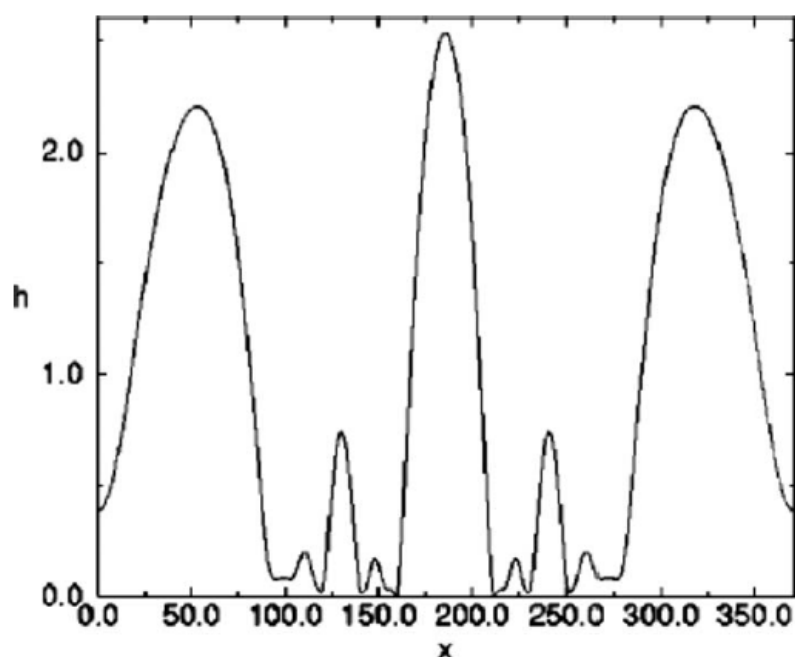


Рис.1.11. Профиль тонкого слоя при подогревании снизу в процессе образования холмистой структуры поверхности, приведено из [267].

В обоих исследованиях не обнаружили устойчивого состояния слоя, а уменьшение толщины слоя происходит не плавно, а путем образования холмистых структур, которые в дальнейшем ведут к образованию капель на твердой подогреваемой подложке. Эти результаты хорошо согласуются с ранней работой [223], где было произведено сравнение результатов, полученных на основе решения полных уравнений Навье-Стокса, которые решались численно методом конечных элементов, и длинноволнового приближения для данной системы. Обе системы показывают качественное согласие, кроме случая, где $h \rightarrow 0$ и происходит разрыв слоя. Также две различные схемы демонстрируют образование холмистых структур и распад слоя на капли. К недостатку вышеприведенных работ следует отнести тот факт, что в результате численных вычислений толщина слоя в некоторой точке становится равной нулю, что должно приводить к остановке программы. Однако этого можно избежать, если в уравнения Навье-Стокса [41] ввести дополнительный потенциал межмолекулярного взаимодействия. Это приводит к стабилизации толщины «тонких» участков тонкого слоя жидкости при толщинах порядка десятков ангстрем. В работе [100] этот метод был применен для двухслойной системы жидкостей, расположенной на подогреваемой подложке. Задача с неравномерным нагревом была рассмотрена в работах [30, 31, 37, 47, 48, 368], где было показано, что температурная неоднородность усложняет рассмотрение системы, но не оказывает принципиального влияния на эволюцию тонкого слоя жидкости. Поверхностные структуры и процесс формирования капель аналогичны результатам, приведенным в работах [54, 93, 251, 267].

Результаты работ, приведенных выше, касающиеся исследования влияния эффекта Марангони на динамику движения тонкого слоя жидкости, относятся к однослойной системе. Системы, состоящие из нескольких слоев демонстрируют более интересное и разнообразное поведение. В работах [90, 129, 144, 159, 216, 258, 278] рассматривается линейная теория устойчивости в длинноволновом пределе для двух- и трехслойной системы, которая ограничена твердыми

границами снизу и сверху. Эволюция такой системы приведена на Рис. 1.12. Трехслойная система имеет две внутренние границы двух сред, и для нее была обнаружена длинноволновая мода неустойчивости. Дальнейшим продолжением таких исследований является работа [220], в которой был проведен слабо нелинейный анализ трехслойной системы. Было показано, что когда один из слоев мал по отношению к другим, поведение такой системы описывается уравнением типа Кана-Хилларда. Все эти результаты показывают, что даже однородно нагретый тонкий слой демонстрирует богатую и интересную динамику.

Динамика уменьшения слоя и формирование «дыр» на свободной поверхности испаряющегося тонкого слоя полярной жидкости была исследована в экспериментальной работе [331], где наблюдался гетерогенный механизм образования неустойчивости на свободной поверхности, который при толщине слоя приблизительно 10 nm сменяется спинодальным механизмом неустойчивости. Также в этой работе было показано, что для малых толщин слоя полярное взаимодействие ответственно за смену механизмов неустойчивости.

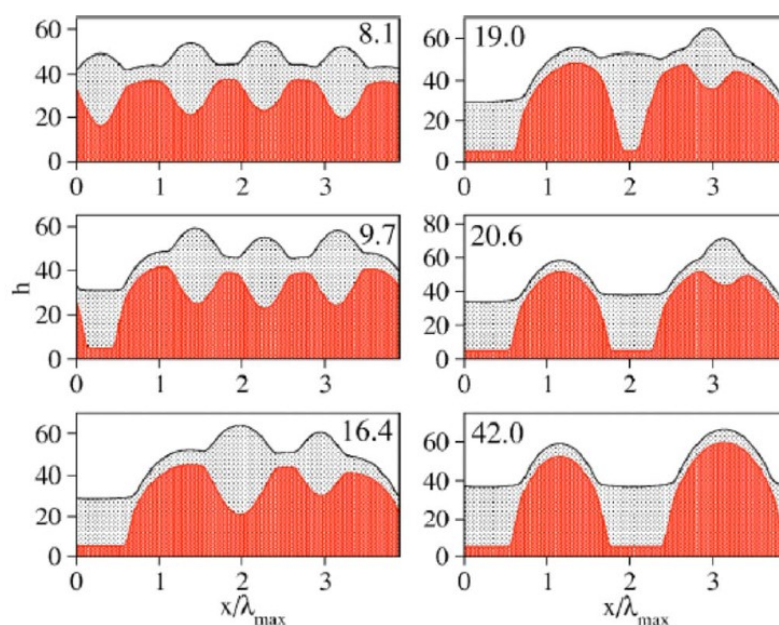


Рис.1.12 Численное вычисление процесса высыхания двухслойной системы метилметакрилат (красный цвет) – полистирол (серый), расположенной на силиконовой подложке [278]. Величина $\lambda_{\max}$ определяет характерное значение волновой длины.

Следует отметить работы [151, 155, 313], в которых теоретически изучалась эволюция тонкого слоя жидкости при испарении и конденсации. Было установлено, что процесс испарения-конденсации сильно зависит от локальной кривизны слоя и «расклинивающего» давления. Также было показано, что процесс уменьшения слоя воды при испарении, который расположен на смачиваемой твердой подложке, определяется гидрофобным притяжением и ван-дер-ваальсовым взаимодействием. В дополнение к этим исследованиям упомянем работы [81, 270], где были проведены численные исследования динамики движения тонкого слоя жидкости при испарении-конденсации в длинноволновом приближении. Численные результаты согласовались с предыдущими [313], и также было показано, что скорость испарения сильно влияет на масштаб длины структур, образующихся вследствие движения слоя. В работе [266] также изучалась динамика испаряющегося тонкого слоя жидкости с учетом межмолекулярных сил. Было установлено, что в отсутствие испарения для малых толщин слоя имеют место статические жидкие холмы, что является следствием как ван-дер-ваальсовского взаимодействия, так и взаимодействия двойных электрических слоёв, которых присутствуют на межфазных поверхностях. В присутствии испарения гребни в конце концов исчезают. Работа [211] посвящена численному исследованию процессов структурообразования на поверхности испаряющегося тонкого слоя при однородной и химически неоднородной твердой подложке. Анализ численных результатов показал, что в случае однородной подложки скорость уменьшения толщины слоя и количество «дыр» на поверхности с увеличением скорости испарения увеличиваются.

В случае химически неоднородной границы раздела «твёрдое тело – жидкость» взаимодействие уровня испарения и градиента потенциала взаимодействия определяют динамику поведения тонкого слоя и характерный размер «дырок» на поверхности.

Существует большое количество жидкостей (краски, например), которые есть комбинация постоянных и переменных компонентов, и их относительные концентрации чрезвычайно важны при изучении динамики и образования пространственных структур на поверхности при испарении этих жидкостей. Для того чтобы понять механизм высыхания краски, в работе [152] использовал длинноволновое приближение для решения трехмерного уравнения Навье-Стокса с учетом эффекта испарения для многокомпонентной жидкости. Краска состоит из двух компонентов: «растворитель» и «смола», которые соответствуют летучим и нелетучим компонентам соответственно. Модель включает гравитационные и капиллярные эффекты, а также тепловой эффект Марангони, кроме того, в задаче учитываются испарение и зависимость коэффициента диффузии, вязкости жидкости и уровня испарения от концентрации «смолы». В данной задаче имеются два эволюционных уравнения, одно из которых – это уравнение для толщины слоя, а второе учитывает эффект испарения «растворителя». Численное моделирование данной задачи показало, что термокапиллярный эффект является определяющим фактором для процесса высыхания летучего компонента. Процесс структурообразования в испаряющихся тонких пленках смесей летучих жидкостей, таких как различные спирты и органические масла (например, оливковое), имеет богатую историю изучения, которая начинается с так называемых «слёз вина» (эффект Марангони) [290, 332]. Данный эффект был рассмотрен в работах [154, 192], где авторы разработали уравнение тонкого слоя в длинноволновом приближении, которое способно численно воспроизводить этот эффект.

В последние годы в медицинской диагностике нашел применение метод клиновидной дегидратации. Метод позволяет на основании анализа структур, образовавшихся при высыхании капли биологической жидкости (например, сыворотки крови), расположенной на твердой подложке, выявлять широкий набор различных заболеваний. В основе метода лежит явление дегидратационной самоорганизации белка, открытое и детально исследованное

в работах [50, 51, 75]. Также следует отметить работы [184, 185, 318, 361], в которых исследуется динамика поведения биологических жидкостей.

Цикл работ [231–234] посвящен изучению особенностей эволюции тонкого испаряющегося слоя полярной жидкости. В теоретической работе [234] было теоретически показано существование «пальцеобразной» неустойчивости в областях малых значений безразмерного параметра испарения. Также в работе было продемонстрировано, что наличие неоднородности границы раздела «твердое тело – жидкость» влечет за собой потерю устойчивости слоя относительно как продольных, так и поперечных возмущений. В экспериментальной работе [231] было показано соответствие между теоретическими данными, касающимися профиля испаряющегося слоя, и результатами наблюдения с помощью мощной оптической системы. Экспериментально показано существование двух характерных толщин для слоя полярной жидкости при испарении.

Процесс испарения капель привлекает к себе большое внимание исследователей вследствие большого числа практических приложений. Механизм испарения капли жидкости определяет, как показано в работах [136, 157], либо шероховатость подложки, на которой располагается капля, либо изменение смачиваемости подложки [121]. В последнем случае, когда испарение ограничивается только диффузией молекул жидкости в воздух, зависимость радиуса капли от времени имеет вид $R(t) \sim \sqrt{t_{end} - t}$, где t_{end} – время, при котором капля полностью испаряется. В работах [106, 135] было показано, что соотношение для $R(t)$ справедливо, когда термокапиллярным эффектом можно пренебречь и если контактный угол «твердое тело – жидкость» остается постоянным, что для многих жидкостей выполняется [121]. Исследование поверхностных течений, вызванных эффектом Марангони, для испаряющейся капли приведено в работе [365]. Экспериментально установлено, что изменение температуры на поверхности и коэффициент поверхностного натяжения капли имеют немонотонный характер. Показано, что подавление поверхностного

потока на водяной капле не может быть объяснено учетом только поверхностного загрязнения. Математическая модель эволюции капли жидкости, расположенной на твердой подложке, при квазистационарном процессе испарения была предложена в работе [142]. Данная модель включает в себя эффект охлаждения свободной поверхности капли при испарении и зависимость коэффициента диффузии пара в атмосфере от атмосферного давления. Предсказание модели находится в хорошем качественном, а в некоторых случаях и количественном согласии с экспериментальными данными. В работе [143] было экспериментально доказано сильное влияние величины теплопроводности подложки на процесс испарения капли жидкости. Для математической модели описания процесса испарения капли использовались две новые поправки в модели: использовался ньютоновский закон охлаждения при испарении для твердой подложки, а также эффект конвекции водяных паров в атмосфере. Все эти улучшения в существующей модели дают хорошее согласие, качественное и количественное, с экспериментом. В работе [232] было показано, что при одинаковом уровне испарения капли малого размера полярной жидкости испаряются гораздо более медленно, чем капли, имеющие больший радиус. Этот эффект связан с тем, что испарение происходит преимущественно с поверхности, имеющей большее значение радиуса.

Исследование процесса испарения капли показывает неустойчивость относительно контактной линии [279, 283], также имеет место неустойчивость Марангони [161, 186, 216, 298, 303]. В экспериментах [1, 83, 95, 169, 279] были определены свойства жидкостей, с помощью которых можно контролировать динамику движения тонкого слоя. Следуя этим работам, можно утверждать, что динамика изменения контактного угла «твердое тело – жидкость» определяет поведение испаряющейся капли. Все эти работы основывались на теории, выдвинутой в работе [117], где предполагалось, что пар не играет практически никакой роли в системе «твердое тело – жидкость – пар», это же предположение было использовано в [84, 292] для динамики капли при слабом испарении.

В дальнейшем в работах [82, 298] была подробно рассмотрена система «твердое тело – жидкость – пар», на основании которой была получена система уравнений, описывающая данную задачу. Численное решение такой системы обнаружило сходство результатов с экспериментом Рис. 1.13, наблюдающим образование пространственных структур на поверхности высыхающего тонкого слоя. В работах [82, 101] приведены численные результаты исследования взаимодействия между неустойчивостью, связанной с испарением, и рэлей-тейлоровской неустойчивостью для тонкого слоя жидкости, расположенного на твердой подложке. В работе [101] приведена эволюция развития длинноволновой гексагональной неустойчивости. В работах [12, 168, 170] в рамках длинноволнового приближения были проведены исследования влияния термокапиллярного эффекта на эволюцию тонкого слоя испаряющейся полярной жидкости.

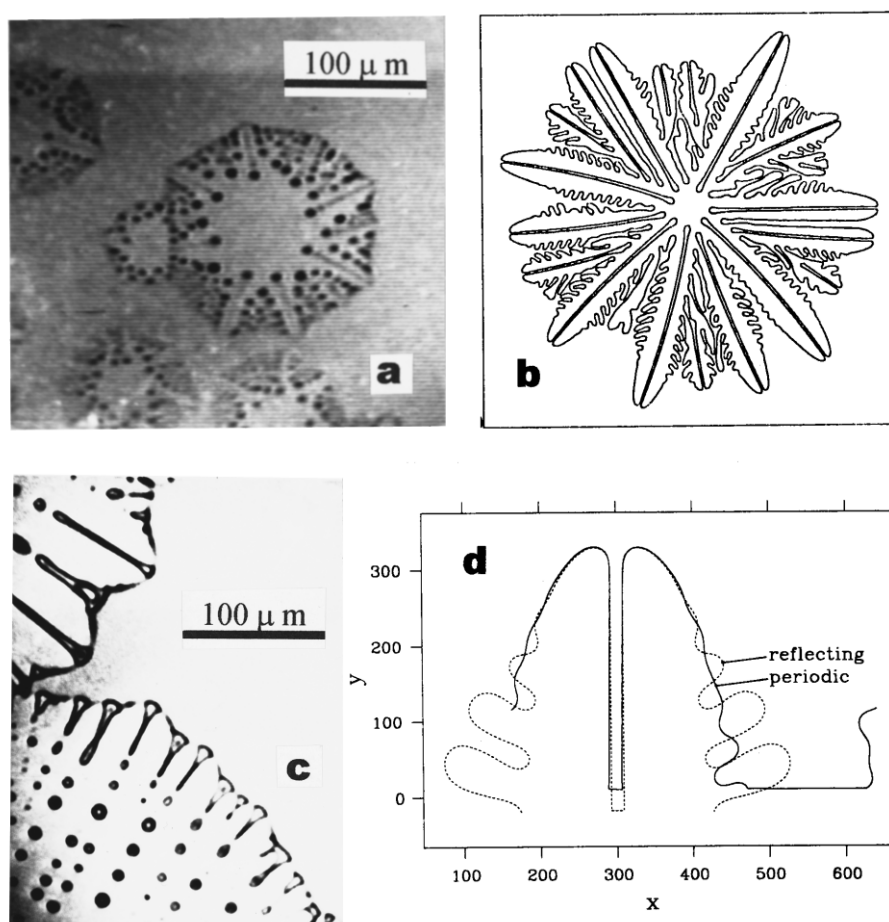


Рис.1.13. Сравнение экспериментальных данных [298], приведенных на фрагментах (a) и (c), с результатами численного моделирования испарения тонкого слоя жидкости (b) и (d).

Установлено, что в области малых значений параметра испарения эффект Марангони играет дестабилизирующую роль в эволюции тонкого слоя. В данной работе проведено исследование устойчивости тонкого слоя жидкости для продольных и поперечных возмущений относительно движения фронта жидкости. Приведены карты устойчивости для целого ряда безразмерных параметров. В результате трехмерного расчета получена пальчиковая неустойчивость в предсказанном теоретически диапазоне значений параметров.

Рядом исследователей было рассмотрено влияние поверхностно-активных добавок на поведение испаряющейся тонкой пленки. Например, в [131] автор использовал длинноволновое приближение для изучения испаряющейся пленки в присутствии поверхностно-активных веществ, тепловой вязкости и теплового и концентрационного эффектов Марангони соответственно. В результате линейного анализа устойчивости такой системы был обнаружен эффект дестабилизации системы при взаимодействии различных типов неустойчивостей.

В работе [272] автор развил вышеуказанную проблему, исследуя устойчивость двухслойной испаряющейся системы в нелинейном режиме. Численные результаты продемонстрировали, что концентрационная и тепловая неустойчивости Марангони, а также достаточно большая концентрация сурфактанта оказывают стабилизирующее воздействие на поведение слоя в диапазоне средних и больших длин волн. Эти результаты также показали, что различия между оценками времени разрыва тонкого слоя на основе линейной и нелинейной теорий уменьшаются при увеличении концентрации поверхностно-активного вещества. В микроэлектронике и полупроводниковых технологиях широко используется технология процесса осушки путем осаждения паров сурфактанта на влажные подложки [238]. Эти процессы были численно смоделированы в [241]: при использовании длинноволнового приближения было установлено, что толщина слоя сильно зависит от нелинейного слагаемого в

уравнении для сурфактанта и скорости десорбции сурфактанта с поверхности в объем. В работах [194, 195] проведено численное исследование динамики испарения капли, расположенной на твердой подложке с неизменной контактной линией. Использовался метод конечных элементов для описания уравнений Навье-Стокса. Учитывалась концентрация водяных паров над каплей и рассматривалось приближение слабого испарения. Результаты этого исследования хорошо согласуются с данными, полученными в длинноволновом приближении, предыдущей работы для малых чисел Рейнольдса. Динамика испаряющегося мениска в микроканале была изучена в работе [350]. Исследование проводилось применительно к модели Юнга-Лапласа и кинетической теории на основе выражения для испарения на границе раздела «жидкость – газ». Получено полное уравнение для процесса испарения без каких-либо приближений. Установлено, что расклинивающее давление оказывает определяющую роль в поведении мениска. Обсуждается роль процесса испарения и определяется профиль мениска в зависимости от разных режимов испарения. Следует отметить работы [323, 324], которые рассматривали двухслойные системы «жидкость – пар» с ограниченной диффузией. Решение линейной задачи устойчивости такой системы показало, что капиллярный эффект и испарение стабилизируют, тогда как термокапиллярный эффект дестабилизирует динамику движения тонкого слоя.

Существует ряд исследований, посвященных рассмотрению тонких пленок и тонких капель в рамках инженерных задач по созданию и управлению структурами на поверхностях [97, 136, 137, 148, 176–178, 256, 297], где, в частности, было показано образование микронного кольца наноструктур в испаряющемся бинарном тонком слое гексадециламин-гексан. Одним из наиболее современных инженерных обзоров по созданию заказных наноформ является работа [350]. В данном обзоре теоретически и экспериментально рассматривается технологический процесс высыхания тонкого слоя полимерной жидкости. После краткого введения в полимерную теорию испарения тонкой

пленки рассматриваются результаты моделирования формирования структур, которые определяются физическими и химическими свойствами подложки. Обсуждаются экспериментальные результаты и механизмы фиксирования заданных форм. Изучается влияние физических и химических неоднородностей подложки на формирование структур при сушке тонкой полимерной пленки. Процесс динамики трехфазной контактной линии, индуцированный процессом испарения, приводит к формированию наноструктур в форме кольца. Работа [177] демонстрирует формирование древовидных структур во время испарения летучей фракции бинарной смеси жидкостей. Другие экспериментальные работы [109, 110, 207, 355–359] также изучали формирование поверхностных структур при условии испарения.

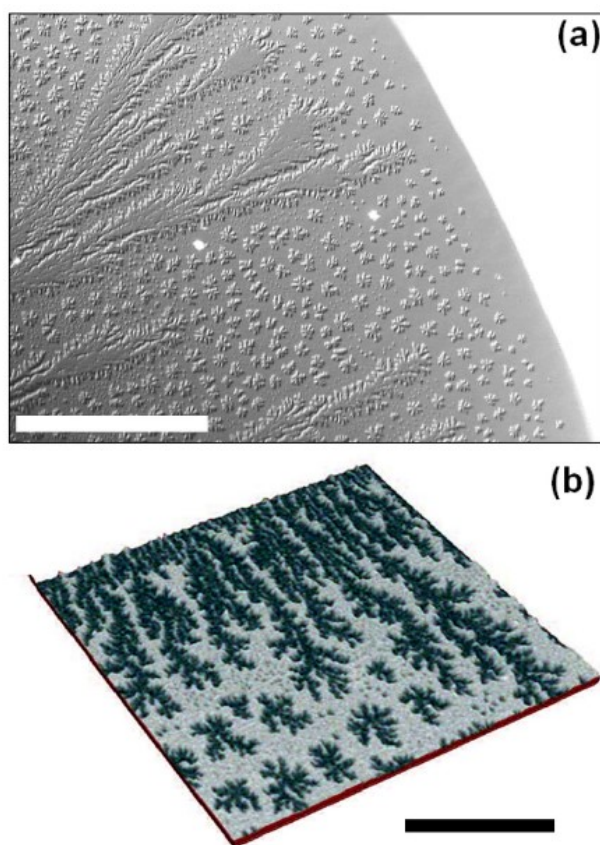


Рис.1.14.Сравнение между экспериментом (а) и численным моделированием (b) для пальчиковых структур на поверхности слоя силиконового масла толщиной 20 nm, в присутствии наночастиц золота с характерным радиусом 2 nm. Полоска для (а) показывает длину, равную 200 μm , а для (b) 50 μm . Приведено из [271].

Руководствуясь результатами работы [261], в которой наблюдалось образование кольцевых структур при испарении тонкого слоя с частицами, в [353] исследовалась эволюция тонкого слоя испаряющейся жидкости, на поверхности которого имеется концентрация поверхностно-активных наночастиц. Толщина слоя жидкости считалась достаточно тонкой для того, чтобы неустойчивость поверхности носила спинодальный характер. Результат исследований продемонстрировал эволюцию движения первоначально равномерно распределенных частиц. Начальное распределение было двух типов, в виде ленты и в виде кольца. Проводилось изучение процессов структурообразования на поверхности в зависимости от концентрации наночастиц, уровня испарения, поверхностной активности наночастиц, а также межмолекулярных сил. Сравнение эволюции структур на поверхности испаряющегося нанослоя силиконового масла теоретически и экспериментально проведено в работе [271], Рис. 1.14.

В этой области следует упомянуть работу [280], в которой изучались различные поверхностные структуры с использованием метода Монте-Карло. Такое приближение действует в очень тонких слоях, когда гидродинамика не является основным фактором движения частиц. Логическим продолжением вышеупомянутой работы является исследование [281]. В работе акцентируется внимание на динамических аспектах явления смешиваемости на наноуровне, для которого объемные гидродинамические уравнения становятся неприменимыми. Для таких толщин жидкости задача должна быть переформулирована в терминах граничных условий. В этом случае выделяются несколько величин, определяющих поведение нанослоя, а именно: дисперсионные силы, тепловые флуктуации, эффект гидродинамического прилипания жидкости к подложке, а также наличие двойного электрического слоя на границе раздела «твердое тело – жидкость».

Способность точно и эффективно управлять поведением малых объемов жидкости имеет огромное значение для многочисленных микромеханических и

микрожидкостных устройств. Типичной технической задачей является течение жидкости в микроканалах, где необходимо учитывать эффекты электроосмоса, электросмачивания и термокапиллярный эффект. Наличие пальчиковой неустойчивости на контактной линии тонкой пленки потенциально может служить катализатором переноса небольшого объема жидкости. Однако наличие загрязнения и дефекты поверхности в практическом плане зачастую существенно изменяют периодическую форму пальчиковой структуры. В работе [214] экспериментально была создана пальчиковая структура из силиконового масла, натекающего на твердую подложку, которая состоит из регулярных полос чистого кремния и его диоксида (SiO_2). Такое периодическое сочетание подложки позволило получить области малой и большой смачиваемости, что и определило характер получившихся структур. Также была показана высокая эффективность движения и устойчивость к наличию загрязнения [132]. Численное изучение такой задачи приведено в работах [140, 141], где использовались эволюционные уравнения с пространственной вариацией обобщенного давления, которое имитирует разность между областями с высокой и низкой смачиваемостью подложки. Наблюдается удовлетворительное соответствие между результатами численного моделирования и экспериментом.

В работах [225, 226] обнаружено, что водные растворы длинноцепочечных спиртов показывают немонотонную зависимость поверхностного натяжения, которая получила название «квадратичной неустойчивости Марангони QM» и была в дальнейшем исследована в работах [262, 263]. Было установлено, что данный эффект повышает устойчивость тонкого слоя жидкости относительно «нормальных» возмущений. Работы [335, 337] посвящены исследованию устойчивости стекающей по твердой подложке жидкой пленки в присутствии химических реакций. В своих исследованиях авторы обращали свое внимание на эффект Марангони, возникающий благодаря экзотермической (с выделением тепла) или эндотермической (с поглощением тепла) реакции: в результате

реакций возникал градиент температуры, движущий межфазную поверхность «жидкость – газ».

Теоретические работы [6, 112] посвящены рассмотрению влияния неустойчивости Марангони в хемоконвективных структурах; было обнаружено, что структура, порождаемая совместным действием реакции и неустойчивости Марангони, нестационарна и может существовать лишь в течение ограниченного времени. Когда фронт реакции уходит от поверхности раздела реагентов, неустойчивость Марангони уже не может в одиночку поддерживать структуру, и та затухает, а значит, поверхностные эффекты не являются определяющими.

1.4. Механизмы проводимости в тонком слое слабопроводящей полярной жидкости

Изучение проблем электроконвективной неустойчивости движения жидкости и газа связано с многочисленными практическими приложениями в различных областях техники и технологии, математическое моделирование этих задач приводит к пониманию большого числа природных явлений. В настоящее время эта область науки переживает фазу активного развития. Наибольший интерес к вопросам электроконвективной неустойчивости обусловлен развитием теории пробоя и предпробойных состояний, значимость которой для современной технологии материалов является очень высокой. Имеется большое количество работ, посвященных исследованию устойчивости электрогидродинамических течений. Основные результаты обобщены в обзорах [22, 46, 246] и монографиях [5, 49, 59, 127].

В последнее время используются новые возможности интенсификации тепло- и массообмена в слабопроводящих жидкостях при помощи электрического поля. Электрические и гидродинамические поля оказывают друг на друга взаимное влияние. С одной стороны, электрическое поле создает в жидкости объемную пондеромоторную силу, а с другой стороны, заряды, находящиеся в жидкости, участвуют в конвективном движении, образуя

электрические токи конвекции. Для взаимодействия электрических и гидродинамических полей необходимо присутствие в жидкости объемного заряда.

Одним из основных вопросов электрогидродинамики является вопрос о способе образования в жидкости объемного свободного заряда. Существуют два механизма образования в жидкости свободных зарядов, участвующих в процессе прохождения тока: образование свободных зарядов в результате процесса диссоциации-рекомбинации и инжекция заряда через границу.

В первом случае можно ввести коэффициент собственной проводимости жидкости, различной в разных точках пространства, а плотность тока связана с напряженностью поля законом Ома: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. В стационарном состоянии распределение объемного свободного заряда q описывают следующие уравнения:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (1.13)$$

Из которых мы можем получить, что

$$q = -\frac{\nabla \sigma}{\sigma} \cdot \vec{E} \quad (1.14)$$

Такой механизм проводимости называют омическим, а модель – моделью проводимости. Объемный заряд в этом случае образуется в результате неоднородности электропроводности σ в процессе токопрохождения, которая может быть вызвана зависимостью от температуры [5, 46, 49] или от напряженности поля [1]. Данная модель образования заряда была использована в работах [5, 7, 49, 56, 111, 293, 327, 341, 342] по изучению электроконвективной неустойчивости жидкости.

В экспериментальных работах по исследованию электроконвективной неустойчивости слоя слабопроводящей жидкости, заключенной между двумя твердыми электродами, подогрев обычно осуществлялся сверху. Дело в том, что механическое равновесие неравномерно нагретой жидкости в поле тяжести

возможно лишь при условии постоянства и вертикальности градиента температуры. Когда вертикальный градиент температуры при подогреве слоя жидкости снизу превосходит некоторое критическое значение, то равновесие становится неустойчивым и возникает конвекция. Конвективное движение в этом случае обусловлено зависимостью плотности жидкости от температуры. Такая конвекция называется тепловой. При нагреве жидкости сверху равновесие относительно тепловой конвекции всегда устойчивое, что позволяет выделить чисто электроконвективный механизм неустойчивости. В работе [181] изучался слой трансформаторного масла толщиной 1 мм при разности температуры между электродами 12°C . В отсутствие электрического поля равновесие было устойчивым. При включении вертикального электрического поля и при достижении критического напряжения 180 В наблюдалось конвективное движение. В качестве объяснения этого эффекта было выдвинуто предположение о зависимости диэлектрической проницаемости среды ε от температуры и образовании в связи с этим в жидкости объемного поляризационного заряда. Образующаяся в результате этого пондеромоторная сила, пропорциональная $\nabla \varepsilon$, способна вызвать конвективное движение.

В работах [341, 342, 345] производилось изучение электроконвективной неустойчивости экспериментально и численно. В качестве жидкости использовались растительное и касторовое масла с толщинами 1 и 2 дюйма. Подогрев осуществлялся сверху. При разности температур между электродами 5, 10, 15 и 20°C наблюдалось осцилляционное движение для напряжения порядка 10 kV . Для описания такого поведения жидкости была предложена модель, где предполагалось, что проводимость σ есть квадратичная функция от T , а диэлектрическая проницаемость среды есть константа. В результате решения линейной задачи устойчивости была найдена колебательная мода неустойчивости. В вычислениях число Прандтля считалось бесконечным. Численные результаты для дисперсионного соотношения качественно подтвердили экспериментальные данные. Монотонная мода неустойчивости в

теоретическом анализе не рассматривалась, и эта теория не могла объяснить результаты [181].

В дальнейшем многие авторы в своих работах пытались объяснить эти противоречивые результаты, основываясь на предположении, что объемный заряд образуется в жидкости из-за зависимости электрической проводимости от температуры. Такая модель описания получила название модели проводимости.

Первая попытка теоретически рассмотреть явление, описанное в [181], была предпринята в работе [293]. В работе предполагалось, что объемный заряд образуется вследствие линейной температурной зависимости ε . Для безразмерной системы электрогидродинамических уравнений введены два безразмерных управляющих параметра: электрическое число Рэлея и число Прандтля. Было найдено, что для монотонной неустойчивости приложенное электрическое поле действительно может породить конвективную неустойчивость, но численные результаты давали различие с экспериментальными в 10^7 раз. Поэтому далее в этой работе было выдвинуто другое предположение, в котором считалось, что объемный заряд образуется вследствие линейной зависимости σ от температуры. Но результаты вычислений показали, что в таком случае электрическое поле стабилизирует систему.

Так как учет линейного члена разложения проводимости в ряд по температуре при решении задачи устойчивости не дает объяснения результатам, полученным в работе [181], был сделан вывод о необходимости учета следующих членов разложения. Квадратичная зависимость проводимости σ от температуры изучалась в работе [327]. Основные результаты для монотонной моды неустойчивости заключаются в следующем:

- 1) механизм образования объемного заряда, вызванный зависимостью ε от T , мал по сравнению с механизмом проводимости;
- 2) учет линейного слагаемого в разложении σ по температуре дает стабилизационный эффект;

- 3) зависимость проводимости предполагается квадратичной, в этом случае приложенное электрическое поле сильно дестабилизирует слой жидкости и численные результаты находятся в согласии с экспериментом.

Дальнейшие члены разложения проводимости по температуре не вносят заметный вклад в задачу устойчивости.

Для колебательной моды линейная задача устойчивости была решена в [111]. Зависимость проводимости σ от T предполагалась линейной. Расчеты проводились для конечного числа Прандтля. Подставляя граничные условия на свободной поверхности и используя тригонометрические функции для разложения скорости движения жидкости и температуры, он обнаружил, что колебательная мода способна возбудить конвективное движение. Это качественно согласуется с результатами работы [342]. Стало понятно, что для устранения различия между численными и экспериментальными данными нужно учитывать вклад иных, не температурных эффектов. Еще одним подтверждением этого предположения является работа [239]. Для колебательной моды неустойчивости была решена линейная задача устойчивости при конечных значениях числа Прандтля. Зависимость проводимости от температуры выбиралась линейной, квадратичной и в соответствии с формулой Аррениуса. Параметры задачи выбирались в соответствии с экспериментом [342]. Было показано, что на основе модели проводимости не удастся объяснить результаты, полученные [342].

Модель проводимости предполагает, что если температурного градиента нет, то нет объемного заряда и конвективное движение отсутствует. Однако целый ряд теоретических и экспериментальных исследований [87, 88, 304, 305, 363] показал, что в изотермическом слое слабопроводящей жидкости в электрическом поле наблюдается конвективное течение. В связи с этим была сформулирована так называемая модель подвижности, в которой ток обусловлен внесенными в диэлектрик свободными зарядами. Образование свободных зарядов происходит на электродах или в результате приэлектродной реакции.

Механизмом образования ионов одного знака на инжекторе (униполярная инжекция заряда) может быть, например, термоэлектронная эмиссия [26, 40]. Плотность тока при этом механизме проводимости записывается следующим образом:

$$\vec{j} = qbE \quad (1.15)$$

где b – подвижность инжектируемых ионов, q – объемная плотность инжектируемого заряда.

Перейдем к более подробному обсуждению модели подвижности и инжекционному механизму неустойчивости. В работе [304] изучалась численно и экспериментально устойчивость изотермического слоя жидкости со свободной границей, через которую происходит инжекция заряда. Инжектор был расположен на свободной границе. В линейной задаче устойчивости были выявлены два управляющих безразмерных параметра: электрический аналог числа Рэлея и параметр, определяющий подвижность заряда в среде. При решении было найдено, что от параметра подвижности система зависит слабо, а критические значения электрического числа Рэлея и волнового числа равны соответственно $Ra=100, k=4$. В эксперименте [305] этот результат был с хорошей степенью точности подтвержден.

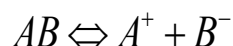
Рассмотрение модели подвижности для слоя жидкости при линейной зависимости подвижности заряда от температуры проводилось в работе [363]. В этом случае для линейной задачи устойчивости удалось найти монотонную и колебательную моды неустойчивости. Более того, в рамках модели подвижности было показано, что экспериментальные результаты работы [181] в хорошем соответствии с численными результатами. Из этого был сделан основной вывод о том, что в работе [181] основной причиной неустойчивости выступает инжекция заряда. В [5, 22, 61, 239] было отмечено, что в слабопроводящей жидкости имеют место оба механизма проводимости, однако, учитывая, что для большинства жидких диэлектриков $\sigma \leq 10^{-12} \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$, инжекционный механизм проводимости во многих задачах рассматривается как основной.

Изучению конвективной устойчивости слоя жидкости, заключенного между двумя твердыми границами в постоянном электрическом поле при отсутствии тяжести, посвящена работа [88]. Объемный заряд образуется в результате инъекции с положительного электрода. В задаче были определены два основных безразмерных управляющих параметра: электрический аналог числа Рэлея и уровень инъекции C . Приведены карты устойчивости для широкого диапазона значений параметра C : от сильной $C \rightarrow \infty$ до слабой $C \rightarrow 0$ инъекций.

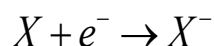
В [57] рассматривается приближение электрогидродинамики, аналогичное безындукционному приближению в магнитной гидродинамике. Пренебрегается электрическим полем индуцированного в жидкость объемного заряда по сравнению с внешним полем. Найдено, что при инъекционном механизме образования заряда в жидкости безындукционное приближение предполагает слабую инъекцию $C \ll 1$. Взаимодействие гравитационного и инъекционного механизмов неустойчивости рассматривалось в работах [125, 126, 363]. Изучалась конвективная неустойчивость неизотермического слабопроводящего слоя жидкости с твердыми границами в присутствии силы тяжести. Инъекция заряда производилась как с верхнего, так и с нижнего электродов. Константа диэлектрической проницаемости и подвижность зарядов зависели от температуры по линейному закону. Граничное условие на инжекторе записывалось из предположения, что $q = q_0$. В случае слабой инъекции были найдены монотонная и колебательная моды неустойчивости. Приведены карты устойчивости для гравитационного и электрического чисел Рэлея при различных параметрах.

Цикл работ Жакина [19, 23–25] посвящен изучению общего подхода в исследовании электрогидродинамики жидких диэлектриков. Он заключается в учете неравновесной реакции диссоциации-рекомбинации и инъекции зарядов с электрода, причем эти реакции идут по окислительно-восстановительному (ОВ) механизму, который предусматривает неизменность химического состава реагирующих компонентов. Считается, что низковольтная проводимость

обусловлена примесными ионами и ионами, образующимися за счет автодиссоциации молекул несущей жидкости.



В неполярных жидких диэлектриках (трансформаторное масло, бензол и др.) примесями могут являться, например, молекулы воды. Второй тип проводимости связан с инжекцией ионов на электроде за счет ОВ реакции, в случае униполярной инжекции на катоде можно записать:



На основе этой физико-химической модели в работе [25] построена краевая задача электрогидродинамики, которая в безындукционном приближении [57] согласуется с основными экспериментальными данными:

- 1) линейность вольт-амперных характеристик в слабых полях и нелинейность в сильных [292, 364];
- 2) рост поля вблизи электродов в слабых полях и спадание напряженности вблизи электродов в сильных полях [63];
- 3) ячеистая неизотермическая электроконвекция в однородном и неоднородном полях [64].

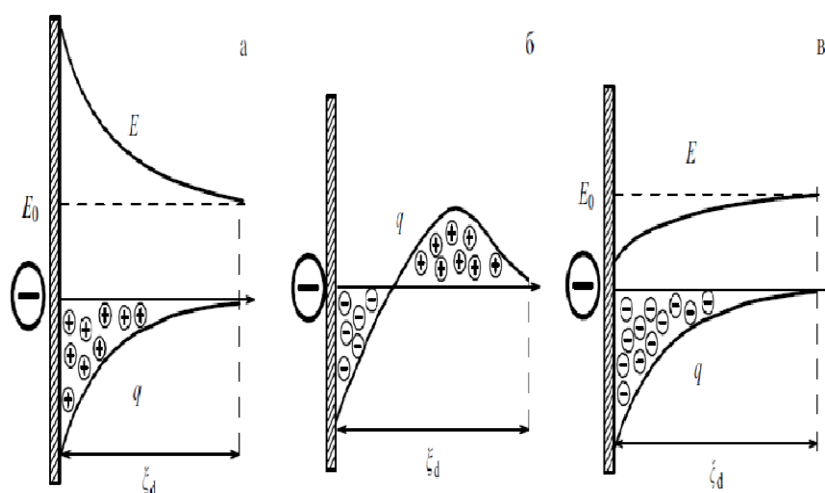


Рис.1.15 Формирование ионных структур в приэлектродных слоях вблизи катода: (а) слабая инжекция; (б) средний уровень инжекции; (в) сильная инжекция.

Приведено из [22].

Одним из основных вопросов в модели подвижности является вопрос о граничном условии для плотности заряда на инжекторе. В работах [57, 126, 293] использовалось условие автономной инжекции, что предусматривало задание на инжекторе $q = C$, которое не зависит от поля, зависимость инжекции от поля предполагалась в работе [7]. Константа C зависит от физико-химических свойств инжектора. Однако такая запись граничного условия при нахождении распределения плотности заряда и напряженности поля давала лишь качественное согласие с экспериментом [57]. Другой тип граничного условия рассматривает электрод как бесконечный резервуар инжектируемых ионов, тем самым мы пренебрегаем физическими свойствами инжектора. Такое условие носит название режима тока, ограниченного пространственным зарядом (SCLC, space-charge- limited currents), что предусматривает на инжекторе $E = 0$ [80, 277]. Несмотря на то что такое граничное условие ведет к особенности q на инжекторе, оно позволяет правильно описать распределение плотности заряда во всем остальном слое. В работе [22] обсуждаются различные условия для инжекционного процесса (смотри Рис. 1.15) и приводятся физические оценки данных режимов.

Несомненный интерес представляет вопрос о теории устойчивости равновесия границы раздела жидкости в электрическом поле. Задача об устойчивости равновесия плоской поверхности проводящей жидкости во внешнем, нормальном к границе электрическом поле была рассмотрена в работах [58, 70, 333]. Было найдено, что равновесие плоской границы раздела в достаточно сильном электрическом поле может стать неустойчивым по отношению как к монотонным, так и колебательным модам. Изучению устойчивости свободной деформируемой поверхности слабопроводящей жидкости с омическим механизмом проводимости в тангенциальном к границе электрическом поле проводилось в работах [20, 21, 247]. Возникновение электроконвективных ячеек объясняется тем, что на свободной поверхности возникают тангенциальные напряжения, что и приводит к развитию течения. Для

переменного поля показано, что в высокочастотных полях задача устойчивости плоской свободной поверхности для жидкости с омическим механизмом проводимости эквивалентна задаче об устойчивости поверхности идеального жидкого диэлектрика в постоянном электрическом поле. Наиболее полный обзор физических процессов, происходящих на границе раздела двух сред, представлен в [22, 46].

В работе [274] экспериментально изучалась неустойчивость диэлектрического слоя жидкости со свободной границей при коронном разряде. Приведено дисперсионное соотношение между частотой деформируемой поверхности ω и волновым числом k :

$$\omega^2 = \left(g + \frac{\sigma k^2}{\rho} - \frac{2\sqrt{g\rho\sigma}}{\rho} k \right) \cdot k \quad (1.16)$$

где σ – поверхностное натяжение.

Были обнаружены два типа неустойчивости: первый, инжекционный, обусловлен появлением заряда из-за процесса инжекции в жидкость и характеризуется гексагональными структурами малого масштаба. Второй тип неустойчивости связан с образованием вблизи поверхности объемного заряда. Характерными структурами этого типа неустойчивости являются гексагональные ячейки большого масштаба.

Обсуждению механизма неустойчивости в изотермической двухслойной системе «воздух – слабопроводящая жидкость» при инжекции заряда через свободную поверхность посвящена работа [89]. Считалось, что на свободной границе поверхностный заряд равен нулю. Рассматривалась роль деформации свободной границы в вопросе устойчивости системы. Указывается, что в воздухе можно пренебрегать силой Кулона, т.к. в стационарном состоянии $j = bqE = bF_e$:

$$\frac{(F_e)_a}{F_e} = \frac{b}{b_e} \leq 10^{-4}$$

Таким образом, проведенный анализ работ показывает, что большинство работ по устойчивости конвективного движения слабопроводящей жидкости при

инжекционном механизме проводимости относятся к однослойной системе. Вопрос о влиянии на инжекционный механизм неустойчивости других механизмов изучен недостаточно.

1.5. Влияние сурфактантов на структурообразование поверхности тонкого слоя жидкости

Процессы и эффекты, возникающие в тонком слое жидкости, причиной которых являются поверхностно-активные вещества, имеют значение для многочисленных промышленных, биомедицинских и повседневных устройств и приложений. Это могут быть технологии тонкого покрытия (тефлон, например), медицинские абсорбирующие продукты, микрофильтры, пены, эмульсии для тонкой химии, а также процессы сушки полупроводниковых пластин в области микроэлектроники [77, 113, 139, 148, 181, 224, 241, 299, 323]. Такое специфическое движение приводится в действие присутствием градиента концентрации поверхностно-активных веществ, который, в свою очередь, из-за зависимости поверхностного натяжения от концентрации сурфактанта в результате приводит к возникновению градиента поверхностного натяжения (эффект Марангони).

В работе [146] экспериментально зафиксировано быстрое распространение сурфактанта в направлении незагрязненных участков жидкости. Особенностью и сложностью описания такой системы является тот факт, что зачастую сурфактанты, двигаясь вдоль поверхности, частично растворяются в жидкости и проникают в объем. При достаточно больших концентрациях сурфактанта эти частицы образуют особые структуры, «мицеллы», обладающие некоторыми интересными особенностями, и при адсорбции на подложку делают ее химически неоднородной. Такой дополнительный механизм неустойчивости слоя жидкости приводит к учету не только физических, но и химических свойств жидкости и сурфактантов, что необходимо для объяснения довольно большого количества эффектов.

Исторически изучение влияния сурфактантов на динамику тонкого слоя жидкости началось с рассмотрения нерастворимых сурфактантов [66–68, 108, 153, 162, 182–184, 205, 206, 322, 354]. Динамика распространения описывалась парой эволюционных уравнений для толщины и поверхностно-активной концентрации Γ . Также предполагается линейная зависимость поверхностного натяжения σ от концентрации сурфактанта. Система уравнений, описывающая данную систему, приведена в (1.17).

$$\begin{aligned} h_t &= -\nabla \cdot \left(\frac{Ca}{3} h^3 \nabla \nabla^2 h + \frac{1}{2} h^2 \nabla \sigma \right) \\ \Gamma_t &= \frac{\nabla^2 \Gamma}{Pe_s} - \nabla \cdot \left(\frac{Ca}{2} h^2 \Gamma \nabla \nabla^2 h + h \Gamma \nabla \sigma \right) \end{aligned} \quad (1.17)$$

В данной системе большое значение имеет число Пекле Pe_s , которое характеризует соотношение между конвективным и молекулярным процессами переноса тепла. Типичные значения этого параметра порядка лежат в диапазоне 100–1000. Тем не менее диффузионные эффекты продолжают оказывать свое влияние в пограничных слоях, где концентрация претерпевает быстрые пространственные изменения. В данной задаче пренебрегать диффузией нельзя, так как этот эффект представлен в слагаемом с наибольшей производной по концентрации. Также необходим учет капиллярного эффекта, несмотря на малое значение этого слагаемого (пропорционально параметру малости в квадрате). Этот параметр также умножается на наивысший порядок производной по толщине слоя, отбрасывание его приведет к проблеме сингулярности возмущений, и его сохранение представляется физически оправданным. Численное моделирование такой задачи приводит к тому, что в процессе распространения сурфактанта на поверхности наблюдается резкое утолщение слоя, которое движется в сторону меньшей концентрации сурфактанта. Максимальное увеличение слоя почти в два раза превышает первоначальную толщину. Малая толщина слоя позади фронта распространения объясняется общим балансом поверхностного натяжения жидкости на свободной поверхности, вызванного большим значением градиента концентрации

сурфактанта. Анализ численных данных показывает, что увеличение числа Пекле и уменьшение капиллярного параметра приводят к образованию более резких форм утолщения слоя.

Численное и экспериментальное исследование образования пальцеобразной структуры при наличии примеси проведено в работах [141, 214], Рис. 1.16. Было показано, что определяющим фактором является разность плотностей веществ. В работе [204] изучался концентрационно-капиллярный механизм образования неустойчивости в присутствии межмолекулярного взаимодействия (ван-дер-ваальсовое взаимодействие). Было показано, что учет такого эффекта стабилизирует толщину слоя, сглаживая утолщение слоя и делая профиль слоя менее резким. Эволюционные уравнения принимают в расчет существование эндогенных свойств сурфактанта, помимо уже присутствующих экзогенных свойств сурфактанта.

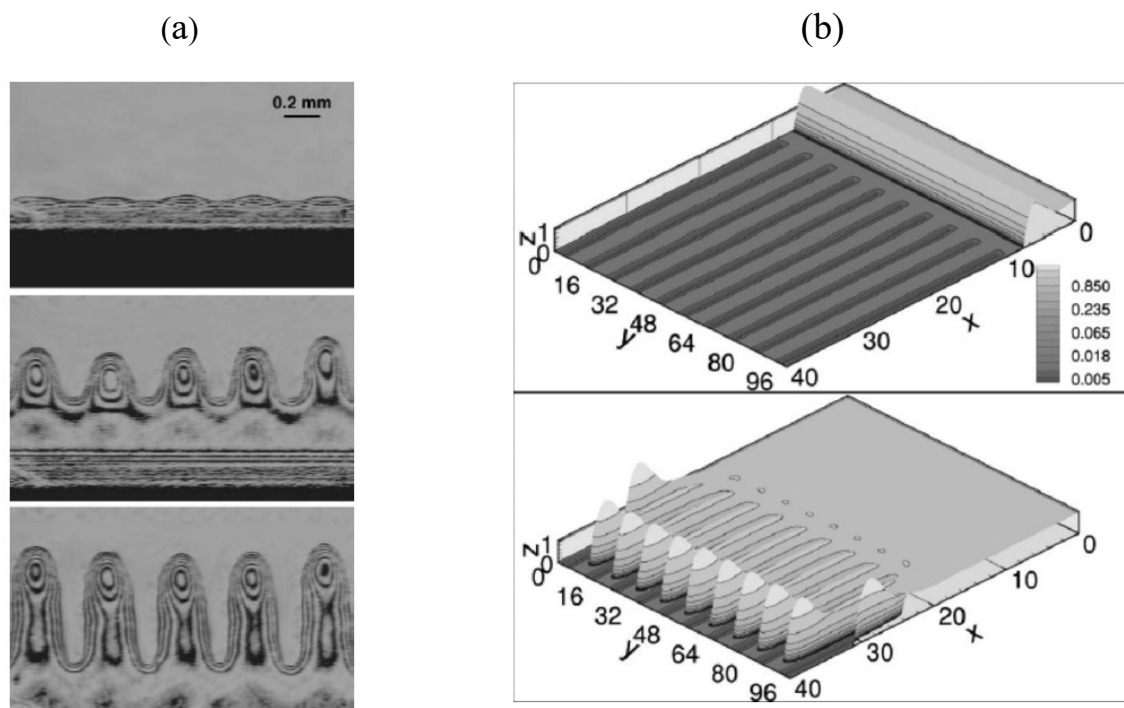


Рис.1.16. Интерферограмма образования пальчиковой структуры (а) при натекании тонкого слоя силиконового масла на силиконовую подложку [214]. Численное моделирование данного процесса показано (б). Вверху начальное распределение, а внизу развитая пальчиковая структура. Подложка представляет собой полосы с различными значениями величины смачиваемости. Использовано из [141].

Концентрационная конвекция Марангони подробно рассматривается в экспериментальной работе [28]. В данной работе проводится несколько экспериментов, имеющих своей целью исследовать концентрационно-капиллярные явления. Авторы показали экспериментально, что при неоднородном распределении ПАВ на поверхности существует интенсивная конвекция Марангони, причем «возникающие течения и явления оказываются во многом подобны термокапиллярным и обнаруживают схожие закономерности, в частности пропорциональность интенсивности градиенту поверхностного натяжения». Но, в отличие от термокапиллярного эффекта, концентрационная капиллярность (солютокапиллярный эффект) характеризуется, например, гораздо большими достигаемыми значениями числа Марангони и более сложным механизмом формирования градиента поверхностного натяжения: процессы диффузионного выхода молекул жидкости на поверхность и адсорбции ПАВ ощутимо медленнее, чем процесс теплопередачи.

Взаимодействие частиц сурфактанта между собой с процессом образования объемных структур (мицелл), а также влияние этих структур на движение поверхности экспериментально исследовались в [197]. Было экспериментально доказано, что мицеллы стабилизируют поверхностное движение тонкого слоя жидкости. Численное исследование длинноволновой неустойчивости тонкого слоя жидкости в присутствии сурфактанта произвольной растворимости исследуется в работе [209]. Используется модель Лангмюра для описания кинетики процесса адсорбции на границе. Показано, что концентрационный эффект Марангони способен стабилизировать поверхностное движение и препятствовать образованию пространственных структур на поверхности.

Сравнение экспериментальных данных и результатов численного моделирования распространения нерастворимого сурфактанта на поверхности тонкого слоя перфлуоростилтриклозана (PFOTS) приведено в работе [319]. Экспериментально найдена зависимость поверхностного натяжения от концентрации сурфактанта, которая представляется в следующем соотношении:

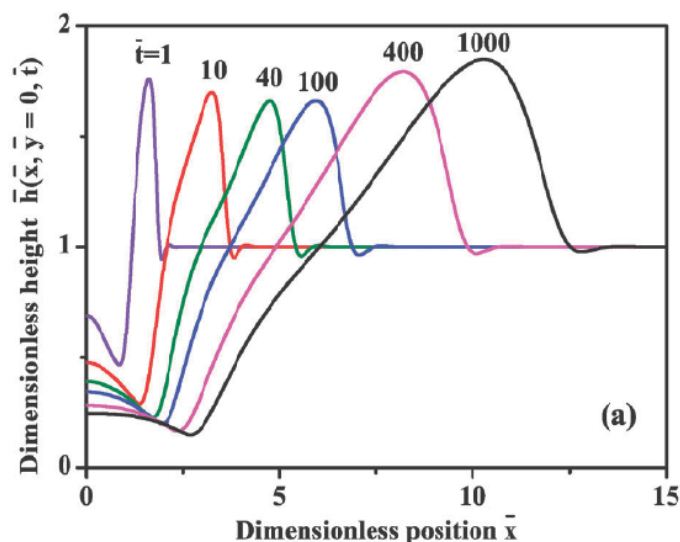
$\sigma = \sigma_0 + \exp(-a\Gamma^2)$. Также в рамках длинноволновой теории приведены профили движения слоя и эволюция движения поверхности. В работе [208] проведено обширное исследование динамики движения поверхности капли жидкости, расположенной на твердой подложке. Исследовались влияния поверхностно-активных веществ, расположенных на свободной поверхности. Вещество предполагалось растворимым и нерастворимым. Эволюционные уравнения решались с помощью метода конечных элементов. Было обнаружено, что процесс адсорбции сурфактанта определяет динамику поведения капли.

Подробно рассматривается вопрос адсорбции для динамически движущейся контактной линии «твердое тело – жидкость – воздух». Экспериментальное сравнение динамики движения тонкого слоя жидкости в присутствии и отсутствии нерастворимого сурфактанта проведено в работах [252, 253], где было показано, что наличие даже незначительной примеси сурфактанта может существенно изменить характер движения в тонком слое жидкости.

Процессы структурообразования на свободной поверхности тонкого слоя в присутствии нерастворимого сурфактанта изучались в [354]. Проводилось линейное и нелинейное исследование устойчивости аналитически, с использованием теории возмущений, а также численно, методом прямого численного счета. Аналитически было показано, что увеличение ван-дер-ваальсового межмолекулярного взаимодействия приводит к росту возмущений. Величина поверхностной диффузии также способна дестабилизировать систему.

Работа [331] исследует особенности поведения тонкого слоя жидкости, на поверхности которого находится достаточно большая концентрация нерастворимого сурфактанта. Рассматривается «классическая» гидродинамическая задача с выводом эволюционных уравнений для высоты слоя и поверхностной концентрации. Затем эти уравнения были переформулированы в градиентные формы, основанные на функционале свободной энергии, которая состоит из эффектов смачиваемости, капиллярности и вклада сурфактанта в общую энтропию системы.

В результате были получены следующие результаты: для такой специфической системы необходимо на поверхности иметь эволюционное уравнение для поверхностной диффузии, а также на поверхности необходимо записывать полное нелинейное уравнение для концентрации. Для достаточно тонких слоев в эволюционном уравнении необходимо учитывать ван-дер-ваальсовое межмолекулярное взаимодействие.



a

b

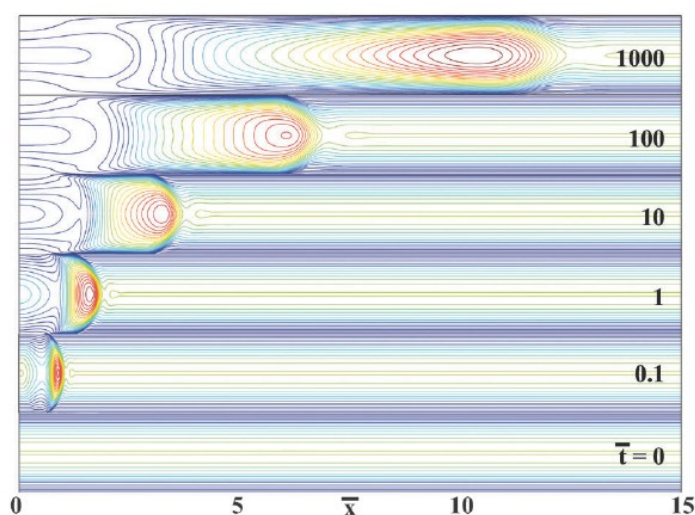


Рис.1.17. Профиль движения (a) и процесс образования пальчикового движения (b) для слоя PFOTS, из [319].

Учет межмолекулярного взаимодействия необходим для описания пальчиковых структур на поверхности границы раздела «жидкость – пар», как

показано в работах [240, 319, 352], где численно исследовались полные нелинейные уравнения системы (1.17). Примеры таких структур приведены на Рис. 1.17.

Эффект растворимости сурфактанта и его влияние на динамику и структурообразование на поверхности тонкого слоя жидкости также были изучены в работах [75, 76, 122, 132, 158, 317, 372, 373]. Длинноволновое приближение в этом случае также включает в себя предположение о быстром процессе объемной диффузии, что позволяет получить систему трех эволюционных уравнений для толщины слоя, поверхностной концентрации сурфактанта Γ и объемной концентрации C , которая в безразмерном виде имеет вид:

$$\begin{aligned} h_t &= -\nabla \cdot \left(\frac{Ca}{3} h^3 \nabla \nabla^2 h + \frac{1}{2} h^2 \nabla \sigma \right) \\ \Gamma_t &= \frac{\nabla^2 \Gamma}{Pe_s} - \nabla \cdot \left(\frac{Ca}{2} h^2 \Gamma \nabla \nabla^2 h + h \Gamma \nabla \sigma \right) + J \\ C_t &= \frac{1}{h Pe_b} \nabla \cdot (h \nabla C) - \left(\frac{Ca}{3} h^2 \nabla \nabla^2 h - \frac{h}{2} \nabla \sigma \right) \cdot \nabla C - \frac{\beta_s J}{h} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Здесь $J = K_s(C - \Gamma)$ – это сорбирующий поток с поверхности в объем жидкости сурфактанта, также β_s и K_s определены как растворимые и сорбирующие кинетические параметры соответственно. При $\beta_s \ll 1$ имеет место слабое растворение сурфактанта и система переходит в (1.14). Для значений параметра $K_s \gg 1$ наблюдается эффект быстрой сорбирующей кинетики, что приводит к тому, что поверхностная и объемная концентрации будут иметь одинаковое значение за характерное время $1/K_s$, безразмерное число Pe_b есть объемное число Пекле. Численные вычисления данной системы, приведенные в работе [205], показали, что при хорошей растворимости сурфактанта наблюдаются стабилизация в движении поверхностных структур и уменьшение градиентов поверхностной концентрации. Работа [206] посвящена изучению эффекта массопереноса, вызванного растворением в объеме сурфактанта, первоначально располагающегося только на поверхности.

Динамика высыхания ультратонких пленок, содержащих поверхностно-активные частицы, при испарении рассматривалась в [302]. Эволюционные уравнения для высоты слоя, поверхностной и объемной концентрации сурфактанта получены с использованием длинноволнового приближения. Линейный анализ устойчивости и численное моделирование показали, что динамика процесса зависит от следующих параметров: начальной концентрации сурфактанта, скорости испарения и поверхностной подвижности сурфактанта. Результаты показывают, что первоначально равномерно распределенные частицы встраиваются в некие стабильные конструкции прямоугольной и цилиндрической геометрии. Нелинейная эволюция тонкого слоя вязкой жидкости в присутствии растворимого сурфактанта изучалась в [353]. Задача решалась в длинноволновом приближении, и рассматривалась быстрая диффузия сурфактанта в жидкость. В результате исследований установлено, что разрыв тонкой пленки и образование отдельных капель могут являться следствием увеличения ван-дер-ваальсовых сил взаимодействия, растворимости сурфактанта. Процессу разрыва препятствуют концентрационный эффект Марангони и поверхностная вязкость. В работе [367] рассматривалось влияние теплового эффекта Марангони на устойчивость тонкого слоя высыхающей вследствие испарения жидкости. В объеме жидкости находится стабильная дисперсия коллоидных частиц. Для достаточно тонких пленок показано, что процесс испарения может вызвать движение, обусловленное зависимостью коэффициента поверхностного натяжения от температуры (тепловой эффект Марангони), что приводит к деформации первоначально плоской свободной поверхности. В тонкопленочном пределе получены уравнения для скорости, температуры и концентрации коллоидных частиц. При больших числах Пекле наблюдается образование коллоидных мицелл из частиц. Тепловой эффект Марангони оказывает дестабилизирующее воздействие на образование коллоидных мицелл.

Детальное изучение структур, образующихся на поверхности (мономеры) и в объеме (мицеллы), проведено в работах [145, 244, 295, 374]. В работе [237] впервые был обнаружен экспериментальный эффект образования пальчиковой структуры на поверхности (первоначально чистой) тонкого слоя жидкости, когда на ее свободную поверхность помещается капля этой же жидкости, «загрязненной» поверхностно-активным веществом. На Рис. 1.18 приведен пример таких пальцеобразных структур.

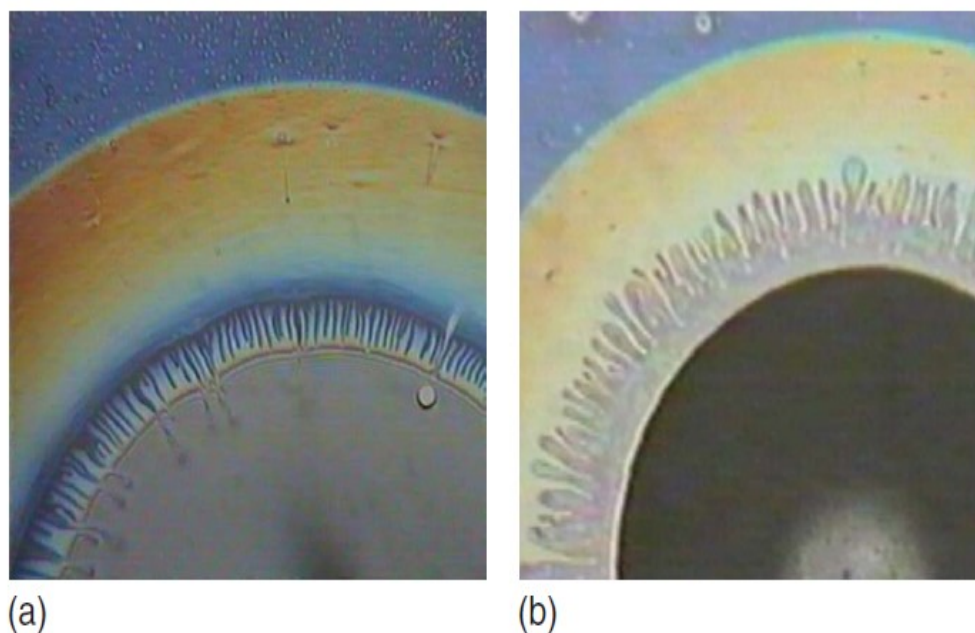


Рис.1.18. Примеры образования пальчиковых эффектов, вызванных неоднородностью сурфактанта на поверхности, приведено из [132].

В дальнейшем этот эффект был экспериментально и теоретически изучен во многих работах [3, 77–79, 94, 120, 122, 160, 179, 185, 192, 339]. В работе [354] было показано, что пальчиковые структуры могут образовываться на поверхности слоя жидкости, даже если не рассматривать ван-дер-ваальсовое взаимодействие, что существенно отличает данную систему уравнений от задачи (1.17). Механизмом, отвечающим за образование поверхностных структур, является объемная диффузия сурфактанта. Также было показано, что увеличение растворимости сурфактанта дестабилизирует процесс распространения сурфактанта и на поверхности, и в объеме. Поверхностная динамика процесса

пальчиковой неустойчивости исследуется в [176,177,243]. Влияние растворимого сурфактанта на величину смачиваемости контактной линии исследуется в работе [230]. В упомянутой работе выводится кинетическая формула для смачиваемости контактной линии «твердое тело – жидкость – пар» как функция концентрации сурфактанта. Показано, что для некоторого диапазона параметров на контактной линии возможно образование пальчиковых структур, приводятся численные и экспериментальные сравнения для капли трисилоксана. В работе [294] рассматривается экспериментально система «растворимый сурфактант – вода» в присутствии эффекта испарения. На поверхности возникают градиенты концентрации, что приводит к появлению концентрационного эффекта Марангони. Теоретически исследуется система уравнений, состоящая из гидродинамических и физико-химических уравнений. Определен диапазон химических характеристик сурфактанта, при которых на поверхности имеют место пальчиковые структуры.

В работе [172] теоретически исследуется влияние растворимого сурфактанта на динамику тонкого слоя испаряющейся полярной жидкости. В рамках длинноволнового уравнения получены эволюционные уравнения для величины толщины слоя, а также поверхностной и объемной концентраций сурфактанта. В рамках рассмотрения «замороженного» состояния исследована устойчивость данной системы. Обнаружено, что имеются два типа неустойчивости: один тип соответствует неустойчивости относительно испарения [234], а другой тип связан с неустойчивостью, причиной которой является концентрация сурфактанта. Показано, что в области малых величин параметра испарения наличие концентрационной моды неустойчивости может существенно изменить характер поверхностных структур.

В работе [273] рассматривается горизонтальный тонкий слой жидкости на твердой подложке. На свободной поверхности располагаются два химически активных вещества, активатор и ингибитор, между которыми происходит химическая реакция по типу ФитцХью-Нагумо. В зависимости от значений

химических параметров «активатор – ингибитор» система генерирует волны неустойчивости соответствующих компонентов. Предполагается, что ингибитор обладает гораздо большими поверхностно-активными свойствами, чем активатор. Таким образом, градиент вдоль его концентрации вызывает концентрационное движение Марангони на поверхности и порождает конвекцию внутри слоя. Для получения эволюционных уравнений для толщины слоя, а также концентраций для активатора и ингибитора использовалось длинноволновое приближение. Эти уравнения позволили произвести теоретический и численный анализ полученной системы. Линейный анализ устойчивости показал, что стационарное состояние может стать неустойчивым двумя различными способами. В первом случае неустойчивость возникает в результате химической реакции, которая порождает движение, и на поверхности образуются пространственно-периодические структуры. Во втором случае неустойчивость образуется вследствие градиента концентрации (концентрационный эффект Марангони) даже в отсутствие химической реакции. Одним из последних обзоров, посвященных особенностям высыхания коллоидных пленок, является работа [296]. Рассматриваются различные эффекты, оказывающие влияние на процессы структурообразования свободной поверхности. Обсуждаются технологические вопросы влияния сурфактанта на фиксирование поверхностных структур.

Основные выводы по Главе 1.

С развитием нанотехнологий в различных прикладных областях за последние двадцать лет мы наблюдаем большой интерес к изучению поведения тонких пленок различных жидкостей. Среди прочих жидкостей стоит особо выделить полярные жидкости, поскольку их электромеханические свойства вносят дополнительный вклад в эволюцию пленки, когда речь идет о малых масштабах. Так как вода является типичным представителем полярных жидкостей и она (вода) используется во многих технологических приборах, то изучение динамики движения тонких водяных пленок имеет явный практический смысл.

Как показали многочисленные экспериментальные работы, эффект Марангони может определять движение в тонких жидких пленках, причем этот эффект возникает и благодаря разности температур, и из-за добавления поверхностно-активных веществ. Особенно это актуально для воды, так как коэффициент поверхностного натяжения для этой жидкости имеет довольно большое значение. По-видимому, нет работ, описывающих эффект Марангони в тонких пленках полярной жидкости, где учитывались бы испарение, градиент поверхностного натяжения и расклинивающее давление, связанное с присущим полярным жидкостям двойным электрическим слоем. Различные эксперименты показывают, что эффект Марангони и испарение жидкости определяют движение жидкой водяной пленки в различных технологических процессах, а значит, необходимо понимание принципа и результата их влияния. Также стоит отметить, что водяная пленка является прекрасным абсорбентом, а динамика движения «чистой» поверхности и поверхности, имеющей посторонние примеси, обладает существенными отличиями. Также следует отметить, что большинство жидких диэлектриков являются полярными жидкостями (касторовое масло и множество трансформаторных масел) и взаимодействие электрических и термокапиллярных эффектов определяет поведение тонкого неизотермического слоя полярной жидкости во внешнем электрическом поле.

Целью данной диссертации являлось теоретическое численное исследование (в рамках длинноволнового приближения) влияния процессов испарения, термокапиллярного и солютокапиллярного эффектов на движение и структурообразование тонкой пленки полярной жидкости. Исследование включает в себя следующие задачи:

- 1) Исследование динамики движения и структурообразования на поверхности тонкого слоя испаряющейся полярной жидкости.
- 2) Выведение эволюционных уравнений тонкой жидкой пленки для термокапиллярного и солютокапиллярного эффектов Марангони.
- 3) Построение численных моделей для исследования влияния различных эффектов Марангони на устойчивость движения тонкого слоя полярной жидкости.
- 4) Изучение взаимодействия электрического и термокапиллярного механизмов неустойчивости для определения конвективной устойчивости тонкого слоя полярной жидкости.
- 5) Проведение анализа устойчивости тонкого слоя испаряющейся полярной жидкости при различных типах эффекта Марангони относительно продольных и поперечных возмущений.

Глава 2. Исследование процессов динамики и структурообразования тонкого слоя полярной жидкости

Макроскопические тонкие жидкие пленки, порядка 100–1000 ангстрем, играют важную роль в таких областях научного знания, как биофизика, физика, химия, а также находят свое применение в различных технологических приложениях. В инженерной технологии эти пленки применяются в процессах создания нанотрубок, микропроцессоров и тонкой фильтрации [222, 270, 350].

Поскольку испаряющийся тонкий слой жидкости и окружающий газ разделены деформируемой межфазной поверхностью, в их слоях может появляться волновое движение; волны могут перемещаться, динамика волнового движения может изменяться, а при некоторых условиях могут возникнуть и квазипериодические или хаотические структуры. В таких пленках могут возникать разрывы, при которых появляются расширяющиеся отверстия пальцеобразной формы [288]. Пленка может разорваться, создавая отверстия в жидкости, в которых часть подложки может контактировать с окружающим газом. Появляются изменения в структуре течений, имеющих линии контакта «газ – жидкость – твердое тело», приводящие к образованию пальцеобразных структур [128, 130, 298].

Характерной особенностью полярных жидкостей (например, воды) является присутствие как длиннодействующих ван-дер-ваальсовых межмолекулярных сил, так и короткодействующих полярных сил, которые ассоциируются с двойным электрическим слоем. Благодаря такому взаимодействию свободная поверхностная энергия линии раздела «подложка – жидкость» $g(h)$ является немонотонной функцией от ее толщины. В этом случае тонкий слой полярной жидкости при испарении может иметь два устойчивых значения толщины слоя h_1 и h_2 , а также одно неустойчивое значение толщины слоя, расположенное между ними. Такое состояние реализуется в виде нестабильного фронта движения, благодаря динамике которого и формируется пальцеобразная

неустойчивость. Эволюционное уравнение, описывающее поведение испаряющейся полярной жидкости, приведено в [265, 298]. В настоящей главе проведено численное моделирование данного уравнения, а также исследовано влияние различных факторов на динамику движения и его устойчивость.

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим движение тонкого горизонтального слоя полярной вязкой несжимаемой жидкости (например, воды) h , который заключен между твердой подложкой и паром соответствующей жидкости. Декартовы координаты определим следующим образом: ось X направлена вдоль слоя, а ось Z – перпендикулярно (Рис. 2.1). Жидкость может испаряться в парообразную среду. Будем считать, что толщина слоя есть функция от координат и времени $h(x, t)$, а вектор скорости жидкости имеет две компоненты $\vec{v} = (u, w)$, где u и w – проекции на оси X и Z соответственно.

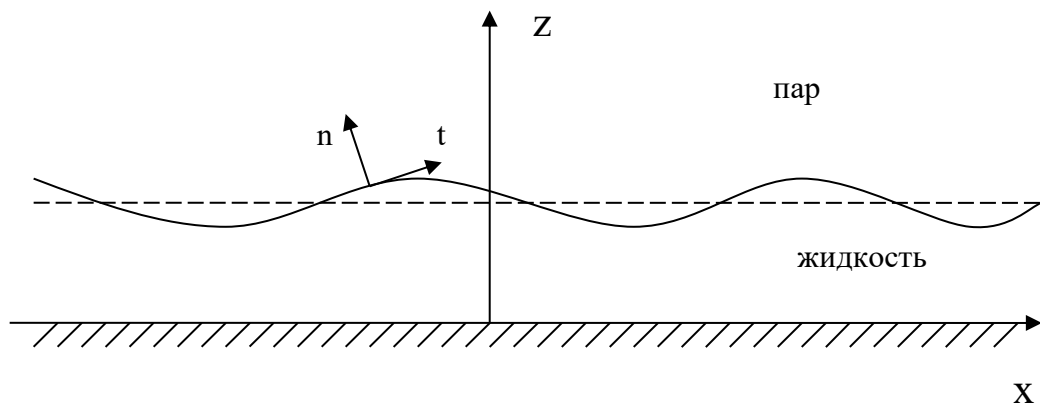


Рис.2.1. Геометрическая постановка задачи

Ввиду малой толщины слоя гравитационными эффектами в дальнейшем будем пренебрегать. Эволюционное уравнение для данной системы имеет следующий вид [299]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{h^3}{3\eta} \nabla \left[\frac{d\Phi(h)}{dh} - \sigma \nabla^2 h \right] - \frac{\kappa}{\rho} \left[\frac{d\Phi(h)}{dh} - \sigma \nabla^2 h - \rho \mu_v \right] \quad (2.1)$$

Здесь η есть динамическая вязкость жидкости, σ есть коэффициент поверхностного натяжения свободной границы «жидкость – пар», буквой ρ обозначается плотность жидкости, μ_v есть химический потенциал пара и, наконец, K обозначен параметр, характеризующий уровень испарения (он может быть получен из эксперимента или найден из кинетической теории газов). Для полярных жидкостей [295] энергия межмолекулярного взаимодействия выглядит следующим образом:

$$\Phi(h) = -\frac{A}{12\pi h^2} + S^P \exp\left[\frac{d_0 - h}{l_0}\right] = -\frac{A}{12\pi h^2} + S_0^P \exp\left[-\frac{h}{l_0}\right], \quad S_0^P = S^P \exp\left[\frac{d_0}{l_0}\right] \quad (2.2)$$

Здесь A – константа Гамакера, d_0 обозначает радиус межмолекулярного взаимодействия (порядка 0.2 нм) и l_0 является корреляционной длиной (около 0.6 нм). Значение параметра S^P определяется как полярная составляющая коэффициента растекания $S = S^{LW} + S^P$. Константа Гамакера для полярных жидкостей имеет отрицательное значение.

Преобразуем размерное уравнение (2.1) в безразмерную форму, для этого введем обозначения $h^* = \delta h$, $x^* = \alpha x$, $t^* = \beta t$. Подставляя эти величины в уравнение (2.1), приходим его к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\beta \delta^2}{3\alpha^2 \eta} \nabla \left[h^3 \nabla \left[-\frac{\sigma \delta}{\alpha^2} \nabla^2 h - \frac{A}{6\pi \delta^3 h^3} + S^{PN} \exp\left(\frac{-\delta h}{l_0}\right) \right] \right] \\ - \frac{\kappa \beta}{\rho \delta} \left[-\frac{\sigma \delta}{\alpha^2} \nabla^2 h - \frac{A}{6\pi \delta^3 h^3} + S^{PN} \exp\left(\frac{-\delta h}{l_0}\right) - \rho \mu_v \right], \quad S^{PN} = S_0^P / l_0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Выбирая параметры

$$\frac{\beta \delta^2}{3\alpha^2 \eta} \cdot \frac{\sigma \delta}{\alpha^2} = 1, \quad \frac{\beta \delta^2}{3\alpha^2 \eta} \cdot \frac{A}{6\pi \delta^3} = 1, \quad \delta = l_0 \quad (2.4)$$

мы получаем масштабные характеристики:

$$\alpha = \left(\frac{\delta\sigma}{S^{PN}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \beta = \frac{3\eta\sigma}{\delta(S^{PN})^2}, \quad \delta = \left(\frac{A}{6\pi S^{PN}} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.5)$$

Это позволяет записать уравнение (2.1) в безразмерной форме:

$$\partial_t h = \nabla \left[h^3 \nabla \left(\frac{1}{h^3} - \exp(-\chi h) - \nabla^2 h \right) \right] - \Omega \left(\frac{1}{h^3} - \exp(-\chi h) - \nabla^2 h - S \right). \quad (2.6)$$

В этом уравнении присутствуют три безразмерных параметра:

$$\Omega = \frac{18\pi\kappa\eta\sigma}{\rho(6\pi A^2 S^{PN})^{1/3}}, \quad S = \frac{\rho\mu_v}{S^{PN}}, \quad \chi = \frac{\delta}{l_0} = \frac{1}{l_0} \left(\frac{A}{6\pi S^{PN}} \right)^{1/3} \quad (2.7)$$

Здесь $\Omega > 0, \chi > 0, S < 0$, и эти параметры характеризуют уровень испарения, корреляционную длину и химический потенциал пара соответственно. Используя значения, приведенные в [310] для воды: $d_0 = 0.2 \text{ нм}$, $l_0 = 0.6 \text{ нм}$, $\eta = 10^{-3} \text{ г/м} \cdot \text{с}$, $A = -10^{-20} \text{ Дж}$, $\sigma = 0.08 \text{ Дж/м}^2$ и $S^P = 0.002 \text{ Дж/м}^2$, получим, что типичные значения для безразмерных параметров будут следующими: $\chi = 1.09$, $\Omega = 0.02$ и $S = -0.003$.

2.2. Методика и некоторые результаты численных вычислений

Уравнение (2.6) решалось численно при помощи методики конечных разностей с использованием полунеевной схемы Кранка-Николсон [42]. Граничные условия на обоих концах вычислительного интервала задавались следующим образом: $h_x = h_{xxx} = 0$. Представим уравнение (2.6) в виде конечных разностей:

$$\begin{aligned} \partial_t h = \frac{d}{dx} \left[h^3 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{h^3} - \exp(-\chi h) - \frac{d^2 h}{dx^2} \right) \right] - \Omega \left(\frac{1}{h^3} - \exp(-\chi h) - \frac{d^2 h}{dx^2} - S \right) = \\ \frac{d}{dx} \left[-h^3 h_{xxx} + \frac{3}{h} h_x - h_x \chi h^3 \exp(-\chi h) \right] - \Omega \left(\frac{1}{h^3} - \exp(-\chi h) - h_{xx} - S \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Раскрывая первую скобку и собирая слагаемые при одинаковой степени h , получаем следующее уравнение.

$$\begin{aligned}
h_t &= -h^3 h_{xxxx} - 3h^2 h_{xxx} h_x + \frac{3}{h} h_{xx} - \frac{3}{h^2} h_x^2 - \chi h^3 \exp(-\chi h) h_{xx} - \\
&- \left[3\chi h^2 \exp(-\chi h) - \chi^2 h^3 \exp(-\chi h) \right] h_x^2 + \frac{\Omega}{h^3} - \Omega \exp[-\chi h] + \Omega h_{xx} + \Omega S = \\
&= -h^3 h_{xxxx} - 3h^2 h_{xxx} h_x + \left[\frac{3}{h} - \chi h^3 \exp(-\chi h) + \Omega \right] h_{xx} - \\
&- \left[\frac{3}{h^2} + 3\chi h^2 \exp(-\chi h) - \chi^2 h^3 \exp(-\chi h) \right] h_x^2 + \frac{\Omega}{h^3} - \Omega \exp[-\chi h] + \Omega S.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Поэтому уравнение (2.9) можно представить в операторном виде:

$$h_t = N[h, h_x, h_{xx}, h_{xxx}, h_{xxxx}] \tag{2.10}$$

Тогда полуявная схема Кранка-Николсон имеет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2} N[h^{n+1}, h_x^{n+1}, h_{xx}^{n+1}, h_{xxx}^{n+1}, h_{xxxx}^{n+1}] + \frac{1}{2} N[h^n, h_x^n, h_{xx}^n, h_{xxx}^n, h_{xxxx}^n], \\
h_t &= \frac{1}{2} N^{n+1} + \frac{1}{2} N^n, \quad h^{n+1} = h^n + \frac{\Delta t}{2} [N^{n+1} + N^n].
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Представим оператор N^{n+1} как функцию оператора N^n :

$$\begin{aligned}
N^{n+1} &= N^n + \frac{\partial N}{\partial h} \delta h + \frac{\partial N}{\partial h_x} \delta h_x + \frac{\partial N}{\partial h_{xx}} \delta h_{xx} + \frac{\partial N}{\partial h_{xxx}} \delta h_{xxx} + \frac{\partial N}{\partial h_{xxxx}} \delta h_{xxxx} = \\
&= N^n + N_0 \delta h + N_1 \delta h_x + N_2 \delta h_{xx} + N_3 \delta h_{xxx} + N_4 \delta h_{xxxx}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

где

$$\begin{aligned}
N_0 &= -3h^2 h_{xxxx} - 6hh_x h_{xxx} + \left[-\frac{3}{h^2} - 3\chi h^2 \exp(-\chi h) + \chi^2 h^3 \exp(-\chi h) \right] h_{xx} - \\
&- \left[-\frac{6}{h^3} + (6 - 6\chi h + \chi^2 h^2) \chi h \exp(-\chi h) \right] h_x^2 + \Omega \left[-\frac{3}{h^4} + \chi \exp(-\chi h) \right], \\
N_1 &= -3h^2 h_{xxx} - 2h_x \left[\frac{3}{h^2} + (3 - \chi h) \chi h^2 \exp(-\chi h) \right], \\
N_2 &= \frac{3}{h} - \chi h^3 \exp(-\chi h) + \Omega, \\
N_3 &= -3h^2 h_x, \quad N_4 = -h^3
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Вследствие этого уравнение (2.11) можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
h_t &= \frac{1}{2} N^{n+1} + \frac{1}{2} N^n = N^n + \frac{1}{2} \left[N_0 (h^{n+1} - h^n) \right] + \frac{1}{2} \left[N_1 (h_x^{n+1} - h_x^n) \right] + \\
&+ \frac{1}{2} \left[N_2 (h_{xx}^{n+1} - h_{xx}^n) \right] + \frac{1}{2} \left[N_3 (h_{xxx}^{n+1} - h_{xxx}^n) \right] + \frac{1}{2} \left[N_4 (h_{xxxx}^{n+1} - h_{xxxx}^n) \right]
\end{aligned} \tag{2.14}$$

В итоге, представляя левую часть уравнения в виде конечной разности, получаем:

$$\begin{aligned}
\frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} &= N^n + \frac{1}{2} \left[N_0 h^{n+1} + N_1 h_x^{n+1} + N_2 h_{xx}^{n+1} + N_3 h_{xxx}^{n+1} + N_4 h_{xxxx}^{n+1} \right] - \\
&- \frac{1}{2} \left[N_0 h^n + N_1 h_x^n + N_2 h_{xx}^n + N_3 h_{xxx}^n + N_4 h_{xxxx}^n \right].
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Собирая в левую часть все слагаемые на $n+1$ шаге, а в правую – слагаемые, имеющие индекс n , мы получаем следующую формулу:

$$\begin{aligned}
h^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \left[N_0 h^{n+1} + N_1 h_x^{n+1} + N_2 h_{xx}^{n+1} + N_3 h_{xxx}^{n+1} + N_4 h_{xxxx}^{n+1} \right] &= \\
= h^n - \frac{\Delta t}{2} \left[N_0 h^n + N_1 h_x^n + N_2 h_{xx}^n + N_3 h_{xxx}^n + N_4 h_{xxxx}^n \right] + \Delta t N^n &= F_n, \\
h^{n+1} \left(1 - \frac{\tau}{2} N_0 \right) - \frac{\Delta t}{2} N_1 h_x^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} N_2 h_{xx}^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} N_3 h_{xxx}^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} N_4 h_{xxxx}^{n+1} &= F_n.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Записывая производные через конечные разности, приходим к уравнению:

$$\begin{aligned}
& h_j^{n+1} \left(1 - \frac{\Delta t}{2} N_0 \right) - \frac{\Delta t}{2} N_1 \left[\frac{h_j^{n+1} - h_j^{n-1}}{2\Delta x} \right] - \frac{\Delta t}{2} N_2 \left[\frac{h_{j+1}^{n+1} - 2h_j^{n+1} + h_j^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right] - \frac{\Delta t}{2} N_3 \left[\right. \\
& \left. \left[\frac{h_{j+2}^{n+1} - 2h_{j+1}^{n+1} + 2h_{j-1}^{n+1} - h_{j-2}^{n+1}}{2(\Delta x)^3} \right] - \frac{\Delta t}{2} N_4 \left[\frac{h_{j+2}^{n+1} - 4h_{j+1}^{n+1} + 6h_j^{n+1} - 4h_{j-1}^{n+1} + h_{j-2}^{n+1}}{(\Delta x)^4} \right] \right] = F_n.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Наконец, в итоге получаем пятиточечную неявную схему:

$$A_j h_{j-2}^{n+1} + B_j h_{j-1}^{n+1} + C_j h_j^{n+1} + D_j h_{j+1}^{n+1} + E_j h_{j+2}^{n+1} = F_j^n$$

$$\begin{aligned}
A_j &= -\frac{\Delta t}{2(\Delta x)^3} \left[\frac{N_4}{\Delta x} - \frac{N_3}{2} \right] \\
B_j &= \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{2N_4}{(\Delta x)^3} - \frac{N_3}{(\Delta x)^2} - \frac{N_2}{\Delta x} + \frac{N_1}{4} \right] \\
C_j &= \left[\frac{3\Delta t N_4}{(\Delta x)^4} + \frac{\Delta t N_2}{2(\Delta x)^2} + 1 - \frac{\Delta t N_0}{2} \right] \\
D_j &= \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{2N_4}{(\Delta x)^3} + \frac{N_3}{(\Delta x)^2} - \frac{N_2}{\Delta x} - \frac{N_1}{4} \right] \\
E_j &= -\frac{\Delta t}{2(\Delta x)^3} \left[\frac{N_4}{\Delta x} + \frac{N_3}{2} \right]
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Здесь введенные обозначения Δt и Δx есть дискретизированные шаги по времени и пространству соответственно. Для численной реализации использовалась пятиточечная формула прогонки, приведенная в [53]. Некоторые результаты вычислений приведены на Рис. 2.2.

Данный рисунок показывает профиль движения тонкого слоя жидкости при различных значениях параметра испарения Ω . Различие в форме движения лучше иллюстрирует внутренняя картинка. Когда уровень испарения достаточно высокий (Рис. 2.2(a), первоначально образовавшийся гребень, появление которого описано в [308], постепенно исчезает, и профиль становится монотонным. При малом уровне испарения (Рис. 2.2(b)) гребень имеет постоянную устойчивую форму. Решения, представленные на Рис. 2.2,

показывают стационарное движение фронта между двумя равновесными значениями толщины с некоторой постоянной скоростью, которая может быть получена непосредственно из вычислительных данных или вычислена при помощи аналитической формулы из стационарного состояния уравнения (2.1).

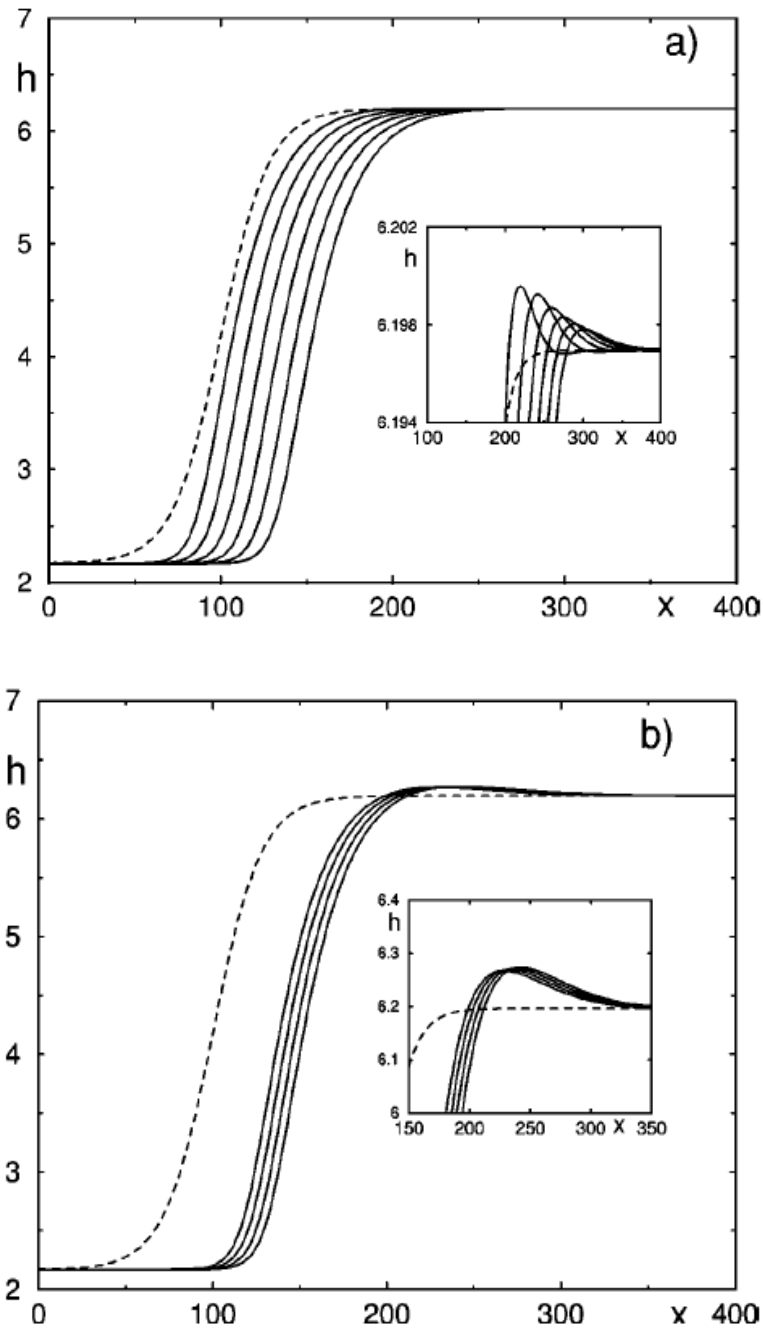


Рис.2.2. Профиль распространения фронта для $S = -0.003$ и $\chi = 1.085$ для $\Omega = 0.78$ (a) и $\Omega = 0.078$ (b). Пунктирной линией обозначено начальное распределение. Внутренняя картинка показывает динамику гребня.

Считая, что все производные равны нулю и равновесный профиль слоя есть функция только скорости и времени $h_0(x - Ut)$, приходим к следующей формуле:

$$U = \frac{\Omega}{h_{0_2} - h_{0_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{1}{h_0^3} + \exp(-\chi h_0) - S \right] dx \quad (2.19)$$

Здесь $h_0(x)$ – численно полученный равновесный профиль, а h_{0_1} и h_{0_2} – устойчивые значения «тонкой» и «толстой» толщин слоя. В работе были использованы оба метода, которые показали одинаковый результат. Зависимость скорости распространения фронта жидкости от безразмерного параметра испарения Ω приведена на Рис. 2.3. Также скорость можно найти из Рис.2.2.

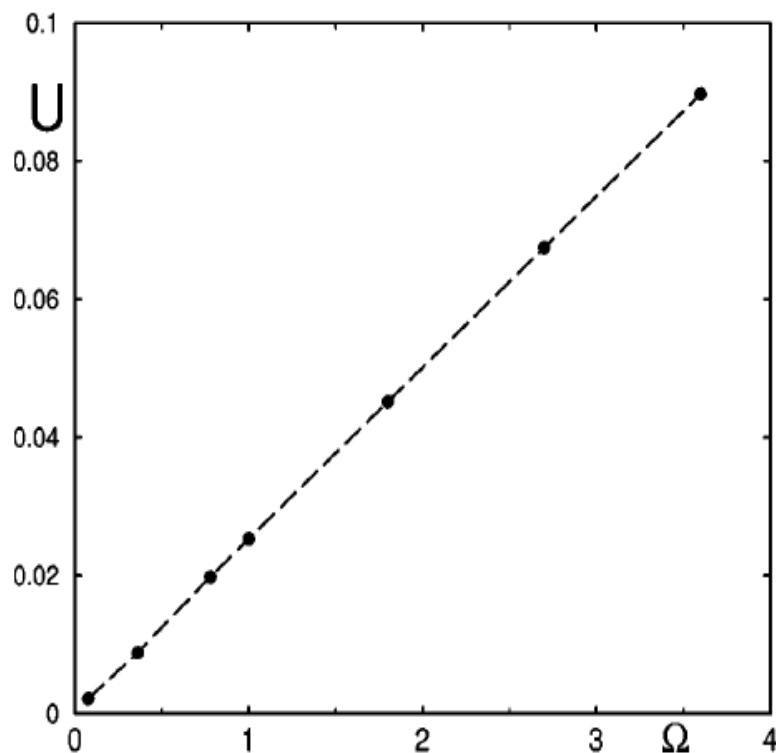


Рис.2.3. Зависимость скорости распространения фронта U от параметра испарения Ω для $S = -0.003$ и $\chi = 1.085$.

Как видно из Рис. 2.3, зависимость скорости распространения фронта от параметра испарения является линейной. Кроме этого, необходимо отметить, что два устойчивых состояния слоя h_{0_1} и h_{0_2} не зависят от параметра испарения Ω . Величины «тонкого» и «толстого» устойчивых значений толщины слоя

определяет безразмерный параметр M , который пересекает график химического потенциала полярной жидкости в двух точках (Рис. 1.2). При $\Omega \rightarrow 0$ скорость распространения фронта тоже стремится к нулю, в соответствии с законом сохранения массы.

2.3. Исследование устойчивости движения фронта

В рамках исследования линейной устойчивости, полученной в результате численных расчетов формы стационарной волны $h_0(x - Ut)$, рассмотрим устойчивость бесконечно малых возмущений фронта, представленных в следующем виде: $h' = u(x - Ut) \times \exp(\omega t + iky)$, где ω и k – декремент и волновое число для возмущений, а ось y направлена перпендикулярно распространению фронта тонкого слоя x . Уравнение (2.1) относительно координат x и y примет вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h}{\partial t} = & \frac{1}{3\eta} \partial_x h^3 \partial_x \left[\frac{d\Phi(h)}{dh} - \sigma \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \right] + \\
 & + \frac{1}{3\eta} \partial_y h^3 \partial_y \left[\frac{d\Phi(h)}{dh} - \sigma \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \right] - \frac{\kappa}{\rho} \left[\frac{d\Phi(h)}{dh} - \sigma \nabla^2 h - \rho \mu_v \right], \\
 \omega u - U u_x = & \frac{1}{3\eta} \partial_x h_0^3 \partial_x \left[\frac{d^2 \Phi(h)}{dh^2} u - \sigma (u_{xx} - k^2 u) \right] + \\
 & + \frac{1}{3\eta} \partial_x 3h_0^2 u \partial_x \left(\frac{d\Phi(h)}{dh} - \sigma h_{0xx} \right) + \frac{1}{3\eta} h_0^3 \partial_{yy} \left[\frac{d^2 \Phi(h)}{dh^2} u - \sigma (u_{xx} - k^2 u) \right] - \\
 & - \frac{\kappa}{\rho} \left[\frac{d^2 \Phi(h)}{dh^2} u - \sigma (u_{xx} - k^2 u) - \rho \mu_v \right].
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Раскрывая слагаемые в уравнении (2.20), мы получаем уравнение:

$$\begin{aligned}
\omega u - Uu_x = & \frac{1}{3\eta} h_0^3 \frac{d}{dx} \left\{ h_0^3 \left[\frac{d^2 \Phi(h)}{dh^2} u' + \frac{d^3 \Phi(h)}{dh^3} h_0' u - \sigma u''' + \sigma k^2 u' \right] \right\} + \\
& + \frac{1}{3\eta} \frac{d}{dx} \left\{ 3h_0^2 \cdot \left(\frac{d^2 \Phi(h)}{dh^2} h_0' - \sigma h_0''' \right) u \right\} + \\
& + \frac{1}{3\eta} h_0^3 \left[\frac{d^2 \Phi(h)}{dh^2} (-k^2 u) - \sigma (-k^2 u'' + k^4 u) \right] - \\
& - \frac{\kappa}{\rho} \left[\frac{d^2 \Phi(h)}{dh^2} u - \sigma (u'' - k^2 u) - \rho \mu_v \right].
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Здесь верхним штрихом обозначена производная по оси x . Собирая слагаемые, имеющие одинаковую степень относительно волнового числа k , получаем:

$$\begin{aligned}
\omega u - Uu' = & \frac{1}{3\eta} \frac{d}{dx} \left\{ -\sigma h_0^3 u''' + h_0^3 \frac{d^2 \Phi(h)}{dh^2} u' + u \left[\frac{d^3 \Phi(h)}{dh^3} h_0' + 3h_0^2 \frac{d^2 \Phi(h)}{dh^2} h_0' - 3\sigma h_0^2 h_0''' \right] \right\} + \\
& + k^2 \left\{ \frac{1}{3\eta} \left(3h_0^2 h_0' \sigma u' + h_0^3 \sigma u'' - h_0^3 \frac{d^2 \Phi(h)}{dh^2} u + \sigma h_0^3 u'' \right) - \frac{\kappa}{\rho} \sigma u \right\} + \\
& + k^4 \left\{ -\frac{1}{3\eta} h_0^3 u \right\} - \frac{\kappa}{\rho} \left[\frac{d^2 \Phi(h)}{dh^2} u - \sigma u'' - \rho \mu_v \right].
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Уравнение (2.22) удобно представить в операторной форме, которую можно разложить по четным степеням волнового числа:

$$\omega u + Lu = 0, \quad L = L_0 + k^2 L_2 + k^4 L_4 \tag{2.23}$$

где

$$L_0 = \frac{d}{dx} \left\{ -\frac{\sigma}{3\eta} h_0^3 u''' + \left(\frac{1}{3\eta} h_0^3 \frac{d^2 \Phi(h)}{dh^2} + \frac{\sigma \kappa}{\rho} \right) u' + \left(\frac{1}{3\eta} h_0' \frac{d}{dh_0} \left(h_0^3 \frac{d^2 \Phi(h)}{dh^2} \right) + U - \frac{\sigma}{\eta} h_0^2 h_0''' \right) u \right\} +$$

$$+ \frac{\kappa}{\rho} \frac{d^2 \Phi(h)}{dh^2} u$$

$$L_2 = \frac{2\sigma}{3\eta} h_0^3 u'' + \frac{2\sigma}{\eta} h_0^2 h_0' u' - \left(\frac{1}{3\eta} h_0^3 \frac{d^2 \Phi(h)}{dh^2} + \frac{\kappa \sigma}{\rho} \right) u$$

$$L_4 = -\frac{1}{3\eta} h_0^3 u$$

Размерное уравнение (2.23) может быть приведено в безразмерную форму следующим преобразованием: $\sigma = 1$, $\eta = 1/3$, $\kappa/\rho = \Omega$. Далее будем представлять уравнение (2.23) в удобном операторном виде.

Процедура линеаризации приводит к задаче на собственные значения относительно бесконечно малых возмущений, а собственным числом данной задачи является декремент ω . Дифференциальное уравнение операторного вида для определения значения декремента запишется следующим образом:

$$\omega u + L_0 u + k^2 L_2 u + k^4 h_0^3 u = 0 \quad (2.24)$$

Линейные дифференциальные операторы L_0 и L_2 имеют вид:

$$L_0 = \frac{d}{dx} \left[f_{03} \frac{d^3}{dx^3} + f_{01} \frac{d}{dx} + f_{00} \right] + f_{000}, \quad L_2 = f_{22} \frac{d^2}{dx^2} + f_{21} \frac{d}{dx} + f_{20} \quad (2.25)$$

где

$$f_{03} = h_0^3, \quad f_{01} = \frac{3}{h_0} - \chi h_0^3 \exp(-\chi h_0) + \Omega$$

$$f_{00} = U + h_{0x} \left[-\frac{3}{h_0^2} - (3 - \chi h_0) \chi h_0^2 \exp(-\chi h_0) \right] - 3h_0^2 h_{0xxx}, \quad f_{000} = \Omega \left[\frac{3}{h_0^4} - \chi \exp(-\chi h_0) \right]$$

$$f_{22} = 6h_0^3, \quad f_{21} = 9h_0^2 h_{0x}, \quad f_{20} = -f_{01}$$

Здесь h_{0x} и h_{0xxx} обозначают первую и третью производные стационарного решения соответственно.

Задача на собственные значения (2.24) решалась численно на интервале $[-G; G]$ с использованием методики, приведенной в работе [168]. Диапазон интервала

выбирался таким образом, чтобы на границах отрезка решение задачи совпадало с его стационарными решениями. Важным представляется вопрос о постановке граничных условий численного решения (2.24). Задача (2.6) сформулирована для бесконечной области, но численное решение задачи на собственное значение возможно только для ограниченной области. Для бесконечной области граничные условия могут быть заданы путем разложения возмущения u и соответствующих производных вдалеке от линии движения волнового фронта. Поэтому для конечной области будем использовать такие граничные условия, которые будут совпадать с условиями для бесконечной области при $u \rightarrow +\infty$ и $u \rightarrow -\infty$.

Такой тип граничных условий для возмущения u и соответствующих производных можно реализовать с помощью методов разложения. Поэтому граничные условия могут быть записаны в следующей форме: $c_1^0 u + c_1^1 u_x + c_1^2 u_{xx} + \dots = 0$ для $x = -G$ и $c_2^0 u + c_2^1 u_x + c_2^2 u_{xx} + \dots = 0$ для $x = G$. Коэффициенты $c_1^{(i)}$ и $c_2^{(i)}$ должны быть выбраны таким образом, чтобы возмущения u на конечном участке вычислительной области были как можно меньше.

Граничные условия для задачи (2.24) после процедуры дискретизации могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} x = -G: \quad u_{-1} &= \alpha_{11} u_1 + \alpha_{12} u_2, \quad u_{-2} = u_2 + \beta_{11} u_1 + \beta_{10} u_0 \\ x = G: \quad u_{N+1} &= \alpha_{21} u_{N-1} + \alpha_{20} u_N, \quad u_{N+2} = u_{N-2} + \beta_{21} u_{N-1} + \beta_{20} u_N \end{aligned} \quad (2.26)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{2 + a_1 \Delta t}{2 - a_1 \Delta t}, \quad \alpha_{10} = \frac{b_1 (\Delta t)^2 - 2}{1 - a_1 \Delta t / 2}, \quad \alpha_{21} = \frac{-2 + a_2 \Delta t}{2 + a_2 \Delta t}, \quad \alpha_{20} = \frac{2 - b_2 (\Delta t)^2}{1 + a_2 \Delta t / 2} \\ \beta_{11} &= 2(-1 + \alpha_{11}) - 2a_1 \Delta t(1 + \alpha_{11}) + b_1 (\Delta t)^2 (1 - \alpha_{11}) \\ \beta_{10} &= -4a_1 \Delta t + \alpha_{10}(2 + 2a_1 \Delta t - b_1 (\Delta t)^2) \\ \beta_{21} &= 2(-1 + \alpha_{21}) - 2a_2 \Delta t(1 + \alpha_{21}) + b_2 (\Delta t)^2 (1 - \alpha_{21}) \\ \beta_{20} &= 4a_2 \Delta t + \alpha_{20}(2 - 2a_2 \Delta t - b_2 (\Delta t)^2) \end{aligned}$$

$$a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2), a_2 = -2\text{Re}(\lambda_3), b_1 = \lambda_1 \lambda_2, b_2 = (\lambda_3)^2$$

Здесь λ_i есть корни характеристического уравнения линейной задачи при $k = 0$.

Остановимся подробнее на получении корней характеристического уравнения. Считается, что $h_0 = h_{1,2} = \text{const}$ и такая постановка задачи соответствует $h \rightarrow 0$ для $x \rightarrow \pm\infty$. Тогда наша система выглядит следующим образом:

$$h_t = \partial_x \left[h_0^3 \partial_x \left(-h_{xx} + \frac{3}{h_0^4} h - \chi \exp(-\chi h_0) h \right) \right] - \Omega \left[\frac{3}{h_0^4} h - \chi \exp(-\chi h_0) h - h_{xx} \right]$$

По отношению к нейтральной моде, где левая часть равна нулю, уравнение принимает следующий вид:

$$-h_0^3 h_{xxxx} + h_{xx} \left[\frac{3}{h_0} - \chi h_0^3 \exp(-\chi h_0) + \Omega \right] - \Omega \left[\frac{3}{h_0^4} - \chi \exp(-\chi h_0) \right] h = 0$$

Тогда характеристическое уравнение данной задачи имеет вид:

$$-h_0^3 \lambda^4 + \lambda^2 \left[\frac{3}{h_0} - \chi h_0^3 \exp(-\chi h_0) + \Omega \right] - \Omega \left[\frac{3}{h_0^4} - \chi \exp(-\chi h_0) \right] = 0.$$

Учитывая, что $h_t = -U h_x$, уравнение (2.27) может быть представлено в форме:

$$-U \lambda = -h_0^3 \lambda^4 + \lambda^2 \left[\frac{3}{h_0} - \chi h_0^3 \exp(-\chi h_0) + \Omega \right] - \Omega \left[\frac{3}{h_0^4} - \chi \exp(-\chi h_0) \right].$$

Для фиксированных значений параметров задачи $\Omega = 0.0078, M = -0.003, \chi = 1.085$ равновесные значения толщины профиля и скорость будут равны $h_{01} = 2.23, h_{02} = 4.87$ и $U = 2.835 \cdot 10^{-4}$ соответственно.

Подставляя все приведенные выше параметры, можно получить четыре значения корня характеристического уравнения (2.30), которые могут быть представлены в следующей форме:

$$\begin{aligned} x < 0: \quad \lambda_1 &= 0.01493 & x > 0: \quad \lambda_{1,2} &= -0.009 \pm 0.008i \\ \lambda_2 &= 0.16933 \end{aligned}$$

Для $x < 0$ $h \approx C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, а при $x > 0$ $h \approx e^{\text{Re} \lambda x} (C_1 \cos \text{Im}(\lambda)x + C_2 \sin \text{Im}(\lambda)x)$.

Граничные условия $x < 0$ имеют вид: $(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) = x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1 \lambda_2$, что соответствует $h'' - (\lambda_1 + \lambda_2)h' + \lambda_1 \lambda_2 h = 0$, или в обозначениях, представленных в формуле (2.26), $u'' + a_1 u' + b_1 = 0$. Аналогичным образом граничные условия для $x > 0$ могут быть записаны в виде $u'' + a_2 u' + b_2 = 0$. В результате численного решения уравнения (2.26) с использованием граничных условий получаем дисперсионное соотношение $\omega(k)$ и определяем область параметров, где может существовать неустойчивость фронта движения испаряющегося тонкого слоя полярной жидкости относительно продольных возмущений.

На Рис. 2.4 приведены дисперсионные соотношения для различных значений параметра испарения. Из приведенных соотношений можно сделать следующий вывод: при больших значениях безразмерного параметра испарения Ω все поперечные возмущения затухают, однако с уменьшением значения величины Ω в области малых значений волнового числа k появляется область неустойчивости, которую будем идентифицировать как пальцеобразную неустойчивость [298].

Возмущения с таким значением волнового числа являются наиболее опасными для данной системы. На Рис. 2.5 представлена функциональная зависимость критического значения волнового числа k_{cr} от безразмерного параметра испарения Ω .

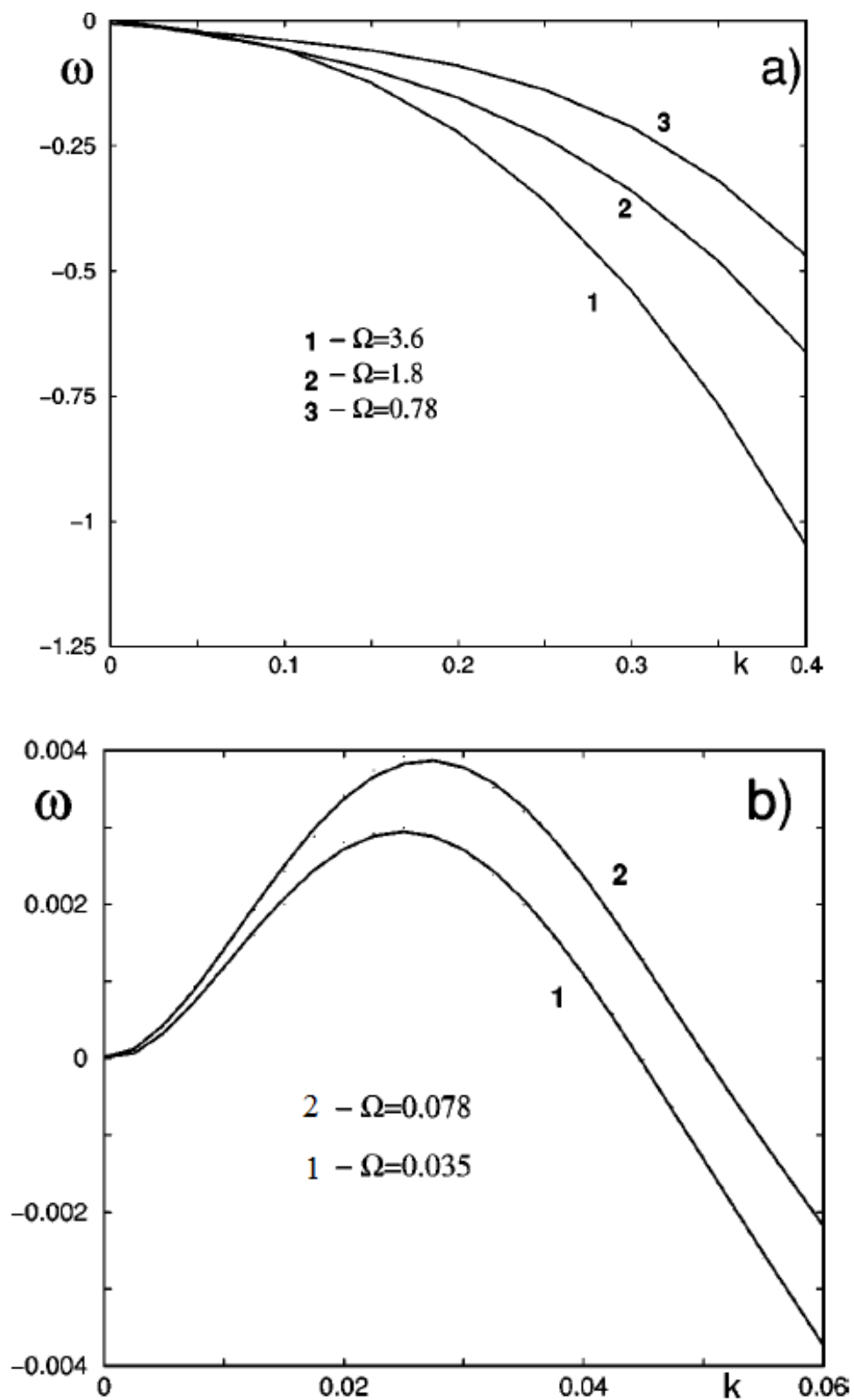


Рис.2.4. Дисперсионное соотношение $\omega(k)$ для устойчивого (а) и неустойчивого (б) состояния движения фронта при $S = -0.003$ и $\chi = 1.085$ и различных значениях параметра испарения Ω .

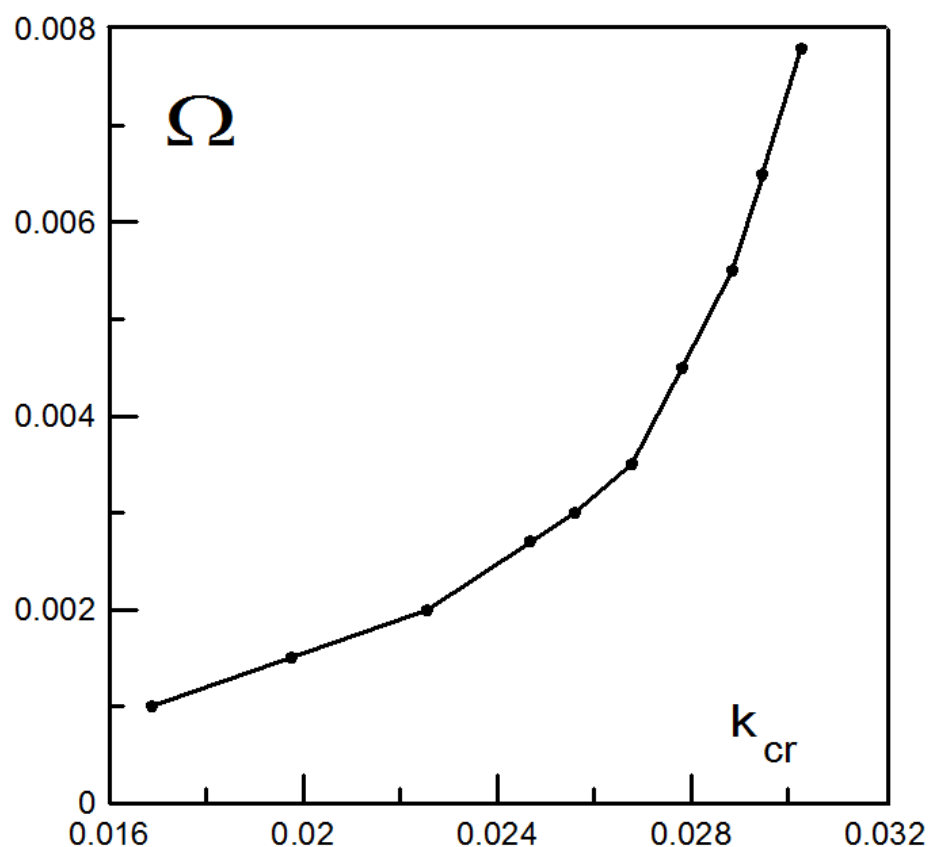


Рис.2.5. Зависимость критического значения волнового числа k_{cr} от безразмерного параметра испарения Ω . Остальные значения системы $S = -0.003$ и $\chi = 1.085$ соответственно.

Из анализа Рис. 2.5 можно сделать следующий вывод: при малом значении испарения тонкого слоя полярной жидкости наиболее опасными поперечными возмущениями являются такие, которые обладают значениями волнового числа, соответствующими $k_{cr} \rightarrow 0$.

Также определенный практический интерес представляет изучение влияния возмущений на устойчивость движения фронта испаряющейся жидкости при различных значениях химического потенциала пара. На Рис. 2.6 приведено дисперсионное соотношение между декрементом возмущений ω и волновым числом k для различных значений безразмерного параметра химического потенциала пара (2.7).

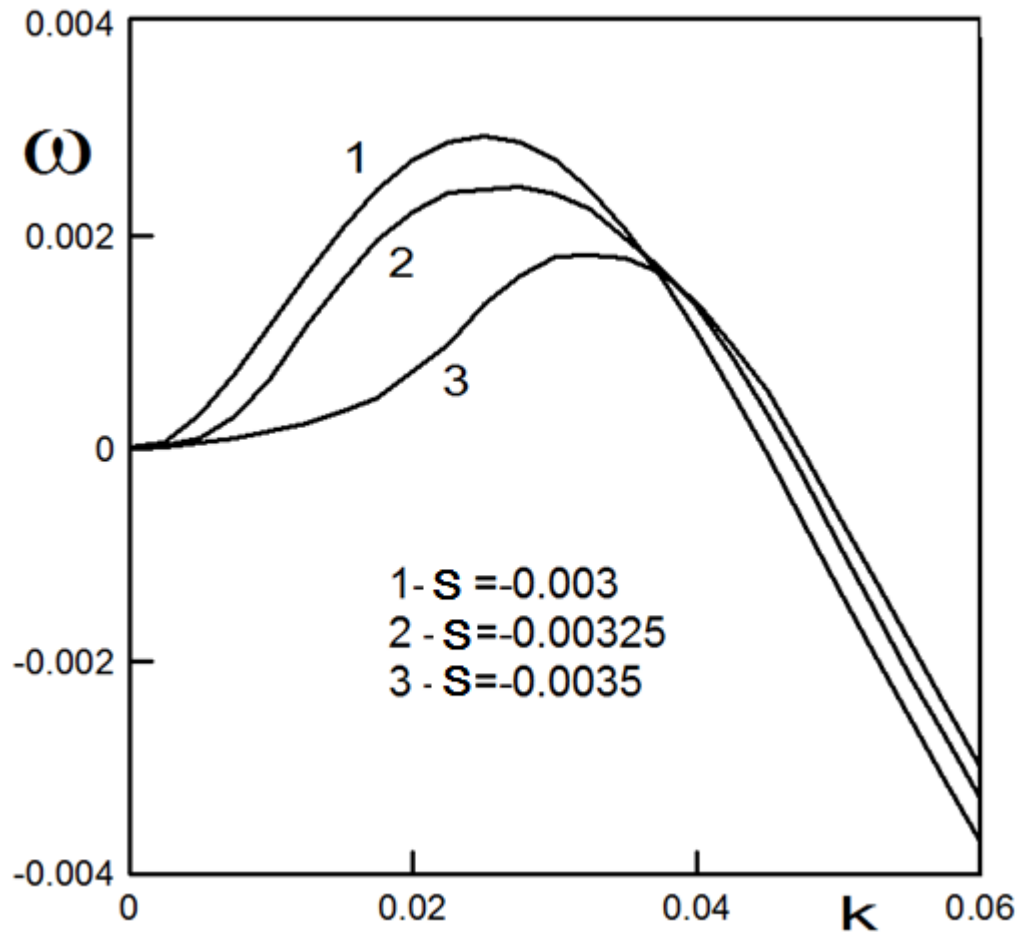


Рис.2.6. Дисперсионная зависимость декремента возмущений ω от волнового числа k при различных значениях величины химического потенциала пара. Остальные значения системы $\Omega = 0.035$ и $\chi = 1.085$ соответственно.

По представленным соотношениям можно говорить о том, что с увеличением безразмерного параметра испарения пара S устойчивость данной системы повышается, а область неустойчивости смещается в диапазон больших волновых чисел. Данный результат представляется вполне разумным. На Рис. 2.7 показана методика нахождения двух устойчивых значений толщины тонкого слоя испаряющейся жидкости в зависимости от величины химического потенциала пара.

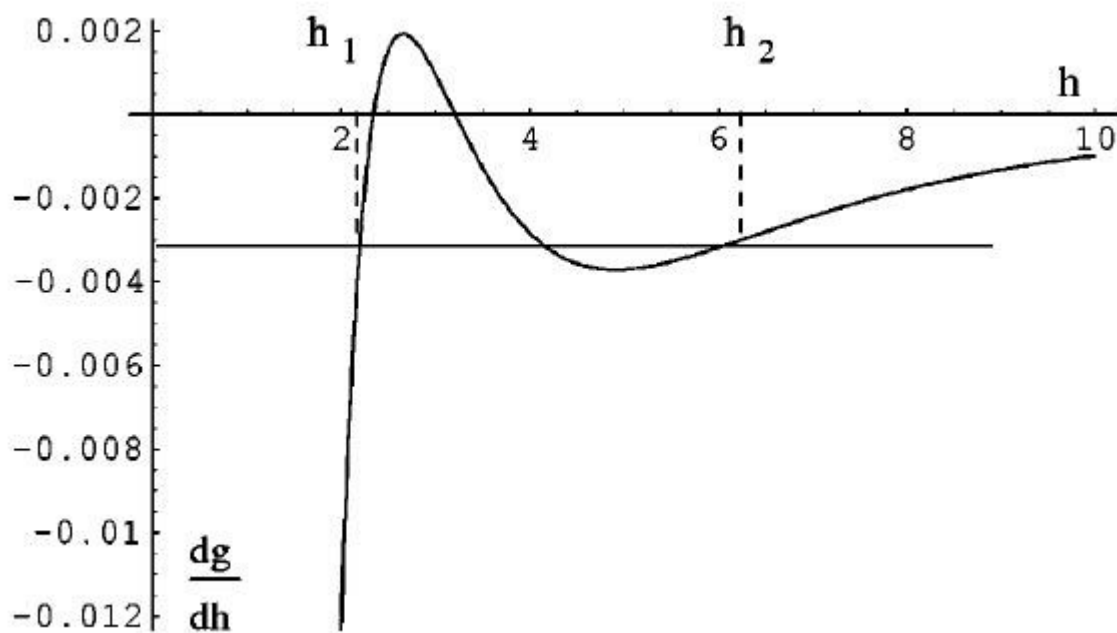


Рис.2.7. Немонотонная зависимость химического потенциала тонкого слоя полярной жидкости как функция его толщины при параметре $\chi = 1.085$. Прямая линия является значением величины химического потенциала пара $S = -0.003$.

Пересечение химических потенциалов жидкости и пара определяет устойчивые значения толщины тонкого слоя полярной испаряющейся жидкости, которые на рисунке обозначены буквами h_1 и h_2 . При малых величинах химического потенциала пара две устойчивые толщины слоя могут отличаться на порядок. С увеличением химического потенциала пара значение «тонкого» устойчивого слоя практически не изменяется, в отличие от величины «толстого» слоя. С уменьшением разности двух устойчивых величин толщины слоя происходит повышение устойчивости движения фронта.

2.4. Исследование длинноволновой неустойчивости

Как было показано выше, поперечные возмущения вызывают пальчиковую неустойчивость при малых значениях волнового числа $k \approx 0$, то есть мы имеем длинноволновую неустойчивость. В соответствии с этим можно определить длинноволновой предел пальчиковой неустойчивости движущегося фронта (2.24):

$$\omega u + Lu = 0 \quad (2.27)$$

Для малых значений волнового числа k декремент возмущений принимает следующий вид:

$$\omega(k) = \omega_2 k^2 + \omega_4 k^4 + \dots \quad (2.28)$$

Раскладывая в ряд по соответствующим степеням остальные параметры уравнения (2.27), получаем:

$$u = u_0 + k^2 u_2 + \dots \quad (2.29)$$

Подставляя эти разложения в уравнение (2.27), получаем уравнение для нулевого порядка разложения по волновому числу: $L_0 \omega_0 = 0$. Для следующего члена разложения имеем следующую задачу на собственное значение для u_2 :

$$L_0 u_2 = -\omega_2 u_0 - L_2 u_0 \quad (2.30)$$

где условием разрешимости данного уравнения (2.30) является выражение:

$$\omega_2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} u_0^* L_2 u_0 dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} u_0 u_0^* dx} \quad (2.31)$$

Здесь u_0 есть голдстоуновская мода, соответствующая оператору L_0 , и u_0^* есть соответствующая собственная функция, сопряженная оператору L_0 . Этот оператор будем обозначать как L_0^* .

Математическая задача на собственные значения для бесконечной области выглядит следующим образом:

$$L\psi = -\lambda\psi, \quad \psi \text{ ограничена на } x = \pm\infty \quad (2.32)$$

Используя $(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f \bar{g} dx$, стандартное выражение для сопряженного оператора, преобразования можно записать как

$$(L\psi, \varphi) = F(\psi, \varphi) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + (\psi, L^* \varphi) \quad (2.33)$$

Здесь ψ есть собственная функция оператора L , а φ есть собственная функция сопряженного оператора L^* . А величина F представляет слагаемые, которые получаются при интегрировании по частям.

Чтобы исключить из рассмотрения слагаемые, которые возникают при интегрировании при нахождении L^* , ограничимся рассмотрением дискретного спектра с экспоненциальным затуханием для ψ . Считается, что во всем дискретном спектре значения собственной функции ψ и всех ее производных на бесконечности обращаются в ноль. Отметим также, что для сопряженной собственной функции φ не требуется затухать на бесконечности до тех пор, пока она уменьшается быстрее, чем ψ . Следуя этим предположениям, можно переписать уравнение (2.33) в следующем виде: $(L\psi, \varphi) = (\psi, L^*\varphi)$ для получения сопряженного оператора L^* .

Рассмотрим подробнее методику нахождения сопряженного оператора L_0^* . Для этого в явном виде представим оператор L_0 из уравнения (2.25), который после нескольких подстановок имеет следующий вид:

$$L_0 = \frac{d}{dx} \left[h_0^3 \frac{d^3}{dx^3} + h_0^3 \left(\frac{3}{h_0^4} - \Lambda \right) \frac{d}{dx} + \left\{ h_{0x} \left(-\frac{3}{h_0^2} - (3h_0^2 - \chi h_0^3) \Lambda \right) - 3h_0^2 h_{0xxx} + U \right\} \right] - \Omega \left(\frac{3}{h_0^4} - \Lambda \right), \quad \text{где} \quad \Lambda = \chi \exp(-\chi h_0) \quad (2.34)$$

Проводя процедуру преобразования вышеобозначенного оператора L_0 , получаем окончательную формулу:

$$\begin{aligned}
L_0 = & h_0^3 \frac{d^4}{dx^4} + 3h_0^2 h_{0x} \frac{d^3}{dx^3} + h_0^3 \left(\frac{3}{h_0^4} - \Lambda \right) \frac{d^2}{dx^2} + \\
& + \left\{ h_{0x} \left[3h_0^2 \left(\frac{3}{h_0^4} - \Lambda \right) + h_0^3 \left(-\frac{12}{h_0^5} + \chi \Lambda \right) + \left(-\frac{3}{h_0^2} - (3h_0^2 - \chi h_0^3) \Lambda \right) \right] - \right. \\
& - 3h_0^2 h_{0xxx} + U \left. \right\} \frac{d}{dx} + h_{0xx} \left(-\frac{3}{h_0^2} - (3h_0^2 - \chi h_0^3) \Lambda \right) + \\
& + h_{0x}^2 \left(\frac{3}{h_0^3} - (6h_0 - 3h_0^2 \chi) \Lambda + \chi (3h_0^2 - \chi h_0^3) \Lambda \right) - \\
& - 6h_0 h_{0x} h_{0xxx} - 3h_0^2 h_{0xxxx} - \Omega \left(\frac{3}{h_0^4} - \Lambda \right). \tag{2.35}
\end{aligned}$$

Используя формулу (2.33), получим слагаемые для сопряженного оператора относительно всех степеней по переменной x .

Для слагаемого $h_0^3 d^4/dx^4$:

$$\begin{aligned}
\int h_0^3 \frac{d^4 \psi}{dx^4} \varphi dx &= h_0^3 \frac{d^3 \psi}{dx^3} \varphi \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int \frac{d^3 \psi}{dx^3} d(h_0^3 \varphi) dx = F_1 - \int \frac{d^3 \psi}{dx^3} \left(3h_0^2 h_{0x} \varphi + h_0^3 \frac{d\varphi}{dx} \right) dx = \\
&= F_1 - \frac{d^2 \psi}{dx^2} \left(3h_0^2 h_{0x} \varphi + h_0^3 \frac{d\varphi}{dx} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int \frac{d^2 \psi}{dx^2} d \left(3h_0^2 h_{0x} \varphi + h_0^3 \frac{d\varphi}{dx} \right) dx = \\
&= F_1 + F_2 + \int \frac{d^2 \psi}{dx^2} \left(6h_0 h_{0x}^2 \phi + 3h_0^2 h_{0xx} \phi + 3h_0^2 h_{0x} \frac{d\phi}{dx} + 3h_0^2 h_{0x} \frac{d\phi}{dx} + h_0^3 \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right) dx = \\
&= F_1 + F_2 + \frac{d\psi}{dx} \left(6h_0 h_{0x}^2 \phi + 3h_0^2 h_{0xx} \phi + 6h_0^2 h_{0x} \frac{d\phi}{dx} + h_0^3 \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \\
&- \int \frac{d\psi}{dx} d \left(6h_0 h_{0x}^2 \phi + 3h_0^2 h_{0xx} \phi + 6h_0^2 h_{0x} \frac{d\phi}{dx} + h_0^3 \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right) dx =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= F_1 + F_2 + F_3 - \int \frac{d\psi}{dx} \left(6h_{0x}^3 \phi + 12h_0 h_{0x} h_{0xx} \phi + 6h_0 h_{0x}^2 \frac{d\phi}{dx} + 6h_0 h_{0x} h_{0xx} \phi + \right. \\
&\quad + 3h_0^2 h_{0xxx} \phi + 3h_0^2 h_{0xx} \frac{d\phi}{dx} + 12h_0 h_{0x} h_{0xx} \frac{d\phi}{dx} + 6h_0^2 h_{0xx} \frac{d\phi}{dx} + 6h_0^2 h_{0x} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \\
&\quad + 3h_0^2 h_{0x} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + h_0^3 \frac{d^3 \phi}{dx^3} \Big) = F_1 + F_2 + F_3 - \int \frac{d}{dx} \left(6h_{0x}^3 \phi + 18h_0 h_{0x} h_{0xx} \phi + \right. \\
&\quad + 3h_0^2 h_{0xxx} \phi + (18h_0 h_{0x}^2 + 9h_0^2 h_{0xx}) \frac{d\phi}{dx} + 9h_0^2 h_{0x} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + h_0^3 \frac{d^3 \phi}{dx^3} \Big) dx = \\
&= F_1 + F_2 + F_3 - \psi \left(6h_{0x}^3 \phi + 18h_0 h_{0x} h_{0xx} \phi + 3h_0^2 h_{0xxx} \phi + (18h_0 h_{0x}^2 + 9h_0^2 h_{0xx}) \frac{d\phi}{dx} + \right. \\
&\quad + 9h_0^2 h_{0x} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + h_0^3 \frac{d^3 \phi}{dx^3} \Big) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int \phi \cdot d \left(6h_{0x}^3 \phi + 18h_0 h_{0x} h_{0xx} \phi + 3h_0^2 h_{0xxx} \phi + \right. \\
&\quad + (18h_0 h_{0x}^2 + 9h_0^2 h_{0xx}) \frac{d\phi}{dx} + 9h_0^2 h_{0x} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + h_0^3 \frac{d^3 \phi}{dx^3} \Big) \cdot dx = \\
&= F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \int \varphi \left[18h_0^2 h_{0xx} \varphi + 6h_{0x}^3 \frac{d\varphi}{dx} + 18h_{0x}^2 h_{0xx} \varphi + 18h_0 h_{0xx}^2 \varphi + \right. \\
&\quad + 18h_0 h_{0x} h_{0xxx} \varphi + 18h_0 h_{0x} h_{0xx} \frac{d\varphi}{dx} + 6h_0 h_{0x} h_{0xxx} \varphi + 3h_0^2 h_{0xxx} \varphi + 3h_0^2 h_{0xx} \frac{d\varphi}{dx} + \\
&\quad + 18h_{0x}^3 \frac{d\varphi}{dx} + 36h_0 h_{0x} h_{0xx} \frac{d\varphi}{dx} + 18h_0 h_{0x}^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + 18h_0 h_{0x} h_{0xx} \frac{d\varphi}{dx} + 9h_0^2 h_{0xxx} \frac{d\varphi}{dx} + \\
&\quad + 9h_0^2 h_{0xx} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + 18h_0 h_{0x}^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + 9h_0^2 h_{0xx} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + 9h_0^2 h_{0x} \frac{d^3 \varphi}{dx^3} + 3h_0^2 h_{0x} \frac{d^3 \varphi}{dx^3} + \\
&\quad \left. + h_0^3 \frac{d^4 \varphi}{dx^4} \right] \cdot dx
\end{aligned}$$

Собирая слагаемые, имеющие одинаковую степень по φ , получаем:

$$\begin{aligned}
\frac{d^4 \varphi}{dx^4} &\Rightarrow h_0^3 \\
\frac{d^3 \varphi}{dx^3} &\Rightarrow 12h_0^2 h_{0x} \\
\frac{d^2 \varphi}{dx^2} &\Rightarrow 36h_0^2 h_{0xx} + 18h_0^2 h_{0xx} = 18(h_0^2 h_{0xx})_x \\
\frac{d\varphi}{dx} &\Rightarrow 72h_0 h_{0x} h_{0xx} + 24h_{0x}^3 + 12h_0^2 h_{0xxx} \\
\varphi &\Rightarrow 36h_{0x}^2 h_{0xx} + 24h_0 h_{0x} h_{0xxx} + 18h_0 h_{0xx}^2 + 3h_0^2 h_{0xxxx} .
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Аналогично решается задача для слагаемого $3h_0^2 h_{0x} d^3/dx^3$

$$\begin{aligned}
& \int 3h_0^2 h_{0x} \frac{d^3 \psi}{dx^3} \phi \cdot dx = 3h_0^2 h_{0x} \frac{d^2 \psi}{dx^2} \phi \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int \frac{d^2 \psi}{dx^2} 3(h_0^2 h_{0x} \phi) \cdot dx = \\
& = F_1 - \int 3 \frac{d^2 \psi}{dx^2} \left(2h_0 h_{0x}^2 \phi + h_0^2 h_{0xx} \phi + h_0^2 h_{0x} \frac{d\phi}{dx} \right) \cdot dx = \\
& = F_1 - 3 \frac{d\psi}{dx} \left(2h_0 h_{0x}^2 \phi + h_0^2 h_{0xx} \phi + h_0^2 h_{0x} \frac{d\phi}{dx} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \\
& + \int 3 \frac{d\psi}{dx} d \left(2h_0 h_{0x}^2 \phi + h_0^2 h_{0xx} \phi + h_0^2 h_{0x} \frac{d\phi}{dx} \right) \cdot dx = \\
& = F_1 + F_2 + \int 3 \frac{d\psi}{dx} \left(2h_0 h_{0x} h_{0x}^2 \phi + 4h_0 h_{0x} h_{0xx} \phi + 2h_0 h_{0x}^2 \frac{d\phi}{dx} + 2h_0 h_{0x} h_{0xx} \phi + \right. \\
& + h_0^2 h_{0xxx} \phi + h_0^2 h_{0xx} \frac{d\phi}{dx} + 2h_0 h_{0x} h_{0x} \frac{d\phi}{dx} + h_0^2 h_{0xx} \frac{d\phi}{dx} + h_0^2 h_{0x} \frac{d^2 \phi}{dx^2} \Big) \cdot dx = \\
& = F_1 + F_2 + \int 3 \frac{d\psi}{dx} \left[2h_{0x}^3 \phi + 6h_0 h_{0x} h_{0xx} \phi + h_0^2 h_{0xxx} \phi + 4h_0 h_{0x}^2 \frac{d\phi}{dx} + \right. \\
& + 2h_0^2 h_{0xx} \frac{d\phi}{dx} + h_0^2 h_{0x} \frac{d^2 \phi}{dx^2} \Big] \cdot dx = F_1 + F_2 + \left[2h_{0x}^3 \phi + 6h_0 h_{0x} h_{0xx} \phi + \right. \\
& + h_0^2 h_{0xxx} \phi + 4h_0 h_{0x}^2 \frac{d\phi}{dx} + 2h_0^2 h_{0xx} \frac{d\phi}{dx} + h_0^2 h_{0x} \frac{d^2 \phi}{dx^2} \Big] \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \\
& - \int 3\psi \cdot d \left[2h_{0x}^3 \phi + 6h_0 h_{0x} h_{0xx} \phi + h_0^2 h_{0xxx} \phi + 4h_0 h_{0x}^2 \frac{d\phi}{dx} + 2h_0^2 h_{0xx} \frac{d\phi}{dx} + \right. \\
& + h_0^2 h_{0x} \frac{d^2 \phi}{dx^2} \Big] \cdot dx = F_1 + F_2 + F_3 - \int 3\psi \left[6h_{0x}^2 h_{0xx} \phi + 2h_{0x}^3 \frac{d\phi}{dx} + \right. \\
& + 6h_{0x} h_{0x} h_{0xx} \phi + 6h_0 h_{0xx} h_{0xx} \phi + 6h_0 h_{0x} h_{0xxx} \phi + 6h_0 h_{0x} h_{0xx} \frac{d\phi}{dx} + \\
& + 2h_0 h_{0x} h_{0xxx} \phi + h_0^2 h_{0xxx} \phi + h_0^2 h_{0xxx} \frac{d\phi}{dx} + 4h_{0x} h_{0x}^2 \frac{d\phi}{dx} + 8h_0 h_{0x} h_{0xx} \frac{d\phi}{dx} + \\
& + 4h_0 h_{0x}^2 \frac{d^2 \phi}{dx^2} + 4h_0 h_{0x} h_{0xx} \frac{d\phi}{dx} + 2h_0^2 h_{0xxx} \frac{d\phi}{dx} + 2h_0^2 h_{0xx} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \\
& + 2h_0 h_{0x} h_{0x} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + h_0^2 h_{0xx} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + h_0^2 h_{0x} \frac{d^3 \phi}{dx^3} \Big] \cdot dx = \\
& - \int 3\psi \left[(12h_{0x}^2 h_{0xx} + 6h_0 h_{0xx}^2 + 8h_0 h_{0x} h_{0xxx} + h_0^2 h_{0xxxx}) \phi + \right. \\
& + (6h_{0x}^3 + 18h_0 h_{0x} h_{0xx} + 3h_0^2 h_{0xxx}) \frac{d\phi}{dx} + (6h_0 h_{0x}^2 + 3h_0^2 h_{0xx}) \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \\
& + h_0^2 h_{0x} \frac{d^3 \phi}{dx^3} \Big] \cdot dx
\end{aligned}$$

Для второго слагаемого в (2.35) относительно φ имеем:

$$\begin{aligned}\frac{d^3\varphi}{dx^3} &\Rightarrow -3h_0^2h_{0x} \\ \frac{d^2\varphi}{dx^2} &\Rightarrow -18h_0h_{0x}^2 - 9h_0^2h_{0xx} = -9(h_0^2h_{0x})_x \\ \frac{d\varphi}{dx} &\Rightarrow -54h_0h_{0x}h_{0xx} - 18h_{0x}^3 - 9h_0^2h_{0xxx} \\ \varphi &\Rightarrow -36h_{0x}^2h_{0xx} - 24h_0h_{0x}h_{0xxx} - 18h_0^2h_{0xx}^2 - 3h_0^2h_{0xxxx}.\end{aligned}$$

Найдем значение сопряженного оператора для третьего слагаемого в (2.35), которое имеет вид

$$\begin{aligned}&h_0^3\left(\frac{3}{h_0^4} - \Lambda\right)\frac{d^2}{dx^2} \\ &\int\left(h_0^3\left(\frac{3}{h_0^4} - \Lambda\right)\right)\cdot\frac{d\psi}{dx}\varphi\cdot dx = \left(h_0^3\left(\frac{3}{h_0^4} - \Lambda\right)\right)\varphi\frac{d\psi}{dx}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} - \int\frac{d\psi}{dx}d\left[h_0^3\left(\frac{3}{h_0^4} - \Lambda\right)\varphi\right]\cdot dx = \\ &= F_1 - \int\frac{d\psi}{dx}d\left[h_0^3\left(\frac{3}{h_0^4} - \Lambda\right)\varphi\right]\cdot dx = F_1 - \int\frac{d\psi}{dx}\left[\left(3h_0^2h_{0x}\left(\frac{3}{h_0^4} - \Lambda\right) + h_0^3h_{0x}\left(-\frac{12}{h_0^5} + \chi\Lambda\right)\right)\varphi + \right. \\ &+ h_0^3\left(\frac{3}{h_0^4} - \Lambda\right)\frac{d\varphi}{dx}\Bigg]\cdot dx = F_1 + \left[\left(3h_0^2h_{0x}\left(\frac{3}{h_0^4} - \Lambda\right) + h_0^3h_{0x}\left(-\frac{12}{h_0^5} + \chi\Lambda\right)\right)\varphi + \left[h_0^3\left(\frac{3}{h_0^4} - \Lambda\right)\varphi\right]\right]\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} - \\ &- \int\psi d\left[\left(3h_0^2h_{0x}\left(\frac{3}{h_0^4} - \Lambda\right) + h_0^3h_{0x}\left(-\frac{12}{h_0^5} + \chi\Lambda\right)\right)\varphi + h_0^3\left(\frac{3}{h_0^4} - \Lambda\right)\frac{d\varphi}{dx}\right]dx = \\ &= F_1 + F_2 - \int\psi d\left[\left(3h_0^2h_{0x}\left(\frac{3}{h_0^4} - \Lambda\right) + h_0^3h_{0x}\left(-\frac{12}{h_0^5} + \chi\Lambda\right)\right)\varphi + h_0^3\left(\frac{3}{h_0^4} - \Lambda\right)\frac{d\varphi}{dx}\right]dx = \\ &= F_1 + F_2 - \int\psi\left[\left(6h_0h_{0x}h_{0xx} + 3h_0^2h_{0xxx}\right)\left(\frac{3}{h_0^4} - \Lambda\right)\varphi + 3h_0^2h_{0x}\left(\left(-\frac{12}{h_0^5} + \chi\Lambda\right)\varphi + \left(\frac{3}{h_0^4} - \Lambda\right)\frac{d\varphi}{dx}\right) + \right. \\ &+ \left(3h_0^2h_{0x}h_{0xx} + h_0^3h_{0xxx}\right)\left(-\frac{12}{h_0^5} + \chi\Lambda\right)\varphi + h_0^3h_{0x}\left(h_{0xx}\left(\frac{60}{h_0^6} - \chi^2\Lambda\right)\varphi + \left(-\frac{12}{h_0^5} + \chi\Lambda\right)\frac{d\varphi}{dx}\right) + \\ &+ \left.\left(3h_0^2h_{0x}h_{0xx}\left(\frac{3}{h_0^4} - \Lambda\right) + h_0^3h_{0x}\left(-\frac{12}{h_0^5} + \chi\Lambda\right)\right)\frac{d\varphi}{dx} + h_0^3\left(\frac{3}{h_0^4} - \Lambda\right)\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right]dx\end{aligned}$$

Для третьего слагаемого в (2.35) относительно φ имеем:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varphi}{dx^2} &\Rightarrow h_0^3\left(\frac{3}{h_0^4}-\Lambda\right) \\ \frac{d\varphi}{dx} &\Rightarrow 3h_0^2h_{0x}\left(\frac{3}{h_0^4}-\Lambda\right)+h_0^3h_{0x}\left(-\frac{12}{h_0^5}+\chi\Lambda\right)+3h_0^2h_{0x}h_{0x}\left(\frac{3}{h_0^4}-\Lambda\right)+h_0^3h_{0x}\left(-\frac{12}{h_0^5}+\chi\Lambda\right) \\ \varphi &\Rightarrow \left(6h_0h_{0x}h_{0x}+3h_0^2h_{0xx}\right)\left(\frac{3}{h_0^4}-\Lambda\right)+3h_0^2h_{0x}\left(-\frac{12}{h_0^5}+\chi\Lambda\right)+\left(3h_0^2h_{0x}h_{0x}+h_0^3h_{0xx}\right)\left(-\frac{12}{h_0^5}+\chi\Lambda\right)+ \\ &+h_0^3h_{0x}h_{0x}\left(\frac{60}{h_0^6}-\chi^2\Lambda\right)\end{aligned}$$

Для предпоследнего слагаемого в уравнении (2.35) найдем сопряженное значение:

$$\begin{aligned}&\left\{h_{0x}\left[3h_0^2\left(\frac{3}{h_0^4}-\Lambda\right)+h_0^3\left(-\frac{12}{h_0^5}+\chi\Lambda\right)+\left(-\frac{3}{h_0^2}-(3h_0^2-\chi h_0^3)\Lambda\right)\right]-3h_0^2h_{0xxx}+U\right\}\frac{d}{dx} \\ &\int\left\{h_{0x}\left[3h_0^2\left(\frac{3}{h_0^4}-\Lambda\right)+h_0^3\left(-\frac{12}{h_0^5}+\chi\Lambda\right)+\left(-\frac{3}{h_0^2}-(3h_0^2-\chi h_0^3)\Lambda\right)\right]-3h_0^2h_{0xxx}+U\right\}\frac{d\psi}{dx}\varphi\cdot dx = \\ &= \left\{h_{0x}\left[3h_0^2\left(\frac{3}{h_0^4}-\Lambda\right)+h_0^3\left(-\frac{12}{h_0^5}+\chi\Lambda\right)+\left(-\frac{3}{h_0^2}-(3h_0^2-\chi h_0^3)\Lambda\right)\right]-3h_0^2h_{0xxx}+U\right\}\psi\varphi\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} - \\ &-\int\psi\cdot d\left[\left\{h_{0x}\left[3h_0^2\left(\frac{3}{h_0^4}-\Lambda\right)+h_0^3\left(-\frac{12}{h_0^5}+\chi\Lambda\right)+\left(-\frac{3}{h_0^2}-(3h_0^2-\chi h_0^3)\Lambda\right)\right]-3h_0^2h_{0xxx}+U\right\}\varphi\right]\cdot dx =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= F_1 - \int \psi \cdot \left[\left(6h_0 h_{0x} h_{0x} + 3h_0^2 h_{0xx} \right) \left(\frac{3}{h_0^4} - \Lambda \right) \varphi + 3h_0^2 h_{0x} \left(\left(-\frac{12}{h_0^5} + \chi \Lambda \right) h_{0x} \varphi + \left(\frac{3}{h_0^4} - \Lambda \right) \frac{d\varphi}{dx} \right) + \right. \\
&+ \left(3h_0^2 h_{0x} h_{0x} + h_0^3 h_{0xx} \right) \left(-\frac{12}{h_0^5} + \chi \Lambda \right) \varphi + h_0^3 h_{0x} \left(\left(\frac{60}{h_0^6} + \chi^2 \Lambda \right) h_{0x} \varphi + \left(-\frac{12}{h_0^5} + \chi \Lambda \right) \frac{d\varphi}{dx} \right) + \\
&+ h_{0xx} \left(-\frac{3}{h_0^2} - (3h_0^2 - \chi h_0^3) \Lambda \right) \varphi + h_{0x} h_{0x} \left(\frac{6}{h_0^3} - (6h_0 - 3h_0^2 \chi) \Lambda + (3h_0^2 - \chi h_0^3) \chi \Lambda \right) \varphi + \\
&\left. + h_{0x} \left(-\frac{3}{h_0^2} - (3h_0^2 - \chi h_0^3) \Lambda \right) \frac{d\varphi}{dx} - 6h_0 h_{0x} h_{0xxx} \varphi - 3h_0^2 h_{0xxx} \varphi - 3h_0^2 h_{0xxx} \frac{d\varphi}{dx} + U \frac{d\varphi}{dx} \right] dx
\end{aligned}$$

Для четвертого слагаемого в (2.35) относительно φ имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{dx} &\Rightarrow 3h_0^2 h_{0x} \left(\frac{3}{h_0^4} - \Lambda \right) + h_0^3 h_{0x} \left(-\frac{12}{h_0^5} + \chi \Lambda \right) + \\
&+ h_{0x} \left(-\frac{3}{h_0^2} - (3h_0^2 - \chi h_0^3) \Lambda \right) - 3h_0^2 h_{0xxx} + U \\
\varphi &\Rightarrow \left(6h_0 h_{0x} h_{0x} + 3h_0^2 h_{0xx} \right) \left(\frac{3}{h_0^4} - \Lambda \right) + 3h_0^2 h_{0x} h_{0x} \left(-\frac{12}{h_0^5} + \chi \Lambda \right) + \\
&+ \left(3h_0^2 h_{0x} h_{0x} + h_0^3 h_{0xx} \right) \left(-\frac{12}{h_0^5} + \chi \Lambda \right) + h_0^3 h_{0x} h_{0x} \left(\frac{60}{h_0^6} + \chi^2 \Lambda \right) + \\
&+ h_{0xx} \left(-\frac{3}{h_0^2} - (3h_0^2 - \chi h_0^3) \Lambda \right) + \\
&+ h_{0x} h_{0x} \left(\frac{6}{h_0^3} - (6h_0 - 3h_0^2 \chi) \Lambda + (3h_0^2 - \chi h_0^3) \chi \Lambda \right) - 6h_0 h_{0x} h_{0xxx} - 3h_0^2 h_{0xxx}
\end{aligned}$$

Наконец, для последнего слагаемого в уравнении (2.35) имеем:

$$\begin{aligned}
&h_{0xx} \left(-\frac{3}{h_0^2} - (3h_0^2 - \chi h_0^3) \Lambda \right) + h_{0x}^2 \left(\frac{3}{h_0^3} - (6h_0 - 3h_0^2 \chi) \Lambda + \chi (3h_0^2 - \chi h_0^3) \Lambda \right) - \\
&- 6h_0 h_{0x} h_{0xxx} - 3h_0^2 h_{0xxx}
\end{aligned}$$

Для этого слагаемого сопряженное значение оператора L_0^* имеет вид:

$$\begin{aligned} & \int \left[h_{0xx} \left(-\frac{3}{h_0^2} - (3h_0^2 - \chi h_0^3) \Lambda \right) + h_{0x}^2 \left(\frac{3}{h_0^3} - (6h_0 - 3h_0^2 \chi) \Lambda + \chi (3h_0^2 - \chi h_0^3) \Lambda \right) - \right. \\ & \left. - 6h_0 h_{0x} h_{0xxx} - 3h_0^2 h_{0xxxx} \right] \psi \varphi \cdot dx = \\ & = \int \psi \left[h_{0xx} \left(-\frac{3}{h_0^2} - (3h_0^2 - \chi h_0^3) \Lambda \right) + h_{0x}^2 \left(\frac{3}{h_0^3} - (6h_0 - 3h_0^2 \chi) \Lambda + \chi (3h_0^2 - \chi h_0^3) \Lambda \right) - \right. \\ & \left. - 6h_0 h_{0x} h_{0xxx} - 3h_0^2 h_{0xxxx} \right] \varphi \cdot dx \end{aligned}$$

Для данного слагаемого относительно сопряженной функции φ имеем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \varphi \Rightarrow h_{0xx} \left(-\frac{3}{h_0^2} - (3h_0^2 - \chi h_0^3) \Lambda \right) + h_{0x}^2 \left(\frac{3}{h_0^3} - (6h_0 - 3h_0^2 \chi) \Lambda + \chi (3h_0^2 - \chi h_0^3) \Lambda \right) - \\ - 6h_0 h_{0x} h_{0xxx} - 3h_0^2 h_{0xxxx} \end{aligned}$$

Собирая все слагаемые относительно одинаковых степеней по φ и выполняя соответствующие преобразования, получаем значение для сопряженного оператора L_0^* , который имеет вид:

$$\begin{aligned} L_0^* = & h_0^3 \frac{d^4}{dx^4} + 9h_0^2 h_{0x} \frac{d^3}{dx^3} + \left[9(h_0^2 h_{0x})_x + h_0^3 \left(\frac{3}{h_0^4} - \Lambda \right) \right] \cdot \frac{d^2}{dx^2} + \\ & + \left[18h_0 h_{0x} h_{0xx} + 6h_{0x}^3 + 6h_0^2 h_{0xxx} + \left(h_0^3 \left(\frac{3}{h_0^4} - \Lambda \right) \right)_x - U \right] \cdot \frac{d}{dx} + \\ & + \left[4h_{0x}^2 - 2h_0 h_{0xx} - h_0 h_{0x} \chi + 2h_{0x}^2 - h_0 h_{0x} \chi \right] h_0^2 \chi \Lambda - \Omega \left(\frac{3}{h_0^4} - \Lambda \right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Цель данной операции (определения вида сопряженного оператора) заключается в нахождении функциональной зависимости второй поправки декремента затухания ω_2 от величины испарения. На Рис. 2.8 представлена данная дисперсионная зависимость при соответствующих параметрах задачи.

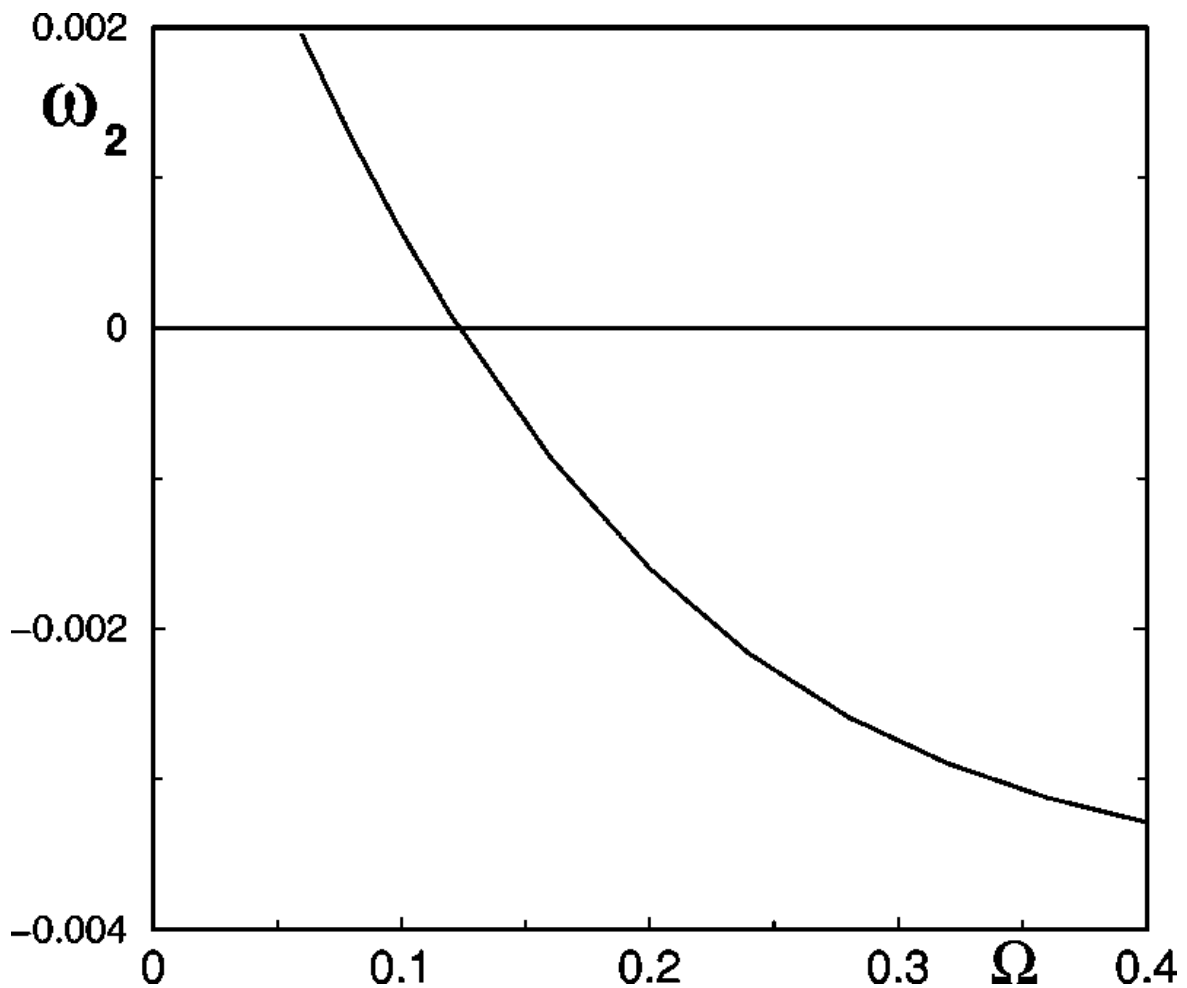


Рис.2.8. Зависимость второй поправки для декремента затухания

ω_2 как функция безразмерного параметра испарения Ω при значениях

$$\chi = 1.085, \quad S = -0.003, \quad U = 2,835 \cdot 10^{-4} \text{ соответственно.}$$

Как видно из данного рисунка, при малых значениях безразмерного параметра испарения Ω имеет место развитие возмущений с возможностью появления неустойчивости. С ростом значения параметра испарения наблюдается повышение устойчивости данного состояния относительно возмущений. Критическим значением, отвечающим нейтральному значению второй поправки декремента затухания ω_2 , является $\Omega_{cr} = 0.121$.

2.5. Двумерные компьютерные вычисления

Логичным продолжением исследования устойчивости движения тонкого слоя испаряющейся полярной жидкости является численное моделирование уравнения (2.6) в двумерной постановке. В результате исследования устойчивости движения фронта тонкого слоя жидкости было установлено, что относительно поперечных (вдоль оси y) возмущений и для малых значений безразмерного числа испарения Ω имеется область, где эти возмущения нарастают и, следовательно, имеется вероятность образования пальцеобразной неустойчивости, как это было показано в экспериментах [307, 316].

Для численного решения уравнения (2.6) была применена теория конечных разностей. Методом решения была выбрана стандартная полунеявная двумерная схема Кранка-Николсон. В качестве метода решения девятидиагональной системы уравнений был использован алгоритм Стоуна для разреженных матриц [323].

Граничные условия вдоль оси x выбирались как и для двумерной задачи $h_x = h_{xxx} = 0$, тогда как для границ по оси y использовались периодические условия. Тестом для двумерной задачи выступала задача численного решения двумерного уравнения Бюргерса. При сравнении полученных результатов с аналитическим решением для фиксированного момента времени было получено подтверждение порядка аппроксимации предложенной схемы. Также для данной тестовой задачи исследовалась устойчивость решения для различных значений шага по времени при фиксированной пространственной сетке.

Кроме этого, был получен график сходимости решения задачи от размера сетки, который представлен на Рис. 2.9.

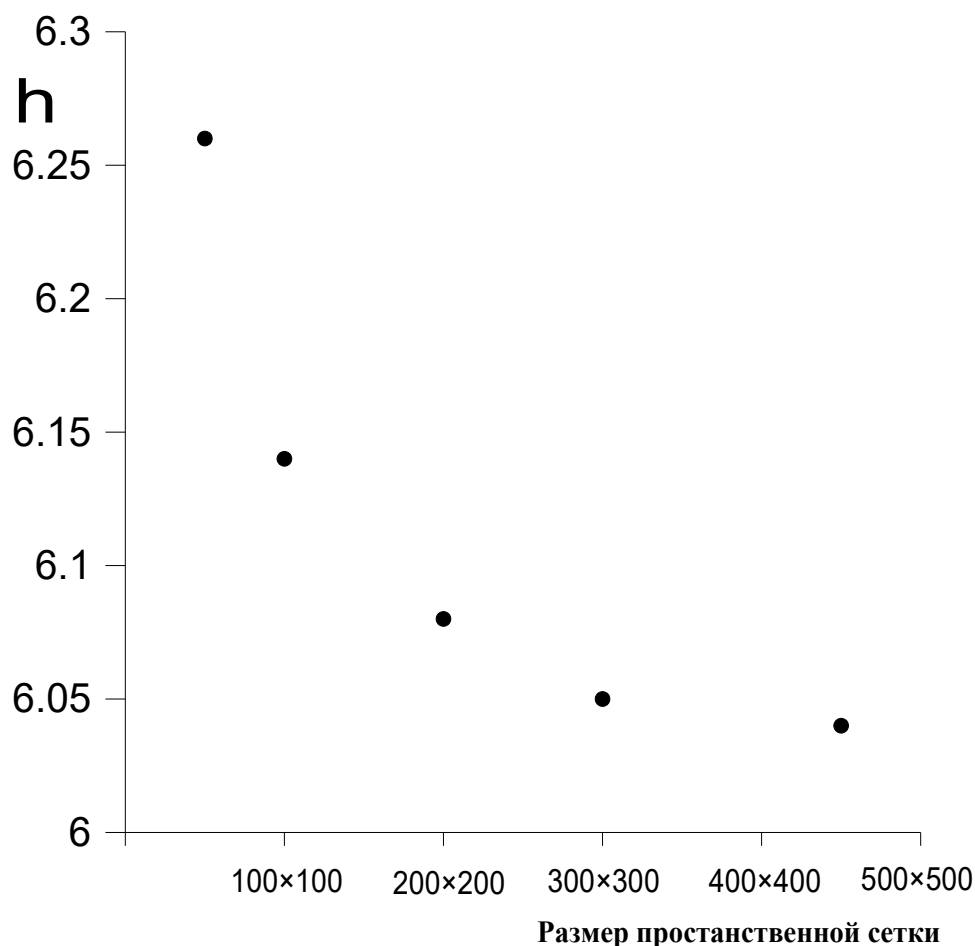


Рис.2.9. График сходимости результатов при различных параметрах сетки в расчетной области.

Как было показано выше (в ходе теоретических исследований), при достаточно больших значениях испарения все поперечные возмущения (направленные вдоль оси y) затухают. На Рис. 2.10 показан профиль движения фронта испаряющегося тонкого слоя полярной жидкости при значении безразмерного параметра испарения $\Omega = 0.78$. С течением времени этот профиль как единое целое движется вдоль оси x . Для данной системы возмущения накладывались вдоль оси y и их вид был представлен в виде периодической функции. Амплитуда возмущений варьировалась в диапазоне от 1 до 10 % от опорного значения. На данном рисунке показан профиль движения тонкой пленки полярной жидкости для значения безразмерного параметра времени, величина которого равнялась 100.

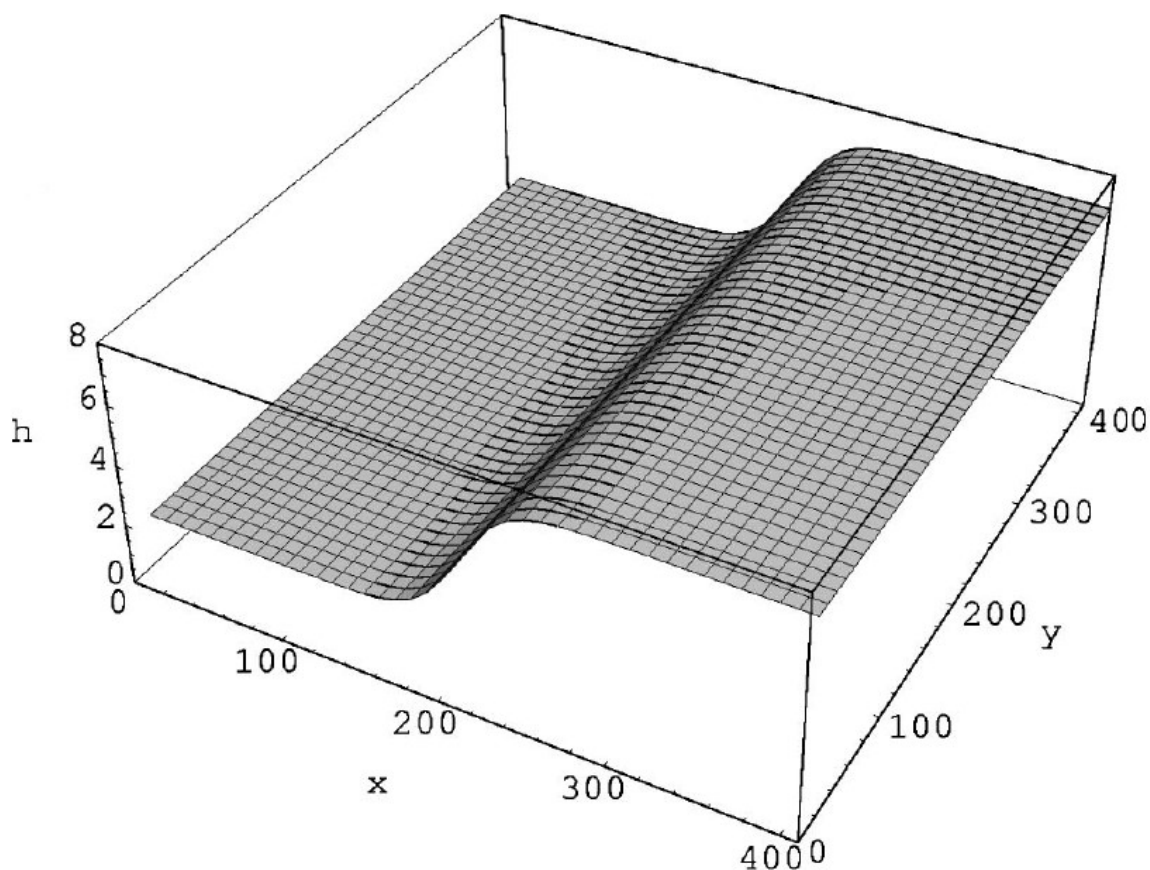


Рис.2.10. Двумерный профиль тонкого слоя жидкости при $\Omega = 0.78$ и значениях $\chi = 1.085$, $S = -0.003$ соответственно.

Результаты двумерного численного эксперимента соответствуют теоретическому предположению о том, что для данного значения параметра испарения Ω все возмущения затухают и линия фронта движется с постоянной скоростью U , не образуя никаких пространственных структур.

Иная картина наблюдается, когда безразмерный параметр испарения имеет значение, где наблюдается пальцеобразная неустойчивость. На Рис. 2.11 приведены результаты численного эксперимента при величине параметра испарения $\Omega = 0.078$. Как видно из представленного изображения, на подвижной границе раздела двух устойчивых состояний наблюдается образование пространственных структур, которые будем именовать как пальцеобразную неустойчивость.

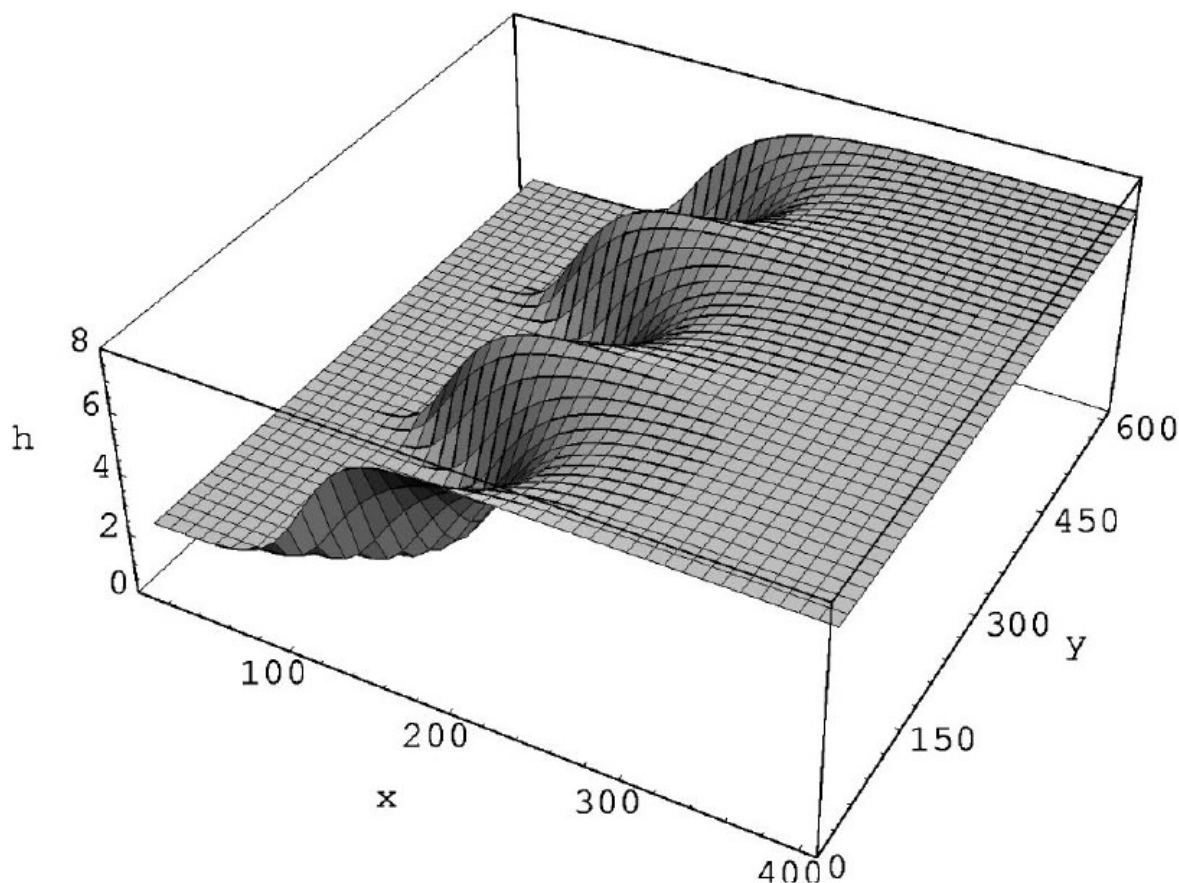


Рис.2.11. Двумерный профиль тонкого слоя жидкости при $\Omega = 0.078$ и значениях $\chi = 1.085$, $S = -0.003$ соответственно.

Результаты вычислений приведены для фиксированного дискретного временного шага $\Delta t = 10^{-3}$, а пространственная сетка варьировалась в диапазоне от 40×40 до 400×400 . Данный рисунок приведен для $t = 100$. Производилась процедура проверки сходимости результатов вычислений от размера сетки. В результате этого было выбрано оптимальное значение пространственной сетки.

2.6. Исследование влияния неоднородности твердой подложки на пальцеобразную неустойчивость тонкого слоя испаряющейся полярной жидкости

Пространственная неоднородность («шероховатость») твердой подложки, являющейся контактной линией «твердое тело – жидкость», выступает очень важным фактором, который может оказывать существенное влияние на

динамику тонких жидких пленок и их устойчивость. Для того чтобы численно смоделировать возможные последствия пространственной неоднородности твердой подложки для пальцеобразной неустойчивости испаряющейся тонкой пленки полярной жидкости, рассмотрим случай, когда постоянная Гамакера есть периодическая функция вдоль оси x . Тогда движение фронта между двумя устойчивыми состояниями тонкого слоя жидкости по-прежнему описывается уравнением (2.1) и формулой для энергии межмолекулярного взаимодействия для полярных жидкостей (2.2). Единственным отличием от формулы (2.2) является тот факт, что теперь константа Гамакера является не константой, а представляется периодической функцией, которая имеет вид:

$$A = A_1 + A_2 \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} x. \quad (2.37)$$

В данной задаче производилась вариация только величины A_2 так, чтобы изменение самого значения константы Гамакера не приводило к изменению количества состояний (два устойчивых и одно неустойчивое), которое определяется величиной химического потенциала пара (Рис. 2.7). Представляется справедливым предположение от том, что если константа Гамакера является периодической функцией от x , то и безразмерное число уровня испарения Ω и корреляционная длина χ тоже являются периодическими функциями от x :

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1 \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} x, \quad \chi = \chi_0 + \chi_1 \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} x. \quad (2.38)$$

В рамках исследования данной задачи было проведено численное моделирование эволюционного уравнения (2.1) с периодическими параметрами (2.37) и (2.38). В результате было установлено, что эффект пространственной неоднородности твердой подложки существенно влияет на скорость распространения движения фронта жидкости (скорость высыхания пленки), он представлен на Рис. 2.12.

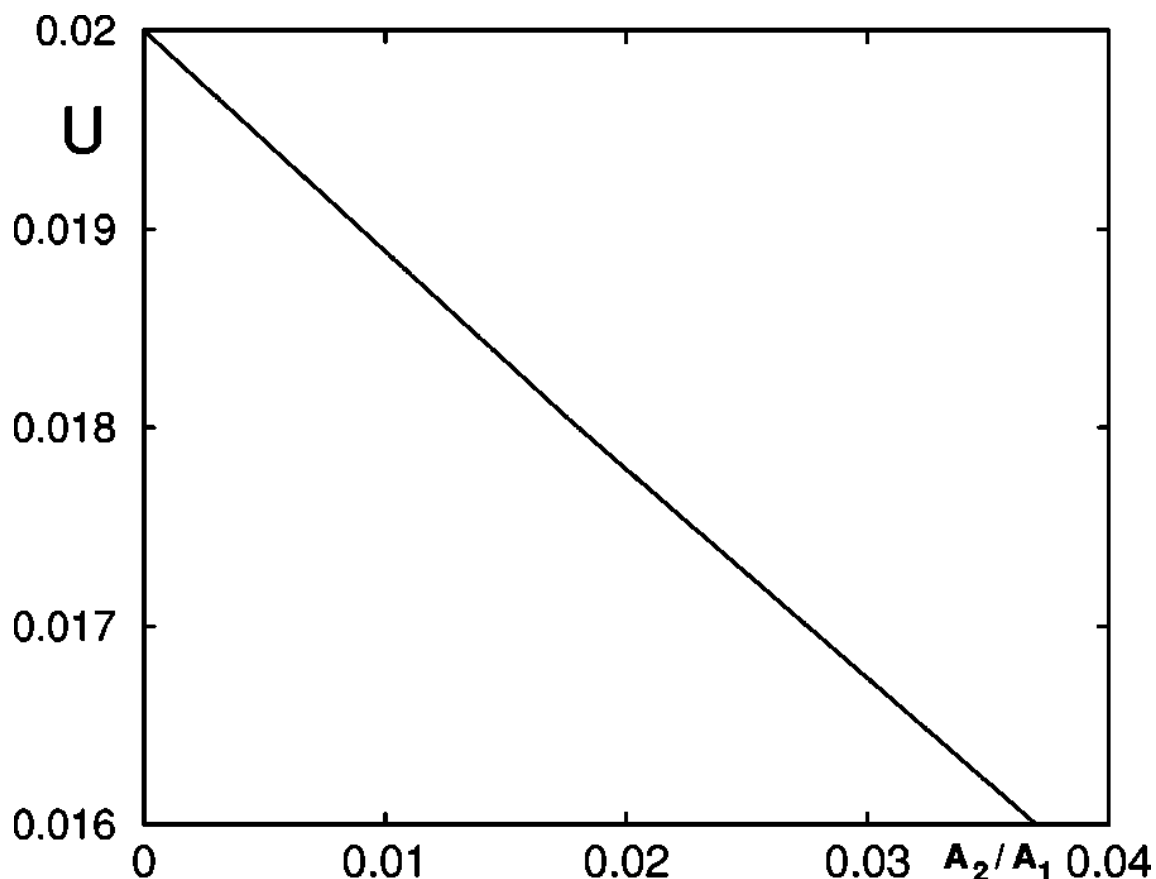


Рис.2.12. Зависимость скорости движения фронта от отношения амплитуды неоднородности константы Гамакера.

Из представленного рисунка можно сделать вывод о том, что скорость движения фронта уменьшается при возрастании амплитуды пространственной неоднородности («шероховатости»). В соответствии с вышеуказанным выводом о влиянии скорости движения фронта на пальцеобразную неустойчивость можно ожидать, что пространственная неоднородность также может приводить к дестабилизации фронта движения жидкой пленки. На Рис. 2.13 приведено дисперсионное соотношение $\omega(k)$ эволюции поперечных возмущений относительно движения фронта испаряющейся тонкой пленки при различных значениях параметра «шероховатости».

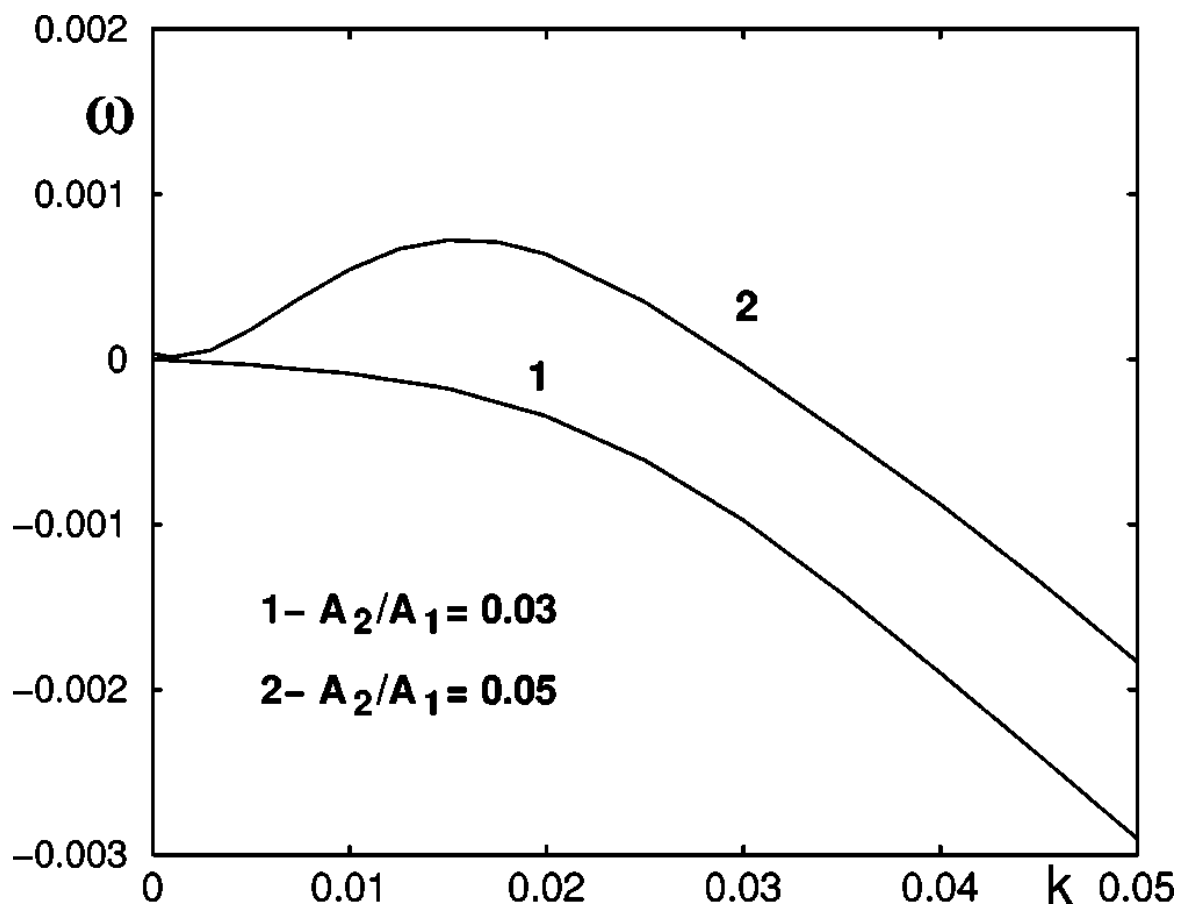


Рис.2.13. График дисперсионной зависимости $\omega(k)$ при различных значениях величины A_2/A_1 , характеризующей поверхностную неоднородность твердой подложки.

При малой амплитуде все возмущения затухают и движение фронта испаряющейся пленки происходит без образования пространственных пальцеобразных структур. С ростом значений параметра амплитуды «шероховатости» твердой подложки наблюдается появление области неустойчивости по отношению к поперечным возмущениям. Все это может приводить к появлению пальцеобразных поверхностных структур на линии движения фронта тонкого слоя испаряющейся полярной жидкости.

2.7. Сравнение теоретических данных с экспериментальными данными

Испаряющиеся жидкие капли находятся, как правило, в состоянии неустойчивого равновесия с расположенным над ними паром из-за эффекта Гиббса-Томсона. Эффект Гиббса-Томсона состоит в изменении равновесных значений паров на межфазной границе «жидкость – пар» в зависимости от формы этих границ по сравнению с равновесным давлением пара в случае бесконечно плоской межфазной границы. Если давление пара выше равновесного давления для плоской границы, то крупные капли растут в размерах за счет малых, в то время как если давление меньше равновесного значения, то все капли испаряются, причем скорость испарения малых капель больше. То же самое справедливо и для капли, находящейся в контакте с паром и расположенной на частично смачиваемой подложке. Тем не менее было замечено, что различные по размеру капли воды, находящиеся на подложке из чистой слюды, ведут себя по-разному. Когда давление выше равновесного значения, подложка (слюда) становится абсолютно смачиваемой, тогда как при величине давления меньше равновесного большие капли испаряются быстрее. Проведенные эксперименты позволяют считать, что капли приблизительно равномерно распределены в изучаемом пространстве. Этот факт может быть объяснен взаимодействием между поверхностью и жидкостью, в которой имеются две взаимно противоположные силы. Одна из них обеспечивает полное смачивание подложки под давлением насыщенных паров, а вторая обеспечивает равновесие между системой из макроскопической капли и микроскопического тонкого слоя воды, покрывающего подложку полностью.

Изучаются величины двух характерных толщин жидкости и исследуется динамика переходного слоя между этими двумя величинами. В этом случае понятия «контактная линия» и «угол смачивания» не действуют. Так как физические свойства подложки могут быть определены через толщину слоя и

значение этого слоя непрерывно, то нет необходимости рассматривать динамически меняющуюся границу раздела «подложка – жидкость – пар».

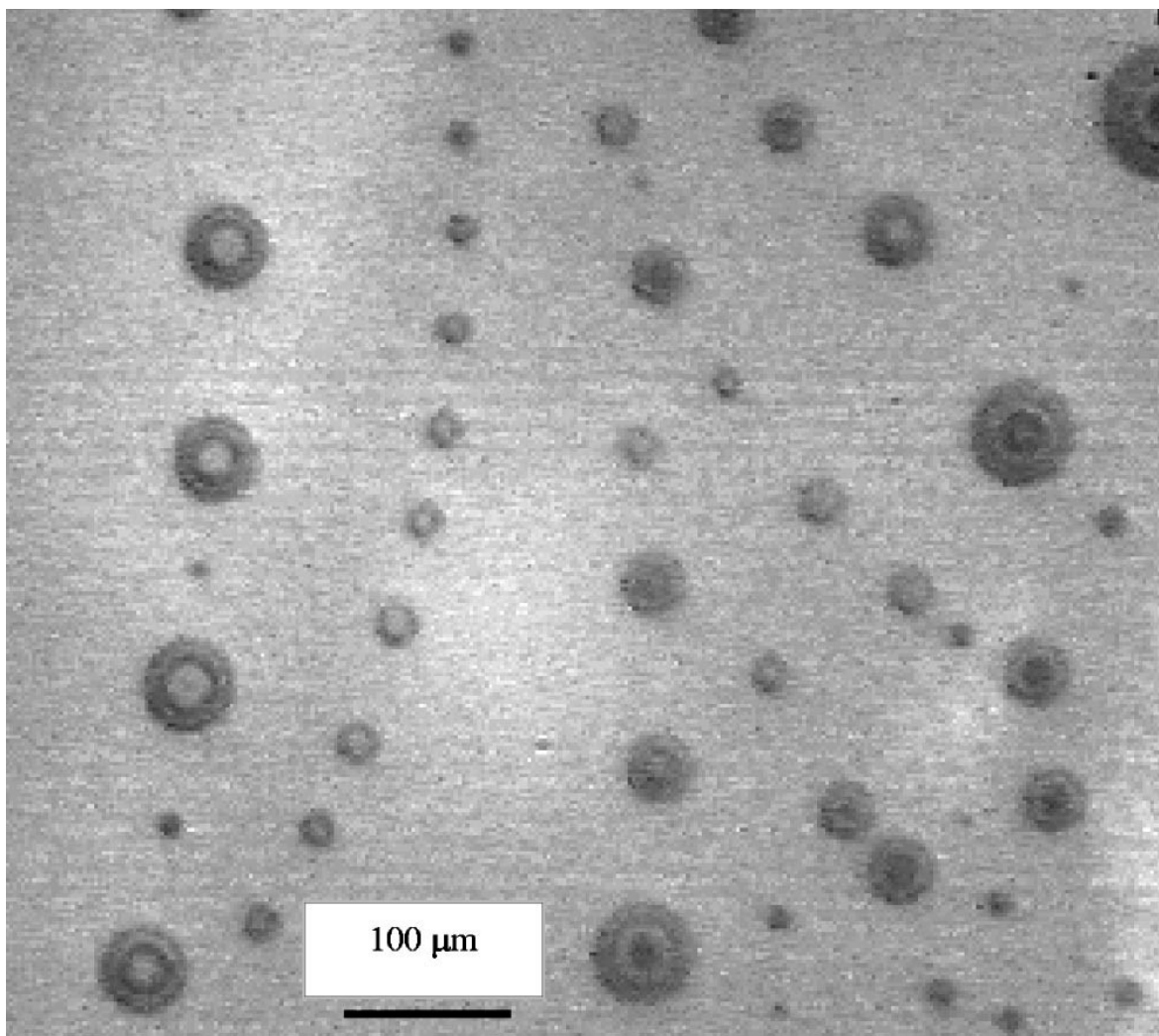


Рис.2.14 Множество водяных капель различной толщины, расположенных на слюдяной подложке. Первые темные кольца для больших капель соответствуют толщине 111 нм. Приведено из [232].

Известно, что поверхность слюды смачивается водой и под давлением насыщенного пара равномерный макроскопический слой воды покрывает поверхность слюды полностью. Когда вода испаряется с этой подложки, то на свободной поверхности наблюдаются пространственные структуры, которые были теоретически предсказаны в [114–116, 130] и были получены экспериментально как результат взаимодействия силы Ван-дер-Ваальса и силы полярного взаимодействия на межфазной границе «подложка – жидкость». Было

показано, что в случае, когда пар является ненасыщенным, такое состояние можно описать, используя величины свободной энергии Гиббса, которая зависит от толщины слоя. В зависимости от толщины слоя свободная энергия Гиббса имеет два минимума, отвечающих двум различным значениям толщины слоя. Один минимум соответствует молекулярному значению толщины, а второй определяется как макроскопическая толщина пленки. Имеет место фазовое равновесие между двумя этими толщинами, а также возможен фазовый переход первого рода в такой системе. В работе [37] эволюционное уравнение, описывающее поведение толщины слоя, было приведено в случае различных скоростей испарения для описания полученных в эксперименте результатов по образованию вязких пальцев на свободной границе. Поверхностные структуры, появляющиеся при испарении воды с твердой подложки, очень похожи на структуры, которые появляются в численном моделировании процесса затвердевания слоя в изотропной двумерной системе.

На Рис. 2.14 показано типичное квазиравновесное состояние системы, которая состоит из некоторого количества капель, сильно различающихся по размерам. В дальнейшем можно ожидать, что будет либо происходить процесс, в котором крупные капли будут расти за счет более мелких, либо будет наблюдаться картина взаимного испарения, где большие капли получают жидкость из мелких капель, используя пар как транспортный механизм передачи жидкости. Оба данных сценария развития системы при испарении наблюдались при наличии несмачиваемой подложки, но в случае смачиваемой подложки все обстоит совсем по-другому. Было обнаружено, что все капли продолжают испаряться вместе, и мелкие капли испаряются медленнее, чем большие. Такое поведение контрастирует с поведением капель, расположенных на частично смачиваемой подложке с некоторым значением контактного угла, в этом случае капля с малым радиусом в контакте с подложкой (такой радиус будем в дальнейшем называть «проекционный радиус») имеет большую кривизну. Поэтому такая капля может испаряться быстрее из-за добавки в давление пара

дополнительного слагаемого, обусловленного эффектом Гиббса-Томсона. Наличие на поверхности подложки (слюды) неразрывной тонкой пленки, которая соединяет капли, является определяющим фактором в поведении такой системы.

Капля с проекционным радиусом r есть шаровой сегмент, имеющий радиус кривизны $R = r/\sin \Theta$, где Θ есть контактный угол, Рис.2.15. Будем считать, что уровень испарения капли пропорционален разнице химического потенциала пара $\mu_{vap} = kT \ln(p/p_s)$ и капли $\mu_{drop} = \mu_{liq} + 2\rho^{-1} \cdot \sigma/R$, здесь σ – поверхностное натяжение на границе «жидкость – пар», ρ есть плотность жидкости, p есть давление пара и p_s – давление насыщенного пара.

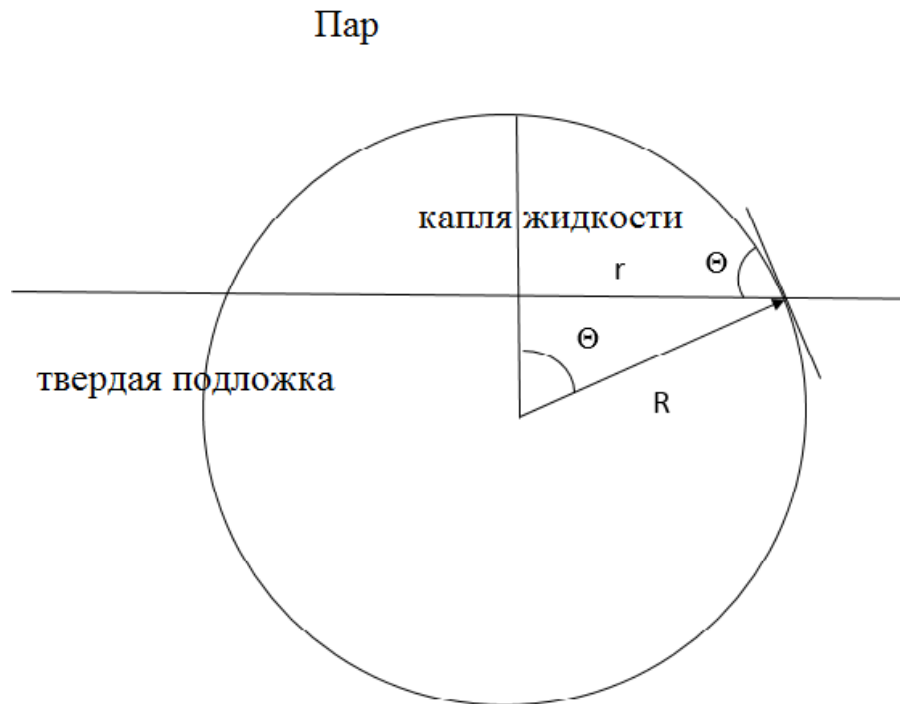


Рис.2.15. Геометрическая схема задачи

В состоянии равновесия «жидкость – пар» ($p = p_s$) мы считаем, что $\mu_{liq} = \mu_{vap} = 0$ и условием испарения капли с конечным значением радиуса является условие, что $\mu_{drop} > \mu_{vap}$. В области давления, где химический потенциал пара $\mu_{vap} > 0$, капли, имеющие малый радиус, испаряются, а капли,

имеющие большое значение R , растут. Таким образом, можно говорить о процессе коалесценции, когда большие капли поглощают в себя малые, Рис. 2.16.

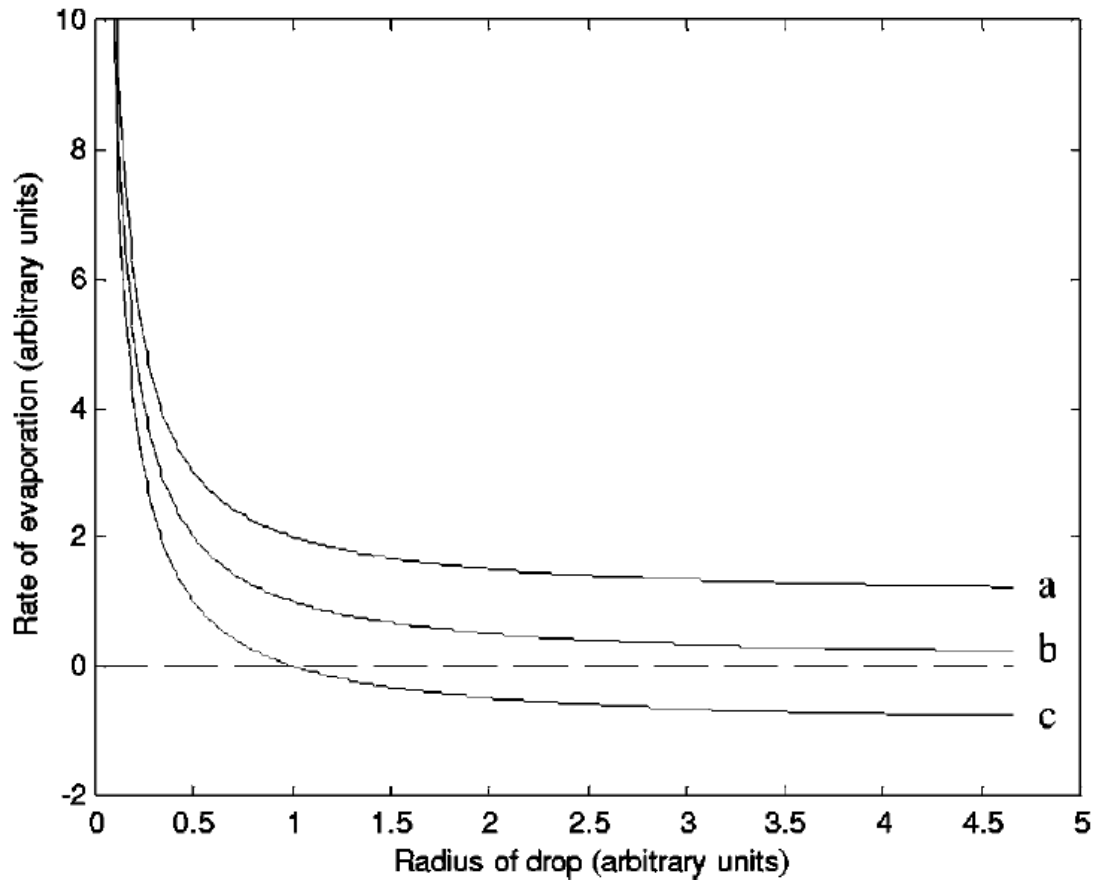


Рис.2.16. Скорость испарения изолированной капли как функция ее радиуса при трех вариантах: а) давление пара меньше давления насыщенного пара, б) давление пара равно насыщенному давлению, с) давление пара больше давления насыщенного пара. В случаях а) и б) все капли испаряются, а при с) маленькие капли испаряются, а большие растут.

Второе слагаемое в формуле для свободной энергии Гиббса на единицу площади (2.39) описывает взаимодействие полярной жидкости с полярной подложкой и было схематически описано в [135], в явной форме было написано в работе [310] на основе экспериментальных данных [199]:

$$\Phi(h) = \frac{S^{LW} d_0^2}{h^2} + S^P \exp \frac{d_0 - h}{l_0} \quad (2.39)$$

Где S^{LW} и S^P есть давление, которое создает ван-дер-ваальсовое и поляризационное взаимодействие, l – характерная корреляционная длина и d_0 определяется как молекулярный диаметр. На Рис. 2.17 представлен $\mu_{film} = \rho^{-1} d\Phi/dh$ как функция толщины слоя. Трехфазное равновесие между двумя толщинами слоя и паром определяется правилом Максвелла (которое гласит, что термодинамическое равновесие в системе имеет место при равенстве областей под и над линией химического потенциала), приведено также на Рис. 2.18.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда в процессе испарения толстые области сократились до капель, и они соединены тонкой пленкой. Капли, чья свободная поверхность расположена далеко от подложки, имеют дополнительное слагаемое в химическом потенциале, равное $\rho^{-1} \cdot 2\sigma/R$. Для достижения равновесия с непрерывной тонкой пленкой радиус всех капель должен быть равен R , независимо от его проекционного радиуса. Такое можно себе представить, предполагая, что контактный угол увеличивается при увеличении проекционного радиуса, что находится в противоречии с обычным понятием постоянства контактного угла. Но так как пленка, соединяющая капли, непрерывна, то само понятие контакта между жидкостью, паром и подложкой как края капли здесь не подходит, и контактный угол не определяется обычным образом. В работе [309] было проведено моделирование такой задачи, а контактный угол определялся как величина наклона профиля капли вблизи подложки. Было обнаружено, что контактные углы для капель, определенные таким способом, возрастают монотонно с увеличением объема капли.

Вода испаряется из шарового сегмента радиусом R , и объем изменяется путем сокращения проекционного радиуса. Баланс объема определяется скоростью сокращения радиуса $v = -dr/dt$ и может быть записан в виде

$$2\pi r v (h_2 - h_1) = 2\sigma \rho^{-1} \varepsilon \pi r / R$$

где $\mathcal{E}$ есть скорость испарения, которая может быть вычислена из расчета разности между химическим потенциалом жидкости и пара. Следует особо подчеркнуть, что испарение не происходит в месте соединения тонкой пленки и капли, так как профиль находится в состоянии равновесия с ненасыщенным паром. Вспоминая, что R остается неизменным для всех капель, можно отметить, что скорость испарения капли пропорциональна его радиусу.

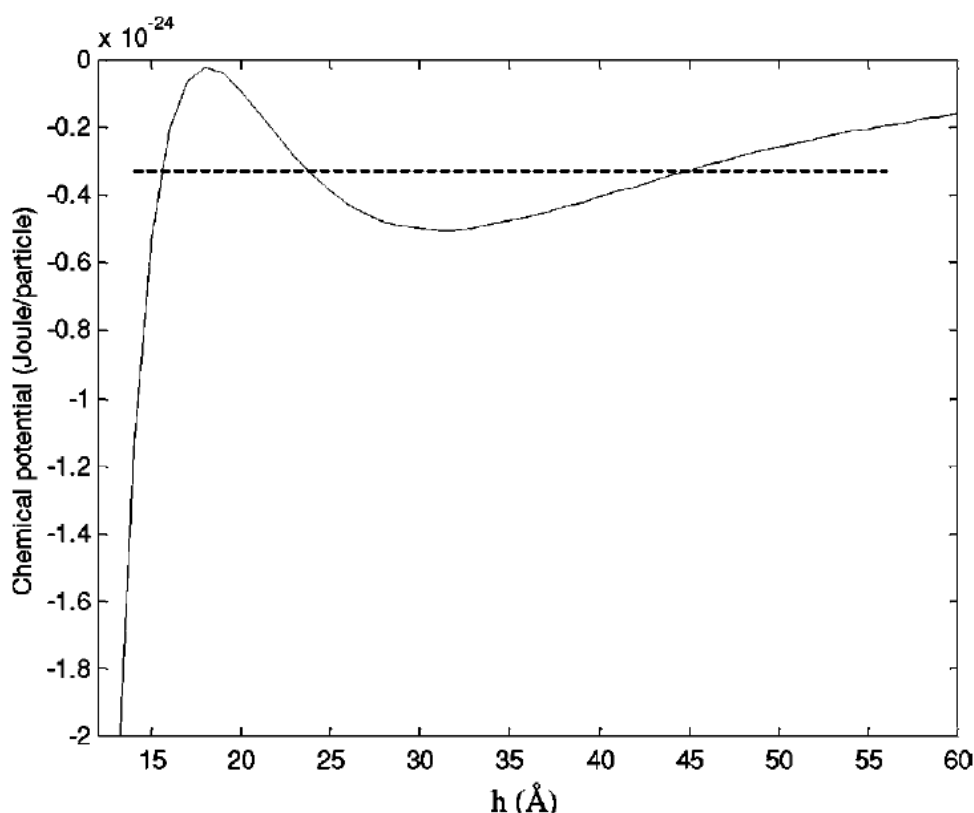


Рис.2.17. Химический потенциал $\rho^{-1} d\Phi/dh$ как функция толщины слоя h .

Пунктирной линией представлена линия Максвелла, которая определяет два устойчивых состояния тонкого слоя полярной жидкости.

Измерения диаметров капель и радиусов кривизны как функции времени были произведены путем видеозаписи. Эксперимент проводился при температуре 0°C в замкнутой системе при высоком вакууме, куда водяной пар может быть введен путем испарения в отдельном блоке, содержащем дистиллированную воду. Температуру в экспериментальной ячейке

поддерживали постоянной с помощью термоэлектрических кулеров. Подробное описание экспериментальной установки приведено в работе [231], Рис. 2.18.

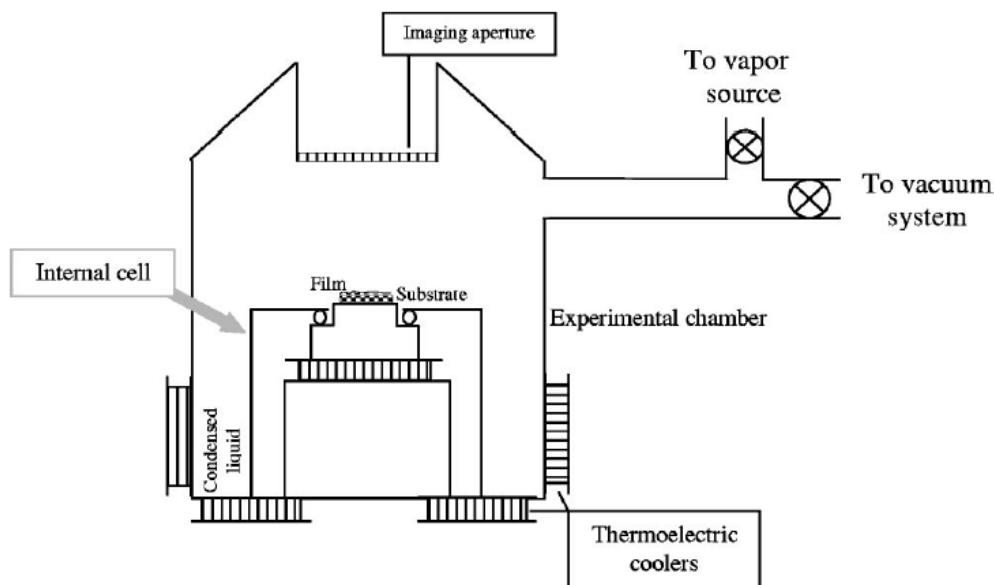


Рис.2.18. Схема экспериментальной установки.

На Рис. 2.19 показано, что измеряемая величина R не зависит от r , но медленно убывает со временем, так что большие капли испаряются быстрее. Для подтверждения результатов было проведено несколько экспериментов при одном и том же отношении p/p_{sat} на несмачиваемой подложке, в которых маленькие капли объединялись в одну большую каплю в течение 30 секунд. Профиль тонкого слоя полярной жидкости приведен на Рис. 2.20 и был получен с использованием технологии интерферометрии. Было экспериментально доказано наличие двух различных устойчивых значений толщины слоя, которые были предсказаны в модели [310]. Две толщины разделены высокой краевой зоной, которая развивается вследствие гидродинамического движения, такой эффект наблюдался экспериментально [150, 298] и теоретически [234, 312].

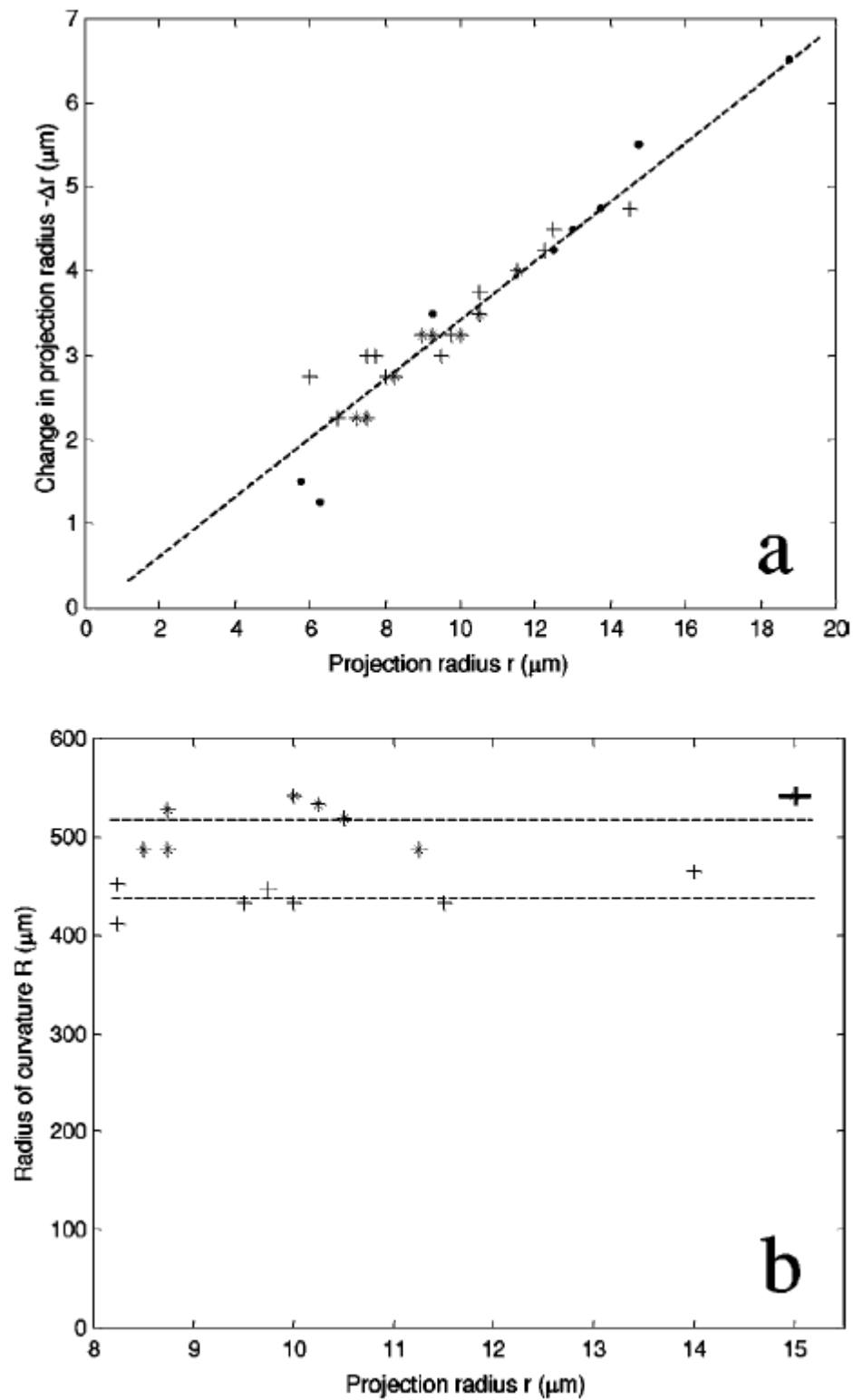


Рис. 2.19. а) Изменение проекционного радиуса капли в течение 15 минут как функция его радиуса для трех различных экспериментов при соотношении $p/p_{sat} = 0,920 \pm 0,002$. Имеет место линейная зависимость величин. б) Радиус кривизны больших капель не зависит от его проекционного радиуса. Две линии на рисунке показывают капли разных размеров в различные моменты времени.

В экспериментах было получено значение для «тонкого» слоя, который равен $25 \pm 5 \text{ \AA}$, а величина «толстого» слоя жидкости равнялась $110 \pm 10 \text{ \AA}$.

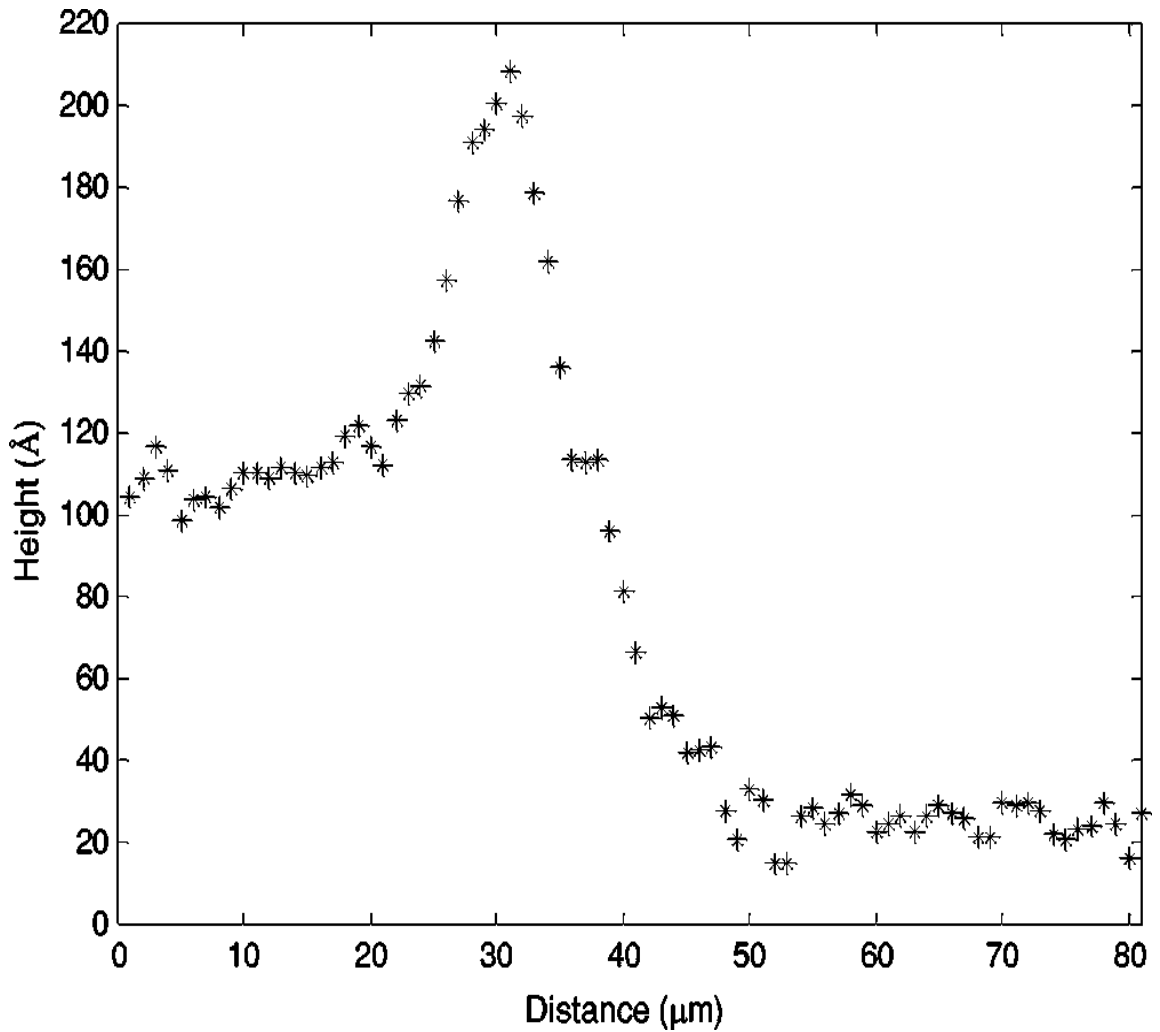


Рис.2.20 Полученный экспериментально профиль испаряющейся водяной капли, заключенный между двумя стационарными значениями толщины слоя.

Характерное «вздутие» профиля может быть объяснено тем, что при малых значениях параметра испарения имеет значение не только скорость движения фронта относительно оси x , но и скорость, направленная вдоль оси y , которая и является причиной возникновения «горба». С ростом параметра испарения скорость движения фронта жидкости увеличивается (2.19), а компонента скорости, направленная перпендикулярно, уменьшается, что показывает Рис. 2.2(a).

Для исследования эволюции испарения водяной капли на слюдяной подложке было произведено численное моделирование данной задачи с

использованием уравнения (2.1). Все величины, использованные в данной задаче, были взяты из эксперимента [213]. Граничные условия были выбраны с таким расчетом, чтобы исключить из рассмотрения краевые углы смачивания. Как видно из Рис. 2.21, в начальной фазе испарения поведение полярной жидкости ничем не отличается от испарения неполярной жидкости. Однако с течением времени можно наблюдать появление второго характерного значения толщины слоя. В дальнейшем площадь под величиной «толстого» слоя будет уменьшаться, пока не исчезнет и не останется только одна толщина «тонкого» слоя капли жидкости.

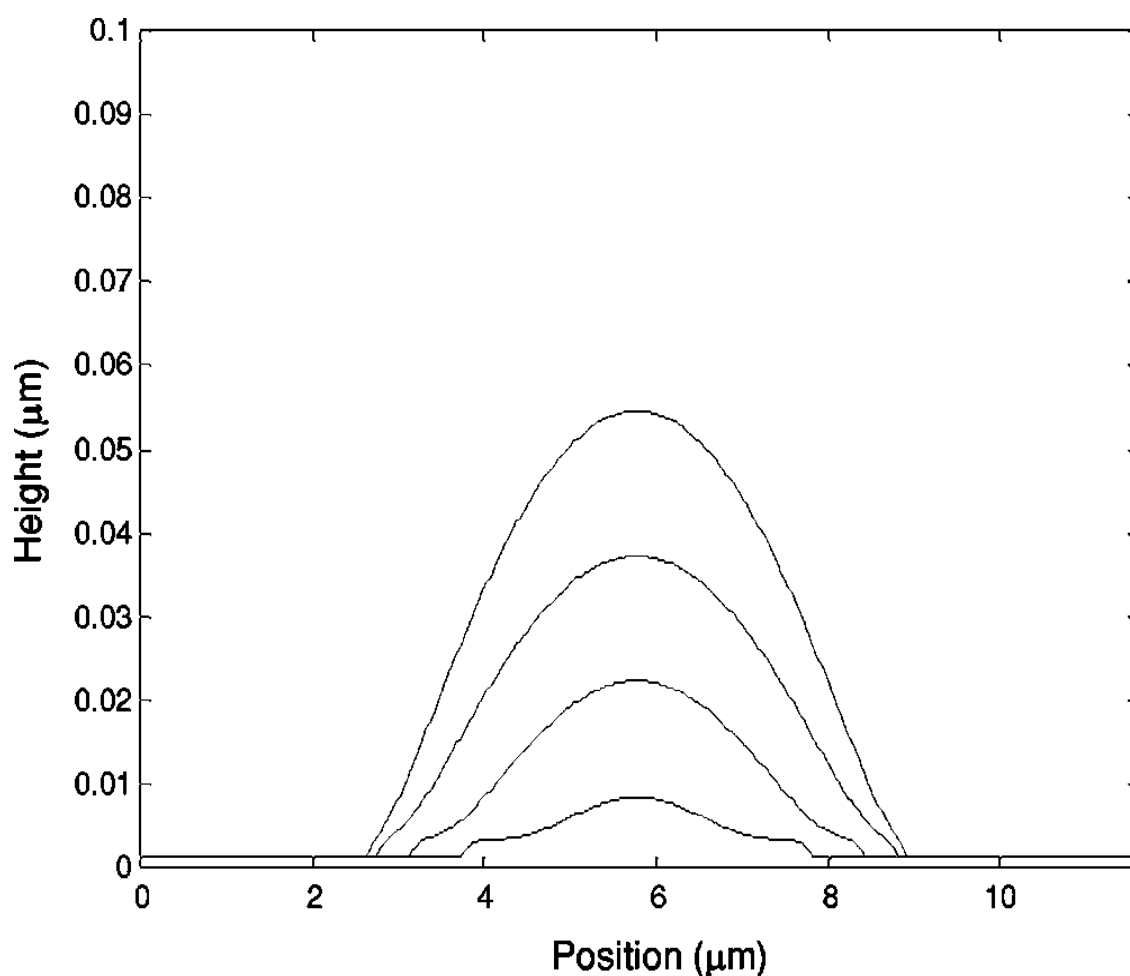


Рис. 2.21 Численное моделирование эволюции испарения капли воды на слюдяной подложке. Все величины взяты из работы [232].

В работе [232] было проведено теоретическое и экспериментальное исследование влияния ван-дер-ваальсовых сил на динамику пальцеобразной

неустойчивости контактной линии, расположенной между двумя устойчивыми состояниями испаряющейся тонкой пленки полярной жидкости, которая располагается на твердой подложке. Поверхностные эффекты натяжения в одиночку не могут дать удовлетворительного объяснения одновременному уменьшению радиуса кривизны пальцеобразного образования и увеличению среднего расстояния между пальцами, наблюдаемым в эксперименте. По-прежнему рассматривается система «слядяная подложка – полярная жидкость (вода) – пар». Толщина слоя испаряющейся жидкости имеет два метастабильных состояния, одно из которых имеет толщину, соответствующую нескольким диаметрам молекулы воды h_1 , а другая толщина слоя имеет макроскопическую толщину h_2 . Так как такая двухслойная пленка жидкости непрерывна на межфазной границе, то понятие «контактный угол» в данной задаче теряет смысл. Фаза жидкости, являющаяся переходным слоем между двумя различными толщинами, и является предметом нашего рассмотрения. В этом переходном слое возможно зарождение гетерогенной фазы образования неустойчивости для данной системы. В этой области толщина жидкости возрастает в область, имеющую отрицательную кривизну (капиллярная конденсация). Рост области, которая имеет толщину h_1 , продолжается, поскольку с толщины h_2 непрерывно происходит испарение. Гидродинамическое движение воды данной системы происходит таким образом, чтобы обеспечить равновесное значение h_2 . Однако из-за эффекта вязкости жидкость частично собирается в область, имеющую форму цилиндрического обода с толщиной большей, чем h_2 [233]. Этот обод чрезвычайно чувствителен к продольным возмущениям, что приводит к образованию пальцеобразной неустойчивости.

Для исследования устойчивости будем считать, что пальцеобразная неустойчивость, которая имеет место на непрерывной границе раздела между

двумя метастабильными толщинами, имеет геометрическую форму, представленную на Рис. 2.22.

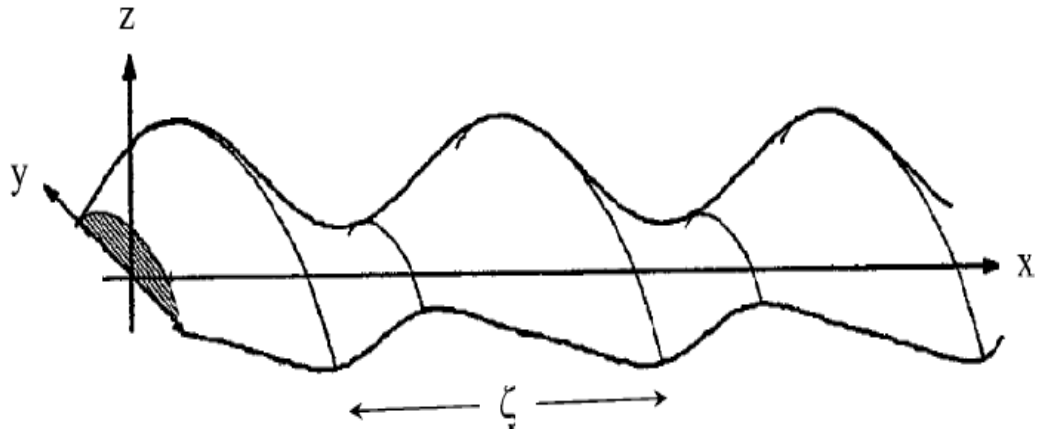


Рис.2.22. Геометрия формы образования пальцеобразной неустойчивости слоя воды на подложке с характерным значением волнового вектора ξ .

Предполагается, что периодические волновые формы вдоль оси x можно описать с помощью некоторой кривизны поверхности K . Каждый сегмент такой поверхности имеет ширину $2(z/K)^{1/2}$ и область поперечного сечения $4/3(2z^3/K)^{1/2}$. Воспользуемся теперь длинноволновым приближением для описания ламинарного потока пленки на подложке с учетом условия неприлипания жидкости к границе раздела «подложка – жидкость» (верхняя граница по оси z на Рис. 2.23). Такое приближение является разумным для описания поведения вязкого течения в данном сегменте. В этом случае поток жидкости в направлении x на единицу ширины y является функцией давления вдоль оси x и может быть выражен в виде

$$J = -\frac{z^3}{3\eta} \cdot \frac{dp}{dx}$$

В данном случае не будем обращать внимание на процесс испарения воды, так как этот процесс протекает медленнее, чем развивается неустойчивость. Это допущение позволяет использовать фундаментальный закон сохранения массы воды, который дает следующее выражение:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2}{3} \left(\frac{z^3}{K} \right)^{1/2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(J \left(\frac{z}{K} \right)^{1/2} \right) = -\frac{1}{3\eta} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dp}{dx} \left(\frac{z^7}{K} \right)^{1/2} \right)$$

Путем алгебраических преобразований данное выражение приходит к виду:

$$\frac{z^2}{2\eta} \left(\frac{dp}{dx} \frac{dz}{dx} \left(\frac{7}{K} - \frac{z}{K} \frac{dK}{dz} \right) + \frac{2z}{K} \frac{d^2 p}{dx^2} \right) = \left(\frac{3}{K} - \frac{z}{K^2} \frac{dK}{dz} \right) \frac{\partial z}{\partial t} \quad (2.40)$$

Можно записать давление в терминах $z(x, y)$, добавляя к обычной форме записи давления дополнительное ван-дер-ваальсовое слагаемое:

$$p = -\sigma \frac{d^2 z}{dx^2} + \sigma K - \frac{d\Phi}{dz}.$$

В этом уравнении первое слагаемое в правой части представляет собой кривизну в области переменных xz , второе слагаемое также определяет кривизну, но уже в области yz , третье слагаемое есть так называемое расклинивающее давление, которое имеет место при взаимодействии между подложкой и жидкостью.

Так как толщина переходного слоя достаточно велика (имеет значение $>100\text{\AA}$), то в этом случае можно пренебречь полярным слагаемым в уравнении для $\Phi(z)$ (2.39), оставив только ван-дер-ваальсовое слагаемое $\Phi(z) = S^{lw} d_0^2 / z^2$ [293].

Был проведен линейный анализ устойчивости для малых возмущений, которые могут быть записаны в виде $z = h + u \exp(st + iqx)$. Подставляя данное выражение в уравнение (2.40) можно получить дисперсионное соотношение:

$$s = \frac{h^3}{K\eta(3/K + h)} \left(\sigma \left(-q^4 - \frac{dK}{dz} q^2 \right) + \frac{6S^{lw} d_0^2}{h^4} q^2 \right)$$

Для максимального значения декремента возмущений s можно получить характерную величину волнового числа для пальцеобразной неустойчивости:

$$\xi = 2\pi / q = 2\pi / \left(-\frac{dK}{dz} + \frac{6S^{lw} d_0^2}{\sigma h^4} \right)^{1/2} \quad (2.41)$$

Представляется интересным оценить вклад двух слагаемых в уравнение для значения волнового числа (2.41) с помощью имеющихся и полученных экспериментальных значений соответствующих величин. Будем считать, что отношение dK/dz можно представить как K/h . Типичными значениями для воды являются $S^{lw} = 0.0015 \text{ Дж/м}^2$, $d_0 = 0.2 \text{ нм}$, соответствующие значения толщины и кривизны определяются как $h \sim 300 \text{ \AA}$ и $K \sim 20 \text{ \AA}^{-1}$ соответственно. Из полученных соотношений можно сделать вывод о том, что первым слагаемым в уравнении (2.41) можно пренебречь и значение волнового числа при образовании пальцеобразной неустойчивости определяется исключительно двойным электрическим слоем, возникающим на границе раздела «твердая подложка – жидкость», что было теоретически предсказано в работе [210].

Эксперимент проводился в высоком вакууме, отдельно располагалась камера с дистиллированной водой, откуда водяной пар поступал в систему. Температура в экспериментальной ячейке контролировалась с помощью термоэлектрических охладителей. Слюдяная подложка располагалась в центре ячейки и имела свою собственную температуру T_{sub} , которая могла изменяться независимо от температуры T системы. Если $T_{sub} < T$, то водяной пар конденсируется на слюдяной подложке, а при $T_{sub} > T$ происходит процесс испарения тонкого слоя воды в окружающую систему.

На Рис. 2.23 показана эволюция фронта испаряющейся жидкости с образованием пальцеобразной неустойчивости. Этот процесс происходит с увеличением среднего расстояния между пальцеобразными структурами ξ . Среднее значение радиуса кривизны уменьшается с 7 nm до 3 nm и, согласно обычной тейлоровской теории неустойчивости, данное уменьшение масштаба должно вести за собой и соответствующее снижение продольного значения волнового числа. Однако этого не происходит. Как было показано выше при анализе уравнения (2.41), при значениях толщины слоя порядка 200 – 400 Å эффектом кривизны можно пренебречь и основную роль в развитии

пальцеобразной неустойчивости играет межфазное взаимодействие «твердая подложка – жидкость».

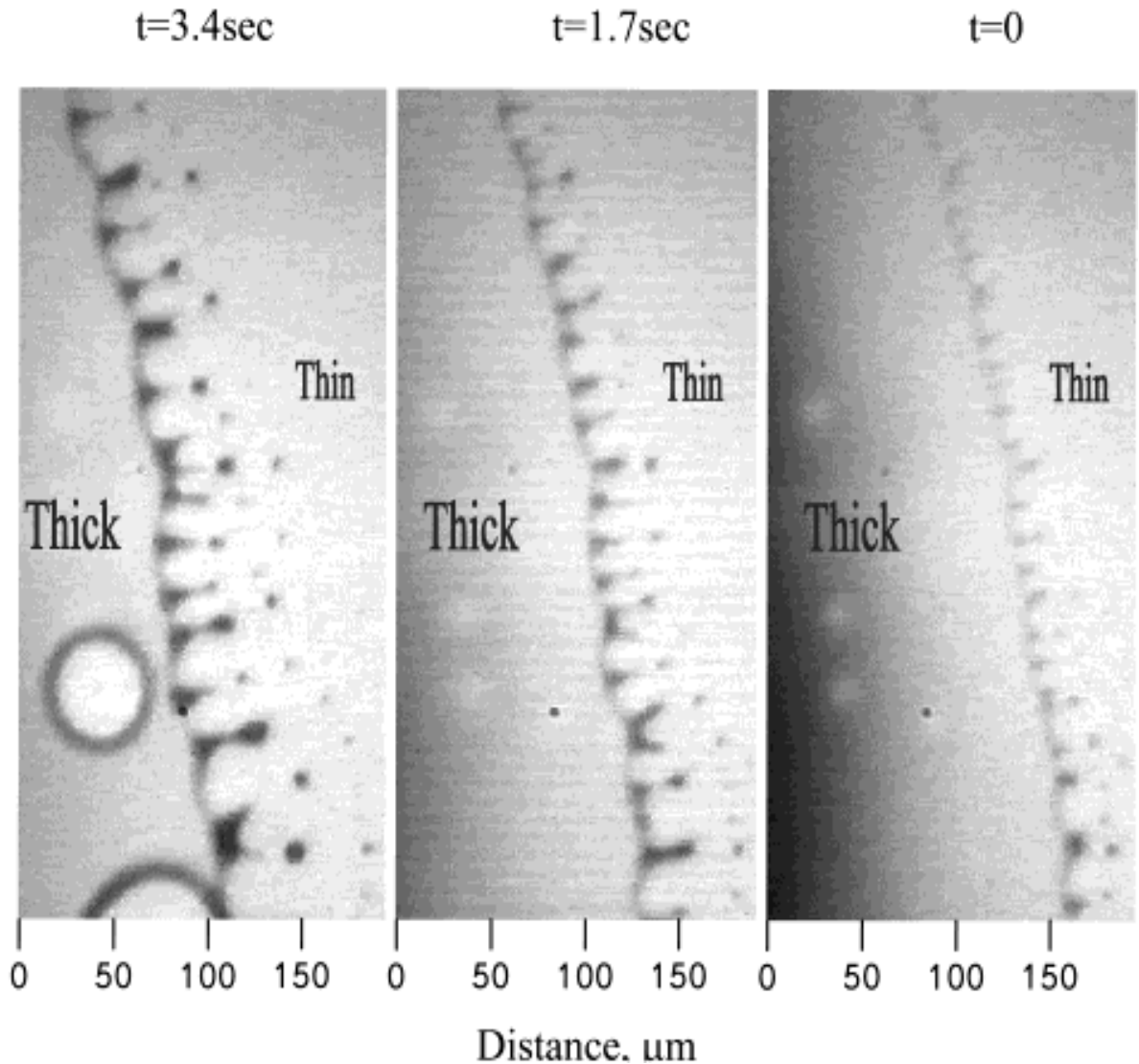


Рис.2.23. Интерферограмма эволюции распространения пальцеобразной неустойчивости (справа налево).

На Рис. 2.24 показана зависимость волнового числа ξ от толщины слоя h относительно двух независимых экспериментов. При использовании статистического анализа данных была найдена аналитическая формула для волнового числа $\xi_{\text{exp}} = ah^b$, где $a = (3.7 \pm 0.7) \cdot 10^{10} \text{ i}^{-1}$ и $b = 2.0 \pm 0.1$, которые количественно согласуются с теоретически полученными данными, равными $a = 2.8 \cdot 10^{10} \text{ i}^{-1}$ и $b = 2$ соответственно. Некоторое различие между теоретическим и экспериментальными значениями параметра a может быть

вызвано сильной зависимостью физических характеристик для различных слюдяных подложек. Значение параметра b не зависит от характеристик подложки и демонстрирует хорошее согласование между значениями эксперимента и теории.

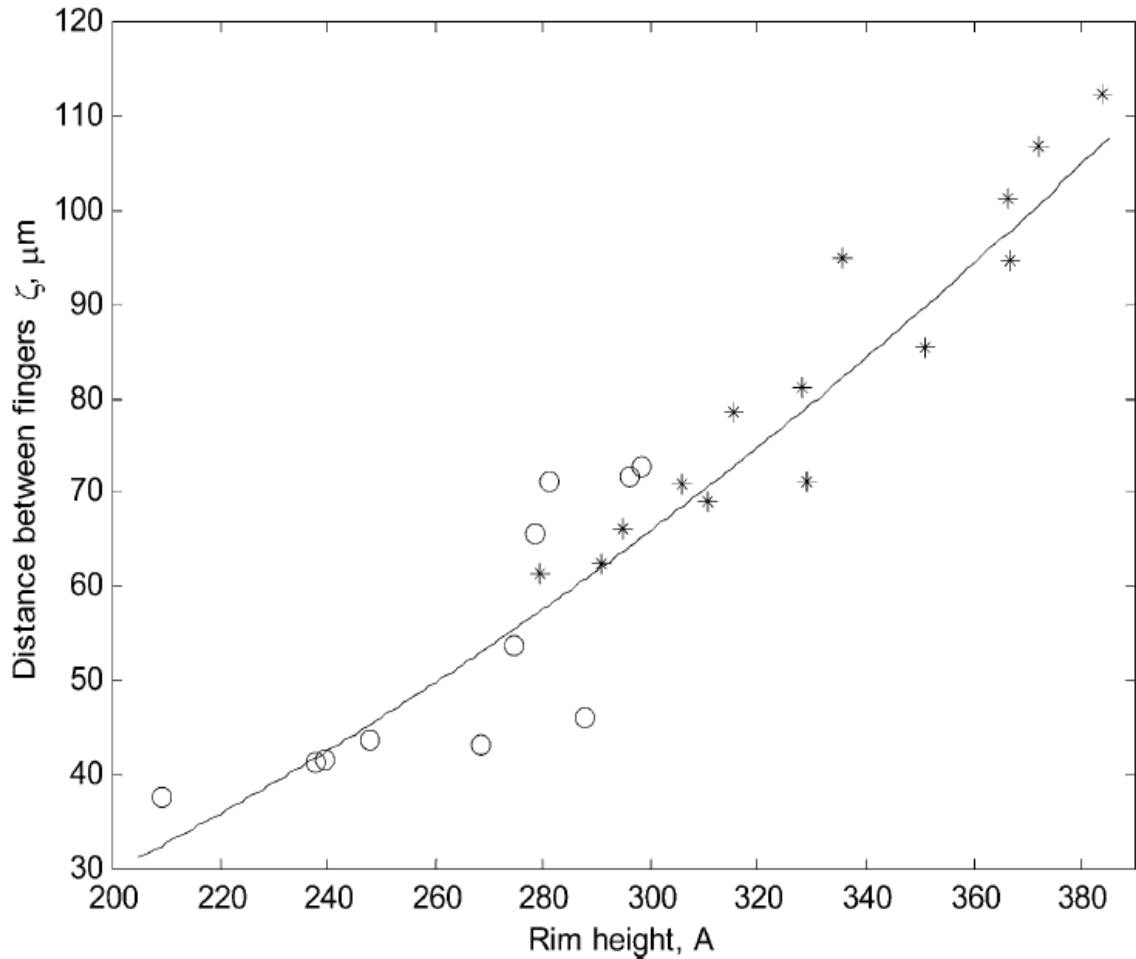


Рис.2.24. Зависимость среднего расстояния между пальцеобразными структурами ξ от средней толщины максимального значения слоя для двух различных независимых экспериментов.

Как и в случае для задачи, представленной в Главе 2.5, компьютерные вычисления были проведены относительно уравнения (2.1).

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{h^3}{3\eta} \nabla \left[\frac{d\Phi(h)}{dh} - \sigma \nabla^2 h \right] - \frac{\kappa}{\rho} \left[\frac{d\Phi(h)}{dh} - \sigma \nabla^2 h - \rho \mu_v \right]$$

Здесь η – динамическая вязкость жидкости, $\mu_v = kT \ln(p_{vap}/p_{sat})$ обозначает химический потенциал водяного пара, ρ – плотность воды и K есть

постоянная испарения. Данное уравнение решалось численно с использованием параметров, которые были в эксперименте ($p/p_s = 0.95$), что позволяет испаряться «толстому» слою пленки со скоростью 7 нм/сек . Численное решение уравнения было проведено с использованием теории конечных разностей. Методом решения была выбрана стандартная полуневная двумерная схема Кранка-Николсон. В качестве метода решения девятидиагональной системы уравнений был использован алгоритм Стоуна для разреженных матриц. Граничные условия вдоль оси x выбирались как и для двумерной задачи $h_x = h_{xx} = 0$, тогда как для границ по оси y использовались периодические условия. Пространственная сетка имела масштаб 360×360 , а шаг по времени варьировался в диапазоне значений $\Delta t = 10^{-3} - 10^{-5}$.

Результат, приведенный на Рис. 2.25, является логическим продолжением вычислений, приведенных в Главе 2.5. При проведении данного вычислительного эксперимента на начальное распределение границы между «тонкой» и «толстой» толщинами накладывались малые возмущения периодической формы вдоль оси y . Параметры системы выбирались таким образом, чтобы в этой области величин имелось место пальцеобразной неустойчивости. На Рис. 2.20 приведены фигуры, которые соответствуют времени $t = 0, 40, 110$ соответственно. Так как граничные условия, используемые по оси y , заданы периодически, то не удастся проследить детально за механизмом изменения волнового числа на границе движения фронта. Численные результаты показывают более гладкую форму пальцеобразных структур, нежели в представленных выше экспериментальных данных. Тем не менее между экспериментальными и теоретическими данными наблюдается достаточно хорошее согласие как по качественному, так и по количественному соотношению.

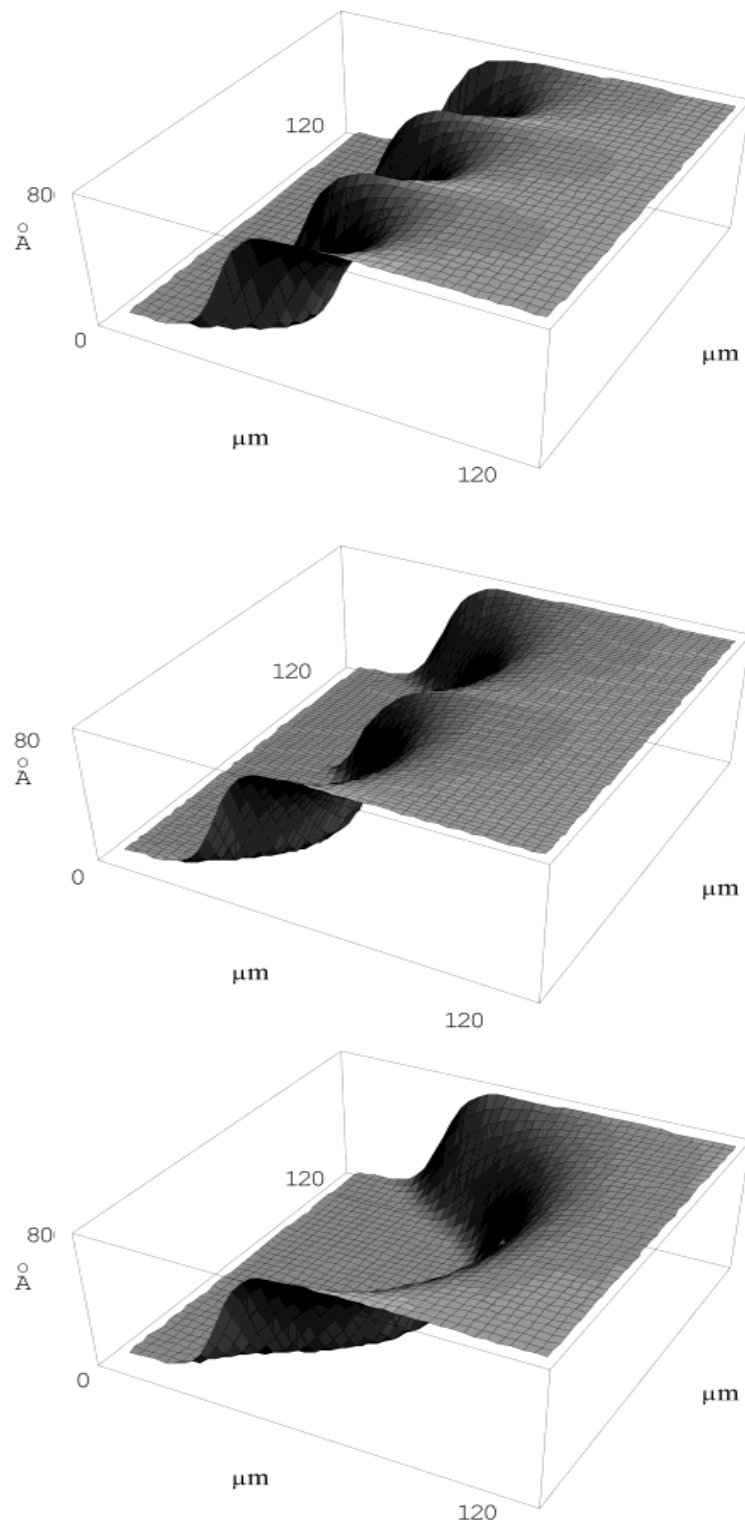


Рис.2.25. Численное моделирование эволюции распространения пальцеобразной неустойчивости для параметров системы $\chi = 1.089$, $S = -0.0026$, $\Omega = 0.0067$

Основные выводы по Главе 2.

Во второй главе было проведено численное моделирование уравнения, описывающего эволюцию тонкого слоя испаряющейся полярной жидкости. Важной особенностью полярной жидкости является тот факт, что энергия межмолекулярного взаимодействия складывается из суммы ван-дер-ваальсового взаимодействия и специфического взаимодействия двойного электрического слоя на межфазной границе «жидкость – твердое тело». Эта особенность полярной жидкости формирует в диапазоне 100–1000 Å два устойчивых значения толщины слоя и одно неустойчивое.

Результаты расчетов показывают, что профиль фронта испаряющейся тонкой пленки существенно меняется при изменении безразмерного параметра испарения. Определена линейная зависимость скорости движения фронта жидкости относительно безразмерного параметра испарения. Проведено исследование устойчивости движения фронта для продольных и поперечных возмущений относительно движения фронта жидкости.

Обнаружено, что движущаяся граница между «тонким» и «толстым» значениями толщины устойчива по отношению к продольным возмущениям относительно движения фронта. Однако относительно поперечных возмущений для малых безразмерных параметров испарения существует область, где возмущения могут нарастать, причем эта неустойчивость имеет длинноволновый характер. В длинноволновом приближении ($k = 0$) было получено уравнение для определения значения декремента затухания поперечных возмущений во втором порядке малости.

Численное моделирование двумерной задачи показало, что в области параметров, где имеет место неустойчивость относительно продольных возмущений, реализуется пальцеобразная неустойчивость. Исследования показали увеличение области неустойчивости движения фронта испаряющейся пленки полярной жидкости при увеличении шероховатости границы раздела «твердое тело – жидкость».

Глава 3. Исследование влияния термокапиллярного эффекта на динамику движения тонкого слоя полярной жидкости

Изучение влияния термокапиллярного эффекта на процессы тепло- и массопереноса в различных жидкостях является актуальным вследствие многочисленных технических приложений, таких как процессы смазки и нанесения покрытия, где контроль температуры имеет важное значение при достижении равномерного слоя. Когда неравномерно нагретая жидкость имеет свободную поверхность и находится в силовом поле, на ее движение существенно влияет зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры. В тонких жидких пленках, где гравитационными эффектами можно пренебречь, термокапиллярная сила (эффект Марангони) становится главной, провоцируя значительные деформации поверхности и даже разрывы пленки [75, 130].

При движении контактной линии «твердое тело – жидкость – газ» под действием термокапиллярной силы может возникнуть пальцеобразная неустойчивость. Это явление было изучено во многих экспериментальных исследованиях [2, 95, 344] и наблюдалось в том числе при высыхании тонких пленок полярной жидкости (воды), а также полимерных растворов. При высыхании полярной жидкости наблюдается возникновение «сухих» пятен, покрытых очень тонким слоем остаточной жидкости. Существует достаточно большое количество теоретических работ [170, 171, 324, 325], в которых в рамках длинноволнового приближения изучаются процессы поверхностного структурообразования в присутствии эффекта Марангони.

В настоящей главе рассматривается задача, в которой в рамках длинноволнового приближения выводятся эволюционные уравнения для нагретой и испаряющейся тонкой полярной жидкости. Также проводится исследование влияния различных факторов на динамику движения и устойчивость пространственных структур.

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим движение тонкого горизонтального слоя полярной вязкой несжимаемой жидкости (например, воды), который заключен между твердой подложкой и паром соответствующей жидкости. Декартовы координаты определим следующим образом: ось x направлена вдоль слоя, а ось z перпендикулярно (см. Рис. 3.1).

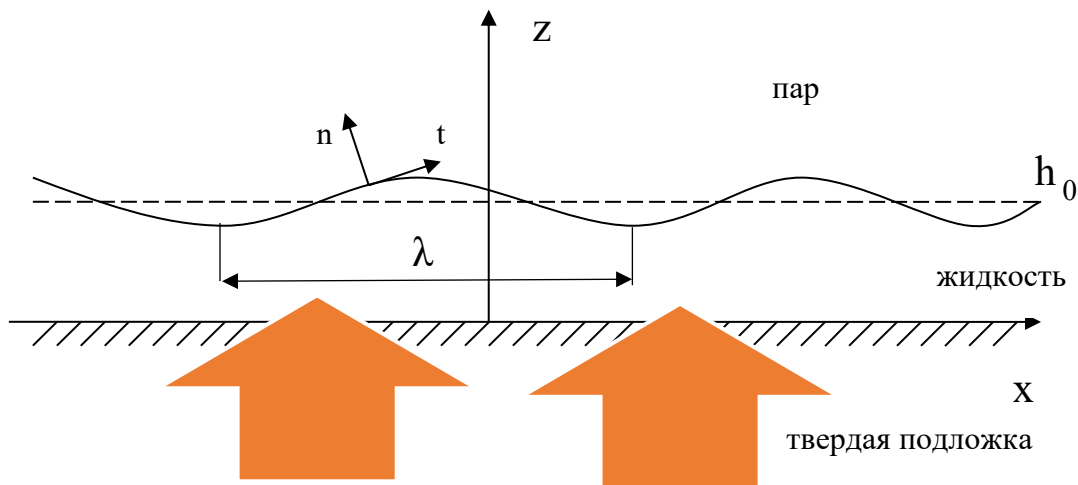


Рис.3.1 Геометрическая форма задачи

Жидкость может испаряться в парообразную среду. Твердая граница имеет температуру T_0 , а температуру пара обозначим через T_v , причем $T_0 > T_v$. Предполагается, что на свободной поверхности $z = h(x, t)$ имеет место линейная зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры $\sigma = \sigma_v - \mathcal{G}(T - T_v)$, здесь $\mathcal{G}$ – температурный коэффициент поверхностного натяжения, а константа σ_v есть поверхностное натяжение при температуре T_v . Вектор скорости жидкости имеет две компоненты $\vec{v} = (u, w)$, где u и w – проекции на оси x и z соответственно. В начальном состоянии толщина слоя имеет постоянное значение, равное $z = h_0$, однако в дальнейшем под воздействием возмущений первоначально плоская граница может деформироваться. Ввиду малой толщины слоя гравитационными эффектами в

дальнейшем будем пренебрегать. Уравнения движения и переноса тепла имеют следующий вид [266]:

$$\begin{aligned}\rho(\partial_t u + u\partial_x u + w\partial_z u) &= -\partial_x(p + \varphi) + \mu\nabla^2 u, \\ \rho(\partial_t w + u\partial_x w + w\partial_z w) &= -\partial_z(p + \varphi) + \mu\nabla^2 w, \\ \rho c(\partial_t T + u\partial_x T + w\partial_z T) &= k_{th}\nabla^2 T, \\ \partial_x u + \partial_z w &= 0.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Здесь ρ – плотность жидкости, p – давление, φ – дополнительный потенциал энергии слоя, возникающий в результате межмолекулярного взаимодействия («подложка – жидкость», «жидкость – пар»), T – температура жидкости, μ – динамическая вязкость, c – удельная теплоемкость жидкости и k_{th} есть коэффициент теплопроводности. Символом ∂_i обозначается производная по соответствующей координате, также введено обозначение $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial z^2$

3.2. Граничные условия задачи

Классическими граничными условиями на подложке являются условия ее непроницаемости для жидкости ($w = 0$) и отсутствия проскальзывания скорости жидкости вдоль поверхности подложки ($u = 0$). Также на твердой границе задано условие для значения температуры $z = 0$: $T = T_0$.

Подробно остановимся на задании граничных условий на межфазной поверхности, $z = h(x, t)$. Для этого рассмотрим упрощенный случай поверхности, которую можно описать уравнением $F(x, z, t) = 0$. В отсутствие испарения и при условии, что F – материальная поверхность, имеем

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad \partial_t F + \vec{v} \cdot \nabla F = 0\tag{3.2}$$

где v — скорость жидкости на межфазной границе. Для $F = z - h(x, t)$

$$\nabla F = \vec{e}_z - \partial_x h \vec{e}_x, \quad \partial_t F = -\partial_t h$$

Подставим эти выражения в уравнение (3.2), имея в виду, что $\vec{v} = u\vec{e}_x + w\vec{e}_z$, получим:

$$\partial_t F + \vec{v} \cdot \nabla F = -\partial_t h + (u\vec{e}_x + w\vec{e}_z) \cdot (\vec{e}_z - \partial_x h \vec{e}_x) = -\partial_t h + w - u\partial_x h$$

$$\partial_t h + u\partial_x h = w$$

Это уравнение называется кинематическим условием. Если имеется расход массы E от поверхности, то кинематическое условие нужно дополнить следующим слагаемым:

$$\partial_t h + u\partial_x h - w = -\gamma E \quad (3.3)$$

где $\gamma \equiv (1 + (\partial_x h)^2)^{1/2}$ – коэффициент, связанный с деформацией поверхности. На границе между газом и жидкостью должно удовлетворяться условие равновесия напряжений. Математически оно записывается так [173]:

$$(T^{(a)} - T) \cdot \vec{n} + \nabla_s \sigma + 2H\sigma\vec{n} = 0 \quad (3.4)$$

где T – тензор поверхностного напряжения, σ – поверхностное натяжение, ∇_s – оператор поверхностного градиента, H – средняя кривизна поверхности, а $\vec{n}$ – единичный нормальный к поверхности вектор, направленный наружу в газовую фазу (см. Рис.3.1).

Снова обратимся к упрощению, при котором межфазную поверхность «газ – жидкость» можно описать функцией $F(x, z, t) = 0$. Это значит, что мы берем такую функцию $z = h(x, t)$, что $F(x, z, t) = z - h(x, t) = 0$. Тогда единичный вектор $\vec{n}$, нормальный к межфазной поверхности, можно записать как

$$\vec{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{\vec{e}_z - \partial_x h \vec{e}_x}{(1 + (\partial_x h)^2)^{1/2}}$$

Кроме $\vec{n}$, мы можем также найти единичный вектор $\vec{t}$, направленный по касательной к поверхности:

$$\vec{t} = \frac{\vec{e}_x + \partial_x h \vec{e}_z}{(1 + (\partial_x h)^2)^{1/2}}.$$

В дальнейшем будем пользоваться записью $\gamma \equiv (1 + (\partial_x h)^2)^{1/2}$, а вектора $\vec{n}$ и $\vec{t}$ разложим на составляющие:

$$\begin{aligned}\vec{n}_1 &= -\frac{1}{\gamma} \partial_x h \vec{e}_x, \vec{n}_2 = \frac{\vec{e}_z}{\gamma} \\ \vec{t}_1 &= \frac{\vec{e}_x}{\gamma}, \vec{t}_2 = \frac{1}{\gamma} \partial_x h \vec{e}_z\end{aligned}$$

Рассмотрим нормальную компоненту уравнения свободной поверхности (3.4):

$$(T^{(a)} - T) : \vec{n} \vec{n} + 2H\sigma = 0 \quad (3.5)$$

Произведем алгебраические преобразования:

$$\begin{aligned}(T^{(a)} - T) : \vec{n} \vec{n} &= (T^{(a)} - T)_{11} \vec{n}_1 \vec{n}_1 + (T^{(a)} - T)_{12} \vec{n}_1 \vec{n}_2 + (T^{(a)} - T)_{21} \vec{n}_2 \vec{n}_1 + (T^{(a)} - T)_{22} \vec{n}_2 \vec{n}_2 = \\ &= \frac{1}{\gamma^2} \left[(T_{11}^{(a)} - T_{11}) (\partial_x h)^2 - (T_{12}^{(a)} - T_{12}) \partial_x h - (T_{21}^{(a)} - T_{21}) \partial_x h + (T_{22}^{(a)} - T_{22}) \right]\end{aligned}$$

Согласно теореме Коши о взаимности касательных напряжений, тензор напряжений симметричен. Тогда уравнение придет к виду

$$\frac{1}{\gamma^2} \left[(T_{11}^{(a)} - T_{11}) (\partial_x h)^2 - 2(T_{12}^{(a)} - T_{12}) \partial_x h + (T_{22}^{(a)} - T_{22}) \right] + 2H\sigma = 0$$

Рассмотрим теперь тангенциальную составляющую условия натяжения:

$$(T^{(a)} - T) : \vec{n} \vec{t} + \nabla_s \sigma \cdot \vec{t} = 0 \quad (3.6)$$

Проведем аналогичные алгебраические преобразования первого слагаемого:

$$\begin{aligned}(T^{(a)} - T) : \vec{n} \vec{t} &= (T^{(a)} - T)_{11} n_1 t_1 + (T^{(a)} - T)_{12} n_1 t_2 + (T^{(a)} - T)_{21} n_2 t_1 + (T^{(a)} - T)_{22} n_2 t_2 = \\ &= \frac{1}{\gamma^2} \left[- (T_{11}^{(a)} - T_{11}) \partial_x h - (T_{12}^{(a)} - T_{12}) (\partial_x h)^2 + (T_{21}^{(a)} - T_{21}) + (T_{22}^{(a)} - T_{22}) \partial_x h \right]\end{aligned}$$

Приведем подобные и снова применим теорему о взаимности касательных напряжений:

$$(T^{(a)} - T) : \vec{n} \vec{t} = \frac{1}{\gamma^2} \left[(T_{12}^{(a)} - T_{12}) (1 - (\partial_x h)^2) + (T_{22}^{(a)} - T_{22} - (T_{11}^{(a)} - T_{11})) \partial_x h \right]$$

Для дальнейшей работы нам понадобится определить поверхностный градиент из уравнения (3.6), когда поверхность задана уравнением $z = h(x, t)$. Для этого воспользуемся удобным оператором проекции на поверхность $P = \bar{\bar{I}} - \vec{n} \vec{n}$, где $\bar{\bar{I}}$ обозначает единичный тензор. Этот оператор позволяет спроецировать любой вектор из двумерного пространства на межфазную поверхность $z = h(x, t)$.

Если вектор лежит на поверхности, как, например, тангенциальный единичный вектор $\vec{t}$, то оператор P вернет этот же вектор. Таким образом,

$$P \cdot \vec{t} = \vec{I} \cdot \vec{t} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{t}) = \vec{t}$$

Если θ – любая физическая величина, определенная в трехмерном пространстве, то поверхностный градиент будет выглядеть в виде

$$\nabla_s \theta = \vec{P} \cdot \nabla \theta = \nabla \theta - \vec{n}(\vec{n} \cdot \nabla \theta) \quad (3.7)$$

Используя обозначение двумерного оператора градиента $\nabla = \vec{e}_x \partial_x + \vec{e}_z \partial_z$, подробно распишем второе слагаемое в уравнении (3.7):

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \nabla \theta &= \frac{1}{\gamma} (\vec{e}_z - \partial_x h \vec{e}_x) \cdot (\vec{e}_x \partial_x \theta + \vec{e}_z \partial_z \theta) = \frac{1}{\gamma} (\partial_z \theta - \partial_x h \cdot \partial_x \theta) \\ \vec{n} \cdot (\vec{n} \cdot \nabla \theta) &= \frac{1}{\gamma} (\vec{e}_z - \partial_x h \vec{e}_x) \cdot \frac{1}{\gamma} (\partial_z \theta - \partial_x h \cdot \partial_x \theta) = \\ &= \frac{1}{\gamma^2} [\vec{e}_z (\partial_z \theta - \partial_x h \cdot \partial_x \theta) - \vec{e}_x \cdot \partial_x h (\partial_z \theta - \partial_x h \cdot \partial_x \theta)] \end{aligned}$$

Представляя первое и второе слагаемые в развернутом виде, получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \nabla \theta &= \frac{1}{\gamma} (\vec{e}_z - \partial_x h \vec{e}_x) \cdot (\vec{e}_x \partial_x \theta + \vec{e}_z \partial_z \theta) = \frac{1}{\gamma} (\partial_z \theta - \partial_x h \cdot \partial_x \theta) \\ \vec{n} \cdot (\vec{n} \cdot \nabla \theta) &= \frac{1}{\gamma} (\vec{e}_z - \partial_x h \vec{e}_x) \cdot \frac{1}{\gamma} (\partial_z \theta - \partial_x h \cdot \partial_x \theta) = \\ &= \frac{1}{\gamma^2} [\vec{e}_z (\partial_z \theta - \partial_x h \cdot \partial_x \theta) - \vec{e}_x \cdot \partial_x h (\partial_z \theta - \partial_x h \cdot \partial_x \theta)] \end{aligned}$$

В итоге мы получаем:

$$\begin{aligned} \nabla_s \theta &= \frac{\vec{e}}{\gamma^2} [\partial_x \theta + \partial_x h \cdot \partial_z \theta] + \frac{\vec{e}_z}{\gamma^2} [\partial_z \theta \cdot (\partial_x h)^2 + \partial_x h \cdot \partial_x \theta] = \\ &= \frac{\vec{e}_x}{\gamma^2} [\partial_x \theta + \partial_x h \cdot \partial_z \theta] + \frac{\vec{e}_z}{\gamma^2} \cdot \partial_x h [\partial_z \theta \cdot \partial_x h + \partial_x \theta] = \\ &\left(\frac{\vec{e}_x}{\gamma} + \frac{\vec{e}_z}{\gamma} \cdot \partial_x h \right) \cdot \frac{1}{\gamma} [\partial_x \theta + \partial_x h \cdot \partial_z \theta] = (\partial_x \theta + \partial_x h \cdot \partial_z \theta) \frac{\vec{t}}{\gamma} \end{aligned}$$

Все вышеприведенные рассуждения относительно поверхностного градиента необходимы для получения уравнения поверхностного градиента для случая поверхностного натяжения на межфазной границе «жидкость – пар».

$$\nabla_s \sigma = (\partial_x \sigma + \partial_x h \cdot \partial_z \sigma) \cdot \frac{\vec{t}}{\gamma} = \frac{\vec{t}}{\gamma} \cdot \partial_x \sigma \quad (3.8)$$

Далее необходимо определить среднюю кривизну H из уравнения (3.5) в терминах неизвестной формы поверхности $h(x, t)$. Из аналитической геометрии мы знаем, что среднюю кривизну можно соотнести с дивергенцией единичной нормали $\vec{n}$ к межфазной границе: $2H = -\nabla \cdot \vec{n}$, где

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{n} &= (\vec{e}_x \delta_x + \vec{e}_z \delta_z) \cdot \frac{1}{\gamma} (\vec{e}_z - \delta_x h \vec{e}_x) = \partial_x \left(-\frac{1}{\gamma} \cdot \delta_x h \right) + \partial_z \left(\frac{1}{\gamma} \right) = \\ &= -\gamma^{-2} \cdot \partial_z \gamma + \gamma^{-2} \cdot \partial_x \gamma \cdot \partial_x h - \frac{1}{\gamma} \cdot \partial_x^2 h \end{aligned}$$

Вспоминая, что $\gamma \equiv (1 + (\partial_x h)^2)^{1/2}$, преобразуем производные с учетом правил взятия производных сложной функции:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0$$

$$\partial_x \gamma = \partial_x \left[(1 + (\delta_x h)^2)^{1/2} \right] = \frac{1}{2} (1 + (\partial_x h)^2)^{-1/2} \cdot 2 \cdot (\partial_x h) \cdot \partial_x^2 h = \frac{1}{\gamma} \cdot \partial_x h \cdot \partial_x^2 h$$

Подставим полученные выражения в уравнение кривизны:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{n} &= \gamma^{-2} \cdot \gamma^{-1} \cdot \partial_x h \cdot \partial_x^2 h \cdot \partial_x h - \gamma^{-1} \cdot \partial_x^2 h = \\ &= \gamma^{-1} \cdot \partial_x^2 h \left[(1 + (\partial_x h)^2)^{-1} \cdot (\partial_x h)^2 - 1 \right] = \\ &= \gamma^{-1} \cdot \partial_x^2 h \cdot (1 + (\partial_x h)^2)^{-1} \cdot [(\partial_x h)^2 - 1 - (\partial_x h)^2] = -\gamma^{-3} \cdot \partial_x^2 h \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение для средней кривизны выглядит следующим образом:

$$2H = \gamma^{-3} \cdot \partial_x^2 h \quad (3.9)$$

Уравнения (3.5) и (3.6) могут быть записаны с учетом (3.8) и (3.9) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma^2} [(T_{11}^{(a)} - T_{11}) (\partial_x h)^2 - 2(T_{12}^{(a)} - T_{12}) \partial_x h + (T_{22}^{(a)} - T_{22})] + \sigma \frac{1}{\gamma^3} \partial_x^2 h &= 0 \\ [(T_{11}^{(a)} - T_{11}) (\partial_x h)^2 - 2(T_{12}^{(a)} - T_{12}) \partial_x h + (T_{22}^{(a)} - T_{22})] + \sigma \frac{1}{\gamma} \partial_x^2 h &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\frac{1}{\gamma^2} \left[(T_{12}^{(a)} - T_{12}) (1 - (\partial_x h)^2) + (T_{22}^{(a)} - T_{22} - (T_{11}^{(a)} - T_{11})) \partial_x h \right] + \frac{1}{\gamma} \cdot \partial_x \sigma \cdot \vec{t} \cdot \vec{t} = 0 \quad (3.11)$$

$$\left[(T_{12}^{(a)} - T_{12}) (1 - (\partial_x h)^2) + (T_{22}^{(a)} - T_{22} - (T_{11}^{(a)} - T_{11})) \partial_x h + \gamma \partial_x \sigma \right] = 0$$

Умножим выражение (3.11) на $\partial_x h$ и выразим $(T_{11}^{(a)} - T_{11})$:

$$(T_{12}^{(a)} - T_{12}) (1 - (\partial_x h)^2) \partial_x h + (T_{22}^{(a)} - T_{22}) (\partial_x h)^2 - (T_{11}^{(a)} - T_{11}) (\partial_x h)^2 + \gamma \partial_x h \partial_x \sigma = 0$$

$$(T_{11}^{(a)} - T_{11}) (\partial_x h)^2 = (T_{12}^{(a)} - T_{12}) (1 - (\partial_x h)^2) \partial_x h + (T_{22}^{(a)} - T_{22}) (\partial_x h)^2 + \gamma \partial_x h \partial_x \sigma$$

Подставим это выражение в нормальную компоненту баланса напряжений (3.10):

$$\begin{aligned} & (T_{12}^{(a)} - T_{12}) (1 - (\partial_x h)^2) \partial_x h + (T_{22}^{(a)} - T_{22}) (\partial_x h)^2 + \\ & + \gamma \partial_x h \partial_x \sigma - 2 (T_{12}^{(a)} - T_{12}) \partial_x h + (T_{22}^{(a)} - T_{22}) + \gamma^{-1} \sigma \partial_x^2 h = \\ & = - (T_{12}^{(a)} - T_{12}) \partial_x h \left[1 + (\partial_x h)^2 \right] + (T_{22}^{(a)} - T_{22}) \left[(\partial_x h)^2 + 1 \right] + \gamma \partial_x h \partial_x \sigma + \gamma^{-1} \sigma \partial_x^2 h = \\ & = -\gamma^2 (T_{12}^{(a)} - T_{12}) \partial_x h + \gamma^2 (T_{22}^{(a)} - T_{22}) + \gamma \partial_x h \partial_x \sigma + \gamma^{-1} \sigma \partial_x^2 h = 0 \end{aligned}$$

Разделим выражение на γ^2 :

$$(T_{22}^{(a)} - T_{22}) - (T_{12}^{(a)} - T_{12}) \partial_x h + \gamma^{-1} \partial_x h \partial_x \sigma + \gamma^{-3} \sigma \partial_x^2 h = 0 \quad (3.12)$$

Используя определение тензора напряжений $T = -pI + \mu(\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^*)$, где I – единичный тензор, найдем разности тензора напряжений на поверхности. Будем считать, что газовая фаза создает пренебрежимо малый сдвиг жидкого слоя, тогда $\vec{T}^{(a)} = -p_a \vec{I}$, где p_a – это давление газовой фазы. Распишем векторные произведения дифференциального оператора и скорости в виде матрицы:

$$\nabla \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_x w \\ \partial_z u & \partial_z w \end{pmatrix}, \quad \nabla \vec{v}^* = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_z u \\ \partial_x w & \partial_z w \end{pmatrix}$$

Сделаем то же самое с тензорами напряжения:

$$T = \begin{pmatrix} -p + 2\mu \partial_x u & \mu(\partial_x w + \partial_z u) \\ \mu(\partial_x w + \partial_z u) & -p + 2\mu \partial_x w \end{pmatrix} \quad T^{(a)} = \begin{pmatrix} -p_v & 0 \\ 0 & -p_v \end{pmatrix}$$

Тогда легко находим, что

$$\begin{aligned}
T_{11}^{(a)} - T_{11} &= -p_v + p - 2\mu\partial_x u \\
T_{12}^{(a)} - T_{12} &= -\mu(\partial_x w + \partial_z u) \\
T_{22}^{(a)} - T_{22} &= -p_v + p - 2\mu\partial_x w
\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (3.10), получаем уравнение для нормальной компоненты уравнения баланса напряжений:

$$-p_v + p - 2\mu\partial_z w + \mu(\partial_x w + \partial_z u)\partial_x h + \gamma^{-1}\partial_x h\partial_x \sigma + \gamma^{-3}\sigma\partial_x^2 h = 0 \quad (3.13)$$

Произведем аналогичные действия с уравнением тангенциальной компоненты уравнения баланса напряжений на свободной поверхности:

$$\begin{aligned}
& -\mu(\partial_x w + \partial_z u)\left(1 - (\partial_x h)^2\right) + (-p_a + p - 2\mu\partial_z w - (-p_a + p - 2\mu\partial_x u))\partial_x h + \gamma\partial_x \sigma = \\
& = \mu(\partial_x w + \partial_z u)\left(1 - (\partial_x h)^2\right) + 2\mu(\partial_x u - \partial_z w)\partial_x h + \gamma\partial_x \sigma = 0
\end{aligned}$$

Используя уравнение неразрывности жидкости $\partial_z w = -\partial_x u$ и подставив его в предыдущее уравнение, получим уравнение для тангенциальной компоненты уравнения баланса напряжений:

$$-\mu(\partial_x w + \partial_z u)\left(1 - (\partial_x h)^2\right) + 4\gamma\partial_x u\partial_x h + \gamma\partial_x \sigma = 0 \quad (3.14)$$

Следует отметить, что из уравнения (3.14) можно получить выражение для градиента поверхностного натяжения в явном виде:

$$\partial_x \sigma = \frac{\mu}{\gamma}(\partial_x w + \partial_z u)\left(1 - (\partial_x h)^2\right) - \frac{4\mu}{\gamma}\partial_x u\partial_x h \quad (3.15)$$

Подставим (3.15) в уравнение (3.13):

$$\begin{aligned}
& -p_v + p - 2\mu\partial_z w + \mu(\partial_x w + \partial_z u)\partial_x h + \frac{\mu}{\gamma^2}\left[(\partial_x w + \partial_z u)\left(1 - (\partial_x h)^2\right)(\partial_x h) - 4\partial_x u(\partial_x h)^2\right] + \\
& + \gamma^{-3}\sigma\partial_x^2 h = p - p_v + \gamma^{-3}\sigma\partial_x^2 h + \frac{\mu}{\gamma^2}\left[2\gamma^2\partial_x u + (\partial_x w + \partial_z u)\left(1 - (\partial_x h)^2\right)\partial_x h + \right. \\
& \left. + \gamma^2\partial_x h(\partial_x w + \partial_z u) - 4\partial_x u(\partial_x h)^2\right] = 0
\end{aligned}$$

Преобразуем некоторые из выражений:

$$\begin{aligned}
\gamma^2 - 2(\partial_x h)^2 &= 1 + (\partial_x h)^2 - 2(\partial_x h)^2 = 1 - (\partial_x h)^2 \\
1 - (\partial_x h)^2 + \gamma^2 &= 1 - (\partial_x h)^2 + 1 + (\partial_x h)^2 = 2
\end{aligned}$$

Тогда граничное условие (3.13) придет к виду:

$$p - p_v + \frac{\sigma}{\gamma^3} \partial_x^2 h + \frac{\mu}{\gamma^2} \left[2\partial_x u \left(1 - (\partial_x h)^2 \right) + 2\partial_x h (\partial_x w + \partial_z u) \right] = 0 \quad (3.16)$$

Будем считать, что давление пара много меньше давления жидкости, и второе слагаемое в выражении (3.16) в дальнейшем будем опускать.

Далее необходимо задать граничное условие для температуры на свободной границе раздела двух сред «жидкость – пар». Будем использовать граничное условие, взятое из работы [247]:

$$z = h(x, t): \quad \kappa_{th} \cdot \nabla T \cdot \vec{n} + \alpha_{th} (T - T_v) = 0 \quad (3.17)$$

здесь α_{th} – коэффициент теплопереноса, который описывает скорость переноса тепла от жидкости в газовую фазу с постоянной температурой T_v . Перепишем уравнение (3.17) в более удобной для дальнейшей работы форме:

$$\frac{\kappa_{th}}{\gamma} (\partial_z T - \partial_x h \partial_x T) + \alpha_{th} (T - T_v) = 0 \quad (3.18)$$

Таким образом, мы получили следующие граничные условия для

$$z = h(x, t)$$

Кинематическое условие:

$$\partial_t h + u \partial_x h = w \quad (3.19)$$

Нормальное условие натяжения межфазной поверхности «жидкость – газ»:

$$p + \frac{\sigma}{\gamma^3} \partial_x^2 h + \frac{\mu}{\gamma^2} \left[2\partial_x u \left(1 - (\partial_x h)^2 \right) + 2\partial_x h (\partial_x w + \partial_z u) \right] = 0 \quad (3.20)$$

Тангенциальное условие натяжения:

$$\mu (\partial_x w + \partial_z u) \left(1 - (\partial_x h)^2 \right) - 4\mu \partial_x u \partial_x h - \gamma \partial_x \sigma = 0 \quad (3.21)$$

Теплообмен между жидкостью и газом:

$$\frac{\kappa_{th}}{\gamma} (\partial_z T - \partial_x h \partial_x T) + \alpha_{th} (T - T_v) = 0 \quad (3.22)$$

3.3. Длинноволновое приближение

Решение системы уравнений (3.1) довольно затруднительно, поэтому для упрощения задачи воспользуемся так называемым длинноволновым

приближением. Такое теоретическое приближение, или теория длинных волн, основано на асимптотическом уменьшении системы основных уравнений и граничных условий до упрощенной системы, которая часто состоит из отдельного нелинейного уравнения в частных производных, сформулированного в единицах локальной толщины слоя. Остальные неизвестные, то есть скорость жидкости или газа, температура и другие переменные, определяются позже через функционалы решения этого дифференциального уравнения. В нем присутствует сильная нелинейность, к тому же появляются пространственные производные более высоких порядков, что является следствием избавления от сложностей, создаваемых свободной деформируемой границей. Но все-таки неподвижное численное решение эволюционного уравнения значительно менее сложно, чем численное решение оригинальной задачи со свободной границей. Суть этого математического приема состоит в следующем: считается, что характерная толщина рассматриваемого слоя жидкости много меньше его геометрического масштаба длины. Благодаря этому предположению вводится малый параметр, являющийся отношением вертикальной толщины и характерного горизонтального расстояния. Далее физические величины, использующиеся в полной системе уравнений Навье-Стокса, раскладываются в ряд относительно этого малого параметра. В результате, решая полученные уравнения для одинаковых степеней параметра малости, мы получаем соответствующие эволюционные уравнения.

Чтобы воспользоваться этим приближением, возьмем длину волны деформации свободной поверхности λ (Рис. 3.1) в качестве масштаба длины в направлении оси x , а за масштаб толщины – среднюю толщину слоя h_0 . Основа длинноволнового приближения заключается в том, что длина волны много больше средней толщины слоя:

$$\varepsilon = \frac{2\pi h_0}{\lambda} \ll 1 \quad (3.23)$$

Величина ε является малым параметром нашей задачи, и все физические величины из системы уравнений Навье-Стокса (3.1) будем раскладывать в ряд по степеням ε .

Далее логической представляется процедура соотношения величин нашей задачи по отношению к этому малому параметру:

$$\text{Координаты:} \quad z = h_0 z' \quad x = \lambda x' = \frac{h_0}{\varepsilon} x'$$

$$\text{Скорости:} \quad u = U_0 u' \quad w = W_0 w' = \varepsilon U_0 w'$$

$$\text{Время:} \quad t = \frac{h_0}{\varepsilon U_0} t'$$

Определим масштаб температуры следующим образом:

$$\theta = \frac{T - T_v}{T_0 - T_v}$$

здесь θ – безразмерная температура. Отсюда, для удобства дальнейшей работы, выразим температуру $T = \theta(T_0 - T_v) + T_v = \theta \Delta T + T_v$. В качестве масштаба давления возьмем некоторое значение p_0 , которое определим позднее. Это же p_0 можно взять в качестве потенциала внешней силы. Масштаб коэффициента поверхностного натяжения имеет вид:

$$\sigma = \sigma_v \sigma' = \frac{\mu U_0}{\varepsilon} \sigma'$$

где σ_v – поверхностное натяжение при равенстве температур межфазной поверхности и пара.

После выполнения процедуры обезразмеривания величин нашей задачи относительно малого параметра ε запишем все уравнения системы (3.1) в безразмерной форме. Первое уравнение примет вид:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\varepsilon U_0^2}{h_0} \partial_{t'} u' + \frac{\varepsilon U_0^2}{h_0} u' \partial_{x'} u' + \frac{\varepsilon U_0^2}{h_0} w' \partial_{z'} u' \right) &= -\frac{p_0 \varepsilon}{h_0} \partial_{x'} (p' + \phi') + \frac{\mu U_0}{h_0^2} (\varepsilon^2 \partial_{x'}^2 + \partial_{z'}^2) u' \\ \rho \frac{\varepsilon U_0^2}{h_0} \cdot \frac{h_0^2}{\mu U_0} (\partial_{t'} u' + u' \partial_{x'} u' + w' \partial_{z'} u') &= -\frac{p_0 \varepsilon h_0}{\mu U_0} \partial_{x'} (p' + \phi') + (\varepsilon^2 \partial_{x'}^2 + \partial_{z'}^2) u' \\ \rho \frac{\varepsilon U_0 h_0}{\mu} (\partial_{t'} u' + u' \partial_{x'} u' + w' \partial_{z'} u') &= -\frac{p_0 \varepsilon h_0}{\mu U_0} \partial_{x'} (p' + \phi') + (\varepsilon^2 \partial_{x'}^2 + \partial_{z'}^2) u' \end{aligned}$$

Из последнего уравнения можно получить характерный масштаб давления, который определяется как $p_0 = \mu U_0 / \varepsilon h_0$. Также введем безразмерное число Рейнольдса $Re = U_0 h_0 / \nu = \rho U_0 h / \mu$.

Таким образом, первое уравнение системы задачи в безразмерной форме имеет вид:

$$\varepsilon Re (\partial_{t'} u' + u' \partial_{x'} u' + w' \partial_{z'} u') = -\partial_{x'} (p' + \phi') + (\varepsilon^2 \partial_{x'}^2 + \partial_{z'}^2) u' \quad (3.24)$$

Второе уравнение системы (3.1) запишется в следующей форме:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{U_0^2 \varepsilon^2}{h_0} \partial_{t'} w' + \frac{U_0^2 \varepsilon^2}{h_0} w' \partial_{x'} w' + \frac{U_0^2 \varepsilon^2}{h_0} w' \partial_{z'} w' \right) &= -\frac{U_0 \mu}{\varepsilon h_0^2} \partial_{z'} (p' + \phi') + \frac{\mu U_0 \varepsilon}{h_0^2} (\varepsilon^2 \partial_{x'}^2 + \partial_{z'}^2) w' \\ \rho \frac{U_0^2 \varepsilon^2}{h_0} \cdot \frac{h_0^2 \varepsilon}{U_0 \mu} (\partial_{t'} w' + u' \partial_{x'} w' + w' \partial_{z'} w') &= -\partial_{z'} (p' + \phi') + \varepsilon^2 (\varepsilon^2 \partial_{x'}^2 + \partial_{z'}^2) w' \end{aligned}$$

Которая в безразмерном виде предстанет в виде:

$$\varepsilon^3 Re (\partial_{t'} w' + u' \partial_{x'} w' + w' \partial_{z'} w') = -\partial_{z'} (p' + \phi') + \varepsilon^2 (\varepsilon^2 \partial_{x'}^2 + \partial_{z'}^2) w' \quad (3.25)$$

Для третьего уравнения системы (3.1) формой безразмерного представления является:

$$\begin{aligned} T &= \theta (T_0 - T_v) + T_v = \theta \Delta T + T_v \\ \frac{\rho c U_0 \Delta T \varepsilon}{h_0} (\partial_{t'} \theta + u' \partial_{x'} \theta + w' \partial_{z'} \theta) &= \frac{\kappa_T \Delta T}{h_0^2} (\varepsilon^2 \partial_{x'}^2 + \partial_{z'}^2) \theta \end{aligned}$$

что позволяет записать это уравнение в виде:

$$\varepsilon Pr Re (\partial_{t'} \theta + u' \partial_{x'} \theta + w' \partial_{z'} \theta) = \varepsilon^2 \partial_{x'}^2 \theta + \partial_{z'}^2 \theta \quad (3.26)$$

здесь введено обозначение для безразмерного параметра числа Прандтля в форме $Pr = \rho c \nu / \kappa_T$.

И наконец, последнее, четвертое уравнение системы (3.1) представлено в форме:

$$\partial_x u' + \partial_z w' = 0 \quad (3.27)$$

Перейдем к процедуре обезразмеривания граничных условий:

$$z' = 0: \quad u' = 0; \quad w' = 0; \quad \theta_0 = \frac{T_0 - T_v}{T_0 - T_v} = 1 \quad (3.28)$$

$$z' = h'(x', t'): \quad \frac{h_0 U_0 \varepsilon}{h_0} \partial_{t'} h' + \frac{h_0 U_0 \varepsilon}{h_0} u' \partial_{t'} h' = U_0 \varepsilon w'$$

$$\partial_{t'} h' + u' \partial_x h' = w' \quad (3.29)$$

(пока рассматриваем случай без испарения).

Представим нормальную составляющую тензора напряжений на свободной границе раздела двух сред «жидкость – пар»:

$$\begin{aligned} & \frac{U_0 \mu}{\varepsilon h_0} p' + \frac{\varepsilon^2 h_0 \sigma_0}{h_0^2} \frac{\partial_x^2 h'}{\left(1 + \varepsilon^2 (\partial_x^2 h')^2\right)^{3/2}} + \\ & + \frac{2 \varepsilon \mu U_0}{h_0 \left(1 + \varepsilon^2 (\partial_x^2 h')^2\right)} \left[\partial_x u' \left(1 + \varepsilon^2 (\partial_x^2 h')^2\right) + \partial_x h' \left(\varepsilon^2 \partial_x w' + \partial_z u'\right) \right] = 0 \\ & \frac{U_0 \mu}{\varepsilon h_0} p' + \frac{\varepsilon^2 \sigma_0}{h_0} \frac{\partial_x^2 h'}{\left(1 + \varepsilon^2 (\partial_x^2 h')^2\right)^{3/2}} + \\ & + \frac{2 \varepsilon \mu U_0}{h_0 \left(1 + \varepsilon^2 (\partial_x^2 h')^2\right)} \left[\partial_x u' \left(1 + \varepsilon^2 (\partial_x^2 h')^2\right) + \partial_x h' \left(\varepsilon^2 \partial_x w' + \partial_z u'\right) \right] = 0 \end{aligned}$$

Умножим полученное выражение на $h_0 \varepsilon / U_0 \mu$ и опустим символ «'», обозначающий безразмерную величину. Получим:

$$\begin{aligned} & p + \frac{\varepsilon^3 \sigma_0}{\mu U_0} \cdot \frac{\partial_x^2 h}{\left(1 + \varepsilon^2 (\partial_x^2 h)^2\right)^{3/2}} + \\ & + \frac{2 \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2 (\partial_x^2 h)^2} \left[\partial_x u \left(1 + \varepsilon^2 (\partial_x^2 h)^2\right) + \partial_x h \left(\varepsilon^2 \partial_x w + \partial_z u\right) \right] = 0 \end{aligned}$$

Чтобы сохранить третье слагаемое, которое содержит поверхностное натяжение и имеет порядок ε^3 , и не отбросить его впоследствии из-за малого порядка, введем пониженное капиллярное число $\overline{Ca} = \frac{\varepsilon^3}{Ca} = \frac{\varepsilon^3 \sigma}{\mu U_0}$

$$p + \frac{2\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2 (\partial_x h)^2} \left[\partial_x u \left(1 - \varepsilon^2 (\partial_x h)^2 \right) + \partial_x h \left(\varepsilon^2 \partial_x w + \partial_z u \right) \right] + \frac{\overline{Ca} \partial_x^2 h}{\left(1 + \varepsilon^2 (\partial_x h)^2 \right)^{3/2}} = 0 \quad (3.30)$$

Тангенциальная составляющая тензора напряжений на границе $z = h(x, t)$:

$$\begin{aligned} & \mu \frac{U_0}{h_0} \left(\varepsilon^2 \partial_x w' + \partial_z u' \right) \left(1 - \varepsilon^2 (\partial_x h')^2 \right) - \frac{4\mu \varepsilon^2 U_0 h_0}{h_0^2} \partial_x u' \partial_x h' - \\ & - \frac{\sigma_0 \varepsilon}{h_0} \left(1 - \varepsilon^2 (\partial_x h')^2 \right)^{1/2} \partial_x \sigma = 0 \end{aligned}$$

Домножим результат на $h_0 / \mu U_0$ и опустим символ $\langle\langle \rangle\rangle$, и получим уравнение в виде:

$$\left(\varepsilon^2 \partial_x w + \partial_z u \right) \left(1 - \varepsilon^2 (\partial_x h)^2 \right) - 4\varepsilon^2 \partial_x u \partial_x h - \left(1 + \varepsilon^2 (\partial_x h)^2 \right)^{1/2} \partial_x \sigma = 0 \quad (3.31)$$

Граничное условие теплообмена на свободной поверхности в безразмерном виде запишется:

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa_{th} \Delta T}{h_0 \sqrt{1 + \varepsilon^2 (\partial_x h')^2}} \left(\partial_z \theta - \varepsilon^2 \partial_x h' \partial_x \theta \right) + \alpha_{th} \theta \Delta T = 0 \\ & \partial_z \theta - \varepsilon^2 \partial_x h' \partial_x \theta = - \frac{\alpha_{th} h_0 \theta \sqrt{1 + \varepsilon^2 (\partial_x h')^2}}{\kappa_{th}} \end{aligned}$$

Также опуская символы $\langle\langle \rangle\rangle$, это граничное условие примет вид:

$$\partial_z \theta - \varepsilon^2 \partial_x h \partial_x \theta = -B \theta \sqrt{1 + \varepsilon^2 (\partial_x h)^2} \quad (3.32)$$

где $B = \frac{\alpha_{th} h_0}{\kappa_{th}}$ – число Био, безразмерный параметр теплообмена жидкости и газа.

Для дальнейшей работы полезно найти связь безразмерного поверхностного натяжения и безразмерной температуры:

$$\sigma = \sigma_v - \mathcal{G}(T - T_v)$$

$$\sigma = \sigma_v \sigma'; \quad T = \theta(T_0 - T_v) + T_v$$

$$\sigma_v \sigma' = \sigma_v - \mathcal{G}[\theta(T_0 - T_v) + T_v - T_v] = \sigma_v - \mathcal{G}\theta(T_0 - T_v) = \sigma_v - \mathcal{G}\theta\Delta T$$

$$\sigma' = 1 - \frac{\mathcal{G}\Delta T}{\sigma_v} \theta = 1 - \frac{\mathcal{G}\Delta T \varepsilon}{\mu U_0} \theta = 1 - Ma\theta$$

где $Ma = \frac{\mathcal{G}\Delta T \varepsilon}{\mu U_0}$ – число Марангони, определяющее влияние температур на поверхностное натяжение.

После того как все уравнения системы (3.1) и граничные условия на твердой и свободной поверхностях приведены к безразмерной форме, будем разлагать физические величины задачи, такие как скорость, давление и температура, в ряд по малому параметру ε :

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots$$

$$w = w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots$$

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots$$

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + \dots$$

Уравнения и граничные условия (3.24–3.32) в нулевом приближении примут следующий вид:

$$\partial_x(p + \phi) = \partial_z^2 u \quad (3.33)$$

$$\partial_z(p + \phi) = 0 \quad (3.34)$$

$$\partial_x u + \partial_z w = 0 \quad (3.35)$$

$$\partial_z^2 \theta = 0 \quad (3.36)$$

$$\text{При } z = 0 \quad u = 0, w = 0, \theta_0 = 1 \quad (3.37)$$

$$\text{При } z = h \quad \partial_t h + u \partial_x h = w \quad (3.38)$$

$$p + \overline{Ca} \partial_x^2 h = 0 \quad (3.39)$$

$$\partial_z u = \partial_x \sigma \quad (3.40)$$

$$\partial_z \theta = -B\theta \quad (3.41)$$

В записанных уравнениях символы «штрих» и индекс «0» под всеми переменными были опущены, все величины безразмерны.

3.4. Уравнение эволюции тонкой жидкой пленки

Для вывода эволюционного уравнения, которое позволит определять профиль пленки в заданный момент времени, проинтегрируем уравнение неразрывности (3.35) по z от 0 до h , используя граничные условия (3.37) и (3.38):

$$\int_0^h \partial_z w dz + \int_0^h \partial_x u dz = w|_{z=h} + \int_0^h \partial_x u dz = \partial_t h + u \partial_x h + \int_0^h \partial_x u dz$$

Последние два слагаемых представляют собой производную интеграла после интегрирования по частям:

$$\partial_x \left(\int_0^h u dz \right) = u \partial_x \int_0^h u dz = u \partial_x h + \int_0^h \partial_x u dz$$

Следовательно, получаем, что уравнение (3.35) можно представить в виде:

$$\partial_t h + \partial_x \left(\int_0^h u dz \right) = 0 \quad (3.42)$$

Проинтегрировав уравнение (3.34) по z с использованием граничного условия (3.39):

$$\begin{aligned} \int_0^h \partial_z p dz + \int_0^h \partial_z \phi dz &= p|_{z=h} - p|_{z=0} + \phi|_{z=h} - \phi|_{z=0} = \\ &= p_v - \overline{Ca} \partial_x^2 h - p|_{z=0} + (\phi|_{z=h} - \phi|_{z=0}) = 0 \end{aligned}$$

в итоге получим:

$$p + \phi = -\overline{Ca} \partial_x^2 h + \phi|_{z=h}$$

Далее нам понадобится поле температур, причем нас интересует температура межфазной поверхности, так как именно она влияет на поверхностное натяжение в нашей задаче. Для этого проинтегрируем граничное условие для температуры (3.41) по z от 0 до h :

$$\int_0^h \partial_z \theta dz + \int_0^h B \theta dz = \theta|_{z=h} - \theta|_{z=0} + Bh \theta|_{z=h} = 0$$

$$\theta|_{z=h} (1 + Bh) = \theta|_{z=0} = 1$$

$$\theta|_{z=h} = \frac{1}{1 + Bh}$$

Зная граничные условия для температуры на твердой и свободной границах и проинтегрировав дважды уравнение (3.36), можно найти распределение температуры по оси z , которое принимает вид:

$$\theta(x, z) = 1 - \frac{Bz}{(1 + Bh)^2} \quad (3.43)$$

Далее, чтобы воспользоваться граничным условием (3.40), нам понадобится определить градиент поверхностного натяжения. Для этого будем использовать связь между коэффициентом поверхностного натяжения и температурой межфазной поверхности. По правилу $\partial_x \sigma = \partial_\theta \sigma \partial_x \theta$ найдем величину $\partial_x \theta$:

$$\partial_x \theta|_{z=h} = \partial_x \left(\frac{1}{1 + Bh} \right) = - \frac{B \partial_x h}{(1 + Bh)^2}$$

что в итоге позволяет записать поверхностную производную коэффициента поверхностного натяжения в следующей форме:

$$\partial_x \sigma = - \frac{B \partial_\theta \sigma \partial_x h}{(1 + Bh)^2}$$

Подставим полученный результат в граничное условие (3.40):

$$z = h: \quad \partial_z u = \partial_x \sigma = - \partial_\theta \sigma \cdot \frac{Bh}{(1 + Bh)^2} = \frac{Ma B \partial_x h}{(1 + Bh)^2} \quad (3.44)$$

где $Ma = \frac{\kappa \varepsilon \partial_\theta \sigma}{\mu U_0}$ – безразмерное число Марангони.

Перейдем к нахождению компоненты скорости u из уравнения (3.33), дважды проинтегрировав его по z :

$$u = \partial_x (p + \phi) \frac{z^2}{2} + I_1 z + I_2,$$

где I_1 и I_2 – константы интегрирования. Воспользуемся граничными условиями (3.37) и (3.44):

$$u|_{z=0} = 0 \Rightarrow I_2 = 0,$$

$$\partial_z u \Big|_{z=h} = \frac{MaBh_x}{(1+Bh)^2} \Rightarrow I_1 = \frac{MaBh_x}{(1+Bh)^2} - \partial_x(\rho + \phi)h$$

В итоге уравнение для горизонтальной компоненты скорости имеет вид

$$u = \partial_x(p + \phi) \left(\frac{z^2}{2} - hz \right) + \frac{MaB\partial_x h}{(1+Bh)^2} \cdot z \quad (3.45)$$

Подставим полученное уравнение в (3.42):

$$\begin{aligned} \int_0^h u dz &= \int_0^h \partial_x(p + \phi) \left(\frac{z^2}{2} - hz \right) dz + \int_0^h \frac{MaB\partial_x h}{(1+Bh)^2} \cdot z dz = \\ &= \partial_x(p + \phi) \left(\frac{h^3}{6} - \frac{h^3}{2} \right) + \frac{MaB\partial_x h}{(1+Bh)^2} \cdot \frac{h^2}{2} = \\ &= \frac{MaB\partial_x h}{2(1+Bh)^2} - \frac{h^3}{3} \partial_x(p + \phi) \end{aligned}$$

Это позволяет записать уравнение (3.42) в более развернутом виде:

$$\partial_t h = \frac{MaB}{2} \partial_x \left(\frac{h^2 \cdot \partial_x h}{(1+Bh)^2} \right) - \partial_x \left(\frac{h^3}{3} \partial_x(p + \phi) \right) \quad (3.46)$$

Уравнение (3.46) определяет поведение тонкого слоя жидкости, подогреваемого со стороны твердой границы и имеющего свободную межфазную границу, на которой коэффициент поверхностного натяжения линейно зависит от температуры. Полученное уравнение (3.46) совпадает с уравнением в параграфе F, которое приведено в обзоре [265]. Однако целью задачи настоящей главы является вывод эволюционного уравнения для тонкой полярной пленки при учете ее испарения при наличии эффекта Марангони на свободной поверхности, а также сравнение полученных результатов с данными, полученными в Главе 2. Для этого потребуется переписать уравнение (3.36) в

размерной форме и проводить дальнейшее исследование задачи в масштабах, которые приводятся в (2.5).

Эволюционное уравнение (3.46), записанное в размерных переменных и в трехмерном виде $h(x, y, t)$ с учетом испарения выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{d\sigma}{dT} T_v \alpha_{th} k_{th} \nabla \left[\frac{h^2 \nabla h}{(k_{th} + \alpha_{th} h^2)} \right] - \nabla \left(\frac{h^3}{3\mu} \nabla [\varphi - \sigma \nabla h] \right) = -\frac{J}{\rho} \quad (3.47)$$

Здесь введено следующее обозначение: $\nabla = \partial/\partial x + \partial/\partial y$, J есть величина испарения с поверхности (число покинувших поверхность «жидкость – пар» частиц с единицы поверхности в единицу времени). Согласно работе [299], запишем дополнительный потенциал φ в виде $\varphi = d\Phi(h)/dh$, который будем интерпретировать как химический потенциал соответствующей среды. Так же, как и в первой главе, свободная энергия межмолекулярного взаимодействия межфазных поверхностей «твердое тело – жидкость» и «жидкость – пар» для полярных жидкостей как функция толщины слоя немонотонна и имеет следующий вид [310]:

$$\Phi(h) = \frac{S^{LW} d_0^2}{h^2} + S^P \exp \frac{d_0 - h}{l_0} \quad (3.48)$$

где $S^{LW} d_0^2 = -A / (12\pi)$, A – постоянная Гамакера, d_0 – радиус молекулярного взаимодействия и l_0 – корреляционная длина. Значение параметра S^P есть полярная составляющая коэффициента растекания $S = S^{LW} + S^P$. Химический потенциал единицы объема жидкости может быть записан в виде

$$\psi_l = \frac{1}{\rho} \left(\frac{dg}{dh} - \sigma \nabla h \right) \quad (3.49)$$

Следуя далее работе [324], будем считать, что величина испарения J пропорциональна разности химических потенциалов жидкости и пара:

$$J = \xi(\psi_l - \psi_v) \quad (3.50)$$

здесь ξ – параметр, характеризующий интенсивность испарения (данный параметр может быть вычислен из кинетической теории газа или получен экспериментальным путем).

Подставляя уравнения (3.48–3.50) в (3.47), получаем эволюционное уравнение тонкого слоя испаряющейся жидкости с учетом термокапиллярного эффекта:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} = & -\frac{1}{2} \frac{d\sigma}{dT} T_v \alpha_{th} k_{th} \nabla \left[\frac{h^2 \nabla h}{(k_{th} + \alpha_{th} h^2)} \right] + \nabla \frac{h^3}{3\mu} \nabla \left[\frac{dg(h)}{dh} - \sigma \nabla \nabla h \right] - \\ & - \frac{\xi}{\rho} \left[\frac{dg(h)}{dh} - \sigma \nabla \nabla h - \rho \phi_v \right] \end{aligned} \quad (3.51)$$

Проведем процесс обезразмеривания аналогично процессу, описанному в первой главе: $x \rightarrow \beta x, t \rightarrow \varsigma t, h \rightarrow \delta h, T \rightarrow \tau T$, где в качестве единиц размерности выбираются следующие соотношения:

$$\beta = \left(\frac{\delta \sigma}{S^{PN}} \right)^{1/2}; \quad \varsigma = \frac{3\mu \sigma}{\delta (S^{PN})^2}; \quad \delta = \left(\frac{A}{6\pi S^{PN}} \right)^{1/3}; \quad \tau = \frac{T - T_v}{T_v}; \quad S^{PN} = \frac{S^P}{l_0} \exp \left(\frac{d_0}{l_0} \right).$$

Тогда уравнение (3.47) в новой безразмерной форме будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \partial_t h = & -MB \nabla \left(\frac{h^2 \nabla h}{(1 + Bh)^2} \right) + \nabla \left[h^3 \nabla \left(\frac{1}{h^3} - \exp(-\chi h) - \nabla^2 h \right) \right] \\ & - \Omega \left(\frac{1}{h^3} - \exp(-\chi h) - \nabla^2 h - S \right) \end{aligned} \quad (3.52)$$

В уравнении используются следующие безразмерные коэффициенты:

$$\begin{aligned} M = & \frac{g \Theta_v}{2\sigma}; \quad B = \frac{\alpha_{th}}{k_{th}} \left(\frac{A}{6\pi S^{PN}} \right)^{1/3}; \\ \Omega = & \frac{3\xi v \sigma}{S^{PN}} \left(\frac{6\pi S^{PN}}{A} \right)^{2/3}; \\ S = & \frac{\rho \mu_v}{S^{PN}}; \quad \chi = \frac{1}{l_0} \left(\frac{A}{6\pi S^{PN}} \right)^{1/3} \end{aligned} \quad (3.53)$$

где M и B являются безразмерным модифицированным число Марангони и числом Био для данной задачи. Параметры Ω, S, χ характеризуют уровень испарения, химический потенциал пара и корреляционную длину соответственно, как это и было во второй главе.

Таким образом, мы получили эволюционное уравнение профиля тонкой пленки испаряющейся полярной жидкости, поверхностное натяжение которой зависит от температуры. Это уравнение в безразмерных переменных позволит получить форму профиля пленки при заданных параметрах, определяющих поверхностное натяжение, давление и потенциал внешних сил. Если нас интересует задача, где толщина пленки определяется $h(x, t)$, то уравнение будет иметь такой вид:

$$\begin{aligned} \partial_t h + \frac{MB}{2} \partial_x \left(\frac{h^2 h_x}{(1+Bh)^2} \right) + \partial_x \left(\frac{h^3}{3} \partial_x \left(h_{xx} - \frac{1}{h^3} + e^{-\chi h} \right) \right) + \\ + \Omega \left(\frac{1}{h^3} - e^{-\chi h} - h_{xx} - S \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

3.5. Решение задачи

3.5.1 Построение системы конечно-разностных уравнений

Раскроем скобки эволюционного уравнения (3.54):

$$\begin{aligned} \partial_t h + \frac{MB}{2} \partial_x \left(\frac{h^2 h_x}{(1+Bh)^2} \right) + \partial_x \left(\frac{h^3}{3} \partial_x \left(h_{xx} - \frac{1}{h^3} + e^{-\chi h} \right) \right) + \Omega \left(\frac{1}{h^3} - e^{-\chi h} - h_{xx} - S \right) = 0 \\ 1) \quad \partial_x \left(h_{xx} - \frac{1}{h^3} + e^{-\chi h} \right) = h_{xx} + \frac{3h_x}{h^4} - \chi h_x e^{-\chi h} \\ 2) \quad \frac{h^3}{3} \partial_x \left(h_{xx} - \frac{1}{h^3} + e^{-\chi h} \right) = \frac{1}{3} h^3 h_{xxx} + \frac{h_x}{h} - \frac{\chi h^3 h_x}{3} e^{-\chi h} = \frac{1}{3} h^3 h_{xxx} + h_x \left(\frac{1}{h} - \frac{\chi h^3}{3} e^{-\chi h} \right) \\ 3) \quad \partial_x \left[\frac{h^3}{3} \partial_x \left(h_{xx} - \frac{1}{h^3} + e^{-\chi h} \right) \right] = h^2 h_x h_{xxx} + \frac{1}{3} h^3 h_{xxx} + h_{xx} \left(\frac{1}{h} - \frac{\chi h^3}{3} e^{-\chi h} \right) - \\ - h_x^2 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{\chi h^2}{3} e^{-\chi h} (3 - \chi h) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4) \quad \partial_x \left(\frac{h^2 h_x}{(1+Bh)^2} \right) &= \frac{\partial_x (h^2 h_x) \cdot (1+Bh)^2 - 2B(1+Bh) h_x \cdot h^2 h_x}{(1+Bh)^4} = \\
&= \frac{(1+Bh)(2hh_x^2 + h^2 h_{xx}) - 2Bh^2 h_x}{(1+Bh)^3} = \\
&= \frac{(1+Bh)h^2 h_{xx} + 2hh_x^2(1+Bh - Bh)}{(1+Bh)^3} = \frac{h^2 h_{xx}}{(1+Bh)^2} + \frac{2hh_x^2}{(1+Bh)^3}
\end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (3.54) относительно изменения толщины пленки со временем приходит к виду:

$$\begin{aligned}
h_t + \frac{MB}{2} \left(\frac{h^2 h_{xx}}{(1+Bh)^2} + \frac{2hh_x^2}{(1+Bh)^3} \right) + \frac{1}{3} h^3 h_{xxx} + h^2 h_x h_{xxx} + \\
+ h_{xx} \left(\frac{1}{h} - \frac{\chi h^3}{3} e^{-\chi h} \right) - h_x^2 \left(\frac{1}{h} - \frac{\chi h^3}{3} e^{-\chi h} \right) - \\
- h_x^2 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{\chi h^3}{3} e^{-\chi h} \right) - h_x^2 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{\chi h^3}{3} e^{-\chi h} (3 - \chi h) \right) - \\
- \Omega \left(h_{xx} - \frac{1}{h^3} + e^{-\chi h} + S \right) = 0
\end{aligned}$$

Будем решать это уравнение численно, для чего приведем его к конечно-разностному виду. Основная трудность здесь заключается в наличии квадрата одной из пространственных производных: h_x^2 . Для преодоления этой трудности воспользуемся методом Кранка-Николсон [53], при котором уравнение представляется в виде функции пространственных переменных и вычисляется среднее значение этой функции между двумя шагами по времени:

$$\frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} = \frac{N^n + N^{n+1}}{2} \quad (3.55)$$

где верхний индекс означает шаг по времени. Разложим функцию N в ряд по малому параметру Δt :

$$\begin{aligned}
N^{n+1} &= N^n + \frac{\partial N}{\partial h} \Delta h + \frac{\partial N}{\partial h_x} \Delta h_x + \frac{\partial N}{\partial h_{xx}} \Delta h_{xx} + \frac{\partial N}{\partial h_{xxx}} \Delta h_{xxx} + \frac{\partial N}{\partial h_{xxxx}} \Delta h_{xxxx} = \\
&= N^n + N_0 \Delta h + N_1 \Delta h_x + N_2 \Delta h_{xx} + N_3 \Delta h_{xxx} + N_4 \Delta h_{xxxx}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta h &= h^{n+1} - h^n; \Delta h_x = h_x^{n+1} - h_x^n; \Delta h_{xx} = h_{xx}^{n+1} - h_{xx}^n; \\ \Delta h_{xxx} &= h_{xxx}^{n+1} - h_{xxx}^n; \Delta h_{xxxx} = h_{xxxx}^{n+1} - h_{xxxx}^n\end{aligned}$$

Найдем функции $N, N_0, N_1, N_2, N_3, N_4$:

$$\begin{aligned}N &= -\frac{MB}{2} \left(\frac{h^2 h_{xx}}{(1+Bh)^2} + \frac{2h h_x^2}{(1+Bh)^3} \right) - \frac{1}{3} h^3 h_{xxxx} - h^2 h_x h_{xxx} - h_{xx} \left(\frac{1}{h} - \frac{\chi h^3}{3} e^{-\chi h} \right) + \\ &\quad + h_x^2 \left(\frac{1}{h^2} - \frac{\chi h^2}{3} e^{-\chi h} (3 - \chi h) \right) + \Omega \left(h_{xx} - \frac{1}{h^3} + e^{-\chi h} + S \right) \\ N_0 &= \frac{\partial N}{\partial h} = -h^2 h_{xxxx} - 2h h_x h_{xxx} - h_{xx} \left(\frac{1}{h^2} + \frac{\chi h^2}{3} e^{-\chi h} (3 - \chi h) \right) - \\ &\quad - h_x^2 \left(\frac{\chi h}{3} e^{-\chi h} (6 - 6\chi h + \chi^2 h^2) - \frac{2}{h^3} \right) + \frac{MB}{(1+Bh)^3} \left(h h_{xx} + \frac{h_x^2 (1 - 2Bh)}{(1+Bh)} \right) - \Omega \left(\frac{3}{h^4} - \chi e^{-\chi h} \right) \\ N_1 &= \frac{\partial N}{\partial h_x} = -h^2 h_{xxx} - 2h_x \left(\frac{1}{h^2} + \frac{\chi h^2}{3} (3 - \chi h) e^{-\chi h} \right) + \frac{2MB h h_x}{(1+Bh)^3} \\ N_2 &= \frac{\partial N}{\partial h_{xx}} = -\frac{1}{h} + \frac{\chi h^3}{3} e^{-\chi h} - \frac{MB h^2}{2(1+Bh)^2} + \Omega \\ N_3 &= \frac{\partial N}{\partial h_{xxx}} = -h^2 h_x \\ N_4 &= \frac{\partial N}{\partial h_{xxxx}} = -\frac{1}{3} h^3\end{aligned}$$

Теперь, с учетом приведенных выше обозначений, можно провести некоторые алгебраические преобразования уравнения (3.55):

$$\begin{aligned}\frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2} \left(N^n + N^n + N_0 \Delta h + N_1 \Delta h_x + N_2 \Delta h_{xx} + N_3 \Delta h_{xxx} + N_4 \Delta h_{xxxx} \right) \\ \frac{2h^{n+1}}{\Delta t} - \left(N_0 h^{n+1} + N_1 h_x^{n+1} + N_2 h_{xx}^{n+1} + N_3 h_{xxx}^{n+1} + N_4 h_{xxxx}^{n+1} \right) &= \\ = \frac{2h^n}{\Delta t} + 2N^n - \left(N_0 h^n + N_1 h_x^n + N_2 h_{xx}^n + N_3 h_{xxx}^n + N_4 h_{xxxx}^n \right) &\end{aligned} \quad (3.56)$$

Правую половину этого уравнения обозначим просто F_i – ее мы будем вычислять по данным предыдущего шага по времени. Для решения полученного уравнения воспользуемся центральными конечно-разностными схемами:

$$\begin{aligned}h_x &= \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2\Delta x} \\h_{xx} &= \frac{h_{i-1} - 2h_{i+1}}{(\Delta x)^2} \\h_{xxx} &= \frac{h_{i+2} - 2h_{i+1} + 2h_{i-1} - h_{i-2}}{2(\Delta x)^3} \\h_{xxxx} &= \frac{h_{i-2} - 4h_{i-1} + 6h_i - 4h_{i+1} + h_{i+2}}{(\Delta x)^4}\end{aligned}$$

Подставим эти схемы в уравнение (3.56):

$$\begin{aligned}\frac{2h_i^{n+1}}{\Delta t} - N_0^n h_i^{n+1} - N_1^n \cdot \frac{h_{i+1}^{n+1} - h_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} - N_2^n \cdot \frac{h_{i-1}^{n+1} - 2h_i^{n+1} + h_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} - N_3^n \cdot \frac{h_{i+2}^{n+1} - 2h_{i+1}^{n+1} + 2h_{i-1}^{n+1} - h_{i-2}^{n+1}}{2(\Delta x)^3} - \\ - N_4^n \cdot \frac{h_{i-2}^{n+1} - 4h_{i-1}^{n+1} + 6h_i^{n+1} - 4h_{i+1}^{n+1} + h_{i+2}^{n+1}}{(\Delta x)^4} = F_i^n\end{aligned}$$

Перегруппируем левую часть:

$$\begin{aligned}h_{i-2}^{n+1} \left(\frac{N_3^n}{2(\Delta x)^3} - \frac{N_4^n}{(\Delta x)^4} \right) + h_{i-1}^{n+1} \left(\frac{N_1^n}{2\Delta x} - \frac{N_2^n}{(\Delta x)^2} - \frac{N_3^n}{(\Delta x)^3} + \frac{4N_4^n}{(\Delta x)^4} \right) + \\ + h_i^{n+1} \left(\frac{2}{\Delta t} - N_0^n + \frac{2N_2^n}{(\Delta x)^2} - \frac{6N_4^n}{(\Delta x)^4} \right) + h_{i+1}^{n+1} \left(-\frac{N_1^n}{2\Delta x} - \frac{N_2^n}{(\Delta x)^2} + \frac{N_3^n}{(\Delta x)^3} + \frac{4N_4^n}{(\Delta x)^4} \right) + \\ + h_{i+2}^{n+1} \left(-\frac{N_3^n}{2(\Delta x)^3} + \frac{N_4^n}{(\Delta x)^4} \right) = F_i^n\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили систему уравнений вида:

$$A_i h_{i-2}^{n+1} + B_i h_{i-1}^{n+1} + C_i h_i^{n+1} + D_i h_{i+1}^{n+1} + E_i h_{i+2}^{n+1} = F_i^n$$

где

$$A_i = \frac{N_3^n}{2(\Delta x)^3} - \frac{N_4^n}{(\Delta x)^4}$$

$$B_i = \frac{N_1^n}{2\Delta x} - \frac{N_2^n}{(\Delta x)^2} - \frac{N_3^n}{(\Delta x)^3} + 4 \frac{N_4^n}{(\Delta x)^4}$$

$$C_i = \frac{2}{\Delta t} - N_0^n + \frac{2N_2^n}{(\Delta x)^2} - \frac{6N_4^n}{(\Delta x)^4}$$

$$D_i = \frac{N_3^n}{(\Delta x)^3} - \frac{N_2^n}{(\Delta x)^2} - \frac{N_1^n}{2\Delta x} + \frac{4N_4^n}{(\Delta x)^4}$$

$$E_i = -\frac{N_3^n}{2(\Delta x)^3} - \frac{N_4^n}{(\Delta x)^4}$$

$$F_i^n = 2N^n + \frac{2h_i^n}{\Delta t} = \left(N_0^n h_i^n + N_1^n h_x^n + N_2^n h_{xx}^n + N_3^n h_{xxx}^n + N_4^n h_{xxxx}^n \right)$$

3.5.2 Построение прогоночной схемы

Чтобы решить полученную пятидиагональную систему уравнений, воспользуемся методом прогонки, который заключается в последовательном вычислении значений искомой величины h в точках пространства от нулевой до последней. Для этого построим специальную систему уравнений, предназначенную для уменьшения количества неизвестных в исходной системе. Запишем исходную систему уравнений, опуская верхний индекс, который обозначает шаг по времени:

$$A_i h_{i-2} + B_i h_{i-1} + C_i h_i + D_i h_{i+1} + E_i h_{i+2} = F_i \quad (3.57)$$

Будем находить значения функции $h(x)$ по следующим формулам:

$$h_i = a_i h_{i+1} + \beta_i h_{i+2} + y_i, i = 0, \dots, m-2 \quad (3.58)$$

$$h_{m-1} = a_{m-1} h_m + y_{m-1}$$

В [53] приводится пример вывода прогоночных коэффициентов для пятидиагональной системы вида

$$\begin{cases} c_0 y_0 + d_0 y_1 + e_0 y_2 = f_0, i=0 \\ b_1 y_0 + c_1 y_1 + d_1 y_2 + e_1 y_3 = f_1, i=1 \\ a_2 y_0 + b_2 y_1 + c_2 y_2 + d_2 y_3 + e_2 y_4 = f_2, 2 \leq i \leq m-2 \\ a_{m-1} y_{m-3} + b_{m-1} y_{m-2} + c_{m-1} y_{m-1} + d_{m-1} y_m = f_{m-1}, i=m-1 \\ a_m y_{m-2} + b_m y_{m-1} + c_m y_m = f_m, i=m \end{cases}$$

Согласно этой системе, рассматриваются только элементы с 0-го по m-й, как если бы за пределами области исследования элементов не существовало. Поскольку мы рассматриваем часть слоя без боковых стенок, то система уравнений должна иметь вид

$$\begin{cases} a_0 y_{-2} + b_0 y_{-1} + c_0 y_0 + d_0 y_1 + e_0 y_2 = f_0, i=0 \\ a_1 y_{-1} + b_1 y_0 + c_1 y_1 + d_1 y_2 + e_1 y_3 = f_1, i=1 \\ a_2 y_0 + b_2 y_1 + c_2 y_2 + d_2 y_3 + e_2 y_4 = f_2, 2 \leq i \leq m-2 \\ a_{m-1} y_{m-3} + b_{m-1} y_{m-2} + c_{m-1} y_{m-1} + d_{m-1} y_m + e_{m-1} y_{m+1} = f_{m-1}, i=m-1 \\ a_m y_{m-2} + b_m y_{m-1} + c_m y_m + d_m y_{m+1} + e_m y_{m+2} = f_m, i=m \end{cases}$$

Чтобы не выходить за границы выделенной нами области, воспользуемся приемом «отражение»: примем, что $\gamma_{-1} = \gamma_1; \gamma_{-2} = \gamma_2; \gamma_{m+1} = \gamma_{m-1}; \gamma_{m+2} = \gamma_{m-2}$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} (A_0 + E_0) h_2 + (B_0 + D_0) h_1 + C_0 h_0 = F_0, i=0 \\ B_1 h_0 + (A_1 + C_1) h_1 + D_1 h_2 + E_1 h_3 = F_1, i=1 \\ A_i h_{i-2} + B_i h_{i-1} + C_i h_i + D_i h_{i+2} = F_2, 2 \leq i \leq m-2 \\ A_{m-1} h_{m-3} + B_{m-1} h_{m-2} + (C_{m-1} + E_{m-1}) h_{m-1} + D_{m-1} h_m = F_{m-1}, i=m-1 \\ (A_m + E_m) h_{m-2} + (B_m + D_m) h_{m-1} + C_m h_m = F_m, i=m \end{cases} \quad (3.59)$$

Найдем прогоночные коэффициенты в точках $i = 2, \dots, m-2$. Выразим h_{i-2} и h_{i-1} через h_i и h_{i+1} . Для этого возьмем уравнение (3.58) при $i = 2 \dots m-2$:

$$h_{i-1} = a_{i-1} h_i + \beta_{i-1} h_{i+1} + y_{i-1}$$

$$h_{i-2} = a_{i-2} h_{i-1} + \beta_{i-2} h_i + y_{i-2}$$

Подставим одно уравнение в другое и получим:

$$h_{i-2} = a_{i-2} (a_{i-1} h_i + \beta_{i-1} h_{i+1} + y_{i-1}) + \beta_{i-2} h_i + y_{i-2}$$

Полученные таким образом соотношения подставим в (3.57):

$$A_i [a_{i-2}(a_{i-1}h_i + \beta_{i-1}h_{i+1} + y_{i-1}) + \beta_{i-2}h_i + y_{i-2}] + B_i [a_{i-1}h_i + \beta_{i-1}h_{i+1} + y_{i-1}] + C_i h_i + D_i h_{i+1} + E_i h_{i+2} = F_i$$

Выделим из последнего уравнения h_i в явном виде:

$$h_i (A(a_{i-2}a_{i-1} + \beta_{i-2}) + B_i a_{i-1} + C_i) = -h_{i+1} (\beta_{i-1}(A_i a_{i-2} + B) + D_i) - h_{i+2} E_i - A_i (a_{i-2} y_{i-1} + y_{i-2}) - B_i y_{i-1} + F_i$$

Введем переменную $\Delta_i = A_i (a_{i-2}a_{i-1} + \beta_{i-2}) + B_i a_{i-1} + C_i$.

Сравнивая уравнения (3.57) и полученное выше, найдем, что:

$$\alpha_i = -\frac{1}{\Delta_i} (D_i + \beta_{i-1} (A_i a_{i-2} + B_i))$$

$$\beta_i = -\frac{E_i}{\Delta_i}$$

$$\gamma_i = \frac{1}{\Delta_i} (F_i - A_i (a_{i-2} y_{i-1} + y_{i-2}) - B_i y_{i-1})$$

для $i = 2 \dots m-2$.

Каждый прогоночный коэффициент при вычислении требует значения двух предыдущих, значит, уравнения для $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ можно использовать в уравнении (3.57) только при $i = 2, \dots, m-2$. Найдем значения коэффициентов для первых двух точек расчетной области. Из первого уравнения системы (3.59) видно, что

$$a_0 = -\frac{B_0 + \hat{A}_0}{\tilde{N}_0}; \beta_0 = -\frac{A_0 + E_0}{C_0}; y_0 = \frac{F_0}{C_0}$$

Рассмотрим второе уравнение этой же системы:

$$B_1 h_0 + (A_1 + C_1) h_1 + D_1 h_2 + E_1 h_3 = F_1$$

вместе с уравнением (3.58) при $i = 0$:

$$h_0 = a_0 h_1 + \beta_0 h_2 + y_0$$

Подставим в предпоследнее уравнение и получим:

$$B_1 (a_0 h_1 + \beta_0 h_2 + y_0) + (A_1 + C_1) h_1 + D_1 h_2 + E_1 h_3 = F_1$$

и выразим из него h_1 :

$$h_1(B_1\alpha_0 + (A_1 + C_1)) + h_2(B_1\beta_0 + D_1) + h_3E_1 + B_1\gamma_0 = F_1$$

Отсюда

$$\Delta_1 = B_1\alpha_0 + A_1 + \tilde{N}_1$$

$$\alpha_1 = -\frac{1}{\Delta_1}(B_1\beta_0 + D_1); \beta_1 = -\frac{E_1}{\Delta_1}; \gamma_1 = \frac{F_1 - B_1\gamma_0}{\Delta_1}$$

Найдем прогоночные коэффициенты для уравнения (3.58). Выразим h_{m-2} и

h_{m-3} через h_m и h_{m-1} :

$$h_{m-2} = a_{m-2}h_{m-1} + \beta_{m-2}h_m + \gamma_{m-2}$$

$$h_{m-3} = a_{m-3}h_{m-2} + \beta_{m-3}h_{m-1} + \gamma_{m-3} =$$

$$= a_{m-3}(a_{m-2}h_{m-1} + \beta_{m-2}h_m + \gamma_{m-2}) + \beta_{m-3}h_{m-1} + \gamma_{m-3}$$

Подставим полученные выражения в уравнение (3.59) при $i = m-1$:

$$A_{m-1}h_{m-3} + B_{m-1}h_{m-2} + (C_{m-1} + E_{m-1})h_{m-1} + D_{m-1}h_m = F_{m-1}$$

$$A_{m-1}(h_{m-1}(a_{m-3}a_{m-2} + \beta_{m-3}) + h_m a_{m-3}\beta_{m-2} + a_{m-3}\gamma_{m-2} + \gamma_{m-3}) +$$

$$+ B_{m-1}(a_{m-2}h_{m-1} + \beta_{m-2}h_m + \gamma_{m-2}) + (C_{m-1} + E_{m-1})h_{m-1} + D_{m-1}h_m = F_{m-1}$$

Найдем отсюда h_{m-1} :

$$h_{m-1}(A_{m-1}(a_{m-3}a_{m-2} + \beta_{m-3}) + B_{m-1}a_{m-2} + C_{m-1} + E_{m-1}) =$$

$$= -h_m((A_{m-1}a_{m-3} + B_{m-1})\beta_{m-2} + D_{m-1}) + F_{m-1} - A_{m-1}(a_{m-3}\gamma_{m-2} + \gamma_{m-3}) - B_{m-1}\gamma_{m-2}$$

$$\Delta_{m-1} = A_{m-1}(a_{m-3}a_{m-2} + \beta_{m-3}) + B_{m-1}a_{m-2} + C_{m-1} + E_{m-1}$$

$$a_{m-1} = -\frac{1}{\Delta_{m-1}}[(A_{m-1}a_{m-3} + B_{m-1})\beta_{m-2} + D_{m-1}]$$

$$y_{m-1} = \frac{1}{\Delta_{m-1}}[F_{m-1} - A_{m-1}(a_{m-3}\gamma_{m-2} + \gamma_{m-3}) - B_{m-1}\gamma_{m-2}]$$

Найдем значение h в последней точке: $i = m$. Для этого запишем уравнения из системы (3.59) при $i = m$, первое уравнение (3.58) при $i = m-2$, а второе уравнение (3.58) при $i = m-1$:

$$\begin{aligned}
& (A_m + E_m)h_{m-2} + (B_m + D_m)h_{m-1} + C_m h_m = F_m \\
h_{m-1} &= a_{m-1}h_m + y_{m-1} \\
h_{m-2} &= a_{m-2}h_{m-1} + \beta_{m-2}h_m + y_{m-2} = a_{m-2}(a_{m-1}h_m + y_{m-1}) + \beta_{m-2}h_m + y_{m-2} = \\
&= h_m(a_{m-2}a_{m-1} + \beta_{m-2}) + a_{m-2}y_{m-1} + y_{m-2} \\
& (A_m + E_m)[h_m(a_{m-2}a_{m-1} + \beta_{m-2}) + a_{m-2}y_{m-1} + y_{m-2}] + \\
& + (B_m + D_m)(a_{m-1}h_m + y_{m-1}) + C_m h_m = F_m \\
h_m & [(A_m + E_m)(a_{m-2}a_{m-1} + \beta_{m-2}) + a_{m-1}(B_m + D_m) + C_m] = \\
&= F_m - (A_m + E_m)(a_{m-2}y_{m-1} + y_{m-2}) - (B_m + D_m)y_{m-1} \\
\Delta_m &= (A_m + E_m)(a_{m-2}a_{m-1} + \beta_{m-2}) + a_{m-1}(B_m + D_m) + C_m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{m-1} &= a_{m-1}h_m + y_{m-1} \\
h_{m-2} &= a_{m-2}h_{m-1} + \beta_{m-2}h_m + y_{m-2} = a_{m-2}(a_{m-1}h_m + y_{m-1}) + \beta_{m-2}h_m + y_{m-2} = \\
&= h_m(a_{m-2}a_{m-1} + \beta_{m-2}) + a_{m-2}y_{m-1} + y_{m-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (A_m + E_m)[h_m(a_{m-2}a_{m-1} + \beta_{m-2}) + a_{m-2}y_{m-1} + y_{m-2}] + \\
& + (B_m + D_m)(a_{m-1}h_m + y_{m-1}) + C_m h_m = F_m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_m & [(A_m + E_m)(a_{m-2}a_{m-1} + \beta_{m-2}) + a_{m-1}(B_m + D_m) + C_m] = \\
&= F_m - (A_m + E_m)(a_{m-2}y_{m-1} + y_{m-2}) - (B_m + D_m)y_{m-1}
\end{aligned}$$

$$\Delta_m = (A_m + E_m)(a_{m-2}a_{m-1} + \beta_{m-2}) + a_{m-1}(B_m + D_m) + C_m$$

$$h_m = \frac{1}{\Delta_m} (F_m - (A_m + E_m)(a_{m-2}y_{m-1} + y_{m-2}) - (B_m + D_m)y_{m-1})$$

3.5.3 Алгоритм решения уравнения

Вычислять h_i в каждой точке на следующем шаге по времени будем методом прогонки.

- 1) Сначала вычислим коэффициенты $N, N_0, N_1, N_2, N_3, N_4$ для метода Кранка-Николсон по формулам, приведенным в предыдущем параграфе.

2) Имея коэффициенты $N, N_0, N_1, N_2, N_3, N_4$, вычислим коэффициенты системы уравнений (3.59) $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i, i = 0 \dots$ в каждой точке рассматриваемой области по формулам.

3) После этого вычисляем прогоночные коэффициенты $\{ a_i, \beta_i, \gamma_i, \Delta_i \}$, $i = 0 \dots m$.

4) И наконец, выполним обратную прогонку.

Двумерный вариант решения задачи отличается тем, что все используемые пространственные производные станут двумерными. Запишем формулы для коэффициентов Кранка-Николсон для двумерного пространства:

$$N = -\frac{MB}{2} \left(\frac{h^2 \nabla^2 h}{(1+Bh)^2} + \frac{2h(\nabla h)^2}{(1+Bh)^3} \right) - \frac{1}{3} h^3 \nabla^4 h - h^2 \nabla h \nabla^3 h - \nabla^2 h \left(\frac{1}{h} - \frac{\chi h^3}{3} e^{-\chi h} \right) +$$

$$+(\nabla h)^2 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{\chi h^2}{3} e^{-\chi h} (3 - \chi h) \right) + \Omega \left(\nabla^2 h - \frac{1}{h^3} + e^{-\chi h} + S \right)$$

$$N_0 = -h^2 \nabla^4 h - 2h \nabla h \nabla^3 h + \nabla^2 h \left(-\frac{1}{h^2} - \frac{\chi h^2}{3} e^{-\chi h} (3 - \chi h) \right) +$$

$$+(\nabla h)^2 \left(\frac{2}{h^3} - \frac{\chi h}{3} e^{-\chi h} (6 - 6\chi h + \chi^2 h^2) \right) + \frac{MB}{(1+Bh)^3} \left(h \nabla^2 h + \frac{(\nabla h)^2 (1-2Bh)}{(1+Bh)} \right) -$$

$$-\Omega \left(\frac{3}{h^4} - \chi e^{-\chi h} \right)$$

$$N_1 = -h^2 \nabla^3 h + 2 \nabla h \left(\frac{1}{h^2} + \frac{\chi h^2}{3} (3 - \chi h) e^{-\chi h} \right) - \frac{MBh \nabla h}{(1+Bh)^3}$$

$$N_2 = -\frac{1}{h} + \frac{\chi h^3}{3} e^{-\chi h} - \frac{MBh^2}{2(1+Bh)^2} + \Omega$$

$$N_3 = -h^2 \nabla h$$

$$N_4 = -\frac{1}{3} h^3$$

Где $\nabla = \partial_x + \partial_y$; $\nabla^2 = \partial_{xx} + \partial_{yy}$; $\nabla^3 = \partial_{xxx} + \partial_{yyy}$; $\nabla^4 = \partial_{xxxx} + \partial_{yyyy}$ – дифференциальные операторы. Система конечно-разностных уравнений усложнится, поскольку прогонка будет осуществляться в двух направлениях и в два этапа:

$$\begin{cases} A_i^{(1)} h_{i-2,j}^{n+1/2} + B_i^{(1)} h_{i-1,j}^{n+1/2} + C_i^{(1)} h_{i,j}^{n+1/2} + D_i^{(1)} h_{i,j}^{n+1/2} + E_i^{(1)} h_{i+2,j}^{n+1/2} = F_{i,j}^{(1)} \\ A_j^{(2)} h_{i,j-2}^{n+1} + B_j^{(2)} h_{i,j-1}^{n+1} + C_j^{(2)} h_{i,j}^{n+1} + D_j^{(2)} h_{i,j+1}^{n+1} + E_j^{(2)} h_{i,j+2}^{n+1} = F_{i,j}^{(2)} \end{cases}$$

Где

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= \frac{N_3^n}{2(\Delta x)^3} - \frac{N_4^n}{(\Delta x)^4}; B^{(1)} = \frac{N_1^n}{2\Delta x} - \frac{N_2^n}{(\Delta x)^2} - \frac{N_3^n}{(\Delta x)^3} + 4\frac{N_4^n}{(\Delta x)^4}; \\ C^{(1)} &= \frac{2}{\Delta t} - N_0^n + \frac{2N_2^n}{(\Delta x)^2} - \frac{6N_4^n}{(\Delta x)^4} \\ D^{(1)} &= \frac{N_3^n}{(\Delta x)^3} - \frac{N_2^n}{(\Delta x)^2} - \frac{N_1^n}{2\Delta x} + \frac{4N_4^n}{(\Delta x)^4}; E^{(1)} = -\frac{N_3^n}{2(\Delta x)^3} - \frac{N_4^n}{(\Delta x)^4} \\ F_{i,j}^{(1)} &= 2N^n + \frac{2h_{i,j}^n}{\Delta t} - (N_0^n h_{i,j}^n + N_1^n h_x^n + N_2^n h_{xx}^n + N_3^n h_{xxx}^n + N_4^n h_{xxxx}^n) \\ A^{(2)} &= \frac{N_3^{n+1/2}}{2(\Delta y)^3} - \frac{N_4^{n+1/2}}{(\Delta y)^4}; B^{(2)} = \frac{N_1^{n+1/2}}{2\Delta y} - \frac{N_2^{n+1/2}}{(\Delta y)^2} - \frac{N_3^{n+1/2}}{(\Delta y)^3} + 4\frac{N_4^{n+1/2}}{(\Delta y)^4}; \\ E^{(2)} &= -\frac{N_3^{n+1/2}}{2(\Delta y)^3} - \frac{N_4^{n+1/2}}{(\Delta y)^4}; C^{(2)} = \frac{2}{\Delta t} - N_0^{n+1/2} + \frac{2N_2^{n+1/2}}{(\Delta y)^2} - \frac{6N_4^{n+1/2}}{(\Delta y)^4}; \\ D^{(2)} &= \frac{N_3^{n+1/2}}{(\Delta y)^3} - \frac{N_2^{n+1/2}}{(\Delta y)^2} - \frac{N_1^{n+1/2}}{2\Delta y} + \frac{4N_4^{n+1/2}}{(\Delta y)^4}; \\ F_{i,j}^{(2)} &= 2N^{n+1/2} + \frac{2h_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t} - N_0^{n+1/2} h_{i,j}^{n+1/2} - N_1^{n+1/2} h_y^{n+1/2} - \\ &- N_2^{n+1/2} h_{yy}^{n+1/2} - N_3^{n+1/2} h_{yyy}^{n+1/2} - N_4^{n+1/2} h_{yyyy}^{n+1/2} \end{aligned}$$

3.6. Результаты моделирования задачи

Используя результаты приведенной выше схемы, мы выполнили моделирование процесса испарения тонкой пленки полярной жидкости, расположенной на твердой подложке с равномерным нагревом снизу, при наличии зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры на свободной границе «жидкость – пар». При моделировании изменяли такие

параметры задачи, как число Марангони Ma , параметр испарения Ω и число Био B .

Были получены профили жидкости при разных числах Марангони, изображенные на Рис. 3.2 (остальные параметры для получения профилей были оставлены неизменными: $\chi = 1,085$; $\Omega = 0,07$; $S = -0,003$; $B = 0,001$), полученном в результате численного моделирования; пунктиром на рисунке отмечен начальный профиль пленки. На рисунке 3.2 видно, как при низких числах Марангони, что означает незначительный эффект градиента поверхностного натяжения, на границе фронта между двумя устойчивыми значениями толщины возникает вздутие, которое исчезает при повышении числа Марангони. Это связано с движением жидкости по инерции: в результате испарения поверхностный слой жидкости движется вверх по линии фронта, и при достаточном градиенте поверхностного натяжения это движение продолжается до устойчивой толщины «толстого» слоя жидкости. На рисунке 3.2(в) устойчивый фронт жидкости начинает пропадать. Из-за высокого поверхностного напряжения верхняя устойчивая толщина начинает уменьшаться.

Результат трехмерного моделирования изображен на рисунке 3.3. Моделирование выполнялось при следующих параметрах: $M=50$, $B=0.1$, $\chi = 1.085$, $S = -0.003$, $\Omega = 0.07$. Моделирование было выполнено на сетке 160×160 с шагом по времени $\Delta t = 0.001$. Для проверки точности схемы расчеты были также выполнены на сетках 200×200 и 240×240 с практически тем же результатом: разница составила менее 2 %.

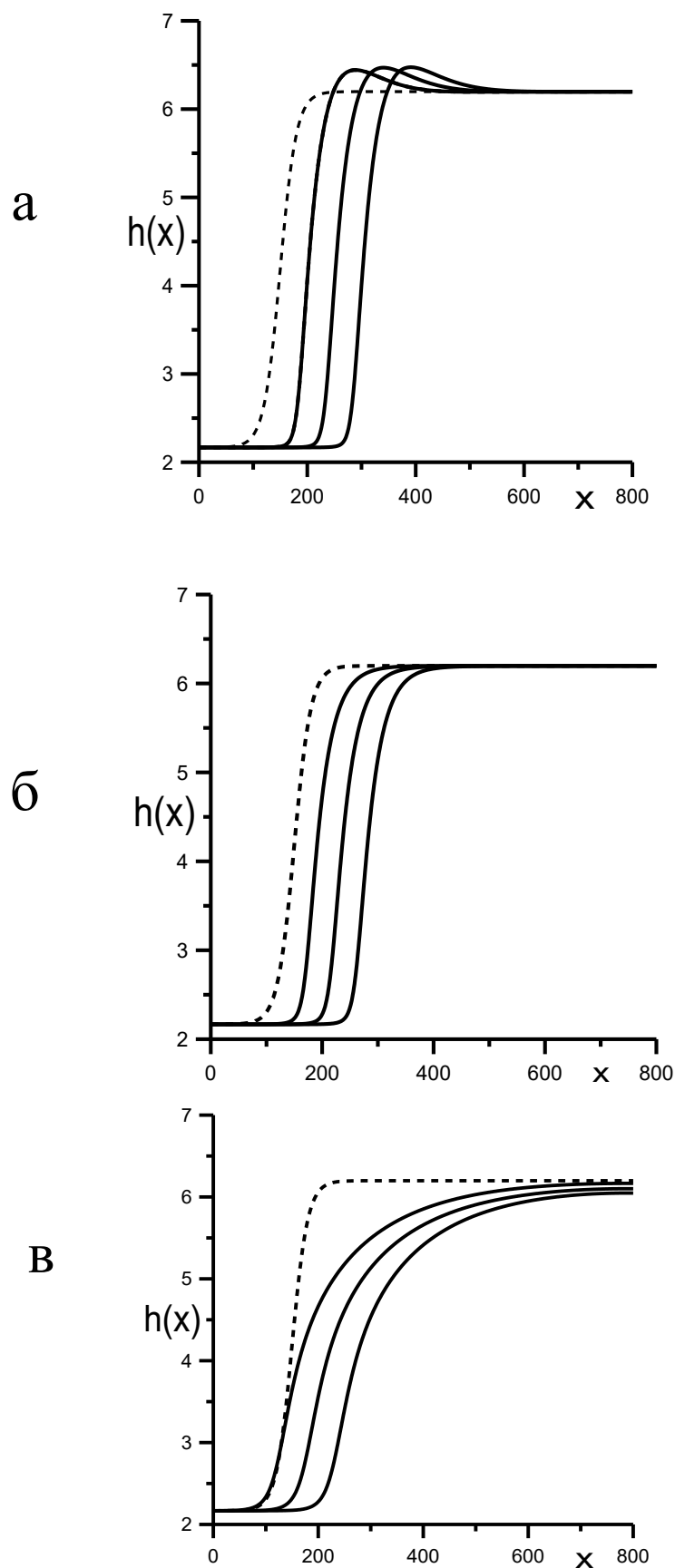


Рис.3.2. Профили тонкой жидкой пленки, полученные в результате численного моделирования при различных значениях числа Марангони ($a - M=0,1$; $б - M=10$; $в - M=100$).

Кроме моделирования эволюции профиля было проведено измерение скорости движения фронта. Поскольку меньшая и большая толщины устойчивы и сохраняются, а фронт перемещается параллельно самому себе, скорость движения фронта можно рассчитать как отношение разности площадей под кривой, показывающей профиль, ко времени.

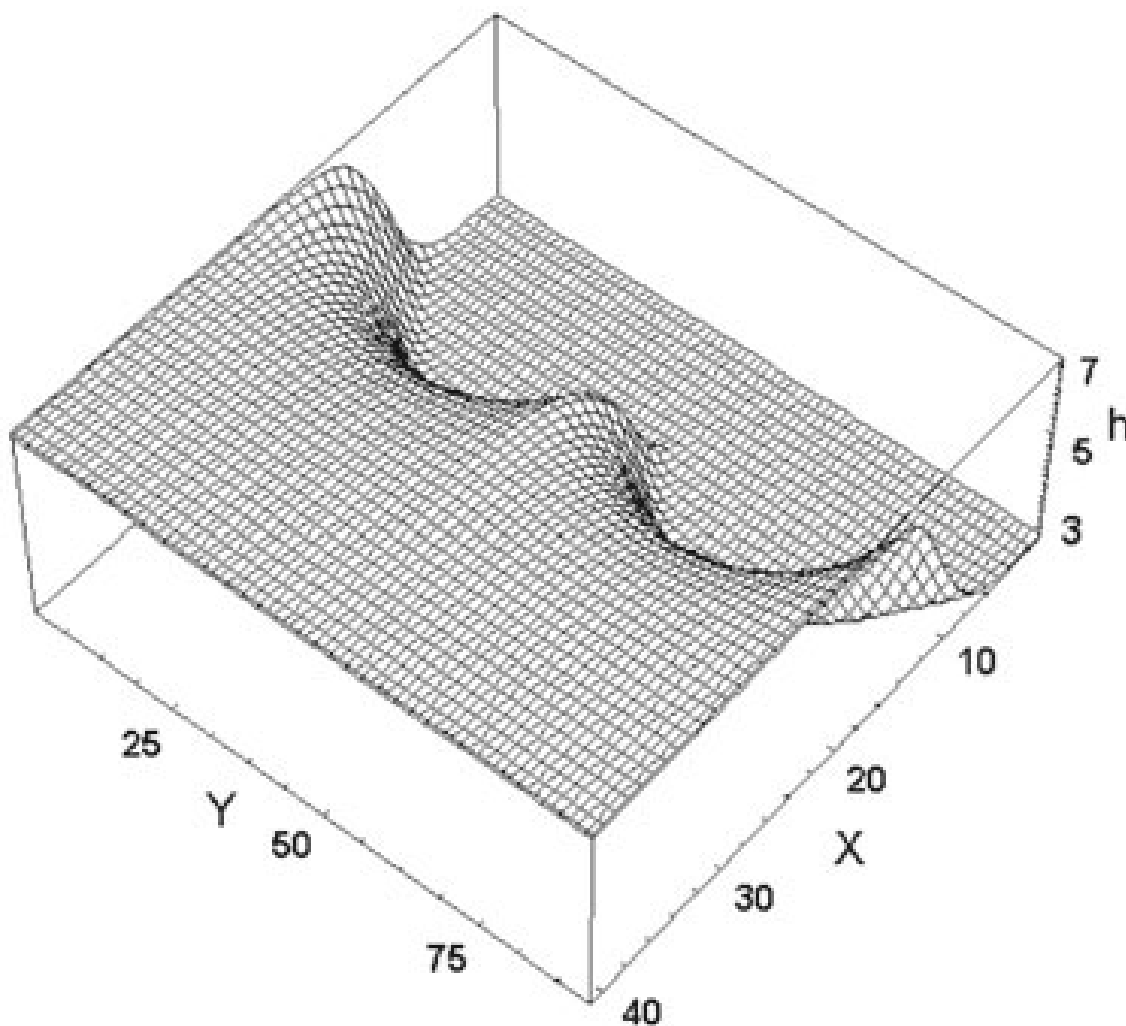


Рис.3.3. Трехмерное численное моделирование фронта жидкой пленки с образованием [пальцеобразной неустойчивости].

Связь между термокапиллярным явлением и скоростью движения фронта показана в виде графика на рисунке 3.4. По этому рисунку видно, что при

больших числах Марангони фронт может иметь ненулевую скорость даже при очень низком испарении, а это значит, что при малых значениях безразмерного параметра испарения эффект Марангони может оказывать существенное влияние на поведение тонкого слоя жидкости.

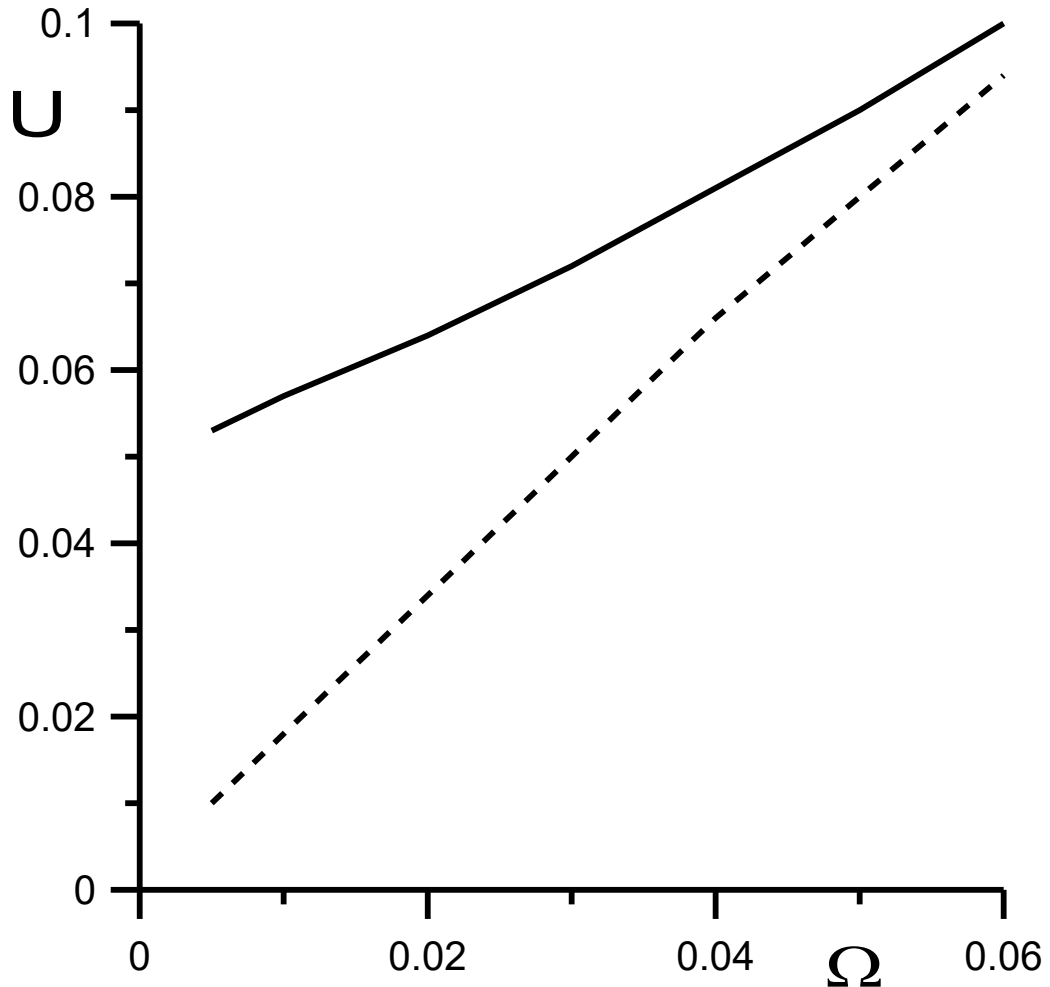


Рис.3.4. Зависимость скорости распространения U от параметра Ω : для $M = 0,1, B = 10^{-3}$ пунктирная линия и $M = 25, B = 10^{-3}$ – непрерывная линия.

3.7. Линейный анализ устойчивости

Чтобы исследовать описываемую в данной работе систему на устойчивость по отношению к небольшим возмущениям, проведем линейный анализ устойчивости. Будем исследовать устойчивость движущегося со скоростью U фронта жидкости относительно малых возмущений $\tilde{h}$, периодических по отношению к оси x . Для этого добавим эти бесконечно малые возмущения к уже имеющемуся распределению h_0 некоего стационарного распределения,

движущегося со скоростью U . Подставим сумму $(h_0 + \tilde{h})$ в двумерное уравнение эволюции (3.52) и оставим в нем только линейные слагаемые относительно возмущений. Сначала раскроем скобки уравнения (3.52), подобно тому, как это было сделано для построения конечно-разностной схемы, и получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} h_t + \frac{MB}{2} \left(\frac{h^2 \nabla^2 h}{(1+Bh)^2} + \frac{2h(\nabla h)^2}{(1+Bh)^3} \right) + \frac{1}{3} h^3 \nabla^4 h + h^2 \nabla h \nabla^3 h + \\ + \nabla^2 h + \left(\frac{1}{h} - \frac{\chi h^3}{3} e^{-\chi e} - \Omega \right) - (\nabla h)^2 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{\chi h^2}{3} e^{-\chi h} (3 - \chi h) \right) - \\ - \Omega \left(-\frac{1}{h^3} + e^{-\chi h} + S \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

1) *Первое слагаемое – производная по времени*

$$\partial_t (h_0 + \tilde{h}) = \partial_t h_0 + \partial_t \tilde{h} \Rightarrow \partial_t \tilde{h}$$

2) *Второе слагаемое – термокапиллярное*

Заметим здесь, что число Био B имеет небольшие значения и оказывает небольшое влияние на скорость движения, так что можно считать, что выражение $(1+Bh)$ в знаменателе приблизительно равняется единице. Кроме того, будем оставлять только линейные слагаемые относительно возмущений:

$$\begin{aligned} (h_0 + \tilde{h}) \nabla^2 (h_0 + \tilde{h}) &= h_0 \nabla^2 h_0 + \tilde{h} \nabla^2 h_0 + h_0 \nabla^2 \tilde{h} + \tilde{h} \nabla^2 \tilde{h} \rightarrow \tilde{h} \nabla^2 h_0 + h_0 \nabla^2 \tilde{h} \\ (h_0 + \tilde{h}) \left[\nabla (h_0 + \tilde{h}) \right]^2 &= (h_0 + \tilde{h}) \left[(h_0)^2 + 2 \nabla h_0 \nabla \tilde{h} + (\nabla \tilde{h})^2 \right] = \\ &= h_0 (\nabla h_0)^2 + 2 h_0 \nabla h_0 \nabla \tilde{h} + h_0 (\nabla \tilde{h})^2 + \tilde{h} (\nabla h_0)^2 + 2 \tilde{h} \nabla h_0 \nabla \tilde{h} + \tilde{h} (\nabla \tilde{h})^2 \rightarrow \\ &\rightarrow 2 h_0 \nabla h_0 \nabla \tilde{h} + \tilde{h} (\nabla h_0)^2 \\ &\Rightarrow \frac{MB}{2} \left[h_0 \nabla^2 \tilde{h} + 4 h_0 \nabla h_0 \nabla \tilde{h} + \tilde{h} (\nabla^2 h_0 + 2 (\nabla h_0)^2) \right] \end{aligned}$$

3) *Движение вдоль поверхности и испарение*

- $h^2 = (h_0 + \tilde{h})^2 = h_0^2 + 2 h_0 \tilde{h} + R$

(R – члены меньших порядков, они пренебрежимо малы)

- $h^3 = (h_0 + \tilde{h})^3 = h_0^3 + 3h_0^2\tilde{h} + R$
- $\frac{1}{h} = \frac{1}{h_0} - \frac{\tilde{h}}{h_0^2}$
- $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{(h_0 + \tilde{h})^2} = \frac{1}{h_0^2} - \frac{2\tilde{h}}{h_0^3}$
- $\frac{1}{h^3} = \frac{1}{(h_0 + \tilde{h})^3} = \frac{1}{h_0^3} - \frac{3\tilde{h}}{h_0^4}$
- $e^{-\chi h} = e^{-\chi(h_0 + \tilde{h})} = e^{-\chi h_0} (1 - \chi \tilde{h})$

Преобразуем слагаемые с учетом вышеприведенных соотношений:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{3} h^3 \nabla^4 h &= \frac{1}{3} [(h_0^3 + 3h_0^2 \tilde{h}) (\nabla^4 h_0 + \nabla^4 \tilde{h})] = \frac{1}{3} [h_0^3 \nabla^4 \tilde{h} + 3h_0^2 \tilde{h} \nabla^4 h_0] \\
 h^2 \nabla h \nabla^3 h &= [(h_0^2 + 2h_0 \tilde{h}) (\nabla h_0 + \nabla \tilde{h}) (\nabla^3 h_0 + \nabla^3 \tilde{h})] = \\
 &= [(h_0^2 + 2h_0 \tilde{h}) (\nabla h_0 \nabla^3 h_0 + \nabla \tilde{h} \nabla^3 h_0 + \nabla h_0 \nabla^3 \tilde{h})] = \\
 &= [h_0^2 (\nabla h_0 \nabla^3 \tilde{h} + \nabla \tilde{h} \nabla^3 h_0) + 2h_0 \nabla h_0 \nabla^3 h_0 \tilde{h}] \\
 -\frac{\chi h^3}{3} e^{-\chi h} &= -\frac{\chi}{3} [(h_0^3 + 3h_0^2 \tilde{h}) (1 - \chi \tilde{h}) e^{-\chi h_0}] = -\frac{\chi}{3} e^{-\chi h_0} [h_0^3 (1 - \chi \tilde{h}) + 3h_0^2 \tilde{h}] \\
 \nabla^2 h \left(\frac{1}{h} - \frac{\chi h^3}{3} e^{-\chi h} - \Omega \right) &= (\nabla^2 h_0 + \nabla^2 \tilde{h}) \left(\frac{1}{h_0} - \frac{\tilde{h}}{h_0^2} - \frac{\chi}{3} e^{-\chi h} [h_0^3 (1 - \chi \tilde{h}) + 3h_0^2 \tilde{h}] - \Omega \right) = \\
 &= -\tilde{h} \nabla^2 h_0 \left(\frac{1}{h_0^2} + \frac{\chi h_0^2}{3} e^{-\chi h_0} (3 - \chi h_0) \right) + \nabla^2 \tilde{h} \left(\frac{1}{h_0} - \frac{\chi h_0^3}{3} e^{-\chi h_0} - \Omega \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(\nabla h)^2 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{\chi h^2}{3} e^{-\chi h} (3 - \chi h) \right) = \\
& = -\left((\nabla h_0)^2 + 2\nabla h_0 \nabla \tilde{h} \right) \left(\frac{1}{h_0^2} - \frac{2\tilde{h}}{h_0^3} + \frac{\chi}{3} e^{-\chi h_0} (h_0^2 + 2h_0 \tilde{h}) (3 - \chi(h_0 + \tilde{h})) \right) = \\
& = \tilde{h} (\nabla h_0)^2 \left(\frac{2}{h_0^3} - \chi h_0 e^{-\chi h_0} (2 - \chi h_0) \right) - \\
& - 2\nabla h_0 \nabla \tilde{h} \left(\frac{1}{h_0^2} + \frac{\chi h_0^2}{3} e^{-\chi h_0} (3 - \chi h_0) \right) - \Omega \left(-\frac{1}{h^3} + e^{-\chi h} + S \right) = \Omega \tilde{h} \left(\frac{3}{h_0^4} + \chi e^{-\chi h_0} \right)
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили уравнение возмущений для линейного исследования устойчивости тонкой жидкой пленки:

$$\begin{aligned}
& \tilde{h}_t + \frac{MB}{2} \left[h_0 \nabla^2 \tilde{h} + 4h_0 \nabla h_0 \nabla \tilde{h} + \tilde{h} (\nabla^2 h_0 + 2(\nabla h_0)^2) \right] + \\
& + \frac{1}{3} \left[h_0^3 \nabla^4 \tilde{h} + 3h_0^2 \tilde{h} \nabla^4 h_0 \right] + \\
& + \left[h_0^2 (\nabla h_0 \nabla^3 \tilde{h} + \nabla \tilde{h} \nabla^3 h_0) + 2h_0 \nabla h_0 \nabla^3 h_0 \tilde{h} \right] - \\
& - \tilde{h} \nabla^2 h_0 \left(\frac{1}{h_0^2} + \frac{\chi h_0^2}{3} e^{-\chi h_0} (3 - \chi h_0) \right) + \nabla^2 \tilde{h} \left(\frac{1}{h_0} - \frac{\chi h_0^3}{3} e^{-\chi h_0} - \Omega \right) + \\
& + \tilde{h} (\nabla h_0)^2 \left(\frac{2}{h_0^3} - \chi h_0 e^{-\chi h_0} (2 - \chi h_0) \right) - 2\nabla h_0 \nabla \tilde{h} \left(\frac{1}{h_0^2} + \frac{\chi h_0^2}{3} e^{-\chi h_0} (3 - \chi h_0) \right) + \\
& + \Omega \tilde{h} \left(\frac{3}{h_0^4} - \chi h_0 e^{-\chi h_0} (2 - \chi h_0) \right) - 2\nabla h_0 \nabla \tilde{h} \left(\frac{1}{h_0^2} + \frac{\chi h_0^2}{3} e^{-\chi h_0} (3 - \chi h_0) \right) + \\
& + \Omega \tilde{h} \left(\frac{3}{h_0^4} + \chi e^{-\chi h_0} \right) = 0
\end{aligned}$$

или, приводя подобные:

$$\begin{aligned}
& \tilde{h}_t + \frac{1}{3} h_0^3 \nabla^4 \tilde{h} + h_0^2 \nabla h_0 \nabla^3 \tilde{h} + \nabla^2 \tilde{h} \left(\frac{MBh_0}{2} + \frac{1}{h_0} - \frac{\chi h_0^3}{3} e^{-\chi h_0} - \Omega \right) + \\
& + \nabla \tilde{h} \left[h_0^2 \nabla^3 h_0 + 2 \nabla h_0 \left(MBh_0 + \frac{1}{h_0^2} + \frac{\chi h_0^2}{3} e^{-\chi h_0} (3 - \chi h_0) \right) \right] + \\
& + \tilde{h} \left(\frac{MB}{2} (\nabla^2 h_0 + 2(\nabla h_0)^2) + h_0 (h_0 \nabla^4 h_0 + 2 \nabla h_0 \nabla^3 h_0) \right) + \\
& + \tilde{h} \left(\Omega \left(\frac{3}{h_0^4} + \chi e^{-\chi h_0} \right) - \nabla^2 h_0 \left(\frac{1}{h_0^2} + \frac{\chi h_0^2}{3} e^{-\chi h_0} (3 - \chi h_0) \right) \right) + \\
& + \tilde{h} (\nabla h_0)^2 \left(\frac{2}{h_0^3} - \chi h_0 e^{-\chi h_0} (2 - \chi h_0) \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.61}$$

3.7.1. Возмущения, направленные поперек фронта жидкости

Исследуем линейную устойчивость тонкой пленки по отношению к возмущениям с амплитудой вдоль оси x , представленным в виде:

$$\tilde{h} = u(\xi) \exp(\omega t + iky) \tag{3.62}$$

$\xi = x - Ut$ (где x, y – координаты, U – скорость распространения фронта жидкости, t – время, k – волновое число, ω – декремент возмущений). Подставим полученную сумму в линеаризованное уравнение для возмущений (3.61) и будем решать полученное уравнение относительно $\omega(k)$. Найдем производные $\tilde{h}$, входящие в уравнение

$$h_t = (u\omega - u_x U) e^D$$

где $D = \omega t + iky$.

Найдем пространственные производные, имея в виду, что возмущения действуют вдоль оси y :

$$\nabla h_0 = h_x; \nabla^2 h_0 = h_{xx}; \nabla^3 h_0 = h_{xxx}; \nabla^4 h_0 = h_{xxxx}$$

(производные записаны с опусканием нижнего индекса «0»).

Здесь была учтена форма стационарного профиля жидкой пленки. Очевидно, пространственные производные стационарного профиля по y будут равны нулю.

$$\nabla \tilde{h} = (\nabla u_x + u \nabla D) = e^D (u_x + iku)$$

$$\nabla^2 \tilde{h} = e^D (\nabla u_{xx} + u_{xx} \nabla D + \nabla(iku) + iku \nabla D) = e^D (u_{xx} + iku_x - k^2 u) = e^D (u_{xx} - k^2 u + 2iku_x)$$

$$\begin{aligned} \nabla^3 \tilde{h} &= e^D (\nabla u_{xxx} + u_{xxx} \nabla D - k^2 \nabla u - k^2 u \nabla D + 2ik \nabla u_x + 2iku_x \nabla D) = \\ &= e^D (u_{xxx} + iku_{xx} - k^2 u_x - ik^3 u + 2iku_{xx} - 2k^2 u_x) = e^D (u_{xxx} - 3k^2 u_x + 3iku_{xx} - ik^3 u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla^4 \tilde{h} &= e^D (\nabla u_{xxxx} + u_{xxxx} \nabla D - 3k^2 (\nabla u_{xx} + u_{xx} \nabla D) + 3ik (\nabla u_{xxx} + u_{xxx} \nabla D) - ik^3 (\nabla u + u \nabla D)) = \\ &= e^D (u_{xxxx} + iku_{xxx} - 3k^2 u_{xx} - 3ik^3 u_x + 3iku_{xxx} - 3k^2 u_{xx} - ik^3 u_x + k^4 u) = \\ &= e^D (u_{xxxx} - 6k^2 u_{xx} + k^4 u + 4ik(u_{xxx} - k^3 u_x)) \end{aligned}$$

Отбросим мнимые части:

$$\nabla \tilde{h} = u_x e^D$$

$$\nabla^2 \tilde{h} = e^D (u_{xx} - k^2 u)$$

$$\nabla^3 \tilde{h} = e^D (u_{xxx} - 3k^2 u_x)$$

$$\nabla^4 \tilde{h} = e^D (u_{xxxx} - 6k^2 u_{xx} + k^4 u)$$

Подставим выражения в уравнение (3.61):

$$\begin{aligned} &u\omega - u_x U + \frac{1}{3} h_0^3 (u_{xxxx} - 6k^2 u_{xx} + k^4 u) + h_0^2 h_{0x} (u_{xxx} - 3k^2 u_x) + \\ &+ (u_{xx} - k^2 u) \left(\frac{MBh_0}{2} + \frac{1}{h_0} - \frac{\chi h_0^3}{3} e^{-\chi h_0} - \Omega \right) + \\ &+ u_x \left[h_{0xxx}^2 + 2h_{0x} \left(MaBh_0 + \frac{1}{h_0^2} + \frac{\chi h_0^2}{3} e^{-\chi h_0} (3 - \chi h_0) \right) \right] + \\ &+ u \left(\frac{MB}{2} (h_{0xx} + 2(h_{0x})^2) + h_0 (h_0 h_{0xxx} + 2h_{0x} h_{0xx}) \right) + \\ &+ u \left(\Omega \left(\frac{3}{h_0^4} + \chi e^{-\chi h_0} \right) - h_{0xx} \left(\frac{1}{h_0} + \frac{\chi h_0^2}{3} e^{-\chi h_0} (3 - \chi h_0) \right) \right) + \\ &+ u (h_{0x})^2 \left(\frac{2}{h_0^3} - \chi h_0 e^{-\chi h_0} (2 - \chi h_0) \right) = 0 \end{aligned}$$

Перегруппируем слагаемые для дальнейших преобразований, получаем выражение для нахождения формы дисперсионного соотношения:

$$\begin{aligned}
& k^4 \frac{h_0^3}{3} u - k^2 h_0^2 [2h_{0xx} u + 3h_{0x} u_x] - k^2 u \left(\frac{MBh_0}{2} - \frac{\chi h_0^3}{3} e^{-\chi h_0} + \frac{1}{h_0} - \Omega \right) + \\
& + \frac{h_0^3}{3} u_{xxxx} + h_0^2 h_{0x} u_{xxx} + u_{xx} \left(\frac{MBh_0}{2} - \frac{\chi h_0^3}{3} e^{-\chi h_0} + \frac{1}{h_0} - \Omega \right) + \\
& + u \left(\frac{MaB}{2} (h_{0xx} + 2h_{0x}^2) + h_0 (h_{0xxxx} + 2h_{0x} h_{0xxx}) \left(\frac{3}{h_0^4} - \chi e^{-\chi h_0} \right) \right) + \\
& + u h_{0x}^2 \left(\frac{2}{h_0^3} - \chi h_0 e^{-\chi h_0} (2 - \chi h_0) \right) + u \omega = 0
\end{aligned}$$

или, записав в матричном виде:

$$\omega u = -L_0 u - k^2 L_2 u - k^4 h_0^3 u \quad (3.63)$$

Линейные дифференциальные операторы L_0 и L_2 имеют вид

$$L_0 = \frac{d}{dx} \left[f_{03} \frac{d^3}{dx^3} + f_{01} \frac{d}{dx} + f_{00} \right] + f_{000} \quad L_2 = f_{22} \frac{d^2}{dx^2} + f_{21} \frac{d}{dx} + f_{20}$$

где

$$\begin{aligned}
f_{03} &= h_0^3, \quad f_{01} = \frac{3}{h_0} - \chi h_0^3 \exp(-\chi h_0) + \frac{MBh_0^2}{(1+Bh_0^2)^2} + \Omega, \\
f_{00} &= U + h_{0x} \left[-\frac{3}{h_0^2} - (3 - \chi h) \chi h_0^2 \exp(-\chi h_0) \right] - 3h_0 h_{0xxx}, \quad f_{000} = \Omega \left[\frac{3}{h_0^4} - \chi \exp(-\chi h_0) \right] \\
f_{22} &= 6h_0^2, \quad f_{21} = 9h_0^2 h_{0x}, \quad f_{20} = -f_{01} + \frac{MBh_0^2}{(1+Bh_0^2)^2}
\end{aligned}$$

Рассмотрим для начала простейший случай, когда $k=0$ (голдстоуновская мода). В качестве h_0 возьмем распределение, аналогичное Рис.3.2, для соответствующих значений M, B, Ω, S, χ и скорости движения фронта U .

$$\omega_0 u = -L_0 u$$

$$L_0 = \frac{d}{dx} \left[f_{03} \frac{d^3}{dx^3} + f_{01} \frac{d}{dx} + f_{00} \right] + f_{000}$$

$$f_{03} = h_0^3, \quad f_{01} = \frac{3}{h_0} - \chi h_0^3 \exp(-\chi h_0) + \frac{MBh_0^2}{(1+Bh_0^2)^2} + \Omega,$$

$$f_{00} = U + h_{0x} \left[-\frac{3}{h_0^2} - (3 - \chi h) \chi h_0^2 \exp(-\chi h_0) \right] - 3h_0^2 h_{0xxx}, \quad f_{000} = \Omega \left[\frac{3}{h_0^4} - \chi \exp(-\chi h_0) \right]$$

Это уравнение после подстановки всех слагаемых и вычислений приобретает следующую форму:

$$\begin{aligned} & \frac{h_0^3}{3} u_{xxxx} + h_0^2 h_{0x} u_{0xxx} + u_{xx} \left(MaB \frac{h_0}{2} - \frac{\chi h_0^3}{3} \exp(-\chi h_0) + \frac{1}{h_0} - \Omega \right) + \\ & + u_x \left[h_0^2 h_{0xxx} + 2h_{0x} \left(MBh_0 + \frac{1}{h_0^2} + \frac{\chi h_0^3}{3} \exp(-\chi h_0) (3 - \chi h_0) \right) - U \right] + \\ & + u \left[\frac{MaB}{2} (h_{0xx} + 2h_{0x}^2) + h_0 (h_0 h_{0xxx} + 2h_{0x} h_{0xxx}) \left(\frac{3}{h_0^4} - \chi \exp(-\chi h_0) \right) \right] + \\ & + u \left[\Omega \left(\frac{3}{h_0^4} - \chi \exp(-\chi h_0) \right) - h_{0xx} \left(\frac{1}{h_0^2} + \frac{\chi h_0^3}{3} \exp(-\chi h_0) (3 - \chi h_0) \right) \right] + \\ & + u h_{0x}^2 \left(\frac{2}{h_0^3} - \chi h_0 \exp(-\chi h_0) (2 - \chi h_0) \right) + u \omega = 0 \end{aligned}$$

Необходимо найти такое решение этого уравнения, при котором возмущение (т. е. u) не равно нулю, а значит, нулю равны либо производные, либо выражения, умножаемые на u . Тогда

$$\begin{aligned} \omega_0 = & -\frac{MB}{2} (h_{0xx} + 2h_{0x}^2) - h_0 (h_0 h_{0xxx} + 2h_{0x} h_{0xxx}) \left(\frac{3}{h_0^4} - \chi \exp(-\chi h_0) \right) - \\ & - \Omega \left(\frac{3}{h_0^4} - \chi \exp(-\chi h_0) \right) + h_{0xx} \left(\frac{1}{h_0^2} + \frac{\chi h_0^3}{3} \exp(-\chi h_0) (3 - \chi h_0) \right) - U - \\ & - h_{0x}^2 \left(\frac{2}{h_0^3} - \chi h_0 \exp(-\chi h_0) (2 - \chi h) \right) \end{aligned}$$

Голдстоуновская мода возмущений зависит от параметров M , B , Ω и χ и имеет всегда отрицательное значение, что говорит нам об абсолютной устойчивости по отношению к возмущениям. На Рис. 3.5 представлена

зависимость значения голдстоуновской моды возмущения от различных значений параметров теплообмена B и испарения Ω .

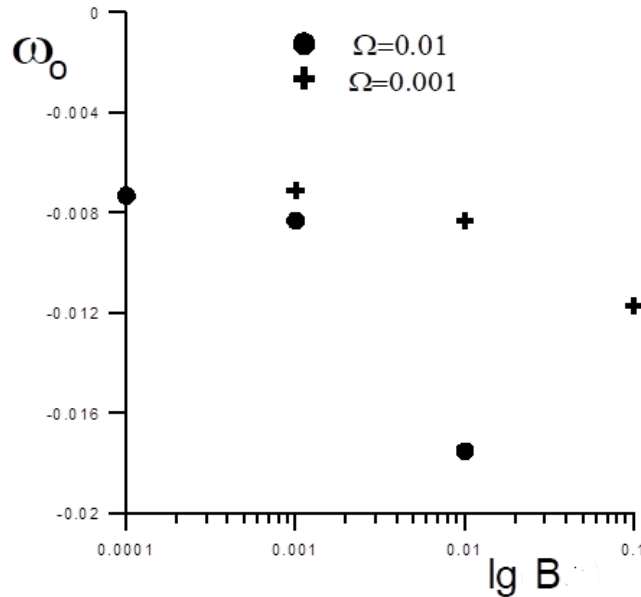


Рис.3.5. Функциональная зависимость значений голдстоуновской моды $k = 0$ от различных значений безразмерных чисел Био B и испарения Ω , при $\chi = 1.085$, $S = -0.003$.

На основании анализа Рис. 3.6 можно сделать выводы о том, что ускорение теплообмена между жидкостью и окружающим газом, а также усиление испарения повышают устойчивость пленки. Это согласуется с результатами предыдущей главы.

Нашей основной целью в данной задаче является нахождение дисперсионного соотношения из (3.63) при различных параметрах задачи. Для этого будем рассматривать функцию $u(x)$ и запишем уравнение (3.63) в конечных разностях по центральным схемам:

$$u_x = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}$$

$$u_{xx} = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{(\Delta x)^2}$$

$$u_{xxx} = \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + 2u_{i-2}}{2(\Delta x)^3}$$

$$u_{xxxx} = \frac{u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}}{(\Delta x)^4}$$

Уравнение (3.63) придет к виду

$$\begin{aligned} & k^4 \frac{h_0^3}{3} u - 2k^2 h_0^3 u_{xx} - k^2 u \left(\frac{MBh_0}{2} - \frac{\chi h_0^3}{3} \exp(-\chi h_0) + \frac{1}{h_0} - \Omega \right) + \\ & + \frac{h_0^3}{3} u_{xxxx} + u_{xx} \left(\frac{MBh_0}{2} - \frac{\chi h_0^3}{3} \exp(-\chi h_0) + \frac{1}{h_0} - \Omega \right) + \\ & + U u_x + u \Omega \left(\frac{3}{h_0^4} + \chi \exp(-\chi h_0) \right) + u \omega = 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

В операторном виде данное уравнение может быть представлено как

$$u_0 \Lambda_0 + \frac{u_{-2} - 4u_{-1} + 6u_0 - 4u_1 + u_2}{(\Delta x)^4} \cdot \frac{h_0^3}{3} + \frac{u_{-1} - 2u_0 + u_1}{(\Delta x)^2} \cdot \Lambda_2 - U \cdot \frac{u_1 - u_{-1}}{2\Delta x} = 0$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= k^4 \frac{h_0^3}{3} - k^2 \left(\frac{MBh_0}{2} - \frac{\chi h_0^3}{3} e^{-\chi h_0} + \frac{1}{h_0} - \Omega \right) + \Omega \left(\frac{3}{h_0^4} + \chi e^{-\chi h_0} \right) + \omega \\ \Lambda_2 &= -2k^2 h_0^3 + \frac{MaBh_0}{2} - \frac{\chi h_0^3}{3} e^{-\chi h} + \frac{1}{h_0} - \Omega \end{aligned}$$

Перепишем это уравнение, группируя слагаемые по индексу, и получим:

$$\begin{aligned} & u_{-1} \left(-\frac{4h_0^3}{3(\Delta x)^4} + \frac{\Lambda_2}{(\Delta x)^2} + \frac{U}{2\Delta x} \right) + u_0 \left(\Lambda_0 + \frac{2h_0^3}{(\Delta x)^4} - \frac{2\Lambda_2}{(\Delta x)^2} \right) + \\ & + u_1 \left(-\frac{4h_0^3}{3(\Delta x)^4} + \frac{\Lambda_2}{(\Delta x)^2} + \frac{U}{2\Delta x} \right) + (u_2 + u_{-2}) \cdot \frac{h_0^3}{3} = 0 \end{aligned} \quad (3.65)$$

Чтобы решить уравнение (3.64) относительно $\omega(k)$, имея при этом неизвестное u , можно записать уравнение (3.65) как произведение некоторого множителя (включающего в себя ω и k) и u , равное нулю, и с полным правом приравнять этот «некоторый множитель» к нулю, исключая таким образом неизвестное u .

Но этому мешают множители u_i с отрицательным индексом i . Попробуем выразить их через u_0 . Для этого запишем характеристическое уравнение дифференциального уравнения (3.65):

$$\lambda^4 \cdot \frac{h^3}{3} + \lambda^2 \cdot \Lambda_2 - \lambda U + \Lambda_0 = 0$$

Скорость U движения фронта определяется испарением, т. е. последним слагаемым уравнения (3.64):

$$h_t = \Omega \left(-\frac{1}{h^3} + e^{-\chi h} + S \right)$$

Пусть $h = H(X - Ut)$, тогда скорость можно будет найти при помощи интеграла:

$$\begin{aligned} h_t &= -U h_x \\ -U h_{0x} &= \Omega \left(-\frac{1}{h^3} + e^{-\chi h} + S \right) \\ U \frac{dh_0}{dx} &= \Omega \left(\frac{1}{h^3} - e^{-\chi h} - S \right) \\ U &= \frac{\Omega}{h_{02} - h_{01}} \int_{\infty-}^{+\infty} \left(\frac{1}{h^3} - e^{-\chi h} - S \right) dx \end{aligned}$$

Здесь h_{02} и h_{01x} – это устойчивые «толстое» и «тонкое» значения толщины пленки. Решая этот интеграл при заданных значениях, которые есть $\chi = 1.085$, $S = -0.003$, $\Omega = 0.001$, определяем, что скорость движения фронта будет равняться $U = 0,00057$.

Решения однородного уравнения (3.64) будут выглядеть так:

$$\text{При } x < 0(h_{\min}) \quad \lambda_1 = \Re_1; \lambda_2 = \Re_2$$

$$\text{При } x > 0(h_{\max}) \quad \lambda_{3,4} = \Re_3 \pm \Im_3 i$$

Здесь под областями $x < 0$ и $x > 0$ понимаются области справа и слева от фронта жидкости соответственно.

Тогда при $x < 0$ $u \rightarrow C_1 \exp(\lambda_1 x) + C_2 \exp(\lambda_2 x)$; а при $x > 0$

$$u \rightarrow \exp(\Re_3 \cdot x) \cdot (C_1 \cos(\Im_3 x) + C_2 \sin(\Im_3 x)).$$

Нам нужно найти собственные значения:

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

Отсюда получим:

$$\begin{cases} u'' - (\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2)u' + \mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2u = 0 & x < 0 \\ u'' - 2\mathfrak{R}_3u' + |\lambda_3^2|u = 0 & x > 0 \end{cases}$$

или:

$$\begin{cases} u'' - a_1u' + b_1u = 0 & x < 0 \\ u'' - a_2u' + b_2u = 0 & x > 0 \end{cases} \quad (3.66)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2; \quad b_1 = \mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2 \\ a_2 &= 2\mathfrak{R}_3; \quad b_2 = |\lambda_3^2| = |\mathfrak{R}^2 - \mathfrak{T}^2| \end{aligned}$$

Найдем значения u в крайних точках сетки. Рассмотрим первое уравнение системы (3.66) при $x < 0$:

$$\begin{cases} u'' - a_1u' + b_1u = 0 \\ u''' - a_1u'' + b_1u' = 0 \end{cases}$$

Второе уравнение из этой системы получено путем дифференцирования первого.

Запишем систему в конечных разностях:

$$\begin{cases} \frac{u_{-1} - 2u_0 + u_1}{(\Delta x)^2} - a_1 \cdot \frac{u_1 - u_{-1}}{2\Delta x} + b_1u_0 = 0 \\ \frac{u_2 - 2u_1 + 2u_{-1} - u_{-2}}{2(\Delta x)^3} - a_1 \cdot \frac{u_{-1} - 2u_0 + u_1}{(\Delta x)^2} + b_1 \cdot \frac{u_1 - u_{-1}}{2\Delta x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{-1} \left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{a_1}{2\Delta x} \right) + u_0 \left(-\frac{2}{(\Delta x)^2} + b_1 \right) + u_1 \left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{a_1}{2\Delta x} \right) = 0 \\ -\frac{u_{-2}}{2(\Delta x)^3} + u_{-1} \left(\frac{1}{(\Delta x)^3} - \frac{a_1}{(\Delta x)^2} - \frac{b_1}{2\Delta x} \right) + u_0 \cdot \frac{2a_1}{(\Delta x)^2} + \\ + u_1 \left(-\frac{1}{(\Delta x)^3} - \frac{a_1}{(\Delta x)^2} + \frac{b_1}{2\Delta x} \right) + \frac{u_2}{2(\Delta x)^3} = 0 \end{cases}$$

Домножим первое уравнение в системе на $2(\Delta x)^2$, а второе – на $-(\Delta x)^3$.

$$\begin{cases} u_{-1}(2 + a_1 dx) + u_0(-4 + 2b_1 dx^2) + u_1(2 - a_1 dx) = 0 \\ u_{-2} + u_{-1}(-2 + 2a_1 dx + b_1 dx^2) - 4u_0 a_1 dx + u_1(2 + 2a_1 dx - b_1 dx^2) - u_2 = 0 \end{cases}$$

Найдем из первого уравнения u_{-1} в виде

$$u_{-1} = u_0 \cdot a_{10} + u_1 \cdot a_{11}$$

где

$$a_{10} = \frac{4 - 2b_1(\Delta x)^2}{2 + a_1 \Delta x}; \quad a_{11} = \frac{a_1 \Delta x - 2}{2 + a_1 \Delta x}$$

Тогда из второго уравнения выведем u_{-2} :

$$\begin{aligned} u_{-2} &= (2 - 2a_1 dx - b_1 dx^2)u_{-1} + 4a_1 dx u_0 + (-2 - 2a_1 dx + b_1 dx^2)u_1 + u_2 = \\ &= (2 - 2a_1 dx - b_1 dx^2)(u_0 a_{10} + u_1 a_{11}) + 4a_1 dx u_0 - (2 + 2a_1 dx - b_1 dx^2)u_1 + u_2 = \\ &= u_0 [a_{10}(2 - 2a_1 dx - b_1 dx^2) + 4a_1 dx] + u_1 [a_{11}(2 - 2a_1 dx - b_1 dx^2) - (2 + 2a_1 dx + b_1 dx^2)] + u_2 \end{aligned}$$

$$u_{-2} = u_0 \left[2a_1 \Delta x (2 - a_{10}) + a_{10} (2 - b_1 (\Delta x)^2) \right] + u_1 \left[2a_{11} - (a_{11} + 1)(2a_1 \Delta x + b_1 (\Delta x)^2) \right] + u_2$$

Введем обозначения

$$\beta_{10} = 2a_1 \Delta x (2 - a_{10}) + a_{10} (2 - b_1 (\Delta x)^2)$$

$$\beta_{11} = 2a_{11} - (a_{11} + 1)(2a_1 \Delta x + b_1 (\Delta x)^2)$$

Так мы упростим внешний вид уравнения для u_{-2} :

$$u_{-2} = \beta_{10} u_0 + \beta_{11} u_1 + u_2$$

Рассмотрим другую сторону для u : $x > 0$. Будем действовать аналогично:

$$\begin{cases} u'' - a_2 u' + b_2 u = 0 \\ u^{IV} - a_2 u''' + b_2 u'' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{u_1 - 2u_0 + u_{-1}}{(\Delta x)^2} - a_2 \cdot \frac{u_1 - u_{-1}}{2\Delta x} + b_2 u_0 = 0 \\ \frac{u_{-2} - 4u_{-1} + 6u_0 - 4u_1 + u_2}{(\Delta x)^4} - a_2 \cdot \frac{u_2 - 2u_1 + 2u_{-1} - u_{-2}}{2(\Delta x)^3} + b_2 \cdot \frac{u_1 - 2u_0 + u_{-1}}{(\Delta x)^2} = 0 \end{cases}$$

Действуя аналогично, найдем u_1 в виде

$$u_1 = u_0 \cdot \alpha_{20} + u_{-1} \cdot \alpha_{21}$$

где

$$\alpha_{20} = \frac{4 - 2b_2(\Delta x)^2}{2 - a_2\Delta x}; \alpha_{21} = -\frac{2 + a_2\Delta x}{2 - a_2\Delta x},$$

Тогда из второго уравнения системы выведем u_2 :

$$\frac{u_{-2} - 4u_{-1} + 6u_0 - 4u_1 + u_2}{(\Delta x)^4} - a_2 \cdot \frac{u_2 - 2u_1 + 2u_{-1} - u_{-2}}{2(\Delta x)^3} + b_2 \cdot \frac{u_1 - 2u_0 + u_{-1}}{(\Delta x)^2} = 0$$

$$\begin{aligned} & u_{-2}(2 + a_2\Delta x) + u_{-1} \cdot 2(-4 - a_2\Delta x + b_2(\Delta x)^2) + u_0 \cdot 2(6 - 2b_2(\Delta x)^2) + \\ & + (u_0 \cdot \alpha_{20} + u_{-1} \cdot \alpha_{21}) \cdot 2(-4 + a_2\Delta x + b_2(\Delta x)^2) + u_2(2 + a_2\Delta x) = \\ & = u_{-2}(2 + a_2\Delta x) + u_{-1} \cdot 2(-4 - a_2\Delta x + b_2(\Delta x)^2 + \alpha_{21}(-4 + a_2\Delta x + b_2(\Delta x)^2)) + \\ & + u_0 \cdot 2(6 - 2b_2(\Delta x)^2 + \alpha_{20}(-4 + a_2\Delta x + b_2(\Delta x)^2)) + u_2(2 + a_2\Delta x) = \\ & = u_{-2}(2 + a_2\Delta x) + u_{-1} \cdot 2(-4(1 + \alpha_{21}) - a_2\Delta x(1 - \alpha_{21}) + b_2(\Delta x)^2(1 + \alpha_{21})) + \\ & + u_0 \cdot 2(6 + b_2(\Delta x)^2(\alpha_{20} - 2) + \alpha_{20}(-4 + a_2\Delta x)) + u_2(2 + a_2\Delta x) = \\ & = u_{-2}(2 + a_2\Delta x) + u_{-1} \cdot 2((1 + \alpha_{21})(b_2(\Delta x)^2 - 4) - a_2\Delta x(1 - \alpha_{21})) + \\ & + u_0 \cdot 2(6 + b_2(\Delta x)^2(\alpha_{20} - 2) + \alpha_{20}(a_2\Delta x - 4)) + u_2(2 + a_2\Delta x) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 = & -u_{-2} - 2u_{-1} \cdot \frac{(1 + \alpha_{21})(b_2(\Delta x)^2 - 4) - a_2\Delta x(1 - \alpha_{21})}{2 + a_2\Delta x} - \\ & - 2u_0 \cdot \frac{6 + b_2(\Delta x)^2(\alpha_{20} - 2) + \alpha_{20}(a_2\Delta x - 4)}{2 + a_2\Delta x} \end{aligned}$$

$$u_2 = -2\beta_{20}u_0 - 2\beta_{21}u_{-1} - u_{-2}$$

где

$$\beta_{20} = \frac{6 + b_2(\Delta x)^2(\alpha_{20} - 2) + \alpha_{20}(a_2\Delta x - 4)}{2 + a_2\Delta x}$$

$$\beta_{21} = \frac{(1 + \alpha_{21})(b_2(\Delta x)^2 - 4) - a_2\Delta x(1 - \alpha_{21})}{2 + a_2\Delta x}$$

Итак, в результате множественных подстановок было получено соотношение, которое связывает значения для мнимых и действительных точек в конечных разностях, применительно к данной задаче.

$$\begin{cases} u_{-1} = u_0 \cdot \alpha_{10} + u_1 \cdot \alpha_{11} \\ u_{-2} = \beta_{10}u_0 + \beta_{11}u_1 + u_2 \\ u_1 = u_0 \cdot \alpha_{20} + u_{-1} \cdot \alpha_{21} \\ u_2 = -2\beta_{20}u_0 - 2\beta_{21}u_{-1} - u_{-2} \end{cases}$$

Попытаемся при помощи этой системы выразить боковые значения u через центральное u_0 :

$$\begin{cases} u_{-1} = u_0 \cdot \alpha_{10} + u_1 \cdot \alpha_{11} \\ u_1 = u_0 \cdot \alpha_{20} + \alpha_{21}(u_0 \cdot \alpha_{10} + u_1 \cdot \alpha_{11}) \\ u_{-2} = \beta_{10}u_0 + \beta_{11}u_1 + u_2 \\ u_2 = \beta_{20}u_0 + \beta_{21}u_{-1} - 2\beta_{10}u_0 - 2\beta_{11}u_1 - u_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{-1} = u_0 \cdot \alpha_{10} + u_1 \cdot \alpha_{11} \\ u_1(1 - \alpha_{21}\alpha_{11}) = u_0(\alpha_{20} + \alpha_{21}\alpha_{10}) \\ u_{-2} = \beta_{10}u_0 + \beta_{11}u_1 + u_2 \\ 2u_2 = u_0(\beta_{20} - 2\beta_{10}) + \beta_{21}u_{-1} - 2\beta_{11}u_1 \end{cases}$$

$$u_1 = Au_0$$

$$u_{-1} = u_0\alpha_{10} + u_1\alpha_{11} = u_0\alpha_{10} + Au_0$$

$$u_{-2} = \beta_{10}u_0 + \beta_{11}u_1 + u_2 = \beta_{10}u_0 + \beta_{11}u_0(\alpha_{10} + A) + u_2 =$$

$$u_2 = -2\beta_{20}u_0 - 2\beta_{21}u_{-1} - u_{-2} = -2\beta_{20}u_0 - 2\beta_{21}u_0(\alpha_{10} + A) - \beta_{10}u_0 - \beta_{11}u_0(\alpha_{10} + A) + u_2 =$$

$$= u_0(-2\beta_{20} - \beta_{10} - (\alpha_{10} + A)(2\beta_{21} - \beta_{11}))$$

$$2u_2 = u_0(-2\beta_{20} - \beta_{10} - (\alpha_{10} + A)(2\beta_{21} - \beta_{11}))$$

$$\begin{aligned}
u_{-2} + u_2 &= \beta_{10}u_0 + \beta_{11}u_0(\alpha_{10} + A) + u_0(-2\beta_{20} - \beta_{10} - (\alpha_{10} + A)(2\beta_{21} - \beta_{11})) = \\
&= u_0[-2\beta_{20} - 2\beta_{21}(\alpha_{10} + A)] = -2u_0(\beta_{20} + \beta_{21}(\alpha_{10} + A))
\end{aligned}$$

где

$$A = \frac{\alpha_{20} + \alpha_{21}\alpha_{10}}{1 - \alpha_{21}\alpha_{11}}$$

Подставим полученные выражения в уравнение (3.65):

$$\begin{aligned}
&u_0(\alpha_{10} + A)\left(-\frac{4h_0^3}{3(\Delta x)^4} + \frac{\Lambda_2}{(\Delta x)^2} + \frac{U}{2\Delta x}\right) + u_0\left(L_0 + \frac{2h_0^3}{(\Delta x)^4} - \frac{2\Lambda_2}{(\Delta x)^2}\right) + \\
&+ Au_0\left(-\frac{4h_0^3}{3(\Delta x)^4} + \frac{\Lambda_2}{(\Delta x)^2} - \frac{U}{2\Delta x}\right) - 2u_0(\beta_{20} + \beta_{21}(\alpha_{10} + A)) \cdot \frac{h_0^3}{3} = 0
\end{aligned}$$

Группируя слагаемые, получаем, что

$$\begin{aligned}
&(\alpha_{10} + A)\left(-\frac{4h_0^3}{3(\Delta x)^4} + \frac{\Lambda_2}{(\Delta x)^2} + \frac{U}{2\Delta x}\right) + L_0 + \frac{2h_0^3}{(\Delta x)^4} - \frac{2\Lambda_2}{\Delta x^2} + \\
&+ A\left(-\frac{4h_0^3}{3(\Delta x)^4} + \frac{\Lambda_2}{(\Delta x)^2} - \frac{U}{2\Delta x}\right) - \frac{2}{3}h_0^3(\beta_{20} + \beta_{21}(\alpha_{10} + A)) = 0
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\Lambda_2}{(\Delta x)^2} - \frac{4h_0^3}{3(\Delta x)^4}\right)(\alpha_{10} + A) + \frac{U\alpha_{10}}{2\Delta x} + \Lambda_0 - \frac{2\Lambda_2}{(\Delta x)^2} + \\
&+ 2h_0^3\left[\frac{1}{(\Delta x)^4} - \frac{1}{3}(\beta_{20} + \beta_{21}(\alpha_{10} + A))\right] = 0
\end{aligned}$$

Раскрывая значения величин Λ_0 и Λ_2 , приходим к окончательному виду дисперсионного соотношения относительно поперечных возмущений:

$$\Lambda_0 = k^4 \frac{h_0^3}{3} - k^2 \left(\frac{MBh_0}{2} - \frac{\chi h_0^3}{3} \exp(-\chi h_0) + \frac{1}{h_0} - \Omega \right) + \Omega \left(\frac{3}{h_0^4} + \chi \exp(-\chi h_0) \right) + \omega$$

$$\Lambda_2 = -2k^2 h_0^3 + \frac{MBh_0}{2} - \frac{\chi h_0^3}{3} \exp(-\chi h_0) + \frac{1}{h_0} - \Omega$$

$$\omega = -k^4 \frac{h_0^3}{3} + k^2 \left(\frac{MBh_0}{2} - \frac{\chi h_0^3}{3} \exp(-\chi h_0) + \frac{1}{h_0} - \Omega \right) - \Omega \left(\frac{3}{h_0^4} + \chi \exp(-\chi h_0) \right) -$$

$$- \left(\frac{\Lambda_2}{(\Delta x)^2} - \frac{4h_0^3}{3\Delta x} \right) (\alpha_{10} + A) - \frac{U\alpha_{10}}{2\Delta x} + \frac{2\Lambda_2}{(\Delta x)^2} - 2h_0^3 \left[\frac{1}{(\Delta x)^4} - \frac{1}{3} (\beta_{20} + \beta_{21} (\alpha_{10} + A)) \right]$$

Рассмотрим полученные результаты. В случае, когда параметр испарения $\Omega = 0.03$ и имеет место область неустойчивости относительно продольных возмущений при $M = 0$ [232], термокапиллярный эффект приводит к увеличению области неустойчивости. С увеличением безразмерного параметра испарения область неустойчивости уменьшается. Наиболее интересным представляется случай, когда с увеличением числа Марангони первоначально устойчивое состояние становится неустойчивым, это соответствует значениям $\Omega = 0.1$. Дисперсионные соотношения для такого варианта приведены на Рис.3.6.

Из приведенных графиков мы можем видеть, что увеличение безразмерного числа Марангони, описывающего зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры, может приводить к потере устойчивости движущегося фронта относительно поперечных возмущений. Установлено, что с увеличением безразмерного параметра испарения Ω происходит сдвиг области неустойчивости в диапазон коротких волн.

Также стоит отметить, что при таких значениях безразмерного параметра испарения Ω с увеличением числа M происходит уменьшение значения ω относительно длинноволновой моды ($k = 0$). Длинноволновая (голдстоуновская) мода для любых значений безразмерного параметра испарения Ω остается в диапазоне отрицательных значений декремента ω . При дальнейшем росте числа Ω , когда движение фронта жидкости устойчиво по отношению к любым модам возмущений, наличие эффекта Марангони влечет за собой уменьшение устойчивости.

Особое внимание стоит уделить тому факту, что для каждого дисперсионного соотношения относительно поперечных возмущений при

фиксированном числе Марангони существует своя индивидуальная голдстоуновская мода, которая соответствует значению волнового числа $k = 0$.

Из анализа полученных дисперсионных соотношений можно сделать вывод о том, что с повышением значения безразмерного параметра Марангони устойчивость голдстоуновской моды неустойчивости понижается. Это существенно отличается от поведения дисперсионных соотношений относительно продольных возмущений, где также есть голдстоуновская мода неустойчивости, однако ее значение не зависит от изменения величины безразмерного числа Марангони.

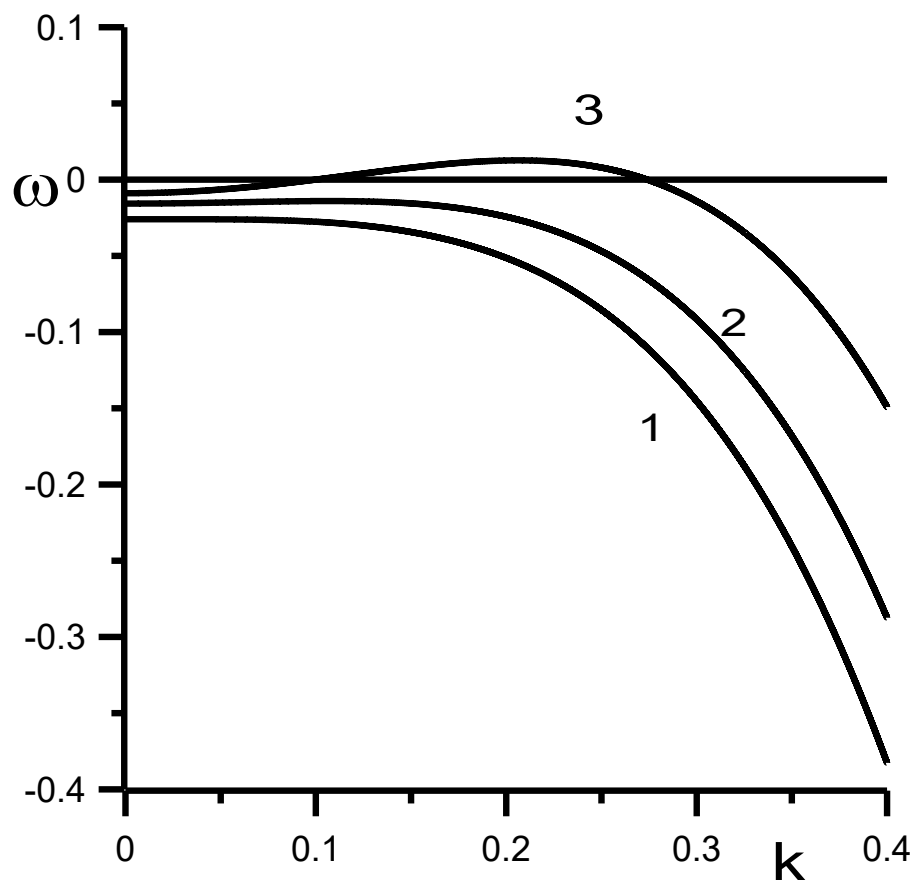


Рис.3.6. Дисперсионная зависимость $\omega(k)$ относительно поперечных возмущений для числа Марангони, равного 1) 1; 2) 10; 3) 25 соответственно. Параметр $\Omega = 0,1$, остальные параметры аналогичны Рис.3.6 .

Из формулы, приведенной ниже, для декремента возмущений относительно голдстоуновской моды видна связь между ω и M :

$$\omega(k=0) = -\Omega \left(\frac{3}{h_0^4} + \chi \exp(-\chi h_0) \right) - \left(\frac{\Lambda_2^0}{(\Delta x)^2} - \frac{4h_0^3}{3\Delta x} \right) (\alpha_{10} + A) -$$

$$-\frac{U\alpha_{10}}{2\Delta x} + \frac{2\Lambda_2^0}{(\Delta x)^2} - 2h_0^3 \left[\frac{1}{(\Delta x)^4} - \frac{1}{3} (\beta_{20} + \beta_{21} (\alpha_{10} + A)) \right]$$

$$\Lambda_2^0 = \frac{MBh_0}{2} - \frac{\chi h_0^3}{3} \exp(-\chi h_0) + \frac{1}{h_0} - \Omega$$

Основные выводы по Главе 3.

В третьей главе диссертационной работы исследовалась задача об устойчивости движения фронта испаряющейся тонкой пленки полярной жидкости, расположенной на твердой подложке. На свободной границе раздела двух сред «жидкость – пар» имеется линейная зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры. Данная система подогревается со стороны межфазной поверхности «твердое тело – жидкость». Для получения эволюционного уравнения, описывающего поведение слоя жидкости, используется длинноволновое приближение. Идея этого математического действия вытекает из теории возмущений и состоит в следующем: считается, что характерная толщина рассматриваемого слоя жидкости много меньше его геометрического масштаба длины. Благодаря этому предположению вводится малый параметр, являющийся отношением вертикальной толщины и характерного горизонтального расстояния. Далее физические величины, использующиеся в полной системе уравнений Навье-Стокса, раскладываются в ряд относительно этого малого параметра. В результате, решая полученные уравнения для одинаковых степеней параметра малости, мы получаем соответствующие эволюционные уравнения.

Для данной задачи было впервые получено эволюционное уравнение, описывающее поведение системы. Приведены профили движения фронта испаряющегося тонкого слоя полярной жидкости с учетом термокапиллярного эффекта на свободной межфазной границе. Определена зависимость скорости

движения фронта жидкости от параметра испарения для различных чисел безразмерного числа Марангони.

В длинноволновом приближении исследовано влияние зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры на устойчивость движения тонкого слоя испаряющейся полярной пленки при подогреве со стороны твердой подложки. Обнаружено, что термокапиллярный эффект приводит к увеличению скорости движения фронта испаряющейся жидкости по сравнению с задачей, рассмотренной во второй главе. Проведено исследование устойчивости движения фронта жидкости относительно поперечных возмущений и выяснено, что с увеличением безразмерного параметра M происходит дестабилизация устойчивости фронта. В диапазоне малых значений безразмерного параметра испарения, где имеет место неустойчивость относительно поперечных возмущений, эффект Марангони приводит к увеличению области неустойчивости. Впервые было показано, что при увеличении безразмерного числа Марангони происходит понижение устойчивости системы относительно длинноволновой (голдстоуновской) моды. При дальнейшем росте безразмерного числа испарения, когда движение фронта жидкости устойчиво по отношению к любым модам возмущений, наличие эффекта Марангони влечет за собой уменьшение устойчивости движения тонкого слоя полярной жидкости с образованием пальцеобразной структуры поверхности.

Глава 4. Исследование взаимодействия термокапиллярного и инжекционного механизмов неустойчивости слоя слабопроводящей жидкости со свободной деформируемой границей

Изучение проблем электроконвективной неустойчивости движения жидкости и газа связано с многочисленными практическими приложениями в различных областях техники и технологии. Наибольший интерес к этой проблеме обусловлен развитием теории пробоя и предпробойных состояний. Возникновение движения в слое жидкости резко меняет перенос заряда через нее и создает условия пробоя. Математическое моделирование такой задачи приводит к пониманию протекающих физических процессов. В последнее время появились новые технологии для интенсификации тепло- и массообмена в слабопроводящих жидкостях при помощи электрического поля. С одной стороны, электрическое поле создает в жидкости объемную пондеромоторную силу, а с другой стороны, заряды, находящиеся в жидкости, участвуют в конвективном движении, образуя электрические токи конвекции.

Для взаимодействия электрического и гидродинамического полей необходимо наличие объемного заряда. Существуют две модели, описывающие механизм образования в жидкости объемного заряда, участвующего в процессе прохождения тока: модель проводимости и модель подвижности. В первом случае образование свободного заряда происходит в результате процесса диссоциации-рекомбинации, а во втором случае заряд образуется при инжекции через границу. В соответствии с этим по-разному формулируется и закон переноса заряда.

В данной главе диссертации рассматривается инжекционный механизм образования в жидкости свободного заряда. В жидкости с объемным распределением заряда в электрическом поле действует пондеромоторная сила,

подобная силе тяжести. При неоднородном распределении объемного заряда механическое равновесие жидкости может оказаться неустойчивым и возникает электроконвективное течение.

Изучению конвективной неустойчивости изотермического слоя слабопроводящей жидкости, заключенной между двумя плоскими твердыми электродами, при инжекционном механизме формирования объемного заряда посвящен ряд работ [59, 61, 87, 275]. Приведены пороговые значения электрического аналога числа Рэлея для монотонной неустойчивости для двух предельных случаев: сильной и слабой инжекции. В [89, 304] изучалась устойчивость изотермического слоя жидкости со свободной границей, через которую происходит инжекция. Инжектор был расположен на свободной границе. Найдено критическое значение электрического числа Рэлея и соответствующее ему волновое число. В неизотермической жидкости со свободной границей появляется механизм неустойчивости, связанный с термокапиллярным эффектом. Если вдоль свободной границы сформируется градиент температуры, то из-за температурной зависимости коэффициента поверхностного натяжения появляется тангенциальная сила, способная вызвать конвективное движение в жидкости.

Линейная теория термокапиллярной неустойчивости равновесия слоя жидкости с деформируемой границей при вертикальном подогреве была рассмотрена во многих работах [27, 35, 118, 134, 272, 303, 343]. Было показано, что при нагреве, осуществляемом со стороны твердой границы, наиболее опасной является неустойчивость относительно монотонных возмущений. При подогреве со стороны свободной поверхности возможна колебательная неустойчивость. В последние годы появилось достаточно много публикаций, в которых теоретически рассматривались эффекты, происходящие в тонком слое жидкости при испарении. Также имеются экспериментальные работы по испарению воды на слюдяной подложке.

Данная глава посвящена изучению взаимодействия двух названных механизмов неустойчивости. Инжекция заряда производится через свободную деформируемую поверхность неизотермической жидкости, коэффициент поверхностного натяжения которой линейно зависит от температуры.

4.1. Постановка задачи

Рассмотрим плоский горизонтальный слой слабопроводящей вязкой несжимаемой жидкости толщиной h , заключенный между двумя плоскими параллельными электродами, расстояние между которыми равно H (Рис. 4.1). Начало координат находится на нижней твердой поверхности: ось x направлена горизонтально, а ось z – вертикально. Твердая граница имеет температуру $T = \Theta$, а температуру границы раздела двух сред будем считать $T(h) = 0$.

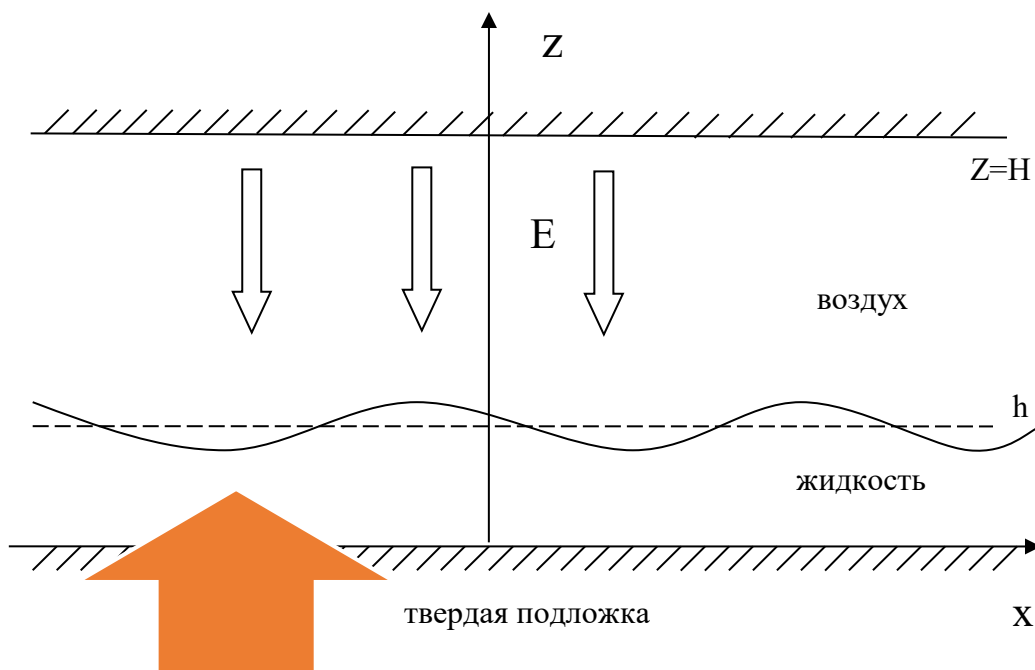


Рис.4.1. Геометрическая форма задачи

Через слой воздуха, который расположен выше жидкости, происходит инжекция заряда в жидкость. Коэффициент поверхностного натяжения границы раздела двух сред линейно зависит от температуры и описывается формулой

$\sigma = \sigma_0 - gT$. Уравнения движения жидкости, переноса тепла и электрического поля в жидкости запишем в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}(\nabla \vec{v}) &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} + \frac{q \vec{E}}{\rho} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \nu \nabla T &= \chi \Delta T \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \text{div} \vec{J} &= 0 \quad \vec{J} = q \vec{v} + qb \vec{E} \\ \vec{E} &= -\nabla \phi \quad \text{div} \varepsilon \vec{E} = q\end{aligned}\tag{4.1}$$

Здесь ν – вектор скорости жидкости; p – превышение давления над гидростатическим; T – температура; E – напряженность электрического поля; ϕ – электрический потенциал; q – плотность свободных зарядов; ρ – плотность жидкости; ν, χ – коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности; ε – диэлектрическая постоянная жидкости; J – плотность потока свободных зарядов; b – подвижность зарядов.

Макроскопическим движением в воздушной прослойке будем пренебрегать, поскольку это движение практически не влияет на перенос заряженных частиц [40, 89] и слабо механически влияет на движение жидкости. В этом приближении для воздушной прослойки достаточно записать уравнения для поля и тока.

$$\text{div} \vec{E} = \frac{q_a}{\varepsilon_a}, \quad \vec{E}_a = -\nabla \phi_a, \quad \vec{J}_a = q_a b_a \vec{E}_a\tag{4.2}$$

Индексом a отмечены величины, относящиеся к воздуху.

4.2. Граничные условия задачи

Граничные условия для системы уравнений (4.1) запишем следующим образом. На инжекторе поддерживается постоянное значение электрического потенциала и выполняется условие для униполярной инжекции [89]:

$$z = H: \quad \phi_a = V_H, \quad E_a = 0 \quad (4.3)$$

Для невозмущенного стационарного состояния границу раздела будем считать изотермической и эквипотенциальной, температуру жидкости и потенциал будем отсчитывать от температуры и потенциала границы раздела. Таким образом, на границе раздела двух сред для основного состояния предполагаются выполненными следующие равенства:

$$z = h: \quad \phi_a = \phi_l = 0, T = 0, \varepsilon_a E_a - \varepsilon_l E_l = 0, J_a = J_l \quad (4.4)$$

Здесь подсимволом l обозначены величины, относящиеся к жидкости. Для системы двух слабопроводящих сред с инжекционным законом проводимости, если на границе раздела отсутствуют специфические механизмы формирования поверхностного заряда, реализуется ситуация, в которой поверхностный заряд равен нулю, что было показано в предыдущем параграфе. Этот факт объясняется тем, что при инжекционном механизме проводимости свободный заряд, создающий компенсационное поле, распределяется по всему диэлектрику. Скачок подвижности на границе двух сред сопровождается скачком в объемной плотности свободного заряда, который компенсирует изменение в подвижности. Нормальная компонента индукции электрического поля оказывается непрерывной. Граничное условие на коллекторе имеет следующий вид:

$$z = 0: \quad \phi_l = -V, \quad T = \Theta \quad (4.5)$$

Температура нижней границы может быть как положительной, так и отрицательной. Система уравнений (4.1) с граничными условиями (4.3–4.5) имеет равновесное решение, соответствующее покоящейся жидкости $v = 0$, с линейным распределением температуры:

$$T_0(z) = \Theta \left(1 - \frac{z}{h} \right)$$

Распределения электрического потенциала и плотности заряда для двух сред имеют следующее решение:

для воздуха

$$\begin{aligned}\phi_{0a}(z) &= \left(\frac{8J_0}{9\varepsilon_a b_a} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[(H-h)^{\frac{3}{2}} - (H-z)^{\frac{3}{2}} \right] \\ q_{0a}(z) &= \left(\frac{\varepsilon_a \cdot J_0}{2b_a \cdot (H-z)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad h \leq z \leq H.\end{aligned}\tag{4.6}$$

для слабопроводящей жидкости

$$\begin{aligned}\phi_{0l}(z) &= -V + \left(\frac{8 \cdot J_0}{9\varepsilon_l b_l} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\left(C^{\frac{3}{2}} - (C-z)^{\frac{3}{2}} \right) \right], \\ q_{0l}(z) &= \left(\frac{\varepsilon_l J_0}{2b_l (C-z)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq z \leq h.\end{aligned}\tag{4.7}$$

Параметр C имеет вид:

$$C = h + \alpha \cdot (H - h), \quad \alpha = \varepsilon_a b_l / \varepsilon_l b_a$$

Плотность тока может быть найдена из условия равенства потенциалов на границе раздела двух сред:

$$V = \left(\frac{8 \cdot J_0}{9\varepsilon_l b_l} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\left(C^{\frac{3}{2}} - (C-h)^{\frac{3}{2}} \right) \right],\tag{4.8}$$

Как показывают расчеты, с увеличением толщины воздушной прослойки величина тока J уменьшается.

4.3. Исследование устойчивости системы

Для исследования устойчивости равновесного состояния слоя жидкости применим метод малых возмущений. В воздушной прослойке, в связи с относительно высокой подвижностью заряда (для системы «воздух – органическая жидкость» $b_l/b_a \leq 10^{-4}$), возмущения заряда и поля можно считать быстро затухающими и при исследовании устойчивости системы не

рассматривать. Пусть v, p, T, ϕ, q – малые возмущения скорости, давления, температуры, потенциала, плотности заряда в жидкости.

Обсудим граничные условия на свободной поверхности жидкости. Считается, что под воздействием возмущений первоначально плоская свободная поверхность может деформироваться:

$$z = h + \xi(x, t)$$

Полагая деформацию малой по сравнению с h , граничные условия с $z = h + \xi$ можно перенести на $z = h$, используя тейлоровское разложение. Нормальная составляющая тензора напряжений будет выглядеть следующим образом:

$$z = h: -p + \rho g \xi + \varepsilon \left(\frac{d\phi_0}{dz} \right) \frac{d\phi}{dz} - \sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (4.9)$$

Отсутствие электрического слагаемого в касательной составляющей тензора напряжений позволяет записать это уравнение в виде

$$z = h: \nu \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (4.10)$$

К этим условиям следует добавить кинематическое соотношение:

$$z = h: v_z = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (4.11)$$

При формулировке граничных условий для возмущений температуры будем предполагать, что теплопроводность жидкости много больше теплопроводности верхней среды, и хотя теплоотдача со свободной поверхности имеется, можно считать, что возмущения температуры в жидкости не меняют теплового потока через воздушную прослойку и свободная граница теплоизолирована для возмущений (число Био равно нулю). Такое условие является наиболее благоприятным для развития термокапиллярной неустойчивости [27]. Таким образом, граничное условие для возмущений температуры запишется в следующем виде:

$$z = h: T' = 0. \quad (4.12)$$

Требование исчезновения возмущений потенциала и напряженности поля на границе с воздушной прослойкой на плоской границе $z = h$ в первом порядке запишутся:

$$\phi(h) + \xi \frac{d\phi_0}{dz} = 0, \quad \phi'(h) + \xi \frac{d^2\phi_0}{dz^2} = 0 \quad (4.13)$$

Граничные условия на твердой изотермической эквипотенциальной границе для скорости, возмущений температуры и потенциала имеют следующий вид:

$$z = 0 : v_z = 0, v'_z = 0, T = 0, \phi = 0. \quad (4.14)$$

В качестве единиц измерения расстояния, времени, скорости, давления, температуры, потенциала, плотности заряда и плотности тока выберем соответственно $h, h^2 / \nu, \chi / h, \rho\chi\nu / h^2, \Theta, U, \varepsilon U / h^2, \varepsilon b U^2 / h^3$.

Будем исследовать устойчивость равновесных распределений относительно малых «нормальных» возмущений:

$$(v, T, \phi, q, \xi) = (v(z), \theta(z), \phi(z), q(z), \xi) \times \exp[-\lambda t + ik] \quad (4.15)$$

здесь λ – комплексный декремент возмущений, а k – волновое число.

Производя линеаризацию уравнений (4.1) по возмущениям, запишем уравнения и граничные условия в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \lambda(v'' - k^2 v) &= v^{IV} - 2k^2 v'' + k^4 v + Ra \cdot k \frac{d\phi_0}{dz} q \\ \theta'' - k^2 \cdot \theta + v &= 0 \\ -\lambda Pj \cdot q + \frac{Pj}{Pr} \frac{dq_0}{dz} v - 2Sq_0 q - \left(\frac{d\phi_0}{dz} q' + \frac{dq_0}{dz} \phi' \right) &= 0 \\ \phi'' - k^2 \phi &= -Sq \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$z=1 : v + \lambda \zeta = 0, \quad \theta' = 0, \quad v'' + k^2 v - Ma \cdot k^2 \cdot (\zeta - \theta) = 0,$$

$$Cr \cdot \left[(3k^2 - \lambda) v' - v''' + Ra k^2 \left(q_0 \phi - \frac{d\phi_0}{dz} \phi' \right) \right] = -k^2 \zeta \cdot (Bo + k^2), \quad (4.17)$$

$$\phi' + \zeta \cdot \frac{d\phi_0}{dz} = 0, \quad q_0 \left(\phi' + \zeta \cdot \frac{d^2\phi_0}{dz^2} \right) + \left(q + \zeta \frac{dq_0}{dz} \right) \frac{d\phi_0}{dz} = 0.$$

$$z=0: \quad v=0, \quad v'=0, \quad \theta=0, \quad \phi=0.$$

Задача содержит шесть перечисленных ниже безразмерных параметров: число Ra , являющееся электрическим аналогом числа Рэлея, число Марангони Ma , число Прандтля Pr , число Бонда Bo , капиллярный параметр Cr , число Pj , описывающее подвижность зарядов:

$$Ra = \frac{\varepsilon_l V}{b_l \rho \nu}, \quad Ma = \frac{g \Theta h}{\rho \nu \chi}, \quad Pr = \frac{\nu}{\chi}, \quad Bo = \frac{g \rho h^2}{\sigma_0}, \quad Cr = \frac{\rho \nu \chi}{\sigma_0 h}, \quad Pj = \frac{\nu}{b_l V} \quad (4.18)$$

Спектральная задача (4.40–4.41) определяет собственные числа λ как функцию волнового числа и параметров задачи. Численное решение дифференциальных уравнений проводилось пошаговым интегрированием методом Рунге-Кутты-Мерсона. Для обеспечения линейной независимости решений была применена процедура ортогонализации частных решений на каждом шаге.

4.4. Анализ решения

Изучим вначале устойчивость состояния (4.16–4.18) относительно монотонных возмущений. В проведенных расчетах была найдена связь между тремя основными параметрами – числами Ma, Ra и волновым числом k – на границе устойчивости при фиксированных остальных параметрах. Определяя минимальное значение Ra_m и k_m для заданного значения числа Ma , мы можем определить влияние термокапиллярного эффекта на электрический механизм неустойчивости. На Рис. 4.2 приведены результаты расчета нескольких нейтральных кривых ($\lambda = 0$) при $H = 2, Cr = 10^{-5}, Bo = 10^{-1}$ двух нижних мод инжекционной неустойчивости и различных значениях числа Марангони. Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют Ma , равным $-50, 0, 50, 75$. Верхние три кривые относятся к возмущениям с двухъярусной системой ячеек. Область неустойчивости расположена выше кривых. Предельный случай $Ma = 0$

соответствует случаю изотермической жидкости, подверженной инъекции со стороны свободной границы. При значении $Cr=0$ (плоская граница) полученные результаты согласуются со значениями, приведенными в работе [305]: $Ra_m^{(1)} = 99, k_m^{(1)} = 4.0$.

С увеличением положительных значений числа Марангони (нагрев со стороны твердой границы) критическое значение электрического аналога числа Рэлея $Ra_m^{(1)}$ первой моды понижается и становится равным нулю при значении $Ma = 80$, что соответствует обычной задаче о возникновении конвекции Марангони. Пороговое значение волнового числа $k_m = 2.0$. При подогреве со стороны свободной границы (отрицательные числа Марангони) происходит повышение порогового значения для первой моды $Ra_m^{(1)}$. Для второго уровня неустойчивости с ростом положительных чисел Марангони происходит повышение минимального значения Ra_m а при отрицательных Ma значение $Ra_m^{(2)}$ понижается.

На Рис. 4.3 приведена карта устойчивости относительно основной моды для двух значений величины тока $J \cong 1.261, 1.116$, соответствующих относительной толщине воздушной прослойки $H = 2$ и 50 .

Изменение формы конвективной ячейки по вертикали с изменением числа Марангони $Ma = 0, -100, -150$ показано на Рис. 4.4. Нечетными цифрами отмечены профили вертикальной компоненты скорости для первой моды неустойчивости, а четными – для второй моды.

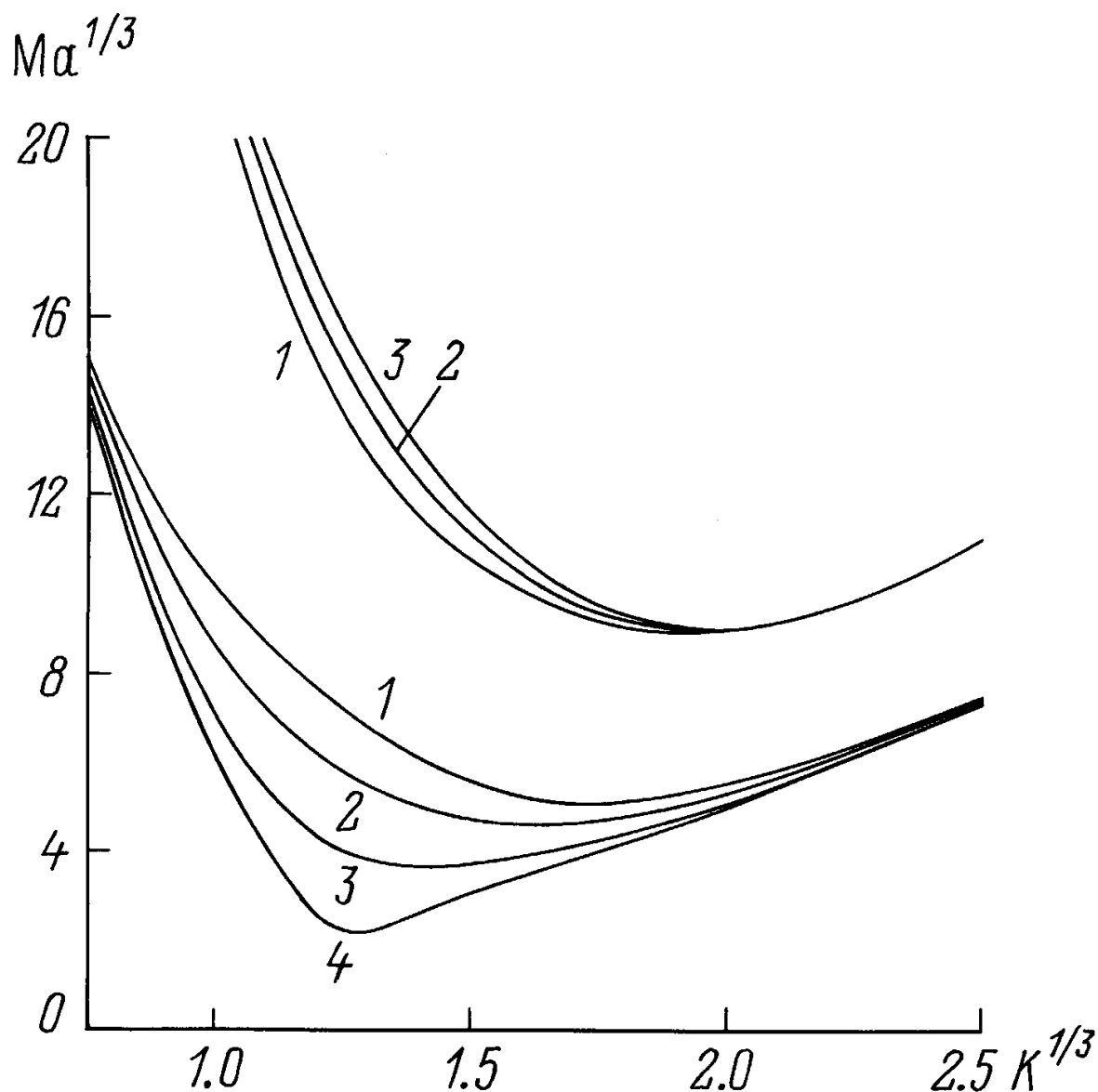


Рис. 4.2. Нейтральные кривые устойчивости для монотонной моды при различных значениях числа Марангони, $Ma = -50, 0, 50, 75$ (кривые 1–4). Область неустойчивости выше кривых.

Как видно, с ростом абсолютного значения числа Ma различия в структуре движения для первой и второй моды исчезают. Термокапиллярная колебательная неустойчивость в слое с деформируемой свободной границей, как было показано в работе [27], может существовать лишь при подогреве со стороны свободной поверхности.

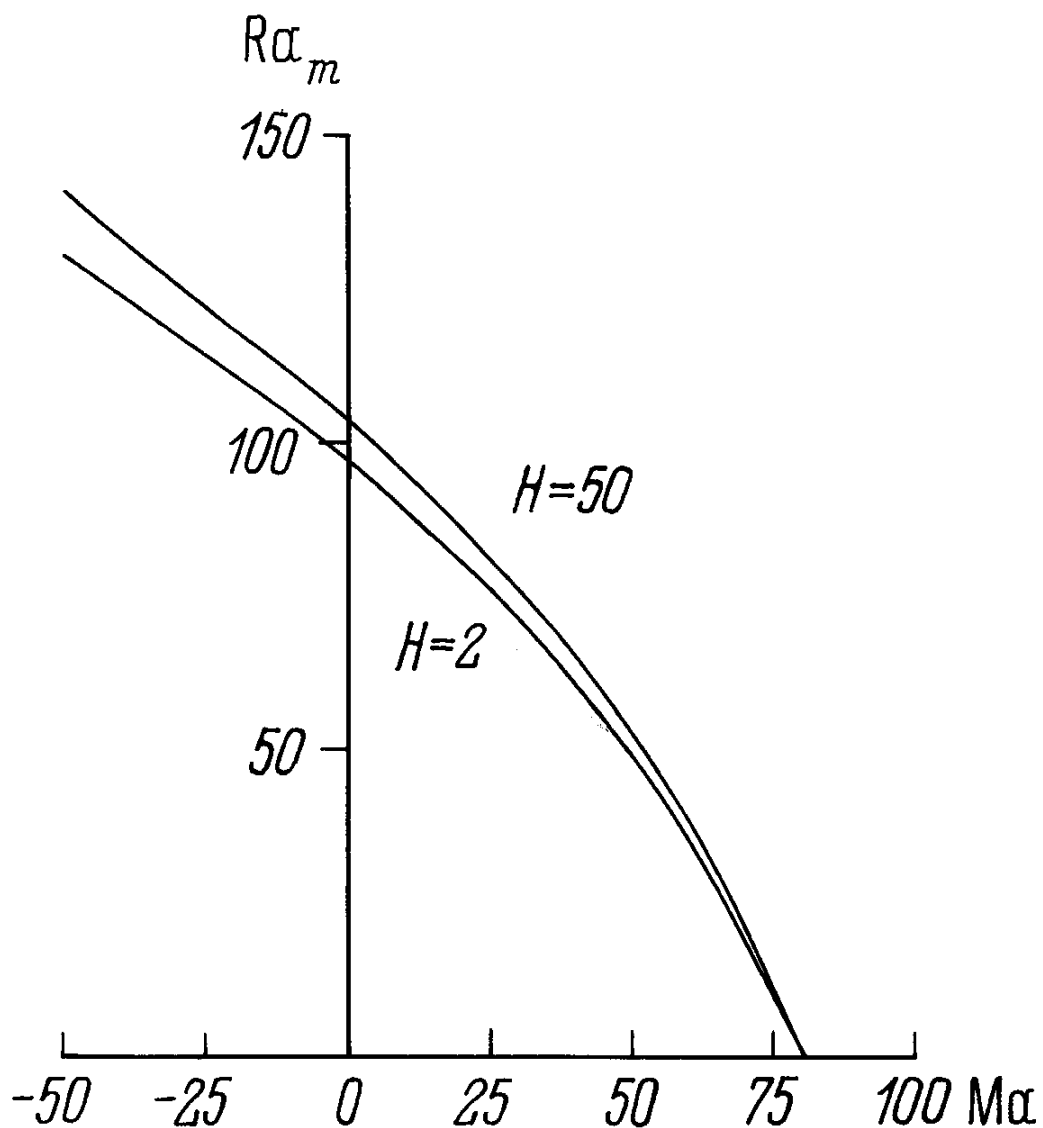


Рис.4.3. Зависимость критического числа Рэлея от числа Марангони для монотонной моды неустойчивости при различной толщине воздушной прослойки $H=2$ и 50 соответственно.

Область неустойчивости выше кривых.

Результаты, представленные на Рис. 4.2, показывают, что при росте по модулю отрицательных значений числа Марангони нейтральная кривая для первой моды неустойчивости поднимается, а для второй опускается. При некотором отрицательном значении числа Марангони ($Ma \cong 120$) они соприкасаются и слой становится неустойчивым по отношению к колебательным возмущениям.

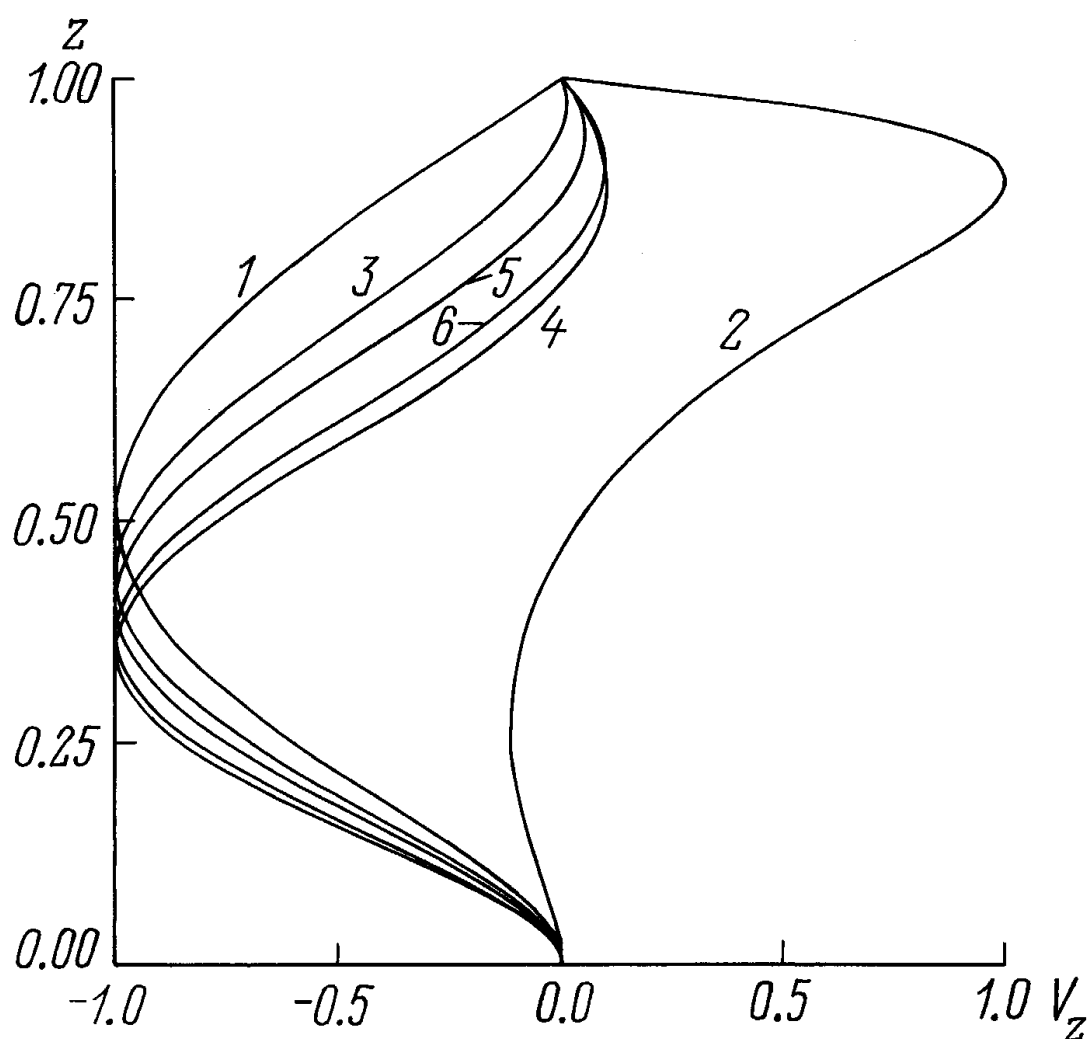


Рис.4.4. Зависимость профиля вертикальной компоненты скорости для двух нижних мод монотонной неустойчивости от координаты z для чисел Марангони $Ma=0$ (кривые 1, 2), $Ma=-100$ (кривые 3, 4), $Ma=-150$ (5, 6) при значении волнового числа $k=4$. Нечетными номерами отмечена нижняя мода, четными – вторая.

При $Cr = 10^{-5}$, $Bo = Pr = Pj = 10^{-1}$ кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют значениям числа Марангони, равным 0, -100, -150, -250. Пунктирной линией обозначена граница устойчивости относительно колебательных возмущений. Для указанных значений параметров колебательная неустойчивость при отсутствии электрического поля наступает при $Ma_m \cong -10^4$ и $k_m \cong 0.1$. Область колебательной неустойчивости возникает в некотором диапазоне волновых

чисел при таких значениях Ma , для которых оказываются равными значения Ra , соответствующие двум разным модам неустойчивости.

Следует отметить, что аналогичный переход от двух уровней монотонной неустойчивости к колебательной наблюдается в случае гравитационной конвективной неустойчивости двухслойной системы несмешивающихся жидкостей, подогреваемой снизу [8]. На Рис. 4.5(b) приведены частоты колебаний ω от волнового числа для нейтральных кривых 3, 4 для Рис. 4.5(a). С увеличением подогрева со стороны свободной границы область колебательной неустойчивости увеличивается, причем это увеличение происходит преимущественно в сторону меньших длин волн. Частота колебательных возмущений возрастает с ростом числа Марангони.

Результаты проведенных расчетов показывают, что взаимодействие электроконвективного, инжекционного и термокапиллярного механизмов неустойчивости при подогреве системы со стороны твердой границы приводит к ее дестабилизации относительно монотонно растущих возмущений. При отрицательных числах Марангони (подогрев со стороны свободной поверхности) происходит повышение устойчивости системы. В дальнейшем при увеличении подогрева со стороны свободной границы критическое число Рэлея для основной монотонной моды неустойчивости и для неустойчивости относительно возмущений с двухъярусной ячейкой сближаются, и при некотором отрицательном значении числа Марангони вместо двух монотонных мод неустойчивости появляется колебательная мода. Частота колебательных возмущений возрастает от нуля с ростом числа Марангони. При увеличении расстояния между электродами (увеличении воздушной прослойки) для фиксированной разности потенциалов наблюдается повышение пороговых значений числа Рэлея.

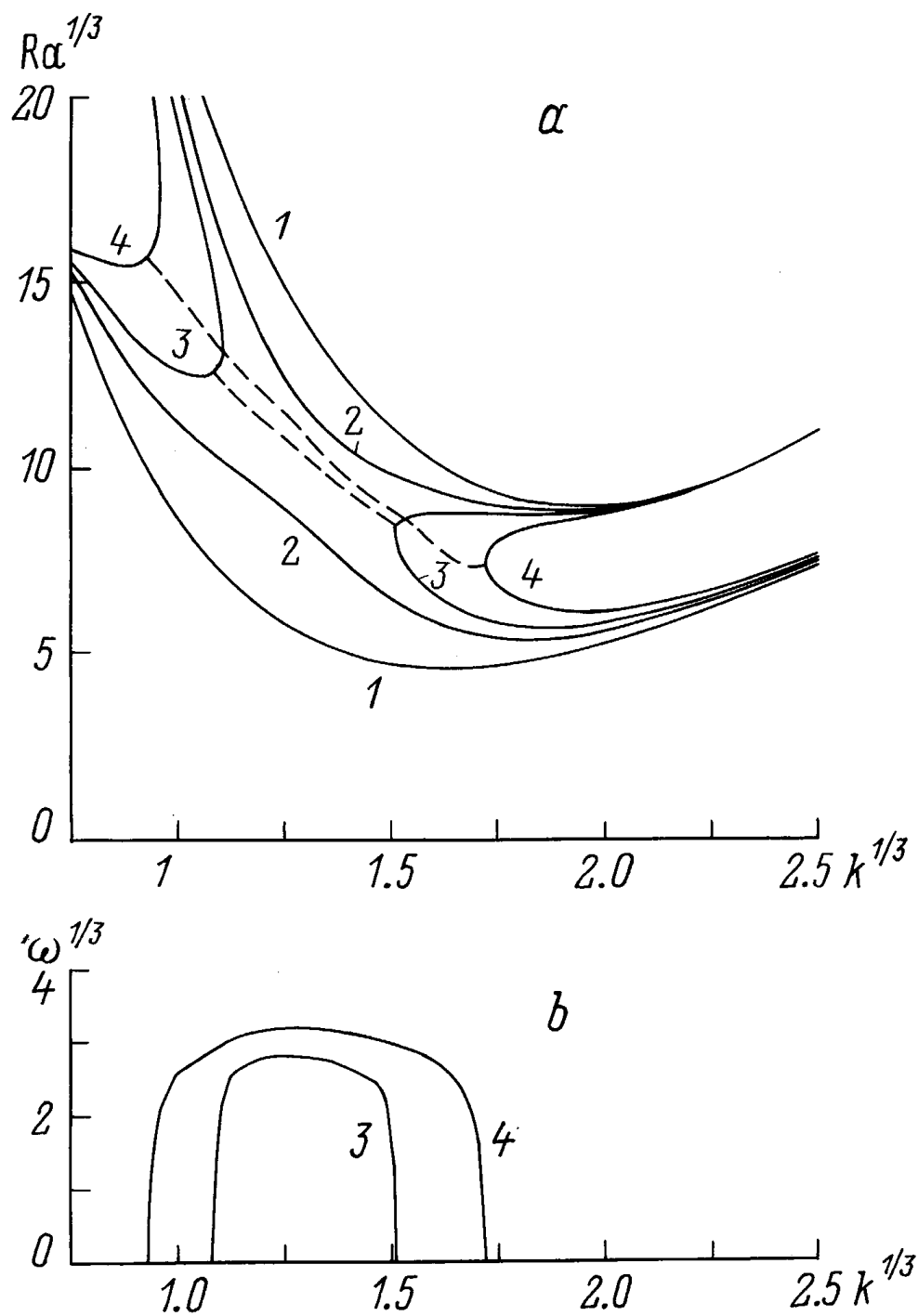


Рис.4.5. Нейтральные кривые устойчивости для двух нижних уровней монотонной и колебательной моды (а) и дисперсионное соотношение $\omega(k)$ (b) при различных значениях числа Марангони: $Ma=0, -100, -150, -250$ (кривые 1–4 соответственно). Пунктирная линия – граница колебательной моды неустойчивости.

Основные выводы по Главе 4.

В четвертой главе проведено исследование конвекции Бенара-Марангони для слабопроводящей полярной жидкости в присутствии электрического поля и связанного с этим электрического типа неустойчивости. Рассматривается инжекционный механизм образования объемного свободного заряда. Свободная граница считается деформируемой. Для монотонной и колебательной моды неустойчивости получены характерные нейтральные кривые и дисперсионные соотношения для различных значений электрического аналога числа Рэлея. Вопрос об образовании на свободной границе поверхностного свободного заряда для такой однослойной системы остается открытым.

Рассматривается двухслойная система «воздух – слабопроводящая жидкость». Представление значений диэлектрической проницаемости и подвижности обеих сред в виде непрерывной функции позволяет получить систему уравнений для однослойной системы с непрерывно меняющимися физическими свойствами.

Рассмотрена электроконвективная неустойчивость неизотермического слоя слабопроводящей полярной жидкости со свободной границей, через которую производится инжекция заряда и коэффициент поверхностного натяжения на которой линейно зависит от температуры. При расчете невозмущенного стационарного распределения заряда и поля предполагается, что инжектор отделен от жидкости воздушной прослойкой конечной толщины. При анализе устойчивости системы, однако, считается, что движение в воздушной прослойке не влияет на движение в жидкой фазе и возмущения электрического поля и заряда в воздушной прослойке быстро затухают в связи с ее относительно высокой проводимостью. Проведен линейный анализ устойчивости данной системы относительно «нормальных» возмущений. Получена система уравнений и граничных условий относительно возмущений соответствующих физических величин. Численное исследование задачи проводилось пошаговым интегрированием методом Рунге-Кутты-Мерсона.

Установлено, что при положительных значениях числа Марангони (подогрев со стороны твердой границы) из-за термокапиллярного эффекта происходит дестабилизация механического равновесия. При отрицательных числах Марангони порог устойчивости повышается. С уменьшением тока через слой пороговое значение электрического числа Рэлея повышается. При подогреве со стороны свободной границы (отрицательные числа Марангони) возможно появление колебательной моды неустойчивости.

Глава 5. Солютокапиллярный эффект в тонких пленках полярной жидкости с растворенным поверхностно-активным веществом

Задачи, где необходимо учитывать влияние поверхностно-активных веществ на эволюцию поведения и процессы структурообразования в тонком слое жидкости имеют практическое значение для многочисленных промышленных, биомедицинских и повседневных устройств и приложений. Поверхностно-активное вещество – это такое вещество, которое изменяет поверхностное натяжение жидкости, в которой оно растворено. Особенностью и сложностью описания такой системы является тот факт, что зачастую сурфактанты, двигаясь вдоль поверхности, частично растворяются в жидкости и проникают в объем.

Такое специфическое движение на свободной поверхности приводится в действие присутствием градиента концентрации поверхностно-активных веществ, который, в свою очередь, из-за зависимости поверхностного натяжения от концентрации сурфактанта в результате приводит к возникновению градиента поверхностного натяжения (эффект Марангони). Капиллярные явления, связанные с поверхностно-активными веществами, уже описывались в литературе [2, 4, 16, 323, 367]. В работе [367] теоретически рассмотрена задача об эффекте Марангони в присутствии ПАВ без учета влияния расклинивающего давления. При достаточно больших концентрациях растворимого сурфактанта эти частицы, проникая в объем жидкости, образуют особые структуры, «мицеллы», обладающие некоторыми интересными особенностями, а при адсорбции на подложку они делают ее химически неоднородной.

Для исследования влияния концентрационного эффекта Марангони на динамику движения и процессы структурообразования на поверхности испаряющейся тонкой полярной пленки нам необходимо сделать несколько предположений. Первое: будем считать, что концентрация растворимого

сурфактанта существенно ниже критической концентрации мицеллообразования.

Далее необходимо определить кинетику процессов диффузии и адсорбции-десорбции. В работе [6] показано, что для полного описания процессов переноса ПАВ нужно соотнести характерные времена диффузии и адсорбции-десорбции, и приведены три возможных случая кинетики:

- 1) диффузионная кинетика, при которой характерное диффузионное время много больше времени установления равновесия за счет адсорбции-десорбции. При этом поверхностная концентрация прямо пропорциональна объемной;
- 2) адсорбционная кинетика, когда процессы диффузии происходят гораздо быстрее адсорбционных процессов. Здесь для связи поверхностной и объемной концентраций используется уравнение Ленгмюра, согласно которому поверхностная концентрация изменяется со временем;
- 3) смешанная кинетика, в которой невозможно определить, какой процесс обмена ПАВ преобладает: диффузия или адсорбция/десорбция. Тогда и поверхностная, и объемная концентрация зависят от времени и связаны между собой уравнением Ленгмюра.

В нашей задаче будет исследоваться случай адсорбционной кинетики.

Все вышеперечисленные предположения говорят о том, что для описания концентрационно-капиллярного механизма неустойчивости слоя жидкости необходимо учитывать не только физические, но и химические свойства жидкости и сурфактанта для объяснения довольно большого количества эффектов.

5.1. Постановка задачи

Рассматривается движение тонкого горизонтального слоя полярной вязкой несжимаемой жидкости (например, воды) с начальной толщиной h_0 , который заключен между твердой подложкой и паром соответствующей жидкости, также будем считать, что начальная концентрация сурфактанта в объеме и на

поверхности пленки есть c_0 и Γ_0 соответственно. Декартовы координаты определим следующим образом. Ось x направим вдоль слоя, а ось z перпендикулярно (Рис. 5.1). Жидкость может испаряться в парообразную среду.

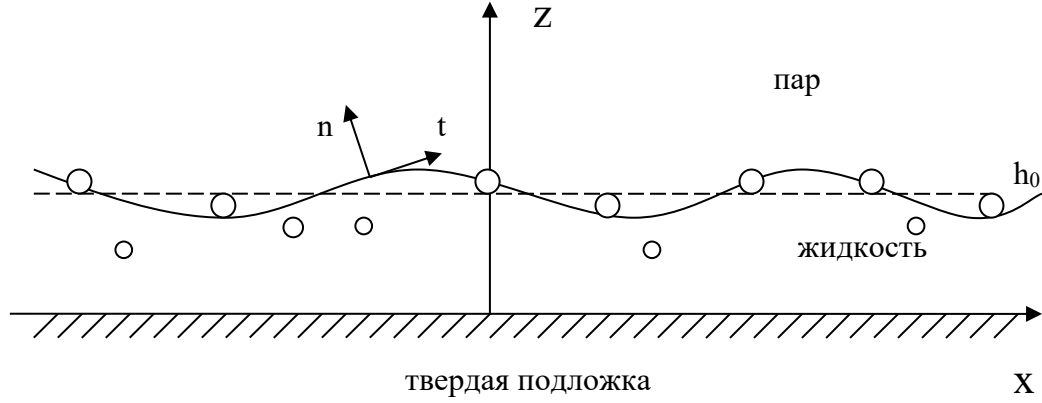


Рис.5.1. Геометрическая форма задачи

Предполагается, что на свободной поверхности имеет место линейная зависимость коэффициента поверхностного натяжения от поверхностной концентрации сурфактанта $\sigma = \sigma_0 - \mathcal{A}\Gamma$, здесь σ_0 – коэффициент поверхностного натяжения при отсутствии сурфактанта, а константа $\mathcal{A}$ определяется как «активность» сурфактанта. Вектор скорости жидкости имеет две компоненты $\mathbf{v} = (u, w)$, где u и w – проекции на оси x и z соответственно. В дальнейшем, ввиду малой толщины слоя, будем пренебрегать гравитационными эффектами.

Уравнения движения пленки, а также конвективно-диффузионное уравнение для сурфактанта в объеме имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho(\partial_t u + u\partial_x u + w\partial_z u) &= -\partial_x(p + \varphi) + \mu\nabla^2 u, \\ \rho(\partial_t w + u\partial_x w + w\partial_z w) &= -\partial_z(p + \varphi) + \mu\nabla^2 w, \\ \rho(\partial_t \tilde{n} + u\partial_x \tilde{n} + w\partial_z \tilde{n}) &= D_b \nabla^2 \tilde{n}, \\ \partial_x u + \partial_z w &= 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь ρ – плотность жидкости, p – давление, φ – дополнительный потенциал энергии слоя, возникающий в результате межмолекулярного взаимодействия, μ – динамическая вязкость, c – объемная концентрация сурфактанта в жидкости и D_b есть коэффициент диффузии сурфактанта. Символом ∂_i обозначается производная по соответствующей координате, также введено обозначение $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial z^2$.

5.2. Граничные условия задачи

Граничные условия возьмем из главы 3: непротекательная и непроницаемая твердая гладкая граница снизу, свободная деформируемая граница между жидкостью и паром сверху:

$$z = 0: \quad u = w = \partial_z c = 0; \quad (5.1)$$

$$z = h(x, t):$$

Кинематическое условие без испарения:

$$\partial_t h + u \partial_x h = w \quad (5.2)$$

и для случая с учетом испарения

$$\partial_t h + u \partial_x h = w - \gamma E$$

где E – скорость испарения жидкости.

Нормальная составляющая тензора натяжения межфазной поверхности «жидкость – пар»:

$$p + \frac{\overline{Ca} \partial_x^2 h}{(1 + \varepsilon^2 (\partial_x h)^2)^{3/2}} + \frac{2\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2 (\partial_x h)^2} \left[\partial_x u (1 + \varepsilon^2 (\partial_x h)^2) + \partial_x h (\varepsilon^2 \partial_x w + \partial_z u) \right] = 0 \quad (5.3)$$

Тангенциальная составляющая тензора натяжения межфазной поверхности «жидкость – пар»:

$$(\varepsilon^2 \partial_x w + \partial_z u) (1 - \varepsilon^2 (\partial_x h)^2) - 4\varepsilon^2 \partial_x u \partial_x h - (1 + \varepsilon^2 (\partial_x h)^2)^{1/2} \partial_x \sigma = 0 \quad (5.4)$$

Перенос ПАВ вдоль межфазной поверхности описывается уравнением [305]:

$$\partial_t \Gamma + \nabla_s \cdot (\vec{v}_s \Gamma) + H \Gamma (\vec{v} \cdot \vec{n}) = D_s \nabla_s^2 \Gamma + J \quad (5.5)$$

где D_s – коэффициент поверхностной диффузии, H – средняя кривизна поверхности, J – слагаемое обмена ПАВ между поверхностью и объемом жидкости. Для случая линейной кинетики обмена ПАВ между объемом и поверхностью можно использовать уравнение, предложенное в [368]:

$$J = c(\vec{v} \cdot \vec{v}_s) \cdot \vec{n} - D_b \nabla c \cdot \vec{n} = k_1 c - k_2 \Gamma \quad (5.6)$$

где k_1 и k_2 – постоянные величины кинетического процесса адсорбции-десорбции.

5.3. Уравнения для концентрации

Введем масштабы задачи. Баланс между градиентами капиллярного давления и вязкими силами в пленках определяет масштаб горизонтальных размеров:

$$\varepsilon = \frac{h_0}{L} = \sigma_0 \frac{h_0}{L^3} = \mu \frac{U_0}{h_0^2} = \left(\frac{9 \Gamma_0}{\sigma_0} \right)^{1/2} \quad (5.7)$$

В данной задаче, используя результаты работы [10], будем использовать предположение о быстрой кинетике для обмена сурфактанта между поверхностью и объемом, что позволяет определить связь между поверхностной и объемной концентрациями сурфактанта в форме:

$$\Gamma = \frac{k_1}{k_2} c_s,$$

где c_s есть приповерхностная объемная концентрация. Таким образом, предположение о линейной кинетике процесса адсорбции-десорбции сурфактанта приводит к линейному распределению концентрации, которое существует в пределе разбавленных растворов для сурфактантов.

В качестве масштаба для безразмерного значения поверхностного натяжения возьмем значение поверхностного натяжения чистой жидкости без сурфактанта c_0 . Тогда в безразмерном виде зависимость поверхностного натяжения от концентрации приобретает вид:

$$\sigma = 1 - Ma_c \cdot \Gamma,$$

здесь $Ma_{\tilde{n}} = \mathcal{G} \cdot s_0 / \sigma_0$ определим как концентрационный аналог числа Марангони, описывающий связь между коэффициентом поверхностного натяжения и поверхностной концентрацией.

Другие размеры возьмем из главы 2:

$$u = U_0 u'$$

$$w = \varepsilon U_0 w'$$

$$t = \frac{h_0}{\varepsilon U_0} t'$$

Запишем уравнения для объемной и поверхностной концентраций, используя соответствующие масштабы, в безразмерном виде. Для уравнения объемной концентрации это будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{U_0 \varepsilon C_0}{h_0} \partial_t c + \frac{U_0 \varepsilon C_0}{h_0} u \partial_x c + \frac{\varepsilon U_0 C_0}{h_0} w \partial_z c &= D_b \frac{C_0}{h_0^2} (\varepsilon^2 \partial_x^2 c + \partial_z^2 c) \\ \partial_t c + u \partial_x c + w \partial_z c &= \frac{D_b \varepsilon}{U_0 h_0} \left(\partial_x^2 c + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_z^2 c \right) = \frac{1}{Pe_b} \left(\partial_x^2 c + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_z^2 c \right) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Перенос ПАВ вдоль межфазной границы в безразмерной форме имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon U_0 \Gamma_0}{h_0} \partial_t \Gamma + \frac{\varepsilon \Gamma_0 U_0}{h_0} \nabla_s \cdot (\vec{v}_s \Gamma) + [\varepsilon^2 N \Gamma (\vec{v} \cdot \vec{n})] &= \frac{D_s \varepsilon^2 \Gamma_0}{h_0^2} \nabla_s^2 \Gamma + k_1 C_0 c - k_2 \Gamma_0 \Gamma \\ \partial_t \Gamma + \nabla_s \cdot (\vec{v} \Gamma) + [\varepsilon^2 H \Gamma (\vec{v} \cdot \vec{n})] &= \frac{D_s \varepsilon^2}{h_0^2} \nabla_s^2 \Gamma + \frac{k_1 C_0 h}{U_0 \varepsilon \Gamma_0} c - k_2 \frac{h_0}{U_0 \varepsilon} \Gamma \\ \partial_t \Gamma + \nabla_s \cdot (\vec{v} \Gamma) + \varepsilon^2 H \Gamma (\vec{v} \cdot \vec{n}) &= \frac{1}{Pe_s} \nabla_s^2 \Gamma + K(c - \Gamma) \end{aligned} \quad (5.9)$$

где $Pe = \frac{U_0 L}{D}$ – число Пекле (нижние индексы b и s означают объемное и поверхностное соответственно), $K = \frac{k_2 L}{U_0}$ – коэффициент десорбции ПАВ.

Обмен ПАВ между поверхностью и объемом жидкости (уравнение адсорбции-десорбции):

$$c(\vec{v} - \vec{v}_s) \cdot \vec{n} - D_b \nabla c \cdot \vec{n} = k_1 c - k_2 \Gamma \quad (5.10)$$

В этом уравнении применим кинематическое условие (5.2) без испарения:

$$(\vec{v} - \vec{v}_s) \cdot \vec{n} = 0 \quad (5.11)$$

Для сурфактанта мы не применяем условия испарения, поскольку в большинстве случаев молекулы ПАВ намного крупнее молекул растворителя, а значит, требуется гораздо больше энергии для их испарения. Следовательно, можно считать, что скорость испарения ПАВ равна нулю по сравнению со скоростью испарения растворителя.

Подставим уравнение (5.11) в (5.10):

$$-\frac{D_b}{\gamma} (\partial_z c - \partial_x h \partial_x c) = k_1 c - k_2 \Gamma$$

или в безразмерном виде

$$\frac{-D_b C_0 \varepsilon^2}{h_0 \sqrt{1 + \varepsilon^2 (\partial_x h)^2}} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \partial_z c - \partial_x h \partial_x c \right) = k_1 C_0 (c - \Gamma)$$

Умножим последнее равенство на $Lk_2/U_0 C_0 k_1$ и получим уравнение:

$$\frac{\partial_x h \partial_x c - \varepsilon^{-2} \partial_z c}{Pe_b \beta \sqrt{1 + \varepsilon^2 (\partial_x h)^2}} = K (c - \Gamma) \quad (5.12)$$

где $\beta = \frac{k_1}{k_2 h_0}$ – безразмерный коэффициент распределения ПАВ, $Pe_b = \frac{LU_0}{D_b}$ –

объемное число Пекле, $K = \frac{k_2 L}{U_0}$ – уже встречавшийся ранее коэффициент

десорбции ПАВ.

5.4. Длинноволновое приближение. Уравнения эволюции толщины пленки и концентрации сурфактанта

Так же, как и в третьей главе, будем искать нужные нам величины в виде разложений их в ряд по малому параметру ε . Разложение величины объемной концентрации сурфактанта будем проводить так же, как и для всех остальных физических величин, в ряд по малому значению параметра ε :

$$\begin{aligned}
u &= u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \\
w &= w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots \\
p &= p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots \\
c &= c_0 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \dots
\end{aligned}$$

В нулевом порядке получим из уравнения (5.8), что

$$\partial_z^2 c_0 = 0 \quad (5.13)$$

Учитывая граничные условия непроницаемости твердой подложки, будем считать объемную концентрацию в нулевом приближении равномерно распределенной по толщине пленки: $c_0 = c_0(x, t)$. В первом порядке получим из того же уравнения (5.8) следующее:

$$\partial_t c_0 + u \partial_x c_0 - \frac{1}{Pe_b} \partial_x^2 c_0 = \frac{\partial_z^2 c_1}{Pe_b} \quad (5.14)$$

Проинтегрируем это уравнение по z от 0 до $h(x, t)$:

$$\frac{1}{Pe_b} \partial_z c_1 = h \partial_t c_0 + \partial_x c_0 \int_0^h u dz - \frac{h}{Pe_b} \partial_x^2 c_0 \quad (5.15)$$

Повторим эти же операции с уравнением (5.9), не забыв применить уравнение (5.12) для обмена ПАВ между поверхностью и объемом жидкости:

$$\partial_t \Gamma + u \partial_x \Gamma = \frac{1}{Pe_s} \partial_x^2 \Gamma + \frac{1}{\beta Pe_b} (\partial_x h \partial_x c_0 - \partial_z c_1) \quad (5.16)$$

Из уравнения (5.15) возьмем $\partial_z c_1 / Pe_b$ и подставим в уравнение (5.16), умноженное на β :

$$\beta \partial_t \Gamma + \beta u \partial_x \Gamma = \frac{\beta}{Pe_s} \partial_x^2 \Gamma + \frac{1}{\beta Pe_b} \partial_x (h \partial_x c_0) - h \partial_t c_0 - \partial_x c_0 \int_0^h u dz \quad (5.17)$$

Используя предположение, выдвинутое в работе [349], основанное на экспериментальных данных, рассмотрим случай быстрой кинетики обмена ПАВ между поверхностью и объемом жидкости:

$$c_0 = \Gamma \quad (5.18)$$

Так мы получим уравнение для объемной концентрации ПАВ:

$$\begin{aligned} \beta \partial_t c_0 + \beta u \partial_x c_0 &= \frac{\beta}{Pe_s} \partial_x^2 c_0 + \frac{1}{Pe_b} \partial_x (h \partial_x c_0) - h \partial_t c_0 - \partial_x c_0 \int_0^h u dz \\ (\beta + h) \partial_t c_0 &= -\partial_x c_0 \left(\beta u + \int_0^h u dz \right) + \frac{\beta}{Pe_s} \partial_x^2 c_0 + \frac{1}{Pe_b} \partial_x (h \partial_x c_0) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Значения интеграла и горизонтальной компоненты скорости на поверхности возьмем из главы 3:

$$\partial_x (p + \varphi) = \partial_z^2 u$$

дважды проинтегрировав его по z :

$$u = \partial_x (p + \varphi) \frac{z^2}{2} + I_1 z + I_2.$$

где I_1 и I_2 – константы интегрирования. Для поиска этих констант воспользуемся граничными условиями (3.37) и (3.40) из главы 3:

$$\begin{aligned} \text{при } z=0 \quad u &= 0 \\ \text{при } z=h \quad \partial_z u &= \partial_x \sigma \end{aligned}$$

Однако для этого нам нужно найти градиент поверхностного натяжения. Нам известно, что поверхностное натяжение связано с поверхностной концентрацией сурфактанта в виде

$$\sigma = 1 - Ma_c \cdot \Gamma.$$

Найдем первую и вторую пространственные производные поверхностного натяжения:

$$\partial_x \sigma = -Ma_c \partial_x \Gamma = -Ma_c \partial_x c_0; \quad \partial_x^2 \sigma = -Ma_c \partial_x^2 \Gamma = -Ma_c \partial_x^2 c_0$$

Тогда

$$\text{при } z=h \quad \partial_z u = -Ma_c c_{0x} \quad (5.20)$$

Применим граничные условия (3.33) и (3.39) к уравнению (3.32):

$$\begin{aligned}
I_2 &= 0; \\
\partial_z u &= \partial_x (p + \varphi)h + I_1 = -Ma_c \Gamma_x \Rightarrow I_1 = -\partial_x (p + \varphi)h - Ma_c c_{0x} \\
u &= \partial_x (p + \varphi) \frac{z^2}{2} - (\partial_x (p + \varphi)h + Ma_c c_{0x})z = \\
&= \partial_x (p + \varphi) \left(\frac{z^2}{2} - hz \right) - Ma_c c_{0x} z
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Подставим полученное уравнение в (5.19):

$$\begin{aligned}
\int_0^h u dz &= \partial_x (p + \varphi) \left(\frac{h^3}{6} - \frac{h^3}{2} \right) - Ma_c c_{0x} \frac{h^2}{2} = -\partial_x (p + \varphi) \frac{h^3}{3} - Ma_c c_{0x} \frac{h^2}{2} \\
\partial_x \left(\int_0^h u dz \right) &= -\partial_x \left(\partial_x (p + \varphi) \frac{h^3}{3} \right) - Ma_c \partial_x \left(c_{0x} \frac{h^2}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$(\beta + h)c_{0t} = c_{0x} \left(h^2 \partial_x (p + \varphi) \left(\frac{\beta}{2} + \frac{h}{3} \right) + Ma_c c_{0x} h \left(\beta + \frac{h}{2} \right) \right) + \frac{\beta c_{0xx}}{Pe_s} + \frac{\partial_x (h c_{0x})}{Pe_b}$$

Используя соотношения, полученные в третьей главе, можно переписать значение $(p + \varphi)$:

$$p + \varphi = -\overline{Ca} h_{xx} + \varphi$$

Таким образом, на основе математического метода длинноволнового приближения было получено уравнение эволюции концентрации ПАВ:

$$\begin{aligned}
(\beta + h)\partial_t c_0 &= h^2 \partial_x c_0 \cdot \partial_x \left(-\overline{Ca} \partial_x^2 h + \phi \right) \left(\frac{\beta}{2} + \frac{h}{3} \right) + \\
&+ Ma_c (\partial_x c_0)^2 \cdot h \left(\beta + \frac{h}{2} \right) + \frac{\beta \partial_x^2 c_0}{Pe_s} + \frac{\partial_x (h \partial_x c_0)}{Pe_b}
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Кроме эволюционного уравнения поверхностной концентрации, нам необходимо уравнение эволюции самой жидкости, а точнее, профиля пленки. Его получим, подставив выражение интеграла скорости (5.22) в уравнение неразрывности (3.42), учитывая значение $(p + \varphi)$, удастся получить эволюционное уравнение, описывающее поведение толщины слоя тонкой

пленки испаряющейся полярной жидкости при наличии на свободной поверхности концентрационного эффекта Марангони:

$$\partial_t h - \partial_x \left[\frac{h^3}{3} \partial_x \left(-Ca \partial_x^2 h + \varphi \right) \right] - Ma_c \partial_x \left(\partial_x c_0 \frac{h^2}{2} \right) = -E \quad (5.23)$$

Здесь E есть величина испарения с поверхности «жидкость – пар». Чтобы учесть полярные свойства жидкости, обратимся к работе [281] и запишем потенциал взаимодействия жидкости с подложкой как $\varphi = d\Phi/dh$, где Φ есть свободная энергия межмолекулярного взаимодействия поверхностей «жидкость – твердое тело» и «жидкость – пар», которая записывается следующим образом:

$$\Phi(h) = -\frac{A}{12\pi h^2} + S^P \cdot \exp\left(\frac{d_0 - h}{l_0}\right) \quad (5.24)$$

где d_0 – радиус межмолекулярного взаимодействия и l_0 – значение длины корреляционного взаимодействия. Параметр S^P есть полярная составляющая коэффициента растекания. Воспользовавшись результатами [299], будем считать введенный нами потенциал φ как химический потенциал взаимодействия ϕ_l «жидкость – твердое тело». Как видно из (5.24), химический потенциал представляет собой немонотонную функцию от толщины слоя.

Следуя далее работе [326], будем считать, что величина испарения E пропорциональна разности химических потенциалов жидкости и пара:

$$E = \psi(\phi_l - \phi_v) \quad (5.25)$$

здесь ϕ_v – химический потенциал поверхности «жидкость – пар», ψ – параметр, характеризующий интенсивность испарения (данный параметр может быть вычислен из кинетической теории газа или получен экспериментальным путем).

Используя результаты [235], определим толщину слоя h_0 следующим образом:

$h_0 = \sqrt[3]{A/(6\pi S^{PN})}$, где $S^{PN} = S^P/l_0 \cdot \exp[d_0/l_0]$. Значения всех размерных параметров данной задачи определим так же, как и во второй главе. Тогда

окончательная система эволюционных уравнений в безразмерном виде приобретает форму:

$$\begin{aligned} \partial_t h = & -Ma_c \partial_x \left(\frac{h^2}{2} \partial_x c_0 \right) + \partial_x \left(h^3 \partial_x \left(-\partial_x^2 h + \left[\frac{1}{h^3} - \exp(-\chi h) \right] \right) \right) - \\ & - \Omega \cdot \left(-\partial_x^2 h + \left[\frac{1}{h^3} - \exp(-\chi h) \right] - S \right) \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} (\beta + h) \partial_t c_0 = & \frac{\beta}{Pe_s} \partial_x^2 c_0 + \frac{1}{Pe_b} \partial_x (h \partial_x c_0) - Ma_c (\partial_x c_0)^2 \left(\beta \cdot h + \frac{h^2}{2} \right) - \\ & - \left(h^2 \left(\frac{\beta}{2} + h \right) \right) \cdot \partial_x c_0 \partial_x \left(-\partial_x^2 h + \left[\frac{1}{h^3} - \exp(-\chi h) \right] \right) \end{aligned}$$

здесь введены дополнительные безразмерные параметры:

$$\Omega = \frac{3\psi\mu\sigma}{\rho S^{PN} h_0^2}, \quad S = \frac{\rho\mu_v}{S^{PN}}, \quad \chi = \frac{h_0}{l_0} \quad (5.27)$$

Данные параметры характеризуют уровень испарения, химический потенциал пара и корреляционную длину соответственно.

5.5. Решение задачи

5.5.1. Построение системы конечно-разностных уравнений

Чтобы численно решить данную задачу, воспользуемся схемой Кранка-Николсон, но теперь это будет сложнее, поскольку мы имеем два связанных уравнения относительно двух величин: толщины пленки и концентрации ПАВ. Для удобства обозначения в этой главе вместо переменной $\tilde{h}_0$ будем использовать эквивалент Γ , так как при процедуре дискретизации по времени и пространству необходимо правильно учитывать подстрочные и надстрочные символы.

$$\begin{aligned} \frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} &= \frac{N^n + N^{n+1}}{2} \\ \frac{\Gamma^{n+1} - \Gamma^n}{\Delta t} &= \frac{\Xi^n + \Xi^{n+1}}{2} \end{aligned}$$

Будем действовать подобно тому, как мы это делали во второй главе, разлагая функции N и Ξ в ряд по малому параметру Δt :

$$\begin{aligned} \frac{2h^{n+1}}{\Delta t} - (N_0 h^{n+1} + N_1 h_x^{n+1} + N_2 h_{xx}^{n+1} + N_3 h_{xxx}^{n+1} + N_4 h_{xxxx}^{n+1}) = \\ = \frac{2h^n}{\Delta t} + 2N^n - (N_0 h^n + N_1 h_x^n + N_2 h_{xx}^n + N_3 h_{xxx}^n + N_4 h_{xxxx}^n) = F_i^n \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\Gamma^{n+1}}{\Delta t} - (\Xi_0 \Gamma^{n+1} + \Xi_1 \Gamma_x^{n+1} + \Xi_2 \Gamma_{xx}^{n+1}) = \frac{2\Gamma^n}{\Delta t} + 2\Xi^n - \\ - (\Xi_0 \Gamma^n + \Xi_1 \Gamma_x^n + \Xi_2 \Gamma_{xx}^n) = G_i^n \end{aligned} \quad (5.29)$$

Для дальнейшего приведения данных уравнений к конечно-разностному виду по схеме Кранка-Николсон нам понадобятся производные функций N и Ξ :

$$\begin{aligned} N &= Ma_c \left(\Gamma_{xx} \frac{h^2}{2} + \Gamma_x h h_x \right) - \frac{1}{3} h^3 h_{xxxx} - h^2 h_x h_{xxx} - \\ &- h_{xx} \left(\frac{1}{h} - \frac{\chi h^3}{3} e^{-\chi h} \right) + h_x^2 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{\chi h^2}{3} e^{-\chi h} (3 - \chi h) \right) + \\ &+ \Omega \left(h_{xx} - \frac{1}{h^3} + e^{-\chi h} + S \right) \\ N_0 &= \frac{\partial N}{\partial h} = -h^2 h_{xxxx} - 2h h_x h_{xxx} + h_{xx} \left(-\frac{1}{h^2} - \frac{\chi h^2}{3} e^{-\chi h} (3 - \chi h) \right) + \\ &+ h_x^2 \left(\frac{2}{h^3} - \frac{\chi h}{3} e^{-\chi h} (6 - 6\chi h + \chi^2 h^2) \right) + Ma_c \Gamma_x (h \Gamma_{xx} + \Gamma_x h_x) + \\ &+ \Omega \left(\frac{3}{h^4} - \chi e^{-\chi h} \right) \\ N_1 &= \frac{\partial N}{\partial h_x} = Ma_c \Gamma_x h - \overline{Ca} h^2 h_{xxx} + 2h_x \left(\frac{1}{h^2} + \frac{\chi h^2}{3} (3 - \chi h) e^{-\chi h} \right) \\ N_2 &= \frac{\partial N}{\partial h_{xx}} = -\frac{1}{h} + \frac{\chi h^3}{3} e^{-\chi h} + \Omega \\ N_3 &= \frac{\partial N}{\partial h_{xxx}} = -h^2 h_x \end{aligned}$$

$$N_4 = \frac{\partial N}{\partial h_{xxx}} = -\frac{h^3}{3}$$

Производные функции Ξ :

$$\begin{aligned} \Xi = & \frac{\Gamma_x h^2}{(\beta + h)} \left(-h_{xxx} - \frac{3h_x}{h^2} + \chi h_x e^{-\chi h} \right) \left(\frac{\beta}{2} + \frac{h}{3} \right) + \\ & + \frac{Ma_c \Gamma_x^2 h}{(\beta + h)} \left(\beta + \frac{h}{2} \right) + \frac{\beta \Gamma_{xx}}{(\beta + h) Pe_s} + \frac{\partial_x (h \Gamma_x)}{(\beta + h) Pe_b} \end{aligned}$$

$$\Xi_0 = \frac{\partial \Xi}{\partial \Gamma} = 0$$

$$\begin{aligned} \Xi_1 = \frac{\partial \Xi}{\partial \Gamma_x} = & \frac{h^2}{(\beta + h)} \left(-h_{xxx} - \frac{3h_x}{h^2} + \chi h_x e^{-\chi h} \right) \left(\frac{\beta}{2} + \frac{h}{3} \right) + \\ & + \frac{2Ma_c \Gamma_x h}{(\beta + h)} \left(\beta + \frac{h}{2} \right) + \frac{h_x}{Pe_b (\beta + h)} \end{aligned}$$

$$\Xi_2 = \frac{\partial \Xi}{\partial \Gamma_{xx}} = \frac{1}{\beta + h} \left(\frac{\beta}{Pe_c} + \frac{h}{Pe_b} \right)$$

Для построения системы конечно-разностных уравнений воспользуемся центрально-разностными схемами:

$$h_x = \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2\Delta x}$$

$$h_{xx} = \frac{h_{i-1} - 2h_i + h_{i+1}}{(\Delta x)^2}$$

$$h_{xxx} = \frac{h_{i+2} - 2h_{i+1} + 2h_{i-1} - h_{i-2}}{2(\Delta x)^3}$$

$$h_{xxxx} = \frac{h_{i-2} - 4h_{i-1} + 6h_i - 4h_{i+1} + h_{i+2}}{(\Delta x)^4}$$

$$\Gamma_x = \frac{\Gamma_{i+1} - \Gamma_{i-1}}{2\Delta x}$$

$$\Gamma_{xx} = \frac{\Gamma_{i-1} - 2\Gamma_i + \Gamma_{i+1}}{(\Delta x)^2}$$

Подставим эти схемы в уравнения (5.28) и (5.29):

$$\begin{aligned} & \frac{2h_i}{\Delta t} - N_0 h_i - N_1 \cdot \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2\Delta x} - N_2 \cdot \frac{h_{i-1} - 2h_i + h_{i+1}}{(\Delta x)^2} - N_3 \cdot \frac{h_{i+2} - 2h_{i+1} + 2h_{i-1} - h_{i-2}}{2(\Delta x)^3} - \\ & - N_4 \cdot \frac{h_{i-2} - 4h_{i-1} + 6h_i - 4h_{i+1} + h_{i+2}}{(\Delta x)^4} = F_i^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & h_{i-2} \left(\frac{N_3}{2(\Delta x)^3} - \frac{N_4}{(\Delta x)^4} \right) + h_{i-1} \left(\frac{N_1}{2\Delta x} - \frac{N_2}{(\Delta x)^2} - \frac{N_3}{(\Delta x)^3} + \frac{4N_4}{(\Delta x)^4} \right) + \\ & + h_i \left(\frac{2}{\Delta t} - N_0 + \frac{2N_2}{(\Delta x)^2} - \frac{6N_4}{(\Delta x)^4} \right) + h_{i+1} \left(-\frac{N_1}{2\Delta x} - \frac{N_2}{(\Delta x)^2} + \frac{N_3}{(\Delta x)^3} + \frac{4N_4}{(\Delta x)^4} \right) + \\ & + h_{i+2} \left(-\frac{N_3}{2(\Delta x)^3} - \frac{N_4}{(\Delta x)^4} \right) = F_i \end{aligned}$$

$$\frac{2\Gamma_i}{\Delta t} - \Xi_0 \Gamma_i - \Xi_1 \cdot \frac{\Gamma_{i+1} - \Gamma_{i-1}}{2\Delta x} - \Xi_2 \cdot \frac{\Gamma_{i-1} - 2\Gamma_i + \Gamma_{i+1}}{(\Delta x)^2} = F_i$$

$$\Gamma_{i-1} \left(\frac{\Xi_1}{2\Delta x} - \frac{\Xi_2}{(\Delta x)^2} \right) + \Gamma_i \left(\frac{2}{\Delta t} - \Xi_0 + \frac{2\Xi_2}{(\Delta x)^2} \right) + \Gamma_{i+1} \left(-\frac{\Xi_1}{2\Delta x} - \frac{\Xi_2}{(\Delta x)^2} \right) = G_i$$

Таким образом, уравнения пришли к виду

$$A_i h_{i-2}^{n+1} + B_i h_{i-1}^{n+1} + C_i h_i^{n+1} + D_i h_{i+1}^{n+1} + E_i h_{i+2}^{n+1} = F_i^n \quad (5.30)$$

$$K_i \Gamma_{i-1}^{n+1} + L_i \Gamma_i^{n+1} + M_i \Gamma_{i+1}^{n+1} = G_i^n \quad (5.31)$$

Где

$$A_i = \frac{N_3^n}{2(\Delta x)^3} - \frac{N_4^n}{(\Delta x)^4}$$

$$B_i = \frac{N_1^n}{2\Delta x} - \frac{N_2^n}{(\Delta x)^2} - \frac{N_3^n}{(\Delta x)^3} + 4 \frac{N_4^n}{(\Delta x)^4}$$

$$C_i = \frac{2}{\Delta t} - N_0^n + \frac{2N_2^n}{(\Delta x)^2} - \frac{6N_4^n}{(\Delta x)^4}$$

$$D_i = \frac{N_3^n}{(\Delta x)^3} - \frac{N_2^n}{(\Delta x)^2} - \frac{N_1^n}{2\Delta x} + \frac{4N_4^n}{(\Delta x)^4}$$

$$E_i = -\frac{N_3^n}{2(\Delta x)^3} - \frac{N_4^n}{(\Delta x)^4}$$

$$F_i^n = 2N^n + \frac{2h_t^n}{\Delta t} - \left(N_0^n h_i^n + N_1^n h_x^n + N_2^n h_{xx}^n + N_3^n h_{xxx}^n + N_4^n h_{xxxx}^n \right)$$

$$K_i = \frac{\Xi_1}{2\Delta x} - \frac{\Xi_2}{(\Delta x)^2}$$

$$L_i = \frac{2}{\Delta t} - \Xi_0 + \frac{2\Xi_2}{(\Delta x)^2}$$

$$M_i = -\frac{\Xi_1}{2\Delta x} - \frac{\Xi_2}{(\Delta x)^2}$$

$$G_i = \frac{2\Gamma}{\Delta t} + 2\Xi - (\Xi_0\Gamma + \Xi_1\Gamma_x + \Xi_2\Gamma_{xx})$$

5.5.2. Построение прогоночной схемы

Для решения двух полученных систем конечно-разностных уравнений (5.30) и (5.31) воспользуемся методом прогонки. Прогоночная схема для решения пятидиагональной системы уравнений уже была приведена во второй и третьей главах, здесь же построим прогоночную схему для решения трехдиагональной системы уравнений для концентрации.

Запишем исходную систему уравнений, опуская верхний индекс, который обозначает шаг по времени:

$$K_i\Gamma_{i-1} + L_i\Gamma_i + M_i\Gamma_{i+1} = G_i$$

Будем находить значения $\Gamma(x)$ по следующим формулам:

$$\Gamma_i = \zeta_i\Gamma_{i+1} + \xi_i \quad (5.32)$$

Для первой точки сетки воспользуемся приемом «отражения», т. е. положим

$$\Gamma_{-1} = \Gamma_1 :$$

$$K_0\Gamma_{-1} + L_0\Gamma_0 + M_0\Gamma_1 = (K_0 + M_0)\Gamma_1 + L_0\Gamma_0 = G_0 \quad (5.33)$$

Отсюда найдем прогоночные коэффициенты ζ_0 и ξ_0 :

$$\Gamma_0 = -\frac{K_0 + M_0}{L_0} \Gamma_1 + \frac{G_0}{L_0}$$

$$\zeta_0 = -\frac{K_0 + M_0}{L_0}; \quad \xi_0 = \frac{G_0}{L_0}$$

Рассмотрим теперь уравнение (5.32) при $i = 0$ и (5.33) при $i = 1$:

$$\Gamma_1 = \frac{-M_1 \Gamma_2}{K_1 \zeta_0 + L_1} + \frac{G_1 - K_1 \xi_0}{K_1 \zeta_0 + L_1} = \zeta_1 \Gamma_2 + \xi_1$$

По аналогии найдем для всех $i = 1 \dots m-1$:

$$\zeta_i = -\frac{M_i}{K_i \zeta_{i-1} + L_i}; \quad \xi_i = \frac{G_i - K_i \xi_{i-1}}{K_i \zeta_{i-1} + L_i}$$

Далее рассмотрим последнюю точку сетки, $i = m$:

$$K_m \Gamma_{m-1} + L_m \Gamma_m + M_m \Gamma_{m+1} = G_m$$

Снова применим прием отражения: $\Gamma_{m+1} = \Gamma_{m-1}$.

$$(K_m + M_m) \Gamma_{m-1} + L_m \Gamma_m = G_m$$

Подставим в это выражение уравнение при $i = m-1$:

$$\Gamma_{m-1} = \zeta_{m-1} \Gamma_m + \xi_{m-1}$$

$$(K_m + M_m)(\zeta_{m-1} \Gamma_m + \xi_{m-1}) + L_m \Gamma_m = G_m$$

Отсюда найдем

$$\Gamma_m = \frac{G_m - \xi_{m-1}(K_m + M_m)}{\zeta_{m-1}(K_m + M_m) + L_m}$$

При численном решении методом прогонки на каждом шаге нужно будет находить сначала поле толщин пленки, затем поле поверхностных концентраций.

5.5.3. Алгоритм решения уравнения

Итак, будем решать задачу испарения тонкой пленки полярной жидкости с растворенным в ней поверхностно-активным веществом методом прогонки по следующему алгоритму:

1. Задать начальные распределения $h(x)$ и $c(x)$.
Начальное распределение концентрации полагалось равномерным, с небольшим шумом порядка 10^{-4} .
2. Из начального распределения найти функции $\{N, N_0, N_1, N_2, N_3, N_4\}$ по схеме Кранка-Николсон.
3. Имея функции Кранка-Николсон, найти коэффициенты $\{A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i\}$ для (5.30).
4. Имея коэффициенты системы уравнений (5.30) и (5.31), найти прогоночные коэффициенты $\{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \Delta_i, i = 0 \dots\}$.
5. Имея прогоночные коэффициенты, найти распределение $h(x)$ на следующем шаге по времени.
Далее необходимо повторить этот алгоритм для концентрации:
6. Из начального распределения найти функции $\{\Xi, \Xi_i\}$ по схеме Кранка-Николсон.
7. Имея функции Кранка-Николсон, найти коэффициенты $\{K_i, L_i, M_i, G_i\}$ для уравнений (5.31).
8. Имея коэффициенты системы уравнений (5.31), найти прогоночные коэффициенты $\{\zeta_i, \xi_i\}$.
9. Имея прогоночные коэффициенты, найти распределение $c(x)$ на следующем шаге по времени по формуле (5.32).

5.6. Результаты моделирования

Согласно приведенной выше схеме, было выполнено моделирование процесса испарения тонкой пленки полярной жидкости на твердой подложке с добавлением растворимого поверхностно-активного вещества (ПАВ). Пленка

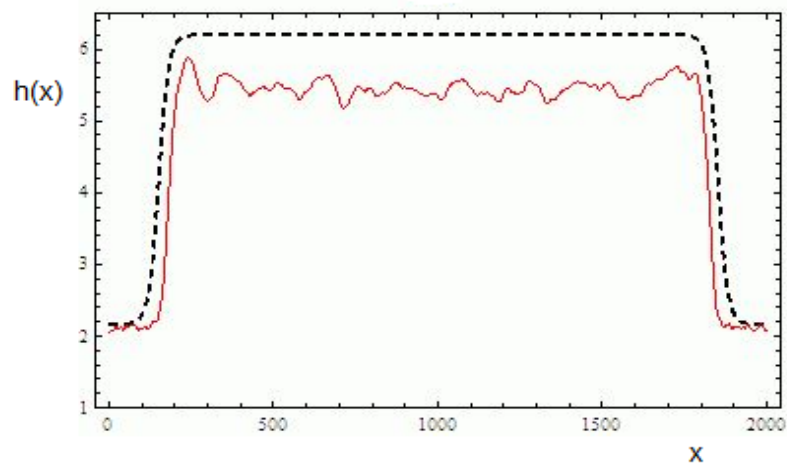
имела начальную деформацию, связанную с особенностью полярных жидкостей на полярной подложке приобретать две устойчивые толщины [299].

Численное моделирование проводилось при таких значениях параметров: $\Omega = 0,01$; $S = -0,003$; $Pe_b = Pe_s = 1$; $\chi = 1,085$; $\beta = 0,001$. Изменяли числа Пекле Pe_b и Pe_s , отвечающие за диффузию (чем больше число Пекле, тем ниже скорость диффузии), и концентрационное число Марангони Ma_c . Ниже на Рис. 5.2 представлены профили пленки, полученные в результате моделирования (пунктиром показан начальный профиль).

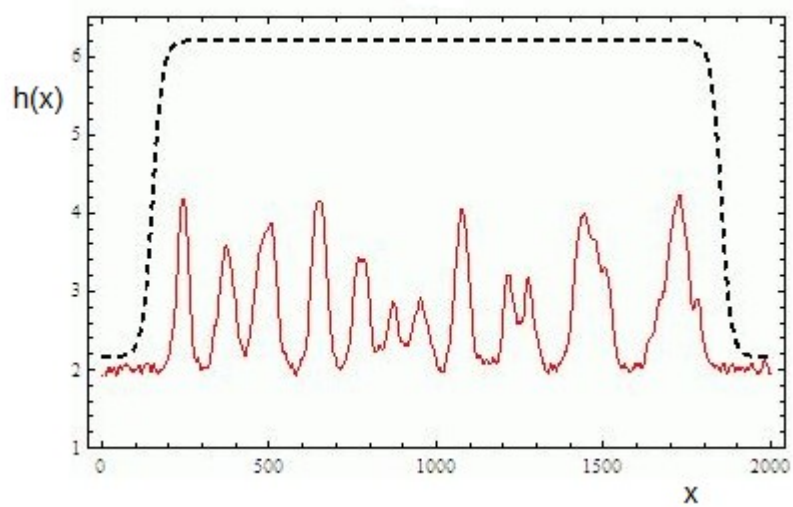
Моделирование показало, что в случае раствора поверхностно-активных веществ в полярной жидкости понятие скорости движения фронта между двумя устойчивыми значениями толщины практически утратило смысл, так как этот фронт не сохраняется: верхнее значение толщины, ранее бывшее устойчивым, перестает быть таковым. Также можно сделать вывод, что диффузионный параметр (число Пекле) не оказывает какого-либо влияния на ситуацию – распределение концентрации практически не меняется.

При значении числа $Ma_c = 0.1$ (Рис. 5.3(а)) фронт тонкого слоя жидкости имеет стационарную форму движения, с ростом концентрационного числа Марангони на поверхности «толстого» слоя появляются коротковолновые возмущения, которые приводят к деформации поверхности с образованием провалов в слое (Рис. 5.3(б)). С течением времени эти провалы достигают толщины «тонкого» слоя, и вся поверхность принимает пикообразную форму. Характер профиля неустойчивости тонкой пленки при наличии растворимого сурфактанта имеет существенное отличие от профиля тонкого слоя жидкости без примеси. Если для «чистого» слоя жидкости имеет место пальцеобразная форма неустойчивости [217], которая наблюдается на контактной линии слоев, и толщина «толстого» слоя остается неизменной, то при наличии сурфактанта весь слой испытывает неустойчивость, что приводит к совершенно другой форме образования структур на свободной поверхности.

а



б



в

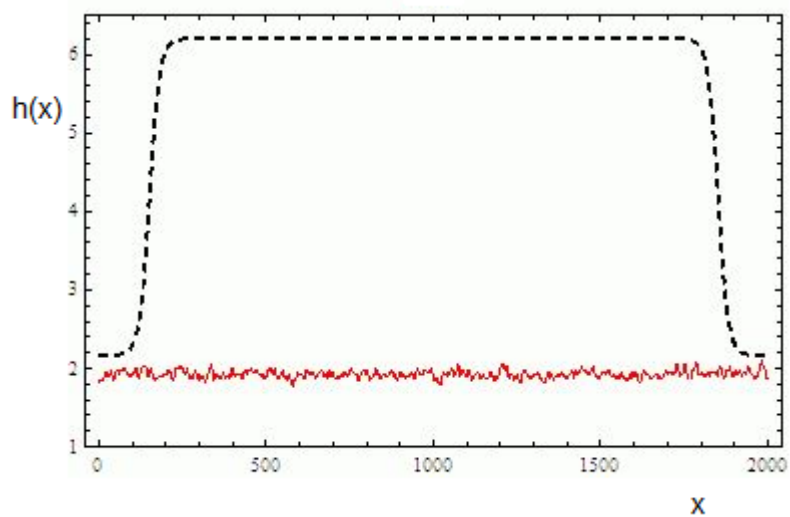


Рис.5.2. Профили жидкой пленки при $Pe_b = Pe_s = 1$;

а – при $Ma_c = 10$, б – при $Ma_c = 25$, в – при $Ma_c = 50$. Пунктирной линией показано начальное положение профиля.

На Рис. 5.3 показаны профили слоя жидкости при различных значениях концентрационного числа Марангони, величина испарения предполагается слабой.

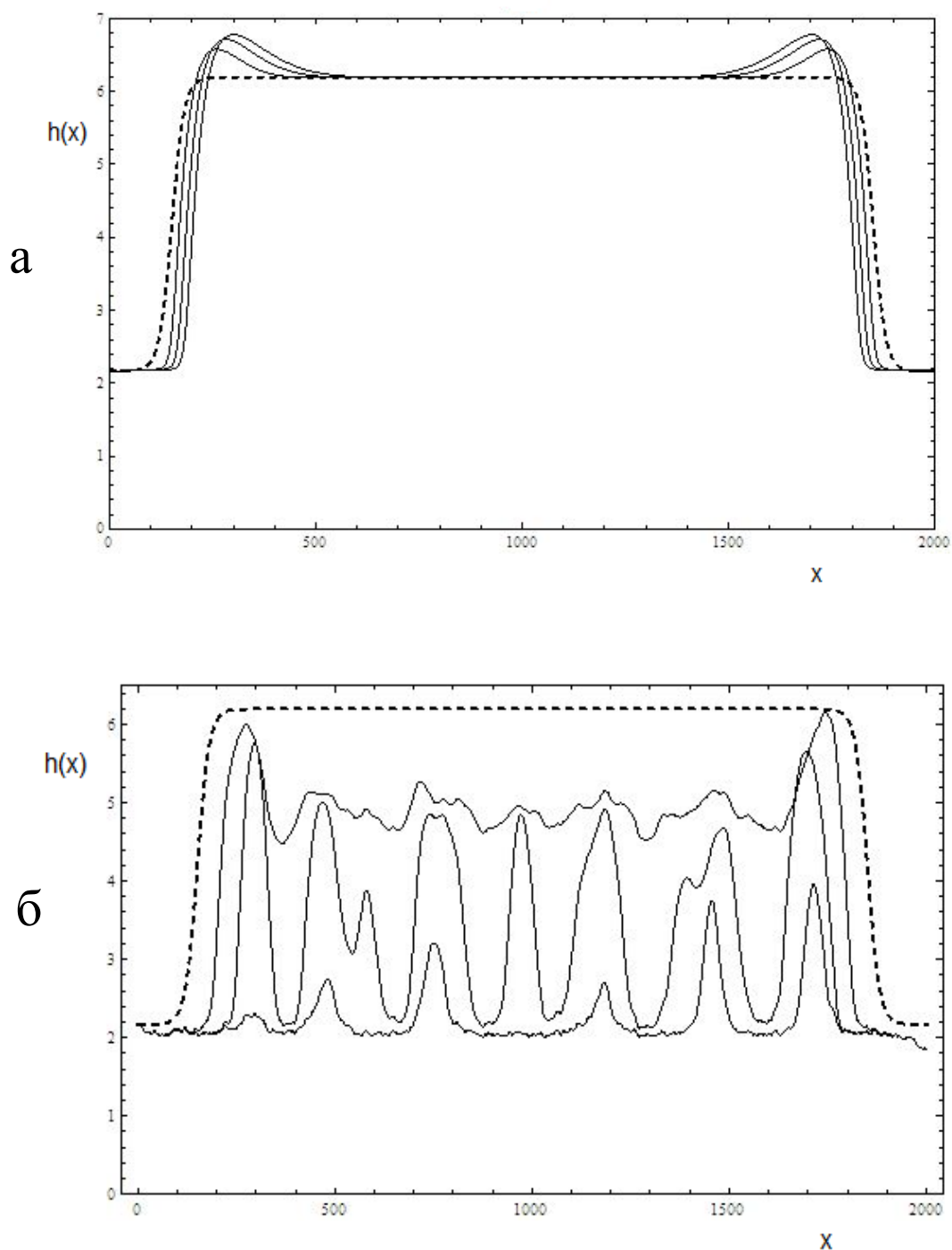


Рис.5.3. Эволюция распространения фронта тонкого слоя жидкости $h(x)$ для различных значений концентрационного числа Марангони: а) $Ma_c = 0.1$ и б) $Ma_c = 50$. Пунктиром обозначено начальное распределение. Параметр $\Omega = 0.01$, другие безразмерные величины приведены на Рис.5.2. Профили приведены для $t = 2, 10, 20$.

5.7. Анализ устойчивости системы

Проведем линейный анализ устойчивости фронта пленки полярной жидкости, подобно тому, как мы это проделали во второй главе, но теперь в присутствии ПАВ. Запишем полученные уравнения эволюции в двумерном виде:

$$\begin{aligned} \partial_t h - \nabla \left[\frac{h^3}{3} \nabla \left(-\nabla^2 h + \frac{1}{h^3} - e^{-\chi h} \right) \right] - Ma_c \nabla \left(\nabla \Gamma \frac{h^2}{2} \right) + \\ + \Omega \left(\frac{1}{h^3} - e^{-\chi h} - \nabla^2 h - S \right) = 0 \\ (\beta + h) c_{0t} = \nabla c_0 h^2 \nabla \left(-\nabla^2 h + \frac{1}{h^3} - e^{-\chi h} \right) \left(\frac{\beta}{2} + \frac{h}{3} \right) + \\ + Ma_c (\nabla c_0)^2 h \left(\beta + \frac{h}{2} \right) + \frac{\beta \nabla^2 c_0}{Pe_s} + \frac{\nabla(h \nabla c_0)}{Pe_b} \end{aligned}$$

Раскроем скобки уравнений и перегруппируем слагаемые, чтобы впоследствии извлечь линейные слагаемые возмущений:

$$\begin{aligned} h_t - Ma_c \left(\nabla^2 \tilde{n}_0 \frac{h^2}{2} + \nabla \Gamma h \nabla h \right) + \frac{1}{3} h^3 \nabla^4 h + h^2 \nabla h \nabla^3 h + \\ + \nabla^2 h \left(\frac{1}{h} - \frac{\chi h^3}{3} e^{-\chi h} \right) - (\nabla h)^2 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{\chi h^2}{3} e^{-\chi h} (3 - \chi h) \right) - \\ - \Omega \left(\nabla^2 h - \frac{1}{h^3} + e^{-\chi h} + S \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} (\beta + h) c_{0t} = \nabla c_0 h^2 \left(-\nabla^3 h - \frac{3 \nabla h}{h^2} + \chi \nabla h e^{-\chi h} \right) \left(\frac{\beta}{2} + \frac{h}{3} \right) + \\ + Ma_c (\nabla c_0)^2 h \left(\beta + \frac{h}{2} \right) + \frac{\beta \nabla^2 c_0}{Pe_s} + \frac{\nabla(h \nabla c_0)}{Pe_b} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Моделирование показало, что при движении пленки происходит переход от одной устойчивой толщины к другой и соответственно этому переходу меняется концентрация ПАВ. Поэтому для исследования устойчивости системы уравнений рассмотрим эволюцию возмущений относительно некоторого

«замороженного состояния» с постоянными значениями толщины h_0 и концентрации c_0 , которые мы возьмем за единицу, а возмущения представим в «нормальной» форме $\exp(\sigma t + ikx)$, где σ – декремент возмущений, а k – волновое число.

$$\begin{aligned}\tilde{h} &= h_0 \cdot \exp(\lambda t + ikx); \\ \tilde{c} &= c_0 \cdot \exp(\lambda t + ikx); \\ h_0 &= c_0 = 1.\end{aligned}$$

Найдем временные и пространственные производные:

$$\begin{aligned}\tilde{h}_t &= h_0 \lambda e^D, \quad D = \sigma t + ikx \\ \nabla \tilde{h} &= h_0 i k e^D \\ \nabla^2 \tilde{h} &= -h_0 k^2 e^D \\ \nabla^3 \tilde{h} &= -h_0 i k^3 e^D \\ \nabla^4 \tilde{h} &= h_0 k^4 e^D \\ \tilde{c} &= c_0 \lambda e^D \\ \nabla \tilde{c} &= c_0 i k e^D \\ \nabla^2 \tilde{c} &= -c_0 k^2 e^D \\ \nabla^3 \tilde{c} &= -c_0 i k^3 e^D \\ \nabla^4 \tilde{c} &= c_0 k^4 e^D\end{aligned}$$

Подставим эти представления в уравнения (5.34) и (5.35):

$$\begin{aligned}\lambda \tilde{h} - Ma_c \left(-k^2 \tilde{c} \frac{h_0^2}{2} + i k c_0 h_0 \cdot \tilde{h} i k \right) + \frac{1}{3} h_0^3 k^4 \tilde{h} + h^2 i k h_0 \cdot (-i k^3 \tilde{h}) - \\ - k^2 \tilde{h} \left(\frac{1}{h_0} - \frac{\chi h_0^3}{3} e^{-\chi h_0} \right) - (i k \tilde{h} h_0)^2 \left(\frac{1}{h_0^2} + \frac{\chi h_0^2}{3} e^{-\chi h_0} (3 - \chi h_0) \right) - \\ - \Omega \left(-k^2 \tilde{h} - \frac{\tilde{h}}{h_0^4} + \frac{\tilde{h}}{h_0} e^{-\chi h_0} + \frac{\tilde{h}}{h_0} S \right) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\beta + h)\tilde{c}\lambda = & -ik^3\tilde{h}ikc_0h_0^2 + ik\tilde{c}h_0^2\left(\frac{-3ikh_0}{h_0^2} + ik\chi h_0e^{-\chi h_0}\right)\left(\frac{\beta}{2} + \frac{h_0}{3}\right) + \\
& + Ma_c(ik)^2\tilde{c}c_0h_0\left(\beta + \frac{h_0}{2}\right) - \frac{\beta k^2\tilde{c}}{Pe_s} + \frac{ikh_0 \cdot ik\tilde{c} - h_0k^2\tilde{c}}{Pe_b}
\end{aligned}$$

Приведем подобные:

$$\begin{aligned}
& \lambda\tilde{h} + Ma_c\left(k^2\tilde{c}\frac{1}{2} + k^2\tilde{h}\right) + \frac{1}{3}k^4\tilde{h} + k^4\tilde{h} - k^2\tilde{h}\left(1 - \frac{\chi}{3}e^{-\chi}\right) + \\
& + k^2\tilde{h}\left(1 + \frac{\chi}{3}e^{-\chi}(3 - \chi)\right) + \Omega(k^2\tilde{h} + \tilde{h} - \tilde{h}e^{-\chi} - S\tilde{h}) = 0 \\
& (\beta + h)\tilde{c}\lambda = k^4\tilde{h} - \tilde{c}k^2(\chi e^{-\chi} - 3)\left(\frac{\beta}{2} + \frac{1}{3}\right) - Ma_ck^2\tilde{c}\left(\beta + \frac{1}{2}\right) - \\
& - \frac{\beta k^2\tilde{c}}{Pe_s} - \frac{2k^2\tilde{c}}{Pe_b}
\end{aligned}$$

Перегруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned}
& \lambda\tilde{h} + \frac{4}{3}k^4\tilde{h} + k^2\frac{Ma_c}{2}\tilde{c} + k^2\tilde{h}\left(\frac{\chi}{3}e^{-\chi}(2 - \chi) + \Omega + Ma_c\right) + \\
& + \Omega\tilde{h}(1 - e^{-\chi} - S) = 0 \\
& (\beta + h)\tilde{c}\lambda - k^4\tilde{h} + k^2\tilde{c}\left(\frac{\beta}{2} + \frac{1}{3}\right)(\chi e^{-\chi} - 3) + Ma_ck^2\tilde{c}\left(\beta + \frac{1}{2}\right) + \\
& + k^2\tilde{c}\left(\frac{\beta}{Pe_s} + \frac{2}{Pe_b}\right) = 0
\end{aligned}$$

Из этих уравнений получим задачу на собственные значения:

$$\begin{vmatrix} \lambda + \frac{4}{3}k^4 + k^2L_{21} + L_{01} & \frac{1}{2}k^2Ma_c \\ -k^4 & (\beta + 1)\lambda + k^2L_{22} \end{vmatrix} \times \begin{pmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{\Gamma} \end{pmatrix} = 0 \quad (5.36)$$

где

$$L_{21} = \frac{\chi}{3}e^{-\chi}(2 - \chi) + \Omega + Ma_c$$

$$L_{01} = \Omega(1 - e^{-\chi} - S)$$

$$L_{22} = \left(\frac{\beta}{2} + \frac{1}{3}\right)(\chi e^{-\chi} - 3) + Ma_c \left(\beta + \frac{1}{2}\right) + \frac{\beta}{Pe_s} + \frac{2}{Pe_b}$$

Нас не интересует тривиальное решение, когда $\tilde{h} = 0$ и $\tilde{\Gamma} = 0$, а значит, нулю равна матрица, умножаемая на эти величины:

$$\left(\lambda + \frac{4}{3}k^4 + k^2 L_{21} + L_{01}\right) \cdot [(\beta + 1)\lambda + k^2 L_{22}] - \frac{1}{2}k^2 Ma_c \cdot (-k^4) = 0 \quad (5.37)$$

Решая систему (5.37) относительно λ , получаем две независимые моды, которые представлены на Рис. 5.4.

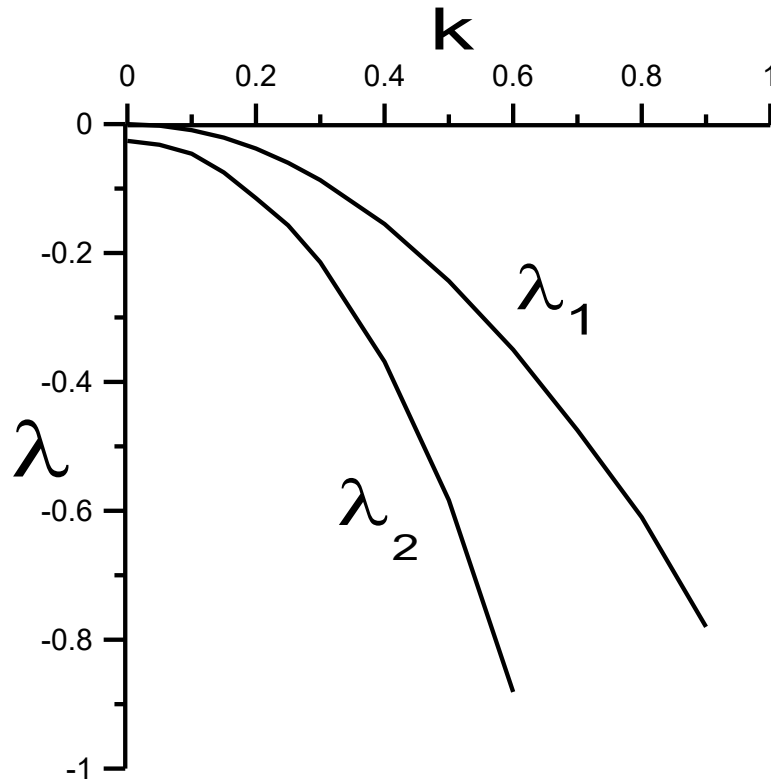


Рис.5.4. Дисперсионная зависимость $\lambda(k)$ для $Ma_c = 0.01$ и $\Omega = 0.01$.
Остальные параметры: $\chi = 1.085$, $S = -0.003 Pe_b = Pe_s = 1$, $K = 0.1$, $\beta = 1$.

Одна из мод, обозначенная на Рис. 5.4 λ_1 , представляет собой моду концентрационных возмущений, а вторая, обозначенная λ_2 , описывает эволюцию возмущений слоя жидкости при испарении. Как видно из рисунка, при малом испарении $\Omega \ll 1$ и малом значении числа Ma_c обе моды возмущений

затухают. Особенностью моды испарения является тот факт, что при $k=0$ декремент не равен нулю и имеет место так называемая голдстоуновская мода возмущений [69]. При $\Omega \rightarrow 0$ декремент этой моды для $k=0$ также стремится к нулевому значению.

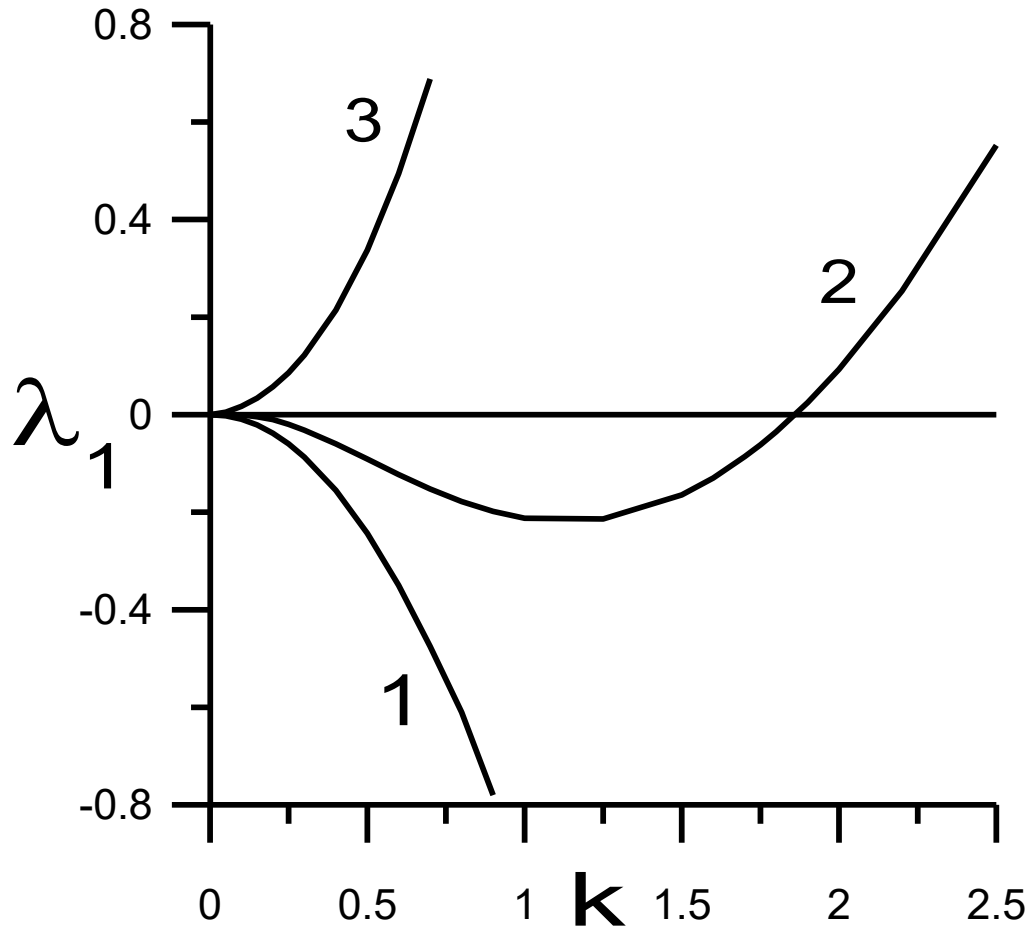


Рис.5.5. Дисперсионная зависимость для концентрационной моды λ_1 для различных значений концентрационного числа Марангони: 1) $Ma_c = 0.1$, 2) $Ma_c = 1.8$, 3) $Ma_c = 5$. Остальные параметры аналогичны Рис.5.4.

На Рис. 5.5 приведен график зависимостей декремента от волнового числа для различных значений величины Ma_c относительно концентрационной моды неустойчивости. С увеличением значения безразмерного параметра Марангони в длинноволновом диапазоне появляется область неустойчивости. В дальнейшем с увеличением числа Ma_c при любом значении волнового числа возмущения нарастают.

Напротив, с увеличением числа Ω (Рис. 5.6) устойчивость системы относительно возмущений повышается, что качественно соответствует результатам, приведенным в работе [325].

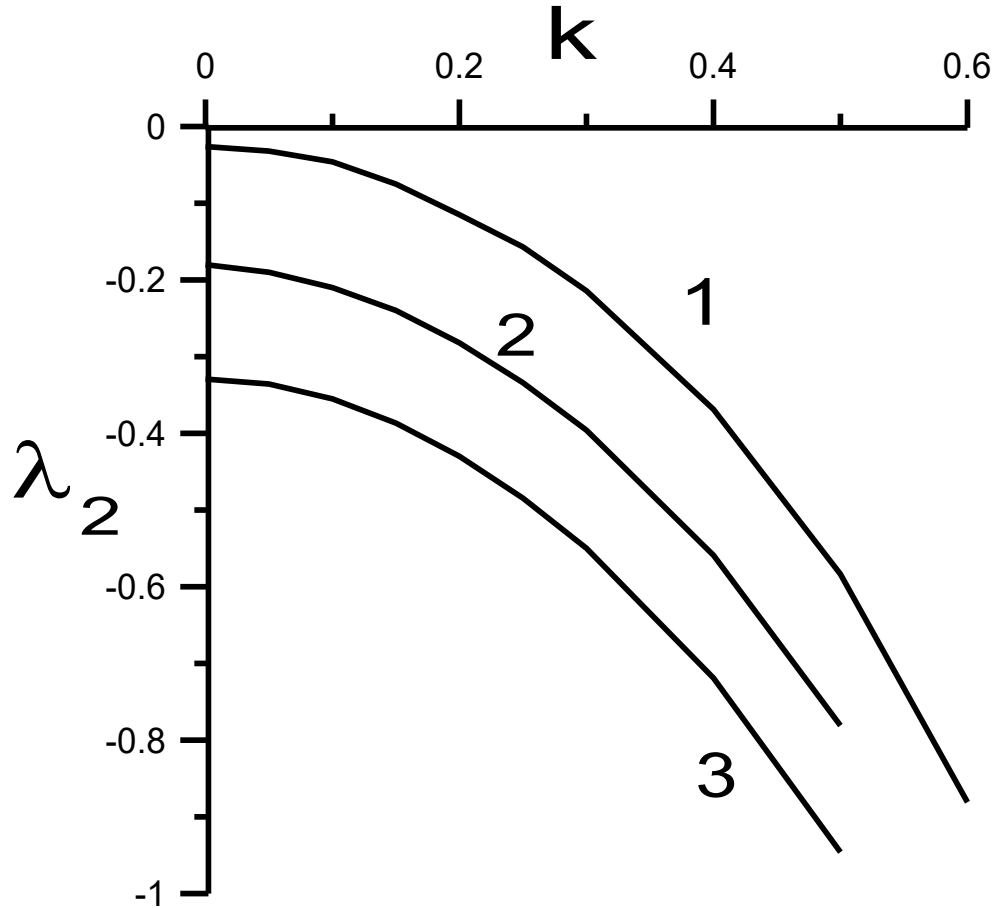


Рис.5.6. Дисперсионная зависимость для моды испарения λ_2 для различных значений параметра Ω : 1) 0.01; 2) 0.07; 3) 0.125 соответственно. Остальные параметры аналогичны Рис.5.5.

Проведем исследование устойчивости основного состояния системы уравнений относительно параметров короткодействующего взаимодействия, которое является отличительным признаком полярной жидкости. В данном случае в качестве такого специфического взаимодействия выступает потенциал двойного электрического слоя на границе раздела «твердое тело – жидкость».

Как было показано выше, особенностью неустойчивости, связанной с процессом испарения, является наличие так называемой голдстоуновской моды.

Эта мода характеризуется тем, что при значении волнового числа $k=0$ декремент λ_2 имеет отличное от нуля значение. Решая систему (5.37) относительно декремента затухания возмущений λ , мы получаем, что для случая голдстоуновской моды $k=0$ нетривиальное решение имеет место только для неустойчивости, связанной с испарением:

$$\lambda(k=0)_2 = -\Omega \cdot (3 - \chi \cdot \exp[-\chi]) \quad (5.38)$$

здесь Ω есть безразмерное число, характеризующее параметр испарения, а параметр χ описывает расстояние взаимодействия электрического потенциала двойного слоя на границе «твердое тело – жидкость».

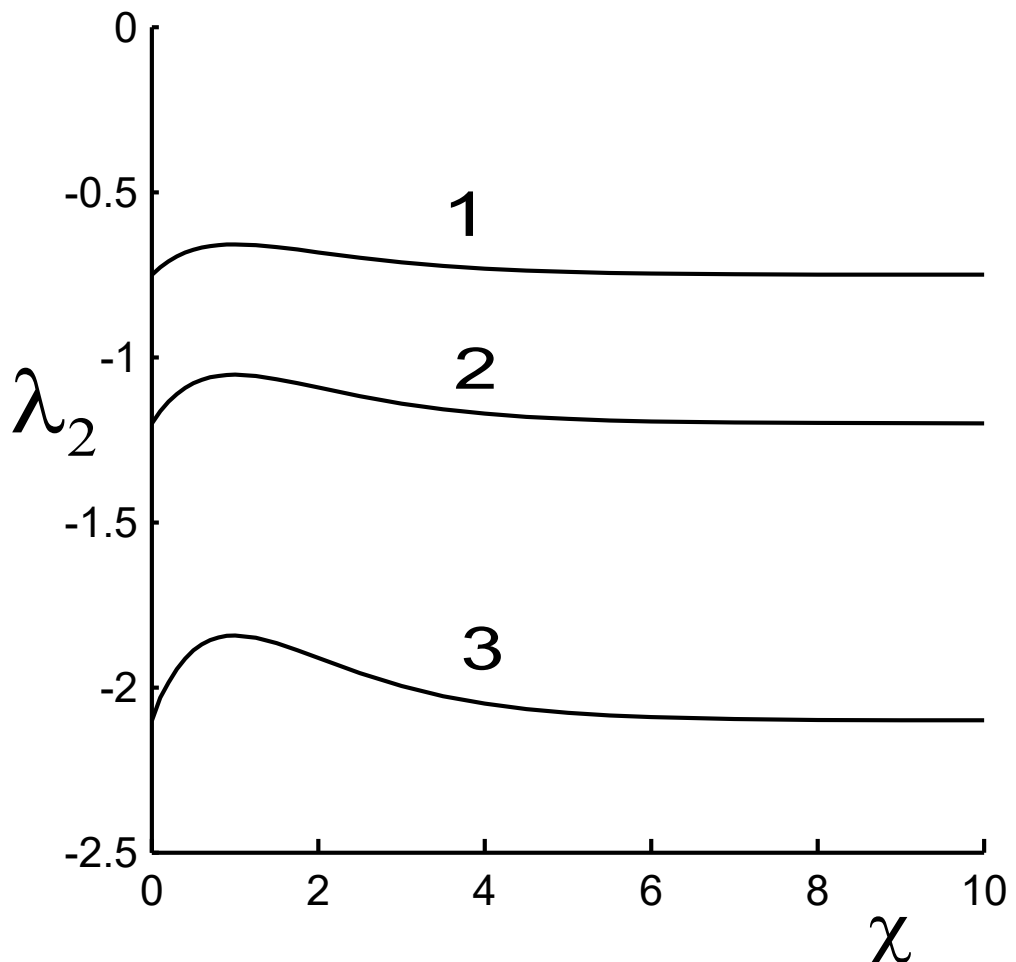


Рис.5.7. График зависимости декремента затухания моды испарения λ_2 относительно величины χ для различных значений безразмерного параметра испарения:

1) $\Omega = 0.25$; 2) $\Omega = 0.4$; 3) $\Omega = 0.7$.

На Рис. 5.7 представлена зависимость параметра устойчивости λ_2 от различных значений χ при фиксированном значении безразмерного числа Ω .

Как следует из (5.38), при любом значении испарения λ_2 всегда имеет отрицательное значение и, соответственно, все возмущения относительно данной моды затухают. Декремент затухания λ описывает поведение возмущения со временем ($\lambda > 0$ ведет к росту возмущений, а отрицательное значение декремента соответствует затуханию возмущений). Значение параметра $\chi = 0$ соответствует неполярным жидкостям (например, бензол, гексан). Учет короткодействующих взаимодействий с характерным корреляционным радиусом порядка десяти понижает устойчивость данной системы, при дальнейшем увеличении значения χ имеем предел $\lambda_2(\chi \rightarrow \infty) \approx \lambda_2(\chi = 0)$. Минимум устойчивости системы соответствует расстоянию, равному корреляционному. Уменьшение значения безразмерного параметра испарения приводит к понижению устойчивости системы, и для $\Omega \rightarrow 0$ декремент затухания относительно моды испарения λ_2 тоже стремится к нулю, оставаясь всегда в области отрицательных значений.

С точки зрения практических результатов работы представляется важным исследование зависимостей критического значения безразмерного концентрационного числа Марангони Ma_c , описывающего связь между коэффициентом поверхностного натяжения и поверхностной концентрацией, при которых первоначально затухающие возмущения станут нарастать. Для этого необходимо рассмотреть «нейтральные» возмущения со значением декремента $\lambda = 0$. Эти «нейтральные» возмущения определяют границы устойчивости и неустойчивости относительно возмущений системы. На Рис. 5.8 приведена зависимость концентрационного числа Марангони от волнового числа для различных значений безразмерного параметра испарения Ω .

Область, находящаяся под кривой, определяется как зона устойчивости, а пространство, занимающее место над нейтральной кривой, считается областью

неустойчивости. Из полученных результатов можно сделать вывод, что процесс испарения при соответствующих параметрах стабилизирует данную систему.

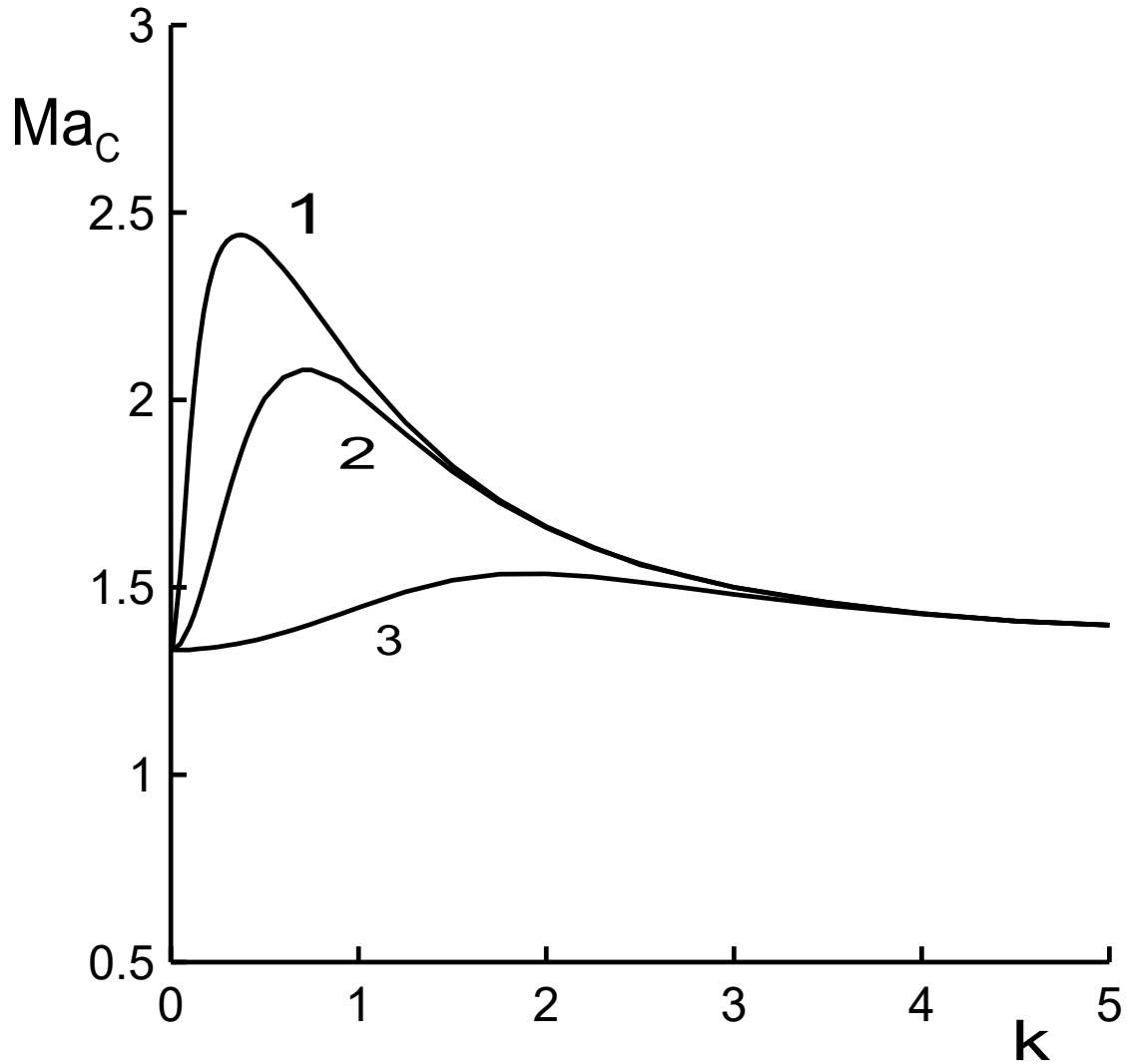


Рис.5.8. График зависимости концентрационного числа Марангони Ma_c от волнового числа k при различных значениях безразмерного числа Ω , где 1) $\Omega = 0.007$; 2) $\Omega = 0.1$; 3) $\Omega = 5$. Остальные параметры $\chi = 1.085$, $Ca = 0.01$, $S = -0.003$, $Pe_b = Pe_s = 1$, $K = 0.1$, $\beta = 1$.

Критическими значениями безразмерного параметра Ma_c являются величины, соответствующие значениям волнового числа $k=0$ и $k=\infty$, а при $\Omega \rightarrow \infty$ нейтральная кривая будет представлять собой прямую, не зависящую от волнового числа.

Аналитически представляется возможным выяснить зависимость безразмерного концентрационного числа Марангони при $k = 0$. Решая уравнение (5.37), получаем следующее равенство:

$$Ma_c(0) = \frac{2(Pe_b + \beta \cdot Pe_s)}{Pe_b \cdot Pe_s \cdot (1 + 2\beta)}$$

здесь Pe_b и Pe_s есть объемное и поверхностное безразмерные числа Пекле соответственно, β – безразмерный коэффициент адсорбции-десорбции.

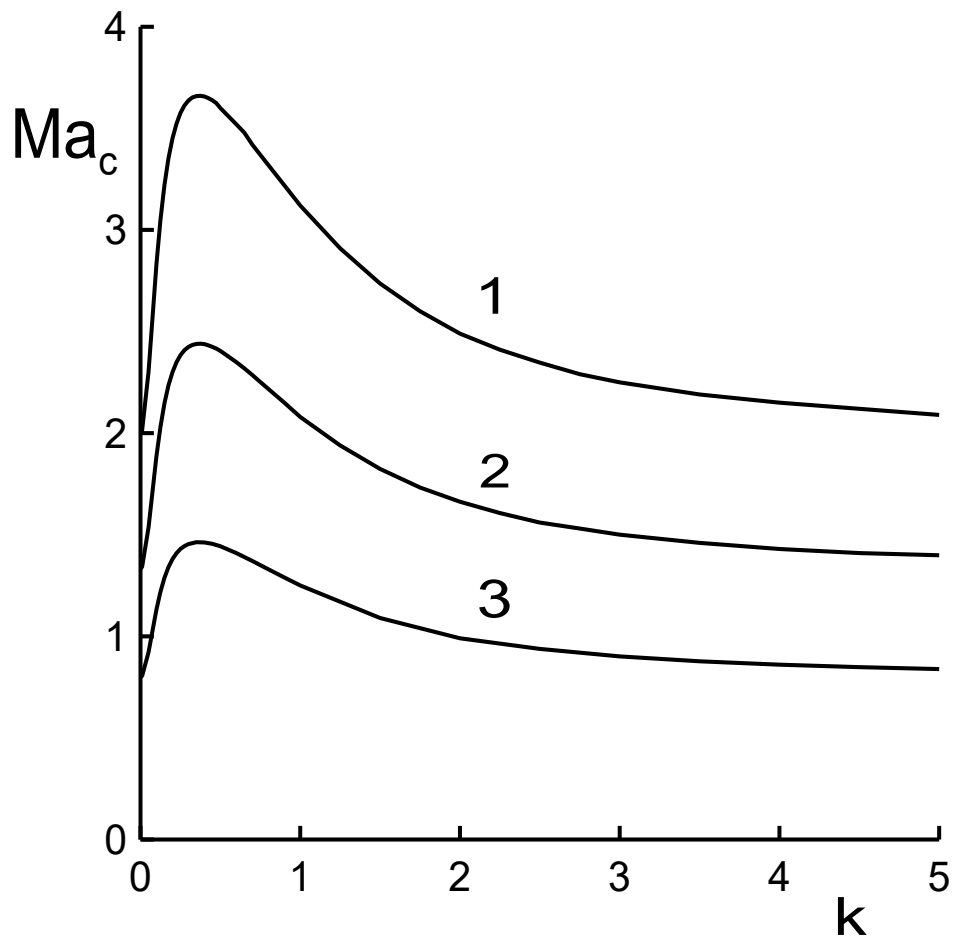


Рис.5.9. График зависимости концентрационного числа Марангони Ma_c от волнового числа k при различных значениях безразмерного параметра объемного числа Пекле Pe_b , где 1 – $Pe_b = 0.5$, 2 – $Pe_b = 1$, 3 – $Pe_b = 5$.

Остальные параметры: $\chi = 1.085$, $Ca = 0.01$, $K = -0.003$, $\beta = 1$, $Pe_s = 1$, $K = 0.1$, $\Omega = 0.007$.

Так как экспериментально значения Pe_s и β трудно изменять, то исследуем зависимость $Ma_c(0)$ от различных значений безразмерного параметра объемного числа Пекле. На Рис. 5.9 приведены нейтральные кривые для различных значений $Pe_b = U_0 L / D_b$. Здесь U_0 – характерная скорость движения фронта тонкого слоя жидкости, L – характерный горизонтальный размер длины слоя и D_b есть коэффициент диффузии сурфактанта в жидкость. Из полученных результатов можно судить о том, что при больших значениях коэффициента диффузии ($Pe_b \rightarrow 0$) устойчивость системы по отношению к поверхностному концентрационному эффекту Марангони повышается. Для малого значения коэффициента диффузии сурфактанта в объем, что соответствует тому, что практически весь он сосредоточен на поверхности ($Pe_b \rightarrow \infty$), неустойчивость системы понижается. Наконец, представляется интересным случай, когда сурфактант не растворяется в объеме жидкости ($Pe_b \rightarrow \infty$) и одновременно имеет место сильное испарение ($\Omega \rightarrow \infty$). При этих условиях неустойчивость будет наступать при бесконечно малом значении Ma_c во всем диапазоне волновых чисел. Данные результаты находятся в качественном согласии с результатами, приведенными в работе [340].

Уравнение (5.37) допускает не только решения, лежащие в области реальных значений декремента затуханий λ . Для такой системы имеются также и колебательные режимы неустойчивости. Было найдено, что такой режим может существовать при больших значениях объемного и поверхностного чисел Пекле. На Рис. 5.10(a) приведено дисперсионное соотношение декремента λ от волнового числа. Черным цветом и цифрой 1, а также синим цветом и цифрой 2 обозначены моды неустойчивости для $Ma_c = 0$ и $Ma_c = 1$ соответственно. При отсутствии соллютокапиллярного эффекта обе моды затухают, при наличии ненулевого концентрационного числа Марангони для концентрационной моды появляется область неустойчивости, сосредоточенная в малых значениях

волнового числа. С ростом безразмерного параметра Ma_c область неустойчивости растет. На Рис. 5.10(b) приводится карта устойчивости для данной системы. Красная кривая обозначает нейтральную границу, разделяющую возмущения на затухающие и незатухающие. С уменьшением параметра испарения Ω происходит взаимодействие концентрационной моды и моды испарения между собой с образованием колебательной моды неустойчивости.

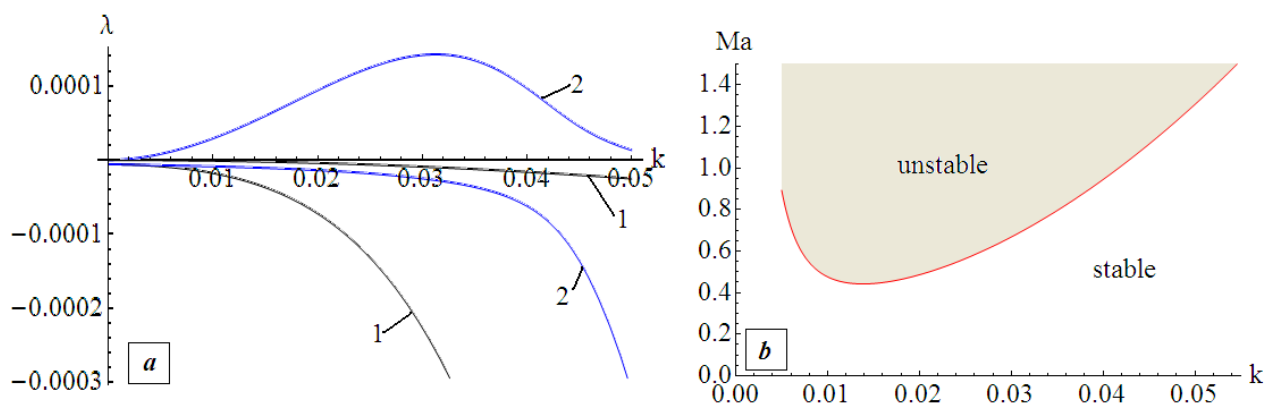


Рис.5.10. Дисперсионное соотношение а) для различных значений концентрационного числа Марангони Ma_c (черный – $Ma = 0$, синий – $Ma = 1$), б) график зависимости критического числа Марангони от волнового числа. Параметры системы: $\chi = 1.085, Ca = 1, S = -0.003, \Omega = 0.01, \beta = 0.01, Pe_s = Pe_b = 100$.

На Рис. 5.11(a) приводится дисперсионное соотношение, где цифрой 1 обозначена область действительных значений λ , а цифрами 2 и 3 обозначены области устойчивости и неустойчивости для колебательной моды.

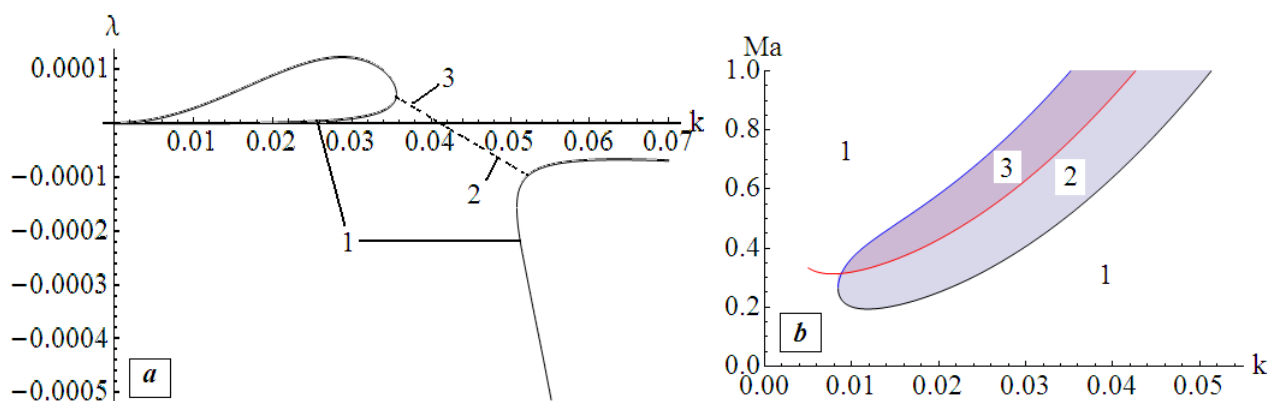


Рис.5.11. Дисперсионные соотношения для $Ma = 1$ (а) и карта устойчивости для такой системы (б). $\Omega = 0.001$, остальные параметры как в Рис.5.10.

В некотором диапазоне волнового числа эта мода является затухающей, а с уменьшением волнового числа эта мода может порождать нарастание возмущений. Красная кривая на Рис. 5.11(b) показывает границу устойчивости для данной системы.

Задача с сурфактантом на обеих межфазных поверхностях.

Следующим объектом исследования в этой главе является задача, где поверхностно-активное вещество расположено не только на свободной границе «жидкость-пар» но и на границе раздела двух сред «твердая подложка-жидкость». Кроме этого в самой жидкости также имеется сурфактант.

В экспериментальной работе [166] произведено исследование процессов испарения/конденсации водяной капли, расположенной на кремниевой подложке, при наличии сурфактанта на обеих контактных линиях «подложка – жидкость» и «жидкость – воздух». Сурфактант (органоциликон Silwet L-77) при его содержании в количестве 1 % от веса слоя воды способен снижать поверхностное натяжение на свободной границе более чем в три раза. Толщина такой трехфазной системы составляла порядка 300 ангстрем. Было обнаружено, что при испарении такая система распадается на микрокапли, которые покрыты слоем сурфактанта. Установлено, что видимый угол контакта капли увеличивается при конденсации и снижается в процессе испарения. Наличие сурфактанта приводит к тому, что эволюция формы капли происходит в колебательном режиме. В данной задаче теоретически рассматриваются эволюция и механизмы неустойчивости сверхтонкого испаряющегося слоя жидкости при наличии сурфактанта на обеих межфазных границах. С использованием длинноволнового разложения для системы уравнений Навье-Стокса удастся получить эволюционные уравнения для значений толщины слоя и межфазных концентраций. Рассматриваются процессы адсорбции-десорбции на обеих межфазных границах.

5.8. Постановка задачи

Рассматривается движение тонкого горизонтального слоя полярной вязкой несжимаемой жидкости (например, воды) с начальной толщиной h_0 , который заключен между твердой подложкой и паром соответствующей жидкости. Также будем считать, что начальная концентрация сурфактанта в объеме и на межфазных поверхностях пленки «жидкость – пар» и «жидкость – подложка» есть c_0 , Γ_{a0} , Γ_{s0} соответственно. Предполагается, что на свободной границе поверхностное натяжение является линейной функцией от поверхностной концентрации $\sigma = \sigma_0 - \mathcal{G}_c \Gamma_a$, где σ_0 есть поверхностное натяжение для чистой жидкости при отсутствии сурфактанта, концентрационный коэффициент поверхностного натяжения $\mathcal{G}_c$ можно установить экспериментально.

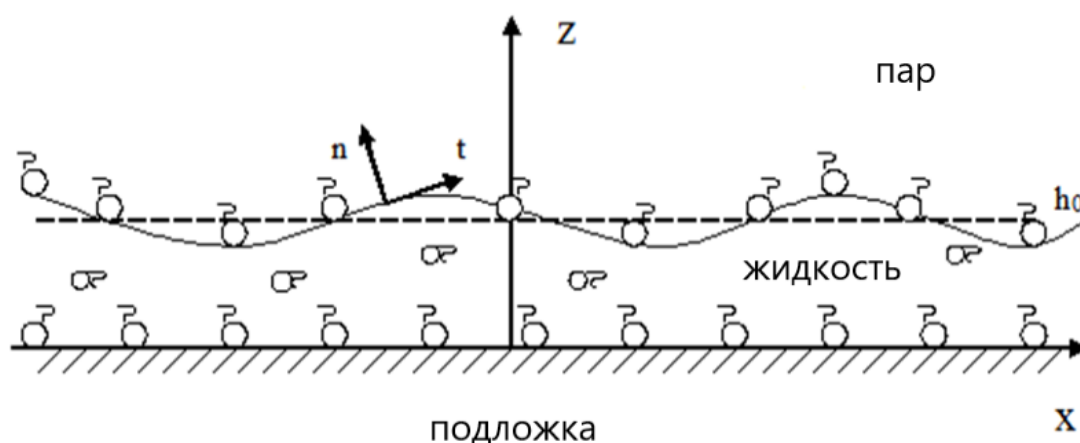


Рис.5.12. Геометрическая форма задачи

Декартовы координаты определим следующим образом: ось x направлена вдоль слоя, а ось z перпендикулярно (Рис. 5.12). Жидкость может испаряться в парообразную среду. Вектор скорости жидкости имеет две компоненты $v = (u, w)$, где u и w – проекции на оси x и z соответственно. Ввиду малой толщины слоя гравитационными эффектами в дальнейшем будем пренебрегать.

Уравнения движения пленки, а также конвективно-диффузионное уравнение для сурфактанта в объеме имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\rho(\partial_t u + u\partial_x u + w\partial_z u) &= -\partial_x(p + \varphi) + \mu \nabla^2 u, \\ \rho(\partial_t w + u\partial_x w + w\partial_z w) &= -\partial_z(p + \varphi) + \mu \nabla^2 w, \\ \rho(\partial_t \tilde{n} + u\partial_x \tilde{n} + w\partial_z \tilde{n}) &= D_b \nabla^2 \tilde{n}, \\ \partial_x u + \partial_z w &= 0.\end{aligned}\tag{5.39}$$

Здесь ρ – плотность жидкости, p – давление, φ – дополнительный потенциал энергии слоя, имеющий размерность химического потенциала и возникающий в результате межмолекулярного взаимодействия межфазных поверхностей, μ – динамическая вязкость, c – объемная концентрация сурфактанта в жидкости и D_b есть объемный коэффициент диффузии сурфактанта. Символом ∂_i обозначается производная по соответствующей координате, также введено обозначение $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial z^2$.

В работе [311] было показано, что в описании химического потенциала для ультратонких слоев кроме ван-дер-ваальсового межмолекулярного взаимодействия необходимо добавить второе слагаемое, которое возникает благодаря образованию на границе «подложка – жидкость» двойного электрического слоя. Кроме того, в работе [149] показано, что в задачах о растворимых сурфактантах на поверхности жидкости в химическом потенциале существует третье слагаемое, которое учитывает растворение сурфактанта в жидкости. Чем меньше молярная доля жидкости в растворе, тем ниже ее химический потенциал. Потенциал межмолекулярного взаимодействия φ выражается через свободную энергию межмолекулярного взаимодействия поверхности g , связь между этими величинами записывается следующим образом: $\varphi = dg / dh$. Величина φ определяется как

$$\varphi = \frac{A}{6\pi h^3} - \frac{S^P}{l_0} \exp \frac{d_0 - h}{l_0} + RT \ln c\tag{5.40}$$

где A – константа Гамакера, d_0 – радиус межмолекулярного взаимодействия и l_0 – корреляционное значение радиуса взаимодействия. Константа S^p может быть определена экспериментально, R – универсальная газовая постоянная.

5.9. Граничные условия задачи

Уравнение, описывающее перенос сурфактанта вдоль поверхностей, согласно работе [27], будем описывать следующим образом:

$$\begin{aligned}\partial_t \Gamma_a + \nabla_a \cdot (v_a \Gamma_a) + N \cdot \Gamma_a (v_a n) &= D_a \nabla_a^2 \Gamma_a + J_a \\ \partial_t \Gamma_s + \nabla \cdot (v_s \Gamma_s) &= D_s \nabla_s^2 \Gamma_s + J_s\end{aligned}\quad (5.41)$$

здесь Γ_a и Γ_s обозначают поверхностные концентрации на межфазных границах «жидкость – пар» и «жидкость – подложка», ∇_a есть оператор градиента на свободной поверхности, v_a и v_s есть скорости движения жидкости на соответствующих поверхностях, D_a и D_s – это коэффициенты поверхностной диффузии на границах, N – кривизна свободной поверхности. Величины J_a и J_s описывают обмен сурфактанта между объемом и поверхностями «жидкость – пар» и «жидкость – подложка» соответственно и выражаются в следующем виде:

$$\begin{aligned}J_a &= k_1 c|_{z=h} \cdot \left(1 - \frac{\Gamma_a}{\Gamma_{a=\infty}}\right) - k_2 \Gamma_a \\ J_s &= k_3 c|_{z=0} \cdot \left(1 - \frac{\Gamma_s}{\Gamma_{s=\infty}}\right) - k_4 \Gamma_s\end{aligned}\quad (5.42)$$

где k_1 и k_2 есть коэффициенты адсорбции и десорбции на свободной поверхности, а k_3 и k_4 являются коэффициентами адсорбции и десорбции для границы «жидкость – подложка». Величины $\Gamma_{a=\infty}$ и $\Gamma_{s=\infty}$ определяют

поверхностную концентрацию при максимальной компактности на соответствующих межфазных границах.

На границе «жидкость – твердое тело» ($z = 0$) будем использовать условие отсутствия потока сурфактанта сквозь твердую границу $\partial_z c = 0$, а для скорости запишем следующие условия: $w = 0$ и $u - \zeta \cdot \partial_z u = 0$, где ζ – параметр проскальзывания жидкости вдоль твердой подложки.

Под влиянием растворимого сурфактанта первоначально плоская свободная граница может деформироваться, и кинематическое условие на свободной границе $z = h(x, z, t)$ с учетом испарения E может быть представлено в стандартном виде:

$$\partial_t h + u \cdot \partial_x h - w = -\sqrt{1 + \partial_x^2 h} \cdot E \quad (5.43)$$

Нормальное и тангенциальное условия для тензора напряжений на верхней границе записываются следующим образом:

$$p + \mu \frac{2\partial_x u (1 - (\partial_x h)^2) + \partial_x h (\partial_x w + \partial_z u)}{(1 + (\partial_x h)^2)} + \sigma \frac{\partial_x^2 h}{(1 + (\partial_x h)^2)^{3/2}} = 0 \quad (5.44)$$

$$\mu [(\partial_z u + \partial_x w) \cdot (1 - (\partial_x h)^2) - 4\partial_x h \partial_x u] - (1 + (\partial_x h)^2)^{1/2} \partial_x \sigma = 0$$

Длинноволновое приближение, которое мы будем использовать ниже, заключается в следующем: выбираем длину волны δ в качестве характерного размера вдоль оси x , а в качестве характерного масштаба вдоль оси z выберем толщину слоя h_0 . Будем считать, что отношение $\varepsilon = 2\pi h_0 / \delta = h_0 / L \ll 1$. Используя данное приближение, запишем характерные безразмерные масштабы задачи:

$$H = \frac{h}{h_0}, Z = \frac{z}{h_0}, X = \frac{\varepsilon x}{h_0}, C = \frac{c}{c_0}, W = \frac{w}{\varepsilon U_0}, T = \frac{\varepsilon U_0 t}{h_0}, (P, \Phi) = \frac{\varepsilon h_0}{\mu U_0} (p, \varphi), \\ T = \frac{\sigma}{\sigma_0}, \Gamma_A = \frac{\Gamma_a}{\Gamma_{a0}}, \Gamma_s = \frac{\Gamma_s}{\Gamma_{s0}}, J_A = \frac{J_a}{J_0}, J_s = \frac{J_s}{J_0}, J_0 = \frac{U_0 \Gamma_0}{L} = \frac{\varepsilon U_0 \Gamma_0}{h_0}, \Sigma = \frac{E}{E_0} \quad (5.45)$$

здесь U_0 обозначает характерную горизонтальную скорость. В безразмерных переменных уравнения (5.39) примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
\varepsilon \text{Re}(\partial_T U + U \partial_X U + W \partial_Z U) &= -\partial_X (P + \Phi) + \varepsilon^2 (\partial_Z^2 U + \varepsilon^2 \partial_X^2 U) \\
\varepsilon^3 \text{Re}(\partial_T W + U \partial_X W + W \partial_Z W) &= -\partial_Z (P + \Phi) + \varepsilon^2 (\partial_Z^2 W + \varepsilon^2 \partial_X^2 W) \\
(\partial_T C + U \partial_X C + W \partial_Z C) &= \frac{1}{Pe} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \partial_Z^2 C + \partial_X^2 C \right) \\
\partial_X U + \partial_Z W &= 0
\end{aligned} \tag{5.46}$$

В данной системе уравнений имеются два безразмерных коэффициента: число Рэлея $\text{Re} = \rho U_0 h_0 / \mu$ и объемное число Пекле $Pe = U_0 L / D_b$. Безразмерные уравнения для поверхностных концентраций примут вид:

$$\begin{aligned}
\partial_T \Gamma_A + (\partial_X + \partial_X H \partial_Z) \cdot (U \cdot \Gamma_A) &= \frac{1}{Pe_a} \partial_X^2 \Gamma_A + K_1 C|_{Z=H} (1 - \Gamma_A) - K_2 \Gamma_A, \\
\partial_T \Gamma_S + \Gamma_S \partial_X U + U \partial_X \Gamma_S &= \frac{1}{Pe_s} \partial_X^2 \Gamma_S + K_3 C|_{Z=0} \left(1 - \frac{\Gamma_S}{\gamma} \right) - K_4 \Gamma_S, \\
\gamma &= \Gamma_{S=\infty} / \Gamma_{A=\infty}
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Здесь приведены обозначения для безразмерных поверхностных чисел Пекле, а также безразмерных параметров адсорбции-десорбции: $Pe_a = \varepsilon D_a / h_0 U_0$ и $Pe_s = \varepsilon D_s / h_0 U_0$, $K_1 = k_1 / \varepsilon U_0$, $K_2 = k_2 h_0 / \varepsilon U_0$, $K_3 = k_3 / \varepsilon U_0$, $K_4 = k_4 h_0 / \varepsilon U_0$ соответственно.

Перейдем теперь к записи граничных условий в безразмерном виде. На твердой подложке безразмерные граничные условия имеют вид

$$Z = 0 : U - \zeta_0 \partial_Z U = 0, \quad W = 0, \quad \partial_Z C = 0 \tag{5.48}$$

здесь $\zeta_0 = \zeta / h_0$ – это параметр проскальзывания жидкости вдоль подложки. Будем считать, что в приповерхностном слое у подложки жидкость не испытывает напряжений, а также не испытывает прилипания к подложке. Скорость жидкости в приповерхностном слое ненулевая и направлена вдоль твердой границы.

На свободной границе безразмерные условия запишем следующим образом:

$$\begin{aligned}
Z = H: \quad & \partial_T H + U \partial_X H - W = -Ep \cdot \Sigma \\
& -P + \frac{2\varepsilon^2}{Q^2} \left\{ \partial_X U \cdot (\varepsilon^2 (\partial_X H)^2 - 1) - (\varepsilon^2 \partial_X W + \partial_Z U) \partial_X H \right\} = Ca \frac{\partial_X^2 H}{Q^3} \\
& (1 - \varepsilon^2 (\partial_X H)^2) \cdot (\partial_Z U + \varepsilon^2 \partial_X W) - 4\varepsilon^2 \partial_X H \cdot \partial_X U = Q \cdot \partial_X \Lambda \\
& Q = \left[1 + \varepsilon^2 (\partial_X H)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad Ep = E_0 / \varepsilon U_0, \quad \Lambda = \varepsilon \sigma / \mu U_0
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Безразмерное капиллярное число определено следующим образом: $Ca = \varepsilon^3 \sigma / \mu U_0$

5.10. Длинноволновое приближение. Эволюционные уравнения

Решение системы уравнений (5.46, 5.47) и граничных условий (5.48, 5.49) будем искать путем разложения искомых величин в ряд по малому параметру ε . Представим переменные компонент вектора скорости, давления и концентрации в виде

$$\begin{aligned}
U &= U_0 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \dots \\
W &= W_0 + \varepsilon W_1 + \varepsilon^2 W_2 + \dots \\
P &= P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \dots \\
C &= C_0 + \varepsilon^2 C_1 + \varepsilon^4 C_2 + \dots
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Сначала получим эволюционное уравнение для жидкой пленки. В первом порядке малости по ε задача приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned}
\partial_X (P + \Phi) &= \partial_Z^2 U \\
\partial_Z (P + \Phi) &= 0 \\
\partial_X U + \partial_Z W &= 0
\end{aligned} \tag{5.51}$$

$$Z = 0: \quad U - \beta \partial_Z U = 0, \quad W = 0.$$

$$\begin{aligned}
Z = H: \quad & \partial_T H + U \partial_X H - W = Ep \cdot \Sigma, \quad P + Ca \partial_X^2 H = 0, \\
& \partial_Z U = \partial_X \Lambda, \quad \partial_X \Lambda = -Ma_c \partial_X \Gamma_A
\end{aligned} \tag{5.52}$$

В уравнении (5.52) появляется безразмерное концентрационное число Марангони, которое имеет вид $Ma_c = \mathcal{G}_c \Gamma_{a0} / \sigma_0$. Проинтегрируем первое уравнение (5.52) дважды по координате Z от нуля до $H(X, T)$ и получим:

$$U = \frac{Z^2}{2} \partial_X (P + \Phi) + I_1 Z + I_2 \quad (5.53)$$

Здесь I_1 и I_2 – константы интегрирования. Определяя их с использованием граничных условий на обеих границах, найдем горизонтальную скорость слоя в виде

$$U = \left(\frac{Z^2}{2} - Z(H + \zeta_0) \right) \partial_X (P + \Phi) + (Z + \zeta_0) \partial_X \sigma \quad (5.54)$$

Проинтегрируем уравнение сохранения массы из (5.51) по вертикальной координате с учетом граничных условий (5.52) и получим эволюционное уравнение для толщины слоя:

$$\partial_T H + \partial_X \left(\int U dZ \right) + Ep \cdot \Sigma = 0 \quad (5.55)$$

Обратим внимание на описание процесса испарения на свободной поверхности. Используя [325], запишем испарение в виде разности химических потенциалов жидкости ϕ_l и пара ϕ_{vapor} : $E = \psi (\phi_l - \phi_{\text{vapor}})$, где ψ – параметр, характеризующий интенсивность испарения (данный параметр может быть вычислен из кинетической теории газа или получен экспериментальным путем). Тогда уравнение (5.55) и соответствующие безразмерные параметры примут вид:

$$\partial_T H + \partial_X \left(\int U dZ \right) + \Omega \left[\frac{1}{H^3} + e^{-\chi H} - \partial_X^2 H + W - S \right] = 0 \quad (5.56)$$

$$\Omega = \frac{\psi S^{PN}}{\varepsilon \rho U_0}, \quad W = \frac{RT c_9}{S^{PN}}, \quad S = \frac{\rho \mu_{\text{vap}}}{S^{PN}}, \quad S^{PN} = \frac{S^P}{l_0} \exp \left[\frac{d_0}{l_0} \right].$$

Выражая второе слагаемое из уравнения (5.54), получим окончательный вид эволюционного уравнения:

$$\begin{aligned} \partial_T H - \partial_X \left[H^2 \left(\frac{H}{3} + \frac{\zeta_0}{2} \right) \partial_X (P + \Phi) \right] + \frac{Ma_c}{2} \partial_X \left[(H^2 + \zeta_0 H) \partial_X \Gamma_A \right] \\ + \Omega \left[-\frac{1}{H^3} + e^{-\chi H} - \partial_X^2 H + W \ln C - S \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.57)$$

Присоединенное давление $P + \Phi$ имеет форму

$$P + \Phi = -Ca \partial_X^2 H - \frac{1}{H^3} + e^{-\chi H} + W \ln C \quad (5.58)$$

Для того чтобы записать эволюционные уравнения для концентрации на обеих поверхностях раздела, необходимо получить уравнение для объемной концентрации. Применяя разложение (5.52) к уравнению объемной концентрации (5.46), запишем это уравнение в нулевом порядке:

$$\partial_Z^2 C_0 = 0 \quad (5.59)$$

Учитывая граничные условия для сурфактанта на твердой границе (6.10), будем считать объемную концентрацию равномерно распределенной по толщине слоя жидкой пленки $C_0 = (X, T)$. Таким образом, в нулевом приближении будем считать, что в приповерхностных слоях объемная концентрация равна поверхностной:

$$C_0|_{Z=0} = \Gamma_S, \quad C_0|_{Z=H} = \Gamma_A \quad (5.60)$$

Тогда, интегрируя (5.59) дважды по вертикальной координате с использованием (5.60), получим линейное распределение концентрации относительно толщины слоя.

$$C_0 = (\Gamma_A - \Gamma_S) \cdot \frac{Z}{H} + \Gamma_S \quad (5.61)$$

Теперь обратимся к выводу эволюционных уравнений для поверхностных концентраций. Учитывая длинноволновое приближение и тот факт, что понятие поверхностной концентрации имеет смысл только на поверхности, будем игнорировать слагаемые с ∂_Z . Тогда уравнение (5.41) для концентрации на свободной границе будет иметь вид

$$\partial_T \Gamma_A + \partial_X (U \Gamma_A) + \Gamma_A \partial_X H \partial_Z U = \frac{1}{Pe_a} \partial_X^2 \Gamma_A + K_1 \Gamma_A (1 - \Gamma_A) - K_2 \Gamma_A \quad (5.62)$$

Эволюционное уравнение для концентрации на межфазной поверхности ($z = 0$) запишем следующим образом:

$$\partial_T \Gamma_s + \partial_X (U \Gamma_s) = \frac{1}{Pe_s} \partial_X^2 \Gamma_s + K_3 \Gamma_s \left(1 - \frac{\Gamma_s}{\gamma} \right) - K_4 \Gamma_s \quad (5.63)$$

Таким образом, система эволюционных уравнений (5.57, 5.62, 5.63) и граничных условий (5.52, 5.60) описывает испаряющуюся тонкую пленку при наличии сурфактанта на межфазных поверхностях с учетом процессов адсорбции и десорбции.

5.11. Исследование устойчивости

Основное состояние данной системы является переходным, так как одна толщина пленки в результате движения уменьшается, а концентрация сурфактанта на межфазных границах изменяется в различных диапазонах. В данном случае исследование устойчивости предполагает, что стационарное решение не зависит от времени, и исследуются рост или затухание возмущений в предположении того, что их время релаксации много меньше времени релаксации основного состояния. Из эволюционного уравнения для толщины слоя (5.57) можно получить величину горизонтальной скорости движения контактной линии:

$$U_0 = \frac{\Omega}{(h_{02} - h_{01})} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{1}{H^3} + e^{-\chi H} + W \ln C - S \right) dx \quad (5.64)$$

Используя экспериментальные значения для воды и подложки из [24] и выбирая в качестве сурфактанта используемый в эксперименте органосиликон, получаем значения для безразмерных параметров данной системы. Набор безразмерных параметров адсорбции-десорбции: $K_1 = 1$, $K_2 = 10^{-3}$, $K_3 = 1$, $K_4 = 10^{-3}$. Остальные

безразмерные параметры имеют следующие значения: $Ca = 10^{-3}$, $\chi = 1.085$, $\gamma = 1$, $W_0 = 0.03$, $\Omega = 10^{-3}$, $\xi = 10^{-3}$, $Pe_s = 5$, $Pe_a = 10^{-2}$.

На Рис. 6.2 изображен график зависимости скорости движения стационарного фронта испаряющейся жидкости от безразмерного параметра испарения Ω . Как видно из рисунка, эта зависимость линейна. Важно отметить, что при $\Omega \rightarrow 0$ скорость также стремится к нулевому пределу.

Для исследования устойчивости данной системы представим все основные величины в виде суммы основного состояния и возмущения $H = H_0 + \tilde{H}$, $\Gamma_s = \Gamma_{s0} + \tilde{\Gamma}_s$, $\Gamma_a = \Gamma_{a0} + \tilde{\Gamma}_a$. Представим эти возмущения в «нормальном» виде $\tilde{A} = \exp[\lambda t + ikx]$, где λ – декремент возмущений, т. е. описывает поведение возмущения со временем ($\lambda > 0$ ведет к росту возмущений, а отрицательное значение декремента соответствует их затуханию), k есть волновое число вдоль оси x .

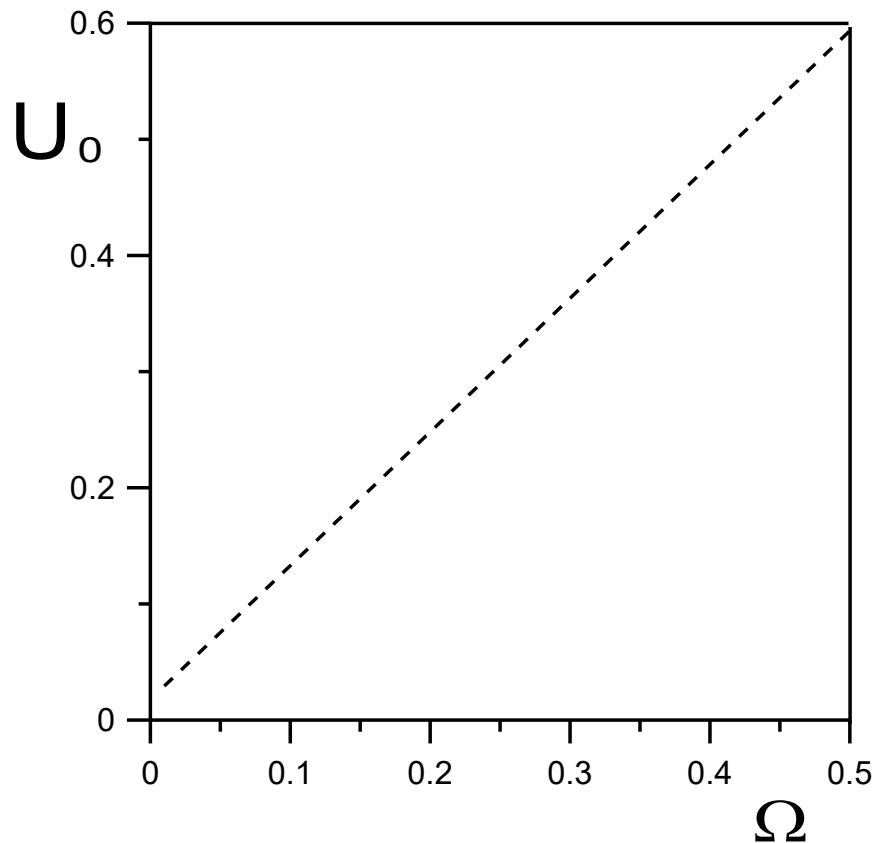


Рис.5.13. Зависимость скорости распространения фронта испарения жидкости от безразмерного параметра испарения Ω .

Подставляя эти возмущения в систему эволюционных уравнений для толщины слоя и межфазных границ, получим задачу на собственные значения, где собственным числом является декремент возмущений λ .

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \tilde{H} \\ \tilde{\Gamma}_A \\ \tilde{\Gamma}_S \end{vmatrix} = 0 \quad (5.65)$$

где

$$A_{11} = \lambda + H_0^2 \left(\frac{H_0}{3} + \zeta_0 \right) \cdot \left[Cak^4 + k^2 \left(\frac{3}{H_0^4} - \chi \cdot \exp(-\chi H_0) \right) \right] + \Omega \left(\frac{3}{H_0^4} - \chi \cdot \exp(-\chi H_0) + k^2 \right),$$

$$A_{12} = k^2 H_0 Ma_c \left(\frac{H_0}{2} + \zeta_0 \right),$$

$$A_{13} = \left[\Omega - H_0 k^2 \left(\frac{H_0}{3} + \beta_0 \right) \right] \cdot \gamma,$$

$$A_{21} = H_0 \Gamma_{A0} \left(\frac{H_0}{2} + \zeta_0 \right) \left[Cak^4 + k^2 \left(\frac{3}{H_0^4} - \chi \cdot \exp(-\chi H_0) \right) \right],$$

$$A_{22} = \lambda + Ma_c k^2 (H_0 + \beta_0) \Gamma_{a0} + \frac{k^2}{Pe_a} - K_1 (1 - 2\Gamma_{A0}) + K_2,$$

$$A_{23} = -H_0 \Gamma_{A0} \left(\frac{H_0}{2} + \beta_0 \right) \cdot \frac{k^2}{\gamma - \Gamma_{S0}},$$

$$A_{31} = H_0 \zeta_0 \Gamma_{S0} \left[Cak^4 + k^2 \left(\frac{3}{H_0^4} - \chi \cdot \exp(-\chi H_0) \right) \right], \quad A_{32} = Ma_c k^2 \zeta_0 \Gamma_{s0},$$

$$A_{33} = \lambda + \frac{k^2}{Pe_s} - H_0 \beta_0 \Gamma_{S0} \cdot \frac{k^2}{\gamma - \Gamma_{S0}} - \frac{K_3}{\gamma} (\gamma - 2\Gamma_{S0}) + K_4$$

Исследуя (6.27), можно прийти к выводу, что на устойчивость данной системы могут влиять четыре фактора: испарение, диффузия и растворимость

сурфактанта и концентрационный эффект Марангони. В этой главе речь пойдет об исследовании влияния концентрационно-капиллярного эффекта на устойчивость такой «сэндвич»-структуры.

Проведем исследование данного уравнения при нулевом волновом числе ($k = 0$).

Тогда коэффициенты системы уравнений (5.65) примут следующие значения:

$$A_{11}^0 = \lambda + \Omega \left(\frac{3}{H_0^4} - \chi e^{-\chi H_0} \right), \quad A_{13}^0 = \Omega \gamma,$$

$$A_{31}^0 = 0, \quad A_{33}^0 = \lambda - \frac{K_3}{\gamma} (\gamma - 2\Gamma_{s0}) + K_4$$

Решая полученное уравнение, находим три различных декремента затухания для длинноволновой моды:

$$\lambda_1^0 = -\Omega \left(\frac{3}{H_0^4} - \chi \cdot \exp(-\chi H_0) \right), \quad \lambda_2^0 = K_1(1 - 2\Gamma_{A0}) - K_2, \quad \lambda_3^0 = \frac{K_3}{\gamma} (\gamma - 2\Gamma_{s0}) - K_4. \quad (5.66)$$

Первая мода отвечает за процесс испарения и всегда устойчива. При увеличении безразмерного параметра испарения устойчивость данной моды повышается, что совпадает с результатами, приведенными в эксперименте. Другие две моды неустойчивости λ_2^0 и λ_3^0 , которые описывают процессы адсорбции и десорбции на свободной границе «жидкость – пар» и межфазной границе «жидкость – твердая подложка», при различных наборах параметров могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Как видно из уравнения (5.66), знак декремента затухания определяется начальными значениями концентрации Γ_{A0} и Γ_{s0} на границе фаз. При малых значениях концентрации на межфазной границе для наиболее опасной (голдстоуновской) моды декремент имеет положительное значение, что соответствует неустойчивому положению для системы. С увеличением концентрации оба декремента стремятся в область устойчивых значений.

Для численного решения системы уравнений (5.65) были выбраны следующие параметры: $Ca = 1$, $\chi = 1.085$, $\gamma = 2[209]$, $\beta_0 = 2[337]$, параметры

адсорбции $K_1=K_3=0.9$, а параметры десорбции $K_2=K_4=0.1$ (считаем, что сурфактант слабо растворяется в растворе). Также предполагается, что диффузионные процессы быстры ($Pe_a=Pe_s=1$), а также будем рассматривать ситуацию, когда начальные концентрации сурфактанта в объеме и на поверхности малы ($\Gamma_{A0}=\Gamma_{S0}=0.1$). Значение для концентрационного числа Марангони будет равно единице ($Ma_c=1$), также будем считать, что испарение мало, $\Omega=0.01$. Для таких параметров задачи дисперсионное соотношение принимает вид, который представлен на Рис. 5.14. Черным цветом обозначена концентрационная мода для межфазной границы «жидкость – подложка», красный цвет отображает концентрационную моду для свободной границы, а синим цветом представлена мода испарения. Как видно из этого рисунка, происходит взаимодействие двух монотонных мод (концентрационной на свободной границе и испарения) с образованием колебательной моды (на рисунке она отображена пунктирной линией).

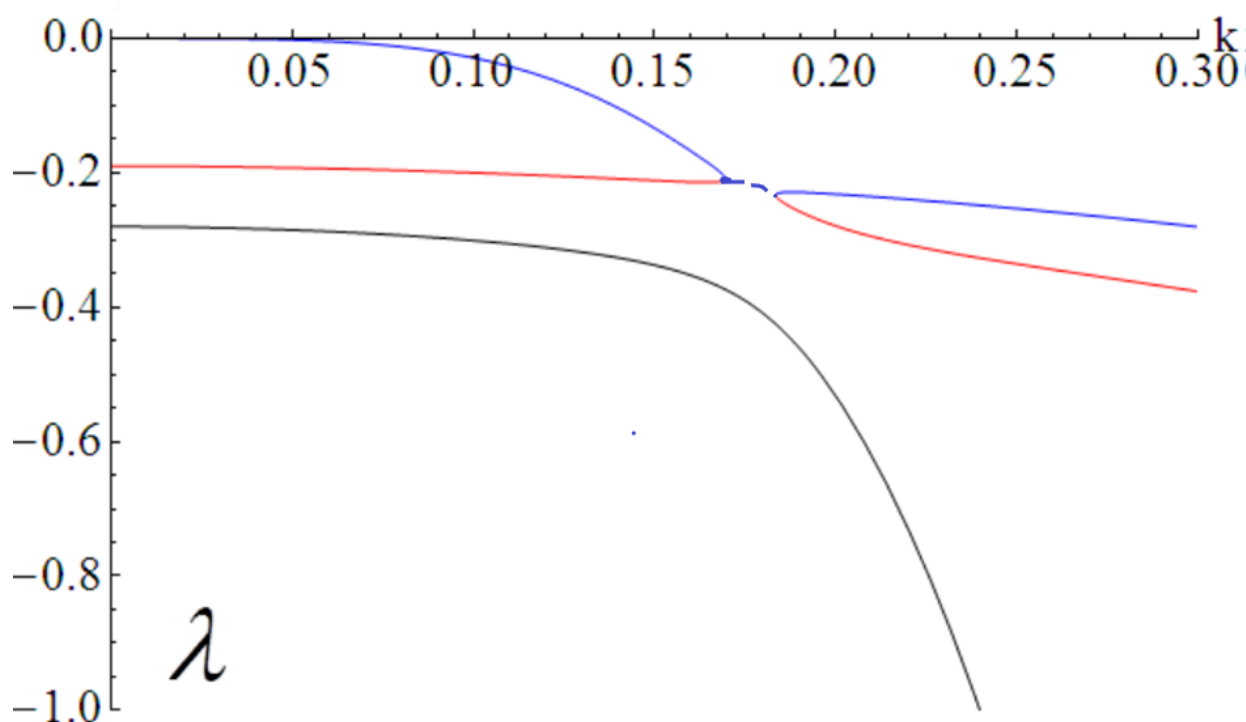


Рис.5.14. Дисперсионное соотношение декремента затухания от волнового числа.

Дальнейшие исследования показали, что данная система слабо чувствительна к изменению параметра испарения, с увеличением испарения наблюдается небольшое повышение устойчивости. Отметим, что для данных параметров все три различных вида возмущений затухают.

Результат, который получается, если предположить, что поверхностная диффузия на свободной границе «жидкость – пар» велика ($Pe_a=100$, $Pe_s=1$), приведен на Рис. 5.15. Все остальные параметры остаются прежними. Из анализа данного рисунка можно сделать вывод о том, что взаимодействие между концентрационной модой для свободной границы и модой испарения становится более сложным с образованием обособленных областей монотонной устойчивости. Как и в предыдущем рисунке, моды являются затухающими. Результаты расчетов показывают, что для всех положительных значений концентрационного числа Марангони все моды являются затухающими. Из этой части исследования можем сделать вывод, что эффект Марангони не влияет на устойчивость данной системы, но может повлиять на взаимодействие одной из мод растворимости с модой испарения, однако это влияние заметно лишь при небольших числах Марангони.

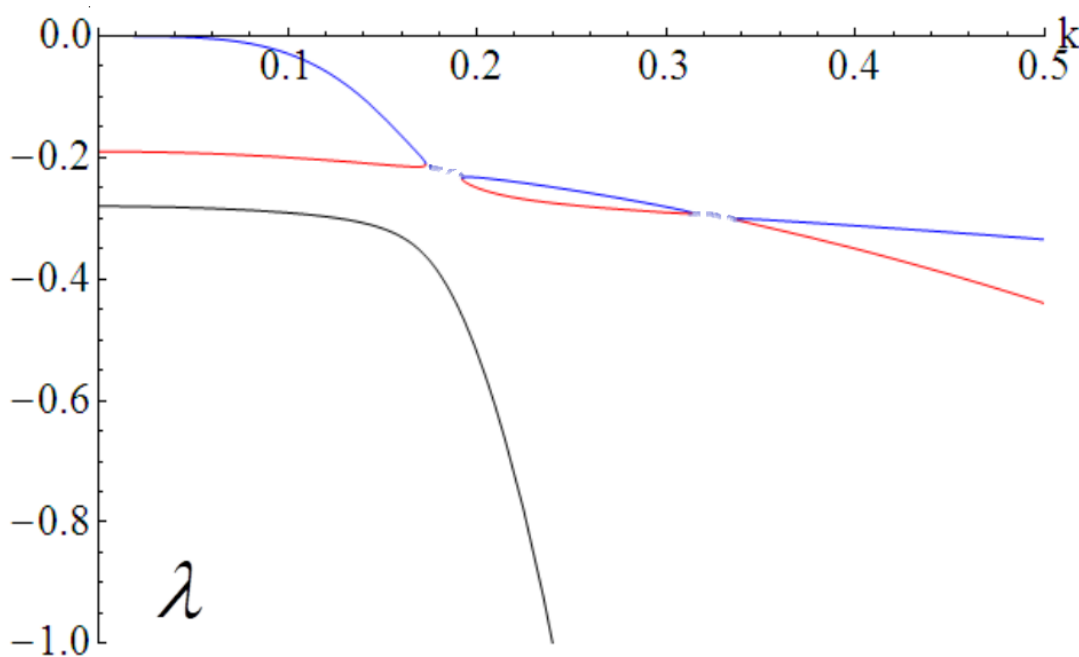


Рис.5.15. Дисперсионное соотношение декремента затухания от волнового числа при большом значении параметра поверхностной диффузии $Pe_a=100$.

Результаты исследования показывают, что такая сложная система становится неустойчивой по отношению к возмущениям только при отрицательных значениях числа Марангони. Такие вещества называются поверхностно-инактивными (ПИВ). У них поверхностное натяжение самого вещества больше, чем у растворителя. Они не могут накапливаться в поверхностном слое, так как это приводило бы к увеличению σ жидкости и свободной поверхностной энергии, что термодинамически невозможно. По отношению к воде поверхностно-инактивными веществами являются неорганические электролиты: кислоты, щелочи, соли, а также некоторые органические соединения, например, муравьиная кислота.

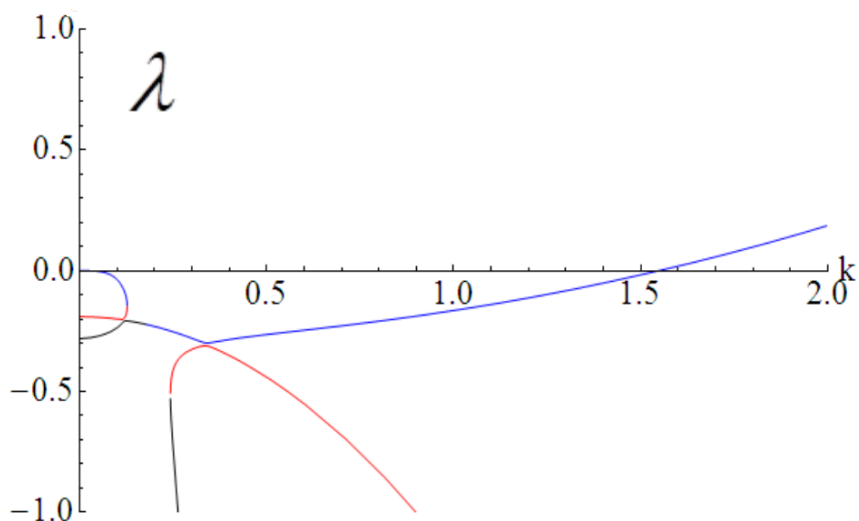


Рис.5.16. Дисперсионное соотношение декремента затухания от волнового числа при отрицательном числе Марангони $Ma_c = -5$. Все безразмерные параметры аналогичны Рис.5.14.

График зависимости дисперсионного соотношения при отрицательном числе Марангони приведен на Рис. 5.16. Как видно из рисунка, неустойчивость наступает относительно моды испарения и эта неустойчивость лежит в области больших волновых чисел. Этот результат достаточно хорошо согласуется с данными, приведенными в работе [166], где тоже было отмечено, что наиболее опасным является эффект испарения.

Основные выводы по Главе 5.

В пятой главе теоретически исследуется процесс испарения тонкого слоя полярной жидкости (воды) со свободной поверхностью, расположенного на твердой подложке в присутствии сурфактанта.

В первой задаче на свободной границе «жидкость – пар» находится растворимый сурфактант. Коэффициент поверхностного натяжения является линейной функцией от поверхностной концентрации сурфактанта. Поверхностная энергия линии контакта «твердое тело – жидкость» представляется в виде немонотонной функции относительно толщины слоя и является суммой ван-дер-ваальсового взаимодействия и специфического взаимодействия двойного электрического слоя границы. В рамках длинноволнового приближения в системе уравнений Навье-Стокса изучается влияние растворимого сурфактанта на динамику и устойчивость движения фронта испарения тонкой жидкостной пленки.

Исследована устойчивость движения фронта испаряющегося тонкого слоя полярной жидкости при наличии сурфактанта на свободной поверхности. Для стационарного состояния обнаружены две независимые моды возмущения. Одна из мод определяет поведение концентрационных возмущений, а вторая показывает эволюцию возмущений в процессе движения жидкости при испарении. С увеличением безразмерного параметра испарения устойчивость системы увеличивается, а рост концентрационного параметра Марангони приводит систему в положение неустойчивости. Численные расчеты качественно подтверждают результаты линейной теории. Установлено, что тип структурообразования на поверхности испаряющейся пленки при наличии сурфактанта имеет существенные отличия от испаряющейся пленки в отсутствие сурфактанта. Это отличие может являться индикатором примесей для различных технологических приложений.

Впервые исследуется устойчивость основного состояния системы уравнений относительно параметров короткодействующего взаимодействия, которое является отличительным признаком полярной жидкости. В данном случае в качестве такого специфического взаимодействия выступает потенциал двойного электрического слоя на границе раздела «твердое тело – жидкость». Обнаружено, что голдстоуновская мода может существовать только для неустойчивости по отношению к испарению. Найдено, что такая мода по отношению к возмущениям всегда устойчива. Для «нейтральных» возмущений приведены графики зависимости концентрационного числа Марангони от волнового числа при различных значениях безразмерного параметра испарения и объемного числа Пекле. Из анализа полученных данных можно сделать вывод о том, что повышение параметров испарения и коэффициента диффузии приводит к повышению устойчивости для данной системы. Исследуются области существования колебательной моды относительно возмущений.

Во второй части главы исследована устойчивость движения фронта испаряющегося ультратонкого слоя полярной жидкости при наличии сурфактанта на обеих межфазных поверхностях. Для стационарного состояния обнаружены три независимые моды возмущения. Две из мод определяют поведение концентрационных возмущений на границах раздела, а третья показывает эволюцию возмущений в процессе движения жидкости при испарении. С увеличением безразмерного параметра испарения устойчивость системы увеличивается. Для всех положительных значений безразмерного числа Марангони все возмущения для различных типов неустойчивости затухают. При отрицательном числе Марангони имеет место неустойчивость, связанная с механизмом испарения. Для рассматриваемой нами «сэндвич»-структуры обнаружен колебательный режим, что также имеет место и в эксперименте. Найдены качественные совпадения результатов теоретического исследования с полученными в эксперименте данными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе представленных в настоящей работе результатов можно сделать следующие выводы:

1. Результаты расчетов эволюционного уравнения для тонкого слоя полярной жидкости показывают, что профиль фронта испаряющейся тонкой пленки существенно меняется при изменении безразмерного параметра испарения. Для малых значений безразмерного параметра испарения имеется характерное вздутие для «толстого» слоя жидкости, которое характеризует массоперенос в направлении вертикальной оси. При больших значениях параметра испарения такого вздутия не наблюдается.
2. При исследовании устойчивости было обнаружено, что относительно поперечных возмущений для малых безразмерных параметров испарения существует область, где возмущения могут нарастать, причем эта неустойчивость имеет длинноволновый характер. Для области неустойчивости приводится зависимость критического значения волнового числа от безразмерного параметра испарения и исследуется зависимость декремента возмущений от волнового числа при различных значениях химического потенциала пара. Обнаружено, что с увеличением модуля значения химического потенциала пара происходит повышение устойчивости фронта движущейся жидкости относительно поперечных возмущений.
3. В результате трехмерного численного моделирования эволюционного уравнения движения тонкого слоя полярной жидкости было установлено, что при больших параметрах безразмерного числа испарения профиль движущегося фронта жидкости устойчив по отношению к продольным и поперечным возмущениям. Однако, когда значения параметра испарения имеют малое значение, имеет место неустойчивость по отношению к

поперечным возмущениям, что приводит к образованию на подвижной границе пальцеобразных структур. Было проведено сравнение полученных численных результатов с экспериментальными данными, которое показало достаточно хорошее согласие как по качественному, так и по количественному соотношению.

4. Исследовано эволюционное уравнение, описывающее поведение испаряющейся тонкой пленки полярной жидкости при наличии термокапиллярного эффекта на межфазной границе «жидкость – пар». Приведены профили движения фронта испаряющегося тонкого слоя полярной жидкости для различных значений безразмерного числа Марангони. В диапазоне малых значений безразмерного параметра испарения, где имеет место неустойчивость относительно поперечных возмущений, эффект Марангони приводит к увеличению области неустойчивости. Впервые было показано, что для поперечных возмущений значение длинноволновой (голдстоуновской) моды зависит от безразмерного числа Марангони. С увеличением безразмерного числа Марангони происходит понижение устойчивости системы относительно длинноволновой моды, хотя она всегда остается в области устойчивости. Установлено, что наличие термокапиллярного эффекта может приводить к потере устойчивости движения тонкого слоя полярной жидкости с образованием пальцеобразной структуры поверхности.
5. В рамках линейной теории устойчивости изучена двухслойная система «воздух – слабопроводящая жидкость», заключенная между обкладками плоского конденсатора. Инжекция заряда производится через свободную деформируемую поверхность неизотермической жидкости, коэффициент поверхностного натяжения которой линейно зависит от температуры. Из-за большой подвижности заряда в воздухе по отношению к жидкости возмущения заряда и поля в воздушной прослойке можно считать быстро затухающими и при исследовании устойчивости системы рассматривать

только жидкость. В результате численно проведенных расчетов (методом Рунге-Кутты-Мерсона) было получено, что взаимодействие инжекционного и термокапиллярного механизмов приводит к дестабилизации относительно монотонных возмущений при подогреве со стороны твердой границы ($Ma > 0$). При $Ma < 0$ (подогрев со стороны свободной поверхности) происходит повышение устойчивости. Для инжекционного механизма электроконвекции найдены две нижние моды неустойчивости. При $Ma > Ma_{cr}$ происходит их слияние и образуется колебательная мода неустойчивости. Найдена зависимость частоты колебаний от волнового числа.

6. Произведено исследование в рамках длинноволнового приближения системы уравнений для изучения влияния растворимого сурфактанта на динамику и устойчивость движения фронта испарения тонкой жидкостной полярной пленки. Рассматривается режим быстрой кинетики сурфактанта со свободной границы в объеме жидкости. Получены эволюционные уравнения для толщины слоя и объемной концентрации сурфактанта. Найдено, что присутствие на поверхности растворимого сурфактанта приводит к существенному изменению пространственных структур на поверхности испаряющегося тонкого слоя полярной жидкости. Наблюдается образование провалов на поверхности «толстого» слоя жидкости. С течением времени эти «ямы» увеличиваются и достигают значения «тонкого» молекулярного слоя. В дальнейшем площадь провалов увеличивается, и в результате слой жидкости принимает значение только одного устойчивого «молекулярного» состояния.
7. Исследована устойчивость движения фронта испаряющегося тонкого слоя полярной жидкости при наличии сурфактанта на свободной поверхности по отношению к «нормальным» возмущениям. Для стационарного состояния обнаружены две независимые моды

возмущения. Одна из них определяет поведение концентрационных возмущений, а вторая показывает эволюцию возмущений в процессе движения жидкости при испарении. Существенным отличием этих двух мод друг от друга является тот факт, что для концентрационной моды неустойчивости при $k=0$ декремент тоже равен нулю, тогда как для моды испарения при значении волнового числа, равном нулю, имеет место голдстоуновская мода $\lambda \neq 0$. Рост значений безразмерного концентрационного числа Марангони приводит к понижению устойчивости системы и образованию области неустойчивости. С увеличением безразмерного параметра испарения устойчивость системы по отношению к моде испарения увеличивается. Численные расчеты качественно подтверждают результаты линейной теории.

8. Исследована устойчивость движения фронта испаряющегося ультратонкого слоя полярной жидкости при наличии сурфактанта на обеих межфазных поверхностях. Для стационарного состояния обнаружены три независимые моды возмущения. Две из мод определяют поведение концентрационных возмущений на границах раздела, а третья показывает эволюцию возмущений в процессе движения жидкости при испарении. С увеличением безразмерного параметра испарения устойчивость системы увеличивается. Для всех положительных значений безразмерного числа Марангони все возмущения для различных типов неустойчивости затухают. При отрицательном числе Марангони имеет место неустойчивость, связанная с механизмом испарения. Для рассматриваемой нами «сэндвич»-структуры обнаружен колебательный режим, что также имеет место и в эксперименте. Найдены качественные совпадения результатов теоретического исследования с полученными в эксперименте данными.

Список литературы

1. Апфельбаум М.С. Об образовании объемного заряда в слабопроводящих средах // М.С. Апфельбаум, В.А. Полянский // Магнитная гидродинамика. – 1982. – № 1. – С. 71-76.
2. Безуглый Б.А. Эффект задержки термокапиллярного отклика слоя прозрачной жидкости при лазерном нагреве поглощающей подложки / Б.А. Безуглый, С.И. Чемоданов // Журнал Технической Физики – 2005. – Т. 75, № 9. – С. 136-138.
3. Белоножко Д.Ф. Нелинейные периодические волны на заряженной поверхности вязкой жидкости, покрытой пленкой поверхностно-активного вещества / Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев // Журнал Технической Физики. – 2004. – Т. 74, № 11. – С. 29-37.
4. **Бирих Р.В. Влияние конвекции Марангони на инжекционный механизм неустойчивости / Р.В. Бирих, А.В. Люшнин // Журнал Технической Физики. – 2000. – Т. 70, № 1. – С. 19-23.**
5. Болога М.К. Электродиффузия и теплообмен / М.К. Болога, Ф.П. Гросу, И.А. Кожухарь. – Изд-во «Штиинца», Кишинев. – 1977. – 320 С.
6. Брацун Д.А. Динамика формирования адсорбированной пленки на поверхности многокомпонентных растворов ПАВ / Д.А. Брацун, А.И. Мизев, А.И. Трофименко // Конвективные течения... Пермь, ПГПУ. – 2011. – Вып. 5. – Стр. 61-77.
7. Верещага А.Н. Надкритичные режимы униполярной конвекции в замкнутой полости / А.Н. Верещага, Е.Л.Тарунин // Численное и экспериментальное моделирование гидродинамических явлений в невесомости, АН СССР, Уральское отделение. – 1988. – С. 93-99.
8. Гершуни Г.З. Конвективная неустойчивость несжимаемой жидкости / Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий. – Изд-во «Наука», Москва. – 1972. – 392 С.

9. Гончарова О.Н. Моделирование течений в условиях тепло- и массопереноса на границе / О.Н. Гончарова // Известия Алтайского университета. – 2012. – Т. 2, № 1. – С. 73-76.
10. Гончарова О.Н. Математическое моделирование термокапиллярных течений в тонком слое жидкости с учетом испарения. / О.Н. Гончарова, Е.В. Резанова, Я.А. Тарасов // Известия Алтайского университета. – 2014. – Т. 1, № 1. – С. 81-85.
11. Гончарова О.Н. Построение математической модели течений в тонком слое жидкости на основе классических уравнений конвекции и обобщенных условий на границе раздела / О.Н. Гончарова, Е.В. Резанова // Известия Алтайского университета. – 2015. – Т. 1, № 1. – С. 70-74
- 12. Гордеева В.Ю. Влияние термокапиллярного эффекта на динамику и устойчивость движения испаряющейся тонкой пленки / В.Ю. Гордеева, А.В. Люшнин // Журнал Технической Физики. – 2013. – Т. 83, № 3. – С. 41-47.**
- 13. Гордеева В.Ю. Особенности испарения тонкого слоя воды в присутствии растворимого сурфактанта / В.Ю. Гордеева, А.В. Люшнин // Журнал Технической Физики. – 2014. – Т. 84, № 5. – С. 28-34.**
14. Дерягин Б. Электрическая теория адгезии (прилипания) пленок к твердым поверхностям и ее экспериментальное обоснование / Б. Дерягин, Н. Кротова // Успехи Физических Наук. – 1948. – Т. 36, № 3. – С. 387-406.
15. Дерягин Б.В. Молекулярное притяжение конденсированных тел / Б.В. Дерягин, И.И. Абрикосова, Е.М. Лифшиц // Успехи Физических Наук. – 1958. – Т. 64, № 3. – С. 493-528.
16. Дерягин Б.В. Поверхностные силы / Б.В. Дерягин, Н.В. Чураев, В.М. Муллер. М.: Наука, 1986. 405 с.

17. Дзялошинский И.Е. Ван-дер-ваальсовы силы в жидких пленках / И.Е. Дзялошинский, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. – 1964. –Т. 37, № 1. – С. 229-241.
18. Дзялошинский И.Е. Общая теория ван-дер-ваальсовых сил / И.Е. Дзялошинский, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский // Успехи Физических Наук. – 1961 – Т. 73, № 3. – С. 381-422.
19. Жакин А.И. Электродинамическая неустойчивость слабопроводящей жидкости, расположенной между сферическими электродами при наличии слабой инъекции / А.И. Жакин // Прикладная Механика и Техническая Физика. – 1979. – № 5. – С. 44-48.
20. Жакин А.И. О влиянии межфазных тангенциальных сил на возникновение течения слабопроводящей жидкости / А.И. Жакин // Прикладная Механика и Техническая Физика. –1981. – № 4.– С. 69-76
21. Жакин А.И. Устойчивость горизонтальной свободной поверхности слабопроводящей жидкости в тангенциальном переменном электрическом поле / А.И. Жакин // Магнитная гидродинамика. – 1981. – № 3. – С. 74-80.
22. Жакин А.И. Электрогидродинамика / А.И. Жакин // Успехи Физических Наук. – 2012. – Т. 182, № 5. – С. 495-520.
23. Жакин А.И. Экспериментальное изучение механизма проводимости полярных жидких диэлектриков / А.И. Жакин, И.Е. Тарапов, А.И. Федоненко // Электронная обработка материалов. – 1982. – № 3. – С. 37-41.
24. Жакин А.И. Редокс-системы в электрогидродинамике и расчет электроконвективных течений / А.И. Жакин // Магнитная Гидродинамика. – 1982. – № 2. – С. 70-78.
25. Жакин А.И. Электродинамика жидких диэлектриков на основе диссоционно-инжекционной модели проводимости / А.И.Жакин //

- Известия АН СССР, Механика Жидкости и Газа. – 1986. – № 4. – С. 3-14.
26. Жакин А.И. Электродинамика заряженных поверхностей/ А.И. Жакин // Успехи Физических Наук. – 2013. – Т. 183, № 2. – С. 153-177.
 27. Зейтунян Р.Х. Проблема термокапиллярной неустойчивости Бенара-Марангони / Р.Х. Зейтунян // Успехи Физических Наук – 1998. – Т. 168, № 3. – С. 259-286.
 28. Зуев А.Л. Особенности концентрационно-капиллярной конвекции / А.Л. Зуев, К.Г. Костарев // Успехи Физических Наук. – 2008. – Т. 178, № 10. – С. 1065-1085.
 29. Кабов О.А., Разрыв пленки жидкости, стекающей по поверхности с локальным источником тепла. / О.А.Кабов // Теплофизика и Аэромеханика. – 2000. – Т. 7, № 4. – С. 537-545.
 30. Кабов О.А. Регулярные структуры при термокапиллярной конвекции в движущемся тонком слое жидкости. / О.А. Кабов, В.В. Кузнецов, И.В. Марчук, В.В. Пухначев, Е.А. Чиннов // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2001. – № 9. – С 84-90.
 31. Кабов О.А. Термокапиллярная деформация локально нагреваемой пленки жидкости, движущейся под действием газового потока / О.А. Кабов, Е.Я. Гатапова, И.В. Марчук // Письма в ЖТФ. – 2004. – Т. 30, № 10. – С. 46-52.
 32. Кабов О.А. Испарение неизотермической пленки жидкости в микроканале при спутном потоке газа / О.А. Кабов, Ю.О. Кабова, В.В. Кузнецов // ДАН, Механика. – 2012. – Т. 446, № 5. – С. 522-526.
 33. Кабов О.А. Измерение массовой скорости испарения в горизонтальном слое жидкости, частично открытом в движущийся газ / О.А. Кабов, Ю.В. Люлин // Письма в журнал технической физики. – 2013. – Т. 39, № 17. – С. 88-94.

34. Кабова Ю.О. Особенности течения тонкой пленки жидкости при изменении размера локального источника тепла на подложке / Ю.О. Кабова // Письма ЖТФ. – 2011. – Т. 37, № 3. – С. 77-84.
35. Копбосынов Б.К. Термокапиллярное движение в тонком слое жидкости / Б.К. Копбосынов, В.В. Пухначев // Гидромеханика и процессы переноса в невесомости, Уральский научный центр Академии наук СССР. – 1983. – С. 116-125.
36. Красиков Н.Н. О бесконтактном электрополевым воздействии на жидкие системы // Журнал Технической Физики. – 2000. – Т. 90, № 10. – С.120-128.
37. Кумачков М.А. Анализ устойчивости и вторичных режимов термокапиллярного течения в слое жидкости при локализованном нагреве / М.А. Кумачков, И.И. Вертгейм // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – Т. 2, № 3. – С. 57-69
38. Куперштох А.Л. Разрушение пленок жидкости, находящихся на твердой и жидкой подложках, в поле действия объемных сил / А.Л. Куперштох, Н.В.Гаврилов, Е.В. Ерманюк // Современная наука. – 2013. – № 1. – С. 389–395.
39. Куперштох А.Л. Моделирование течений с границами раздела фаз жидкость-пар методом решеточных уравнений Больцмана / А.Л. Куперштох // Вестник НГУ: Серия «Математика, механика и информатика». – 2005. – Т. 5, № 3. – С. 29–42.
40. Ламперт М. Инжекционные токи в твердых телах / М. Ламперт, П. Марк. – Изд-во «Мир», Москва. – 1973. – 416 С.
41. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика, т. 6. – М., Наука, 1982.
42. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. – Гос. изд-во физико-математической литературы, Москва. – 1959. – 386 С.
43. Левич В.Г. Теория двойного электрического слоя в концентрированных растворах / В.Г. Левич, В.С. Крылов // Докл. АН

СССР. – 1961. – Т. 141. – С. 1403-1405.

44. Лифшиц Е.М. Теория молекулярных сил притяжения между твердыми телами / Е.М. Лифшиц // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. – 1955. – Т. 29. – С. 95-100.
45. **Люшнин А.В. Исследование устойчивости тонкой водяной испаряющейся пленки при наличии на свободной поверхности растворимого сурфактанта / А.В. Люшнин, L. Pismen // Журнал Технической Физики. – 2015. – Т. 85, № 5. – С. 152-155.**
46. Мелчер Д. Электрогидродинамика / Д. Мелчер // Магнитная гидродинамика. – 1974. – Т. 3, № 2. – С. 3-30.
47. Мизев А.И. Экспериментальное исследование термокапиллярной конвекции, индуцированной локальной температурной неоднородностью вблизи поверхности жидкости. 1. Твердотельный источник тепла / А.И. Мизев // Прикладная Математика и Теоретическая Физика. – 2004. – Т. 45, № 4. – С. 36-49.
48. Мизев А.И. Экспериментальное исследование термокапиллярной конвекции, индуцированной локальной температурной неоднородностью вблизи поверхности жидкости. 2. Источник тепла, индуцированный излучением / А.И. Мизев // Прикладная Математика и Теоретическая Физика. – 2004. – Т. 45, № 5. – С. 102-108.
49. Остроумов Г.А. Взаимодействие электрических и гидродинамических полей / Г.А. Остроумов – Изд-во «Наука», Москва. – 1979. – 319 С.
50. Рапис Е. М. Изменение физической фазы неравновесной пленки комплекса белков плазмы крови у больных с карциномой / Е.М. Рапис // Журнал Технической Физики. – 2002. – Т. 72, № 4. – С. 139-142.
51. Рапис Е.М. О характере процесса релаксации энергии возникающего при высыхании коллоидного раствора белка в открытой и в закрытой системах / Е. М. Рапис // Журнал Теоретической Физики. – 2005. – Т. 75, № 9 – С. 129-131.

52. Рид Р., Шервуд Т. Свойства газов и жидкостей. Л.:Химия, 1971, 702 С.
53. Самарский А.А. Методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. – Изд-во «Наука», Москва – 1978. – 589 С.
54. Саночкин Ю.В. Ван-дер-ваальсовы волны в жидкостях со свободной поверхностью / Ю.В. Саночкин // Журнал Технической Физики. – 2003. – Т. 73, № 5. – С. 24-29.
55. Саночкин Ю.В. Влияние вязкости на свободные поверхностные волны в жидкостях / Ю.В. Саночкин // ИРАН. Механика Жидкости и Газа. – 2000. – № 4. – С. 156-164.
56. Саранин В.А. Об устойчивости равновесия плоского горизонтального слоя неоднородно нагретой жидкости в электрическом поле / В.А. Саранин // Конвективные течения... Пермь, ПГПУ. – 1983. – С. 46-53.
57. Саранин В.А. О безындукционном приближении в электрогидродинамике / В.А. Саранин // Конвективные течения... Пермь, ПГПУ. – 1981 – С. 130-133.
58. Саранин В.А. Конвективная устойчивость равновесия и некоторые задачи конвекции проводящих жидкостей в электрическом поле: дисс. канд. физ.-мат. наук: 01.02.05 / Владимир Александрович Саранин. – М., 1983. – 185 С.
59. Саранин В.А. Устойчивость равновесия, заряда, конвекция и взаимодействие жидких масс в электрических полях / В.А. Саранин. – Изд.-во «РХД», Москва-Ижевск. – 2009. – 332 С.
60. Скрипов В.П. Спинодальный распад / В.П. Скрипов, А.В. Скрипов // Успехи Физических Наук. – 1979. – Т. 128, №2. – С. 193-231.
61. Смородин Б.Л. Влияние модуляции электрического поля на распространение заряда в полярной слабопроводящей жидкости / Б.Л. Смородин, А.В. Тараут // Прикладная Механика и Техническая

Физика. – 2008. – V.49, № 1. – С. 3-12.

62. Стебновский С.В. Тангенциальные разрывы параметров полярной жидкости при сдвиговом деформировании / С.В. Стебновский // Прикладная Механика и Техническая Физика. – 2005. – Т. 26, № 3. – С. 41-49.
63. Стишков Ю.К. Электрогидродинамические течения в переменном электрическом поле / Ю.К. Стишков, А.А. Остапенко // Магнитная гидродинамика. – 1980. – № 3. – С. 139-142.
64. Стишков Ю.К. Электрогидродинамические течения в жидких диэлектриках / Ю.К. Стишков, А.А. Остапенко // Изд-во ЛГУ, Ленинград. – 1989. – 172 С.
65. Стойлов Ю.Ю. Колебания жидкости при испарении и парадоксы испалаторов / Ю.Ю. Стойлов // Успехи Физических Наук. – 2000. – Т. 170, № 1. – С. 41-56.
66. Тарасевич Ю.Ю. Влияние режима испарения на пространственное перераспределение компонентов в испаряющейся капле жидкости на твердой горизонтальной подложке / Ю.Ю. Тарасевич, О.П. Исакова, В.В. Кондухов, А.В. Савицкая // Журнал Технической Физики. – 2010. – Т. 80, № 5. – С. 45-53.
67. Тарасевич Ю.Ю. Качественный анализ закономерностей высыхания капли многокомпонентного раствора на твердой подложке / Ю.Ю. Тарасевич, Д.М. Православнова // Журнал Технической Физики. – 2007. – Т. 77, № 2. – С. 17-21.
68. Тарасевич Ю.Ю. Механизмы и модели дегидратационной самоорганизации биологических жидкостей/ Ю.Ю. Тарасевич // УФН. – 2004. – Т. 174, № 7. – С. 779-790.
69. Трибельский М.И. Коротковолновая неустойчивость и переход к хаосу в распределенных системах с дополнительной симметрией / М.И. Трибельский // Успехи Физической Науки. – 1997. – Т. 167, № 2.

– С. 167-190.

70. Френкель Я.И. К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости в постоянном электрическом поле в вакууме / Я.И. Френкель // Журнал Технической и Экспериментальной Физики. – 1936. – Т. 6, № 4. – С. 347-350.
71. Цвелодуб О.Ю. Моделирование волновых режимов на пленке вязкой жидкости, стекающей по вертикальной плоскости / О.Ю. Цвелодуб // Теплофизика и аэромеханика. – 2012. – Т. 19, № 2. – С. 183-192.
72. Цвелодуб О.Ю. Волновые режимы на пленке обобщенной ньютоновской жидкости, стекающей по вертикальной плоскости / О.Ю. Цвелодуб // Известия РАН, Механика жидкости и газа. – 2007. – № 4. – С. 14-26.
73. Цвелодуб О. Ю. Резонансные волны в модели двухслойной жидкости // О. Ю. Цвелодуб // Прикладная механика и техническая физика. – 2002. – Т. 43, № 6. – С. 23–31.
74. Ширяева С.О. О влиянии эффекта релаксации поверхностного натяжения на спектр движений жидкости с заряженной свободной поверхностью / С.О. Ширяева, О.А. Григорьев // Журнал Технической Физики. – 2000. – Т. 70, № 6. – С. 31-36.
75. Яхно Т.А. Капли биологических жидкостей, высыхающие на твердой подложке: динамика морфологии, массы, температуры и механических свойств / Т.А. Яхно, В.В. Казаков, О.А. Санина, А.Г. Санин, В.Г. Яхно // Журнал Технической Физики. – 2010. – Т. 80, № 7. – С. 17-23.
76. Яхно Т.А. Термографическое исследование динамики температурного поля на границе жидкость-воздух в каплях водных растворов, высыхающих на стеклянной подложке / Т.А. Яхно, О.А. Санина, М.Г. Воловик, А.Г. Санин, В.Г. Яхно // Журнал Технической Физики. – 2012. – Т. 82, № 7. – С. 22-29.

Зарубежная литература

77. Afsar-Siddiqui A. The spreading of surfactant solutions on thin liquid films / A. Afsar-Siddiqui, P.F. Luckman, O.K. Matar // *Advances in Colloid and Interface Science*. –2003. –V.106, №1-3. –P.183-236.
78. Afsar-Siddiqui A. Unstable spreading of aqueous anionic surfactant solutions on liquid films. Part1.Sparingly soluble surfactant / A. Afsar-Siddiqui, P.F.Luckman, O.K. Matar // *Langmuir*. –2003. –V.19, №3. – P.696-702.
79. Afsar-Siddiqui A. Unstable spreading of aqueous anionic surfactant solutions on liquid films. Part2.Highly soluble surfactant / A. Afsar-Siddiqui, P.F.Luckman, O.K. Matar // *Langmuir*. –2003. –V.19, №3. – P.703-708.
80. Agrait N. Linear convective patterns in cylindrical geometry for unipolar injection / N. Agrait, A. Castellanos // *Physical Fluids*. –1990. – V.2, № 1. – P.37-44.
81. Ajaev V. Evolution of dry patches in evaporating liquid films / V. Ajaev // *Physical Review E*. – 2005. – V. 72. – P. 031605-031612.
82. Ajaev V. Spreading of thin volatile liquid droplets on uniformly heated surface / V. Ajaev // *Journal of Fluids Mechanics*. –2005. –V.528. –P.279-296.
83. Ajaev V. Heat and mass transfer near contact on heated surfaces / V. Ajaev, O.A. Kabov // *International Journal of heat and mass transfer*. – 2017. – V.108. – P. 918-932.
84. Alekseenko S.V. Wave flow of liquid films / S.V. Alekseenko, V.E. Nakoryakov, B.T. Pokusaev // New York: Begell House. – 1994. – P. 231-235.
85. Anderson D.M. Diffuse-interface methods in fluid mechanics /

- D.M.Anderson, G.B. McFadden, A.A. Wheeler // Fluid Mechanics. – 1998. – V. 30. – P. 139-165.
86. Aoune, A. Process intensification: heat and mass transfer characteristics of liquid films on rotating discs / A. Aoune, C. Ramshaw // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1999. – V. 42. – P. 2543-2556.
 87. Atten P. Stabilite electrohydrodynamique des liquides isolants soumis a une injection unipolaire/ P. Atten, R. Moreau // Journal de Mecanique. – 1972. – V.11, № 3. – P. 471-520.
 88. Atten P. Electrohydrodynamic stability of dielectric liquids during transient regime of space-charge-limited injection / P. Atten // Physical Fluids. – 1974. – V. 17, № 10. – P. 1822-1827
 89. Atten P. EHD instability of insulating liquids due to charge injection from the free surface/ P. Atten, D.Koulova-Nenova //12 International Conference on Conduction and Breakdown in Dielectric Liquid, Roma, 1996, P. 476-479.
 90. Bandyopadhyay, D. Instability and dynamics of thin liquid bilayers / D. Bandyopadhyay, R. Gulabani, A. Sharma // Industrial & Engineering Chemistry Research. – 2005. – V. 44. – P. 1259-1272.
 91. Bankoff S. G. Stability of liquid flow down a heated inclined plane/ S.G. Bankoff // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1971. – V. 14. – № 3. – P. 377-385.
 92. Bankoff S. G. Taylor instability of an evaporating plane interface / S.G. Bankoff, S.H. Davis //AIChE Journal. – 1961. – V. 7. – № 3. – P. 485-487.
 93. Baral D.R. Asymptotic theories of large-scale motion, temperature, and moisture distribution in land-based polythermal ice sheets: a critical review and new developments / D.R. Baral, K. Hutter, R. Greve //Applied Mechanics Reviews. – 2001. – Vol. 54. – P. 215-228.
 94. Bardon S. Structure and dynamics of liquid films on solid surfaces / S. Bardon, M. Cachile, A.M. Cazabat, X. Fanton, M.P. Valignat, S. Vilette //

- Faraday Discussions. –1996. –V.104. –P.307-316.
95. Benichou O. Thin films in wetting and spreading / O. Benichou, M.Cachile, A.-M. Cazabat, C.Poulard, M.-P. Valignat, F. Vandenbrouck, D. Van Effenterre // *Advances in Colloid and Interface Science*. –2003. –V.100. – P. 381-398.
 96. Becker J. Complex dewetting scenarios captured by thin-film models / J. Becker, G. Gruen, R. Seemann, H. Mantz, K. Jacobs, K.R. Mecke, R. Blossey // *Nature Materials*. – 2003. – Vol. 2. – P. 59-63.
 97. Bekezhanova V.B. Influence of internal energy variations of the interface on the stability of film flow/ V.B. Bekezhanova, O.A. Kabov // *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*. – 2016. – V. 4, № 2-3. – P. 133-156.
 98. Bertozzi A.L. Linear stability and transient growth in driven contact lines / A.L. Bertozzi, M.P. Brenner // *Physics of Fluids*. – 1997. – V. 9. – P. 530-542.
 99. Besterhorn M. Surface patterns of laterally extended thin liquid films in three dimension / M. Bestehorn, K. Neiffer // *Physical Review Letters*. – 2001. –V.87,№4. –P.046101-046105.
 100. Bestehorn M. 3D large scale Marangoni convection in liquid films / M. Bestehorn, A. Pototsky, U. Thiele // *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*. – 2003. – V. 33,№ 4. – P. 457-467.
 101. Bestehorn M. Regular surface patterns on Rayleigh-Taylor unstable evaporating films heated from below /M. Bestehorn, D.Merkt // *Physical Review Letters*. –2006. –V.97. –P.127802-127806.
 - 102. Birikh R.V. Convective instability of dielectric liquid subjected to unipolar injection of charge trough free surface / R.V Birikh, A.V. Lyushnin 12th International Conference on Dielectric Liquids (ICDL'96), Roma, Italy, July 15-19. –1996. –P.77-80.**
 - 103. Birikh R.V. Effect of the Marangoni convection on the injection**

mechanism of instability / R.V. Birikh, A.V. Lyushnin // Technical Physics. – 2000. – V. 45, № 1. – P. 17-21.

104. Blossey R. Nucleation at first-order wetting transitions / R. Blossey // International Journal of Modern Physics B. – 1995. – V. 9, № 27. – P. 3489-3525.
105. Bonfillon A. Dynamic surface tension of ionic surfactant solutions / A. Bonfillon, F. Sicoli, D. Langevin // Journal of colloid and interface science. – 1994. – V. 168, № 2. – P. 497-504.
106. Bonn D. Wetting and spreading / D. Bonn, J. Eggers, J. Indekeu, J. Meunier, E. Rolley // Reviews of modern physics. – 2009. – V. 81, № 2. – P. 739-805.
107. Boos W. Cascade of structures in long-wavelength Marangoni instability / W. Boos, A. Thess // Physics of Fluids. – 1999. – V. 11. – P. 1484-1506.
108. Borgas M. Monolayer flow on a thin film / M.S. Borgas, J.B. Grotberg // Journal of Fluids Mechanics. – 1988. – V. 193. – P. 151-170.
109. Bormashenko E. Formation of honeycomb patterns in evaporated polymer solution: influence of the molecular weight / E. Bormashenko, R. Pogreb, O. Stanevsky, Y. Bormashenko, O. Gendelman // Material Letters. – 2005. – V. 59, № 28. – P. 3553-3557.
110. Bormashenko E. Mesoscopic patterning in evaporated polymer solutions: new experimental data and physical mechanism / E. Bormashenko, R. Pogreb, O. Stanevsky, Y. Bormashenko, T. Stein, O. Gendelman // Langmuir. – 2005. – V. 21, № 21. – P. 9604-9609.
111. Bradley R. Overstable electroconvective instabilities / R. Bradley // Quarterly Journal Mechanics and Applied Mathematics. – 1978. – V. 31, № 5. – P. 381-390.
112. Bratsun D.A. On Marangoni convective patterns driven by an exothermic chemical reaction in two-layer systems / D.A. Bratsun, A. De Wit // Physics of Fluids. – 2004. – V. 16, № 4. – P. 1082-1096.

113. Braun R. Gravitational drainage of a tangentially-immobile thick film / R. Braun, S.A. Snow, U.C. Pemisz // Journal of Colloid and Interface Science. –1999. –V.219, №2. –P. 225-240.
114. Brochard-Wyart F. Drying of solids wetted by thin liquid film/ F. Brochard-Wyart, J. Daillant // Canadian Journal of Physics –1990.–V.68, № 9. –P. 1084-1088.
115. Brochard-Wyart F. Dynamics of liquid rim instabilities / F. Brochard-Wyart, C. Redon // Langmuir. –1992.–V.8, № 9. –P. 2324-2329.
116. Brochard-Wyart F. Wetting and slippage of polymer melts on semi-ideal surface / F. Brochard-Wyart, P.-G. De Geen, H. Hervert // Langmuir. – 1994. –V.10, №5. –P.1566-1572.
117. Burelbach J.P. Nonlinear stability of evaporating/condensing liquid films / J.P. Burelbach, S.G. Bankoff, S.H. Davis // Journal of Fluid Mechanics. – 1988. – V. 195. – P. 463-494.
118. Burelbach J.P. Steady thermocapillary flows of thin liquid layers. II. Experiment / J.P. Burelbach, S.G. Bankoff, S.H. Davis // Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. – 1990. – V. 2. – P. 322-333.
119. Byun J.-H. An assessment of the science and technology of carbon nanotube-based fibers and composites / T.-W. Chou, L. Gao, E.T. Thostenson, Z. Zhang, J.-H. Byun // Composites Science and Technology. – 2010–V.70, №1. –P.1-19.
120. Cachile M. Spontaneous spreading of surfactant solutions on hydrophilic surfaces: C_nE_m in ethylene and diethylene glycol / M. Cachile, A.M. Cazabat // Langmuir. –1999. –V.15, №4. –P.1515-1521.
121. Cachile M. Films driven by surface tension gradient /M.Cachile, M. Schneemich, A. Hamraoui, A.M. Cazabat // Advances in Colloid and Interface Science. –2002. –V.96, №1. –P.59-74.
122. Cachile M. Evaporating droplet of completely wetting liquids / M. Cachile, O. Benichou, A.M. Cazabat // Langmuir. –2002. –V.18, №21. –P.7985-

7990.

123. Cai Y. Porous Polymer Film Templated by Marangoni Flow-Induced Water Droplet Array / Y. Cai, B.Z. Newby // *Langmuir*. –2009. – Vol. 25, №13, P. 7638-7645.
124. Cahn J. W. On spinodal decomposition / J.W. Cahn // *Acta metallurgica*. – 1961. – V. 9, № 9. – P. 795-801.
125. Castellanos A. Electrodynamic stability in the present of a thermal gradient /A. Castellanos, M.G. Velarde // *Physical Fluids*. –1981. – V. 24, № 10. – P.1784-1786.
126. Castellanos A. Oscillatory and steady convection in dielectric liquid layers subjected to unipolar injection and temperature gradient / A. Castellanos, P. Atten, M.G. Velarde // *Physical Fluids*. – 1984. – V.27, № 7. – P.1607-1615.
127. Castellanos A. *Electrohydrodynamics* / A.Castellanos–Springer Wien-New York –1998. – 328 P.
128. Cazabat A.M. Hydrodynamic fingering instability of driven wetting film /A.M. Cazabat, F. Heslot, P. Carles, S.M. Troian // *Advances in Colloid and Interface Science*. – 1992. – V.39. – P.61-75.
129. Chung J.C. Initial breakdown of a heated liquid film in cocurrent two-component annular flow: II. Rivulet and drypatch models / J.C. Chung, S.G. Bankoff // *Chemical Engineering Communications*. – 1980. – V. 4, № 4-5. – P. 455-470.
130. Craster R.V. Dynamics and stability of thin liquid films / R.V. Craster, O.K. Matar // *Reviews of modern physics*. – 2009. – V. 81, № 3. – P. 1131-1198.
131. Danov K.D. The stability of evaporating thin liquid films in the presence of surfactant. I. Lubrication approximation and linear analisys / K.D. Danov, N. Alleborn, H. Raszillier, F. Durst // *Physics of Fluids*. – 1998. – V. 10, № 1. – P. 131-143.

132. Darhuber A. Selective dip-coating of chemically micropatterned surfaces / A. Darhuber, S.M. Troian, J.M. Davis, S.M. Miller // Journal of Applied Physics. –2000. –V.88, №9. –P.5119-5126.
133. Davis S. H. Rupture of thin liquid films / S.H. Davis // Waves on fluid interfaces. – 1983. – P. 291-302.
134. Davis S.H. Thermocapillary instabilities / S.H. Davis // Annual Review of Fluid Mechanics. – 1987. – V. 19, № 1. – P. 403-435.
135. De Gennes P. G. Wetting: statics and dynamics // Reviews of modern physics. – 1985. – V. 57, № 3. – P. 827-863.
136. Deegan R.D. Pattern formation in drying drops / R.D. Deegan // Physical Review E. –2000. –V.61, №1. –P.475-485.
137. Deegan R.D. Contact line deposits in an evaporating drop / R.D. Deegan, O. Bakakin, T.F. Dupont, G. Huber, S.R. Nagel, T.A. Witten // Physical Review E. – 2000. – V. 62, № 1. – P. 756-765.
138. Deissler R. J. Stable localized patterns in thin liquid films / R.J. Deissler, A. Oron // Physical review letters. – 1992. – V. 68, № 19. – P. 2948-2951.
139. De Wit A. Nonlinear evolution equations for thin liquid films with insoluble surfactant / A. De Wit, D. Galles, C.I. Christov // Physics of Fluids. –1994. –V.6, №10. –P.3256-3266.
140. Diez J.A. Contact line instabilities of thin liquid films / J.A. Diez, L. Kondic // Physical review letters. – 2001. – V. 86, № 4. – P. 632.
141. Diez J.A. Computing three-dimensional thin film flows including contact lines / J.A. Diez, L. Kondic // Journal of Computational Physics. – 2002. – V. 183, № 1. – P. 274-306.
142. Dunn G. A mathematical model for evaporation of a thin sessile liquid droplet: comparison between experiment and theory / G. Dunn, S.K. Wilson, B.R. Duffy, S. David, K. Sefiane // Colloids and Surface A: Physicochemical and Engineering Aspects. –2008. –V.323, №1. –P.50-55.
143. Dunn G. The strong influence of substrate conductivity on droplet

- evaporation / G. Dunn, S.K.Wilson, B.R.Duffy, S.David, K. Sefiane // Journal of Fluid Mechanics. –2009. –V.623. –P.329-351.
144. Dussan V E. B. On the motion of a fluid-fluid interface along a solid surface / E.B. Dussan V, S.H. Davis // Journal of Fluid Mechanics. – 1974. – V. 65, № 1. – P. 71-95.
 145. Edmonstone B.D. Surfactant-induced fingering phenomena beyond the critical micelle concentration / B.D. Edmonstone, R.V. Craster, O.K. Matar // Journal of Fluid Mechanics. – 2006. – V. 564. – P. 105-138.
 146. Edwards D.A. Interfacial transport processes and rheology / D.A. Edwards, H. Brenner, D.T. Wasan – Boston: Butterworth-Heinemann, 1991. – 558 P.
 147. Edwards D.A. Instability of a non-wetting film with interfacial viscous stress / D.A. Edwards, A. Oron // Journal of Fluid Mechanics. – 1995. – V. 298. – P. 287-309.
 148. Eijkel J.C.T. Nanofluidics: what is it and what can we expect from it? / J.C.T. Eijkel, A. Van Den Berg // Microfluidics and Nanofluidics. – 2005. – V. 1, № 3. – P. 249-267.
 149. Eijkel J.C.T. Water in mico and nanofluidics system discribed using the water potential / J.C.T. Eijkel, A. Van Den Berg // Lab on a Chip. – 2005. – V. 5. – P. 1202-1209.
 150. Elbaum M. How does a thin wetted film dry up? / M. Elbaum, S.G. Lipson // Physical review letters. – 1994. – V. 72, № 22. – P. 3562-3565.
 151. Elbaum M. Pattern formation in the evaporation of thin liquid films / M. Elbaum, S.G. Lipson // Israel journal of chemistry. – 1995. – V. 35, № 1. – P. 27-32.
 152. Eres M. Three-dimensional direct numerical simulation of surface-tension gradient effect on the leveling of an evaporating multicomponent fluids /M.Eres, D.E. Weldner, L.W. Schwartz // Lagmuir. –1999. –V.15, №5. – P.1859-1871.

153. Espinosa F. Spreading of exogenous surfactant in an airway / F.F. Espinosa, A.H. Shapiro, J.J. Fredberg, R.D.Kamm // Journal of Applied Physiology. –1993. –V. 75. –P. 2028-2039.
154. Fanton X. Spreading and instabilities induced by a solutal Marangoni effect /X.Fanton, A.M. Cazabat // Langmuir. –1998. –V.14, №9. –P.2554-2561.
155. Fermigier M. Two-dimensional patterns in Rayleigh-Taylor instability of a thin layer / M. Fermigier, L. Limat, J. E. Wesfreid, P. Boudinet, C. Quilliet // Journal of Fluid Mechanics. – 1992. – V. 236. – P. 349-383.
156. Fetzer R. New slip regimes and the shape of dewetting thin liquids film / R. Fetzer, K. Jacobs, A. Münch, B.Wagner, T.P. Witelski // Physical Review Letters. –2005. –V.95. –P.127801-127805.
157. Fischer B.J. Particle convection in an evaporating colloidal droplet // Langmuir. – 2002. – V. 18. – P. 60-67.
158. Fisher B. J. Thinning and disturbance growth in liquid films mobilized by continuous surfactant delivery / B.J. Fisher, S.M. Troian // Physics of Fluids. –2003. –V.15, №12. –P.3837-3845.
159. Fisher L. S. Nonlinear stability analysis of a two-layer thin liquid film: Dewetting and autophobic behavior / L.S. Fisher, A.A. Golovin //Journal of colloid and interface science. – 2005. – V. 291, № 2. – P. 515-528.
160. Frank B. Origins of the complex motion of advancing surfactant solution / B. Frank, S. Garoff // Langmuir, –1995. –V.11, №1. –P.87-93.
161. Frank A.M. Thermocapillary structure formation in a falling film: experimental and calculations/ A.M. Fank, O.A. Kabov // Physics of Fluid. – 2006. – V. 18. – P. 032107-032117.
162. Gaver D. The dynamics of a locailized surfactant on a thin film /D. P. Gaver, J. B. Grotberg // Journal of Fluids Mechanics. –1990. –V.213. – P.127-148.
163. Gaver D. Droplet spreading on a thin viscous film /D. P. Gaver, J. B. Grotberg // Journal of Fluids Mechanics. –1992. –V.235. –P. 399-414.

164. Ghatak A. Dynamics and morphology of holes in dewetting of thin films / A. Ghatak, R. Khanna, A. Sharma // J. of Coll. And Int. Science. –1999. – V.212, №2. –P.483-494.
165. Ghatak A. Meniscus instability in a thin elastic film // A. Ghatak, M.K. Chaudhury, V. Shenoy, A. Sharma // Phys. Rev. Letters. –2000. –V.85, №20. –P. 4329-4332.
166. Gokhale S. J. Spreading, evaporation, and contact line dynamics of surfactant-laden microdrops / S. J. Gokhale, J. L. Plawsky, P. C. Wayner //Langmuir. – 2005. – V. 21, № 18. – P. 8188-8197.
167. Golovin A.A. Interaction between short-scale Marangoni convection and long scale deformational instability / A.A. Golovin, A.A. Nepomnyashchy, L.M. Pismen // Physics of Fluids. – 1994. – V.6. – P. 34-48.
168. Golovin A.A. Effects of van der Waals interactions on the fingering instability of thermally driven thin wetting films / A.A. Golovin, B.Y. Rubinstein, L.M. Pismen // Langmuir. – 2001. – V.17, №6. – P. 3930-3936.
169. Gonuguntla M. Polymer patterns in evaporating droplets on dissolving substrare / M.Gonuguntla, A.Sharma // Langmuir. –2004. –V.20, №8. – P.3456-3463.
- 170. Gordeeva V.Y. Influence of Marangony instability on evaporation of the polar liquid film / V.Y. Gordeeva, A.V. Lyushnin // European Physical Journal Special Topics. – 2013. – V. 219. – P. 45-49.**
- 171. Gordeeva V.Y. Influence of the thermocapillary effect on the dynamics and stability of motion of a thin evaporating film / V.Y. Gordeeva, A.V. Lyushnin // Technical Physics. – 2013. – V. 58, №3. – P. 351-357.**
- 172. Gordeeva V.Y. Peculiarities of evaporation of a thin water layer in presence of a soluble surfactant / V.Y. Gordeeva, A.V. Lyushnin // Technical Physics. – 2014. – V. 59, №5. – P. 656-662.**

173. Gordeeva V.Y. Numerical simulation and stability analysis of solutocapillarity effect in ultrathin films / V.Y. Gordeeva, A.V. Lyushnin // *European Physical Journal Special Topics*. – 2017. – V. 226. – P. 1219-1228.
174. Gordeeva V.Y. Dynamics of an evaporating thin film of polar liquid with solutocapillarity Marangoni effect and capillary osmosis. / V.Y. Gordeeva, A.V. Lyushnin // *Surface and Coatings Technology*. – 2017. – V.320. – P.531-535.
175. Gordeeva V.Y. Numerical investigation of thin film of polar liquid with added surfactant/ V.Y. Gordeeva, A.V. Lyushnin // *Journal of Physics: Conference Series*. –2017. –V.925. –P.012021-012027.
176. Govor L.V. Self-assembled nanoparticle formed at the contact line of evaporating micrometer-size droplet / L.V.Govor, G. Reiter, G.H. Bauer, J. Parisi // *Physical Review E*. –2004. –V.69. –P. 061609-061617.
177. Govor L.V. Instability and droplet formation in evaporating thin films of a binary solution / L.V.Govor, G. Reiter, G.H. Bauer, J. Parisi // *Physical Review E*. –2005. –V.71. –P. 051603-051612.
178. Govor L.V. Self-assembled treelike patterns from an evaporating binary solution / L.V.Govor, G. Reiter, G.H. Bauer, J. Parisi // *Physical Review E*. –2006. –V.74. –P. 061603-061611.
179. Griffiths R.W. The dynamics of lava flows /R.W. Griffiths // *Annual Review of Fluid Mechanics*. – 2000. – V. 32, № 1. – P. 477-518.
180. Gross M.J. / Electrically induced convection in dielectric liquids // M.J. Gross, J.E. Porter // *Nature*. –1966. – V. 212. – P.1343-1345
181. Grotberg J. B. Pulmonary flow and transport phenomena / J.B. Grotberg // *Annual Review of Fluid Mechanics*. – 1994. – V. 26, № 1. – P. 529-571.
182. Grotberg J. B. Asynopsis of surfactant spreading research / J.B. Grotberg, D.P. Gaver // *Journal of Colloid and Interface Science*. –1996. –V.178, №1. –P. 377-378.

183. Grotberg J. B. Respiratory fluid mechanics and transport processes /J.B. Grotberg // Annual review of biomedical engineering. – 2001. – V. 3, № 1. – P. 421-457.
184. Grotberg J.B. Biofluid mechanics in flexible tubes / J.B. Grotberg, O.E. Jensen // Annual Review of Fluid Mechanics. – 2004. – V. 36. – P. 121-147.
185. He S. Surfactant-driven spreading of a liquid on a vertical surface / S. He, B. Ketterson // Physics of Fluids. –1995. –V.7. –P. 2640-2663.
186. Hegseth J. Natural convection in droplet evaporating /J.Hegseth, N. Rasshidnia, A. Chai // Physical Review E. –1996. –V.54, №2. –P. 1640-1644.
187. Herminghaus S. Spinodal dewetting in crystal and liquid metal films / S. Herminghaus, K. Jacobs, K. Mecke, J. Bischof, A. Fery, M. Ibn-Elhaj, S. Schlagowski // Science. –1998. –V. 282. –P. 916-919.
188. Herminghauser S. Genetic morphologies of viscoelastic dewetting fronts / S. Herminghauser, K.Jacobs, R.Seeman // Physics Reviews Letters. –2004. –V.89. –P. 056101-056108.
189. Herminghauser S. Viscoelastic dynamics of polymer thin films and surfaces / S. Herminghauser, K.Jacobs, R.Seeman // European Physics Journal E. –2003. –V.12, №1. –P. 101-1110.
190. Higgins B.G. Boundary conditions at free surface / Brian G. Higgins // University of California, Davis, CA 95616. – 2010. – 5 P.
191. Hosoi A. Evaporative instabilities in climbing films / A.Hosoi, J. M. Bush // Journal of Fluids Mechanics. –2001. –V. 442. –P. 217-239.
192. Horn R.G. Molecular organization and viscosity of a thin of molten polymer between two surfaces as probed by force measurement / R.G. Horn, J.N. Israelachvili // Macromolecules– 1988. –V. 21. – P. 2836-2841.
193. Hu H. Analysis of the microfluid flow in an evaporating sessile droplet / H. Hu, R.G. Larson // Langmuir. – 2005. – V. 21, № 9. – P. 3963-3971.

194. Hu H. Analysis of the effects of Marangoni stresses on the microflow in an evaporating sessile droplet / H. Hu, R.G. Larson // *Langmuir*. – 2005. – V. 21, № 9. – P. 3972-3980.
195. Huppert H. E. Gravity currents: a personal perspective/ H.E. Huppert // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2006. – V. 554. – P. 299-322.
196. Huppert, H. E. The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents over a rigid horizontal surface / // *Journal of Fluid Mechanics* – 1982. – V. 121. – P. 43-58.
197. Ivanov I.B. Hofmeister effect on micellization, thin films and emulsion stability // I.B. Ivanov, R.I. Slavchov, E.S. Basheva, D. Sidzhakkova, S.I. Karakashev // *Advances in Colloid and Interface Science*. –2011. –V.168, №1-2. –P. 93-104.
198. Israelachvili J.N. Measurement of the viscosity of liquids in very thin film / J.N. Israelachvili // *Journal of Colloid and Interface Science*– 1986. – V. 110. – P. 263-271.
199. Israelachvili J.N. Intermolecular and surface forces with applications to colloid and biological system // Academic, New York – 1992. – P.237.
200. Jacobs K. Growth of holes in liquid films with partial slippage / K. Jacobs, R. Seeman, G. Schatz, S. Herminghauser // *Langmuir*. –1998. –V. 14, №18. –P. 4961-4963.
201. Jacobs K. R. / K.R. Jacobs, N. Seeman, K.Mecke *Statistical Physics and Spatial Statistics* // Springer, Heidelberg– 2000. –P. 411-434.
202. Jain R.K. Stability of stagnant viscous films on a solid surface / R.K. Jain, E. Ruckenstein // *Journal of Colloid and Interface Science*. – 1976. – V. 54, № 1. – P. 108-116.
203. Jameel A.T. Morphological phase separation in thin liquid films: II. Equilibrium contact angles of nanodrops coexisting with thin films / A.T. Jameel, A. Sharma // *Journal of colloid and interface science*. – 1994. – V. 164, № 2. – P. 416-427.

204. Jensen O.E. Insoluble surfactant spreading on a thin viscous film: shock evolution and film rupture. / O.E.Jensen, J.B. Grotberg // Journal of Fluids Mechanics. –1992. –V.240. –P.259-288.
205. Jensen O.E. The spreading of heat or soluble surfactant along a thin liquid film / O.E.Jensen, J.B. Grotberg // Physics of Fluids A. –1993. –V.5. –P.58-73.
206. Jensen O.E. Self-similar, surfactant-driven flows / O.E. Jensen // Physics of Fluids. –1994. –V.6. –P.1084-1106.
207. Kabov O.A. Evaporation and flow dynamics of thin, shear-driven liquid films in microgap channels / O.A. Kabov, D.V. Zaitsev, V.V. Cheverda, A.Bar-Cohen // Experimental Thermal and Fluid Science. – 2010. – V. 35, №5. – P. 825-831.
208. Karapetsas G. On surfactant-enhanced spreading and superspreading of liquid drops on solid surfaces / G. Karapetsas, R.V. Craster, O.K. Matar // Journal of Fluids Mechanics. –2011. –V.670. –P.5-37.
209. Karapetsas G. The role of surfactants on the mechanism of the long-wave instability in liquid film flows / G. Karapetsas, V. Bontozoglou // Journal of Fluid Mechanics. –2014. –V.741. –P.139-155.
210. Kargupta K. Instability and pattern formation in thin liquid films on chemically heterogeneous substrate / K.Kargupta, R. Konnur, A.Sharma // Langmuir. –2000. –V.16, №26. –P.10243-10253.
211. Kargupta K. Templating of thin films induced by dewetting on patterned surface / K. Kargupta, A. Sharma // Physical Review Letters. –2001. –V.86, №20. –P.4536-4539.
212. Kargupta. K. Mesopatterning of thin liquid films by templating on chemically patterned complex substrate / K. Kargupta, A. Sharma // Langmuir. –2003. –V.19, №12. –P. 5153-5163.
213. Karim A. Phase separation in ultrathin polymer-blend films on patterned substrate / A. Karim, J.F. Douglas, B.P. Lee, S.C.Glotzer, J.A.Rogers,

- R.J. Jackman, E.A. Amis, G.M. Whitesides // *Physical Review E*. –1998. – V.57, №6. –P.6273-6276.
214. Kataoka D. Patterning liquid flow on the microscopic scale / D.Kataoka, S.M. Troian // *Letters of Nature*. –1999. –V.402. –P.794-799.
215. Kats-Demyanets V. Linear stability of a tri-layer fluid system driven by the thermocapillary effect / V. Kats-Demyanets, A. Oron, A.A. Nepomnyashchy // *Acta astronautica*. – 1997. – V. 40, № 9. – P. 655-661.
216. Kavehpour H. Microscopic and Macroscopic structure of the precursor layer in spreading viscous drops /H.Kavehpour, B. Ovryn, G. McKinley // *Physical Review Letters*. –2003. –V.91, №19. –P. 196104-196105.
217. Kheshgi H. S. Dewetting: nucleation and growth of dry regions / H. S. Kheshgi, L. E. Scriven // *Chemical Engineering Science*. – 1991. – V. 46. – P. 519-526.
218. Kim H.Y. Meandering instability of a rivulet / H.Y. Kim, J.H. Kim, B.H. Kang // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2004. – Vol. 498, № 1. – P. 245-256.
219. King J.R. Linear stability of a ridge / J.R. King, A. Münch, B. Wagner // *Nonlinearity*. –2006. –V.16. –P. 2813-2831.
220. Kliakhandler I. Nonlinear Marangoni waves in multilayer systems / I.Kliakhandler, A.A. Nepomnyashchy, I.B. Simanovski, M.A. Zaks // *Physical Review E*. –1998. –V.58, №5. –P. 5765-5775.
221. Konnur R. Instability and morphology of thin films on chemically heterogeneous substrate / R.Konnur, K. Kargupta, A. Sharma // *Physical Review Letters*. –2000. –V.84, №5. –P. 931-934.
222. Kopf M. H. Impact of Temperature on the LB Patterning of DPPC on Mica /M.H. Kopf, H. Harder, J. Reiche, S. Santer // *Langmuir*. – 2011. – V.27, № 20. – P. 12354-12360.
223. Krishnamoorthy S. Spontaneous rupture of thin liquid films due to

- thermocapillarity: A full scale direct numerical simulation / S. Krishnamoorthy, B. Ramaswamy, S.W. Joo // *Physics of Fluids*. – 1995. – V. 7. – P. 2291-2326.
224. Leenaars A. Marangoni drying: a new extremely clean drying process / A. Leenaars, J.A. Huethorst, J.J. Van // *Langmuir*. –1990. –V.6, №11. – P.1701-1703.
225. Legros J.C. Problems related to non-linear variations of surface tension / J.C. Legros // *Acta astronautica*. – 1986. – V. 13, № 11. – P. 697-703.
226. Legros J.C. Influence of a surface tension minimum as a function of temperature on the Marangoni convection / J.C. Legros, M.C. Limbourg-Fontaine, G. Pétré // *Acta astronautica*. – 1984. – V. 11, № 2. – P. 143-147.
227. Lenz R.D. Competitive displacement of thin films on chemically patterned substrate / R.D. Lenz, S. Kumar // *Journal of Fluid Mechanics*. –2007. – V.571. –P. 33-57.
228. Lin C. A nonlinear rupture theory of thin liquid films with soluble surfactant. / C.Lin, C.-C. Hwang, W.-Y. Uen // *Journal of Colloids And Interface Science*. –2000. –V.231. –P.379-393.
229. Liu J. Three dimensional instabilities of film flows / J. Liu, J.B. Schneider, J.P. Gollub // *Physics of Fluids*. – 1995. – V. 7. – P. 55-73.
230. Lee K.S. Kinetics of wetting and spreading by aqueous surfactant solutions /K.S. Lee, N. Ivanova, V.M. Starov, N. Hilal, V. Dutschk // *Advances in Colloid and Interface Science*. –2008. –V.144,№1-2. –P.54-65.
- 231. Leizerson I. Symbiosis of different-sized drops / I. Leizerson, S.G. Lipson, A.V. Lyushnin // *Physical Review E*. –2003. –V.68–P.051601-051606.**
- 232. Leizerson I. Finger instability in wetting-dewetting phenomena / I. Leizerson, S.G. Lipson, A.V. Lyushnin // *Langmuir*. –2004. –V.20, №2. –P.291-294.**

233. Leizerson I. When larger drops evaporate faster / I. Leizerson, S.G. Lipson, A.V. Lyushnin // *Nature*. –2003. –V.422–P.395-396.
234. Lyushnin A.V. Fingering instability of thin evaporating liquid films / A.V. Lyushnin, A.A. Golovin, L.M. Pismen // *Physical Review E*. – 2002. – V. 6, № 2. – P. 021602-021609.
235. Lyushnin A.V. Charge distribution in the two-liquid layers condensator under the injection mechanism conductivity / A.V. Lyushnin // 13th International Conference on Dielectric Liquid (ICDL 1999), Nara, Japan, July 20-25. –1999. –P.90-93.
236. Lyushnin A.V. Analysis of stability of a thin evaporating water film in the presence of a solvable surfactant on the free surface / A.V. Lyushnin, L. Pismen // *Technical Physics*. –2015. –V.40, №5. –P.152-154.
237. Marmur A. The spreading of aqueous surfactant solutions on glass / A.Marmur, M.D. Lelah // *Chemical Engineering Communication*. –1981. – V.13, №1-3. –P.133-143.
238. Marra J. Physical principles of Marangoni drying / J. Marra, J. A. Huethorst // *Langmuir*. –1991. –V.7, №11. –P. 2748-2755.
239. Martin P. J. Conductivity models of electrothermal convection in a plane layer of dielectric liquid / P.J. Martin, A.T. Richardson // *Journal Heat Transfer*. –1984. –V.106, №2. –P. 131-136.
240. Matar O.K. The development of transient fingering patterns during the spreading of surfactant coated films / O.K. Matar, S.M. Troian. // *Physics of Fluids*. –1999. –V.11, №11. –P. 3232-3246.
241. Matar O.K. Model for Marangoni drying / O.K. Matar, R.V. Craster // *Physics of Fluids*. –2001. –V.13. –P.1869-1888.
242. Matar O.K. The flow of a thin conducting film over a spinning disc in the presence of an electric field / O.K. Matar, C.J. Lawrence // *Chemical engineering science*. – 2006. – V. 61, № 12. – P. 3838-3849.
243. Matar O.K. Dynamics of surfactant-assisted spreading / O.K. Matar,

- R.V. Craster // *Soft Matter*. –2009. –V.5–P. 3801-3809.
244. Mavromoustaki A. Dynamics of a climbing surfactant-laden film-I: Base-state flow / A. Mavromoustaki, O.K. Matar, R.V. Craster // *Journal of Colloid and Interface Science*. –2012. –V.371, №1. –P. 107-120.
 245. Mazouchi A. Free surface Stokes flow over topography / A. Mazouchi, G.M. Homsy // *Physics of Fluids*. – 2001. – V. 13. – P. 2751-2769.
 246. Melcher J. R. Electrohydrodynamics: a review of the role of interfacial shear stresses / J.R. Melcher, G. I. Taylor // *Annual Review of Fluid Mechanics*. – 1969. – V.1. – P. 111-146.
 247. Melcher J.R. Interfacial relaxation overstability in tangential electric field / J.R. Melcher, W.J. Schwarz // *Physical Fluids*. –1968. –V.11, №12. – P. 2604-2616.
 248. Mitlin V. S. Dewetting of solid surface: Analogy with spinodal decomposition / V.S. Mitlin // *Journal of colloid and Interface Science*. – 1993. – V. 156. – № 2. – P. 491-497.
 249. Mitlin V.S. Nonlinear dynamics of dewetting: kinetically stable structures / V.S. Mitlin, N.V. Petviashvili // *Physics Letters A*. – 1994. – P. 192, № 5. – P. 323-326.
 250. Mitlin V.S. Dewetting conditions for ionic liquid films: novel features of the stability diagram / V.S. Mitlin // *Journal of Colloid and Interface Science*. – 1995. – V. 170. – № 1. – P. 65-70.
 251. Mizev A.I. Convective instabilities in liquid layers with free upper surface under the action of an inclined temperature gradient / A.I. Mizev, D. Schwabe // *Physics of Fluids*. – 2009. – V. 21. – P. 112102-112113.
 252. Mizev A. Influence of an adsorption layer on the structure and stability of surface tension driven flows // *Phys. Fluids*. – 2005. – V. 17. – P. 122107-12110.
 253. Mizev A. Instability of Marangoni flow in the presence of an insoluble surfactant. Experiments / A. Mizev, A. Trofimenko, D. Schwabe,

- A. Viviani // European Physical Journal Special Topics. – 2013. – V. 219, № 1. – P. 89-98.
254. Münch A., Bertozzi A. L. Rarefaction–undercompressive fronts in driven films // Physics of Fluids. – 1999. – V. 11. – P. 2812-2815.
255. Münch A. Lubrication models with small to large slip lengths / A. Münch, B. Warner, T.P. Witelski // Journal of Engineering Mathematics. – 2005. – V.53. –P. 359-383.
256. Myers T. G. Thin films with high surface tension / T.G. Myers // SIAM review. – 1998. – V. 40, № 3. – P. 441-462.
257. Myers T.G. The flow and solidification of a thin fluid film on an arbitrary three-dimensional surface / T.G. Myers, J.P.F. Charpin, S.J. Chapman // Physics of Fluids. – 2002. – V. 14. – P. 2788-2795.
258. Nepomnyashchy A.A. New types of long-wave oscillatory Marangoni instabilities in multilayer systems / A.A. Nepomnyashchy, I.B. Simanovskii // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. – 1997. – V. 50, № 1. – P. 149-163.
259. Neto C. Dynamics of hole growth in dewetting polystyrene films / C.Neto, K. Jacobs // Physica A. –2004. –V.339, №1-2, –P. 66-71.
260. Nishiumi H. Effects of electrolyte on floating water bridge / H. Nishiumi, F. Honda // Advances in Physical Chemistry. – 2009. – V. 49. – P. 184–187.
261. Ohara P. Interplay between hole instability and nanoparticle array formation in ultrathin liquid films /P.Ohara, W. M. Gelbart // Langmuir. – 1998. –V.14, №12. –P. 3418-3424.
262. Oron A. Formation of patterns induced by thermocapillarity and gravity / A. Oron, P. Rosenau //Journal de Physique II. – 1992. – Vol. 2, № 2. – P. 131-146.
263. Oron A. On a nonlinear thermocapillary effect in thin liquid layers / A. Oron, P. Rosenau // Journal of Fluid Mechanics. – 1994. – Vol. 273,

№ 1. – P. 361-374.

264. Oron A. Thermal singularities in film rupture / A. Oron, S.G. Bankoff, S.H. Davis // *Physics of Fluids*. – 1996. – V. 8. – P. 3433-3452.
265. Oron A. Long-scale evolution of thin liquid films / A. Oron, S.H. Davis, S.G. Bankoff // *Reviews of modern physics*. – 1997. – V. 69, № 3. – P. 931-973.
266. Oron A. Dewetting of a heated surface by an evaporating liquid film under conjoining/disjoining pressures / A. Oron, S.G. Bankoff // *Journal of colloid and interface science*. – 1999. – V. 218, № 1. – P. 152-166.
267. Oron A. Three-dimension nonlinear dynamics of thin liquid films / A. Oron // *Physical Review Letters*. – 2000. – V.85, №10. –P. 2108-2111.
268. Oron A. Nonlinear dynamics of three-dimensional long-wave Marangoni instability in thin liquid films // *Physics of Fluids*. – 2000. – V. 12. – P. 1633-1642.
269. Oron A. Dynamics of a condensing liquid film under conjoining/disjoining pressures / A. Oron, S.G. Bankoff // *Physics of Fluids*. – 2001. – V. 218. – P. 1107-1122.
270. Padmakar A.S. Instability and dewetting of evaporating thin water films on partially and completely wettable substrate / A.S. Padmakar, K. Kargupta, A.Sharma // *Journal of Chemical Physics*. –1999. –V. 110. –P.1735-1747.
271. Pauliac-Vaujour E. Fingering instabilities in dewetting nanofluids / E. Pauliac-Vaujour, A. Stannard, C.P. Martin, M.O. Blunt, I. Nottingher, P.J. Moriarty, I. Vancea, U. Thiele // *Physical Review Letters*. –V.100. – P. 176102-176106.
272. Paunov V. Stability of evaporating two-layered liquid film in the presence of surfactant / V.Paunov, K.D. Danov, N. Alleborn, H. Raszillier, F. Durst // *Chemical engineering science*. – 1998. – V. 53, № 15. – P. 2809-2857.
273. Pereira A. Dynamics of a horizontal thin film in the presence of reactive surfactant / A. Pereira, P.M. Trevelyan, U. Thiele, S. Kalliadasis // *Physics*

- of Fluids.— 2007. — V. 19. — P. 112102-112122.
274. Perez A.T. Electrohydrodynamic instabilities in dielectric liquids induced by corona discharge / A.T. Perez // 12 International Conference on Conduction and Breakdown in Dielectric Liquid, Roma, 1996, P. 126-129.
275. Perez A.T. Electrohydrodynamic linear stability analysis of dielectric liquids subjected to unipolar injection in a rectangular enclosure with rigid sidewalls / A.T. Perez, P.A. Vazques, J. Wu, P. Traore // Journal of Fluid Mechanics. —2014. —V.758, №11.—P.586-602.
276. Pismen L.M. Disjoining potential and spreading of thin liquid layers in the diffuse-interface model coupled to hydrodynamics / L.M. Pismen and Y. Pomeau //Physical Review E.—2000.—Vol. 62, № 2. — P. 2480-2492.
277. Pontiga F. The onset of overstable motions in a layer of dielectric liquid subjected to the simultaneous action of a weak unipolar injection of charge and a thermal gradient / F.Pontiga, A.Castellanos, A.T.Richardson // Quarterly Journal Mechanics and Applied Mathematics. 1992. — V. 45, № 1. — P.25-45.
278. Pototsky A. Morphology changes in the evolution of liquid two-layer films / A. Pototsky, M. Bestehorn, D. Merkt, U. Thiele //The Journal of chemical physics. — 2005. — V. 122, № 22. — P. 224711-224723.
279. Poulard C. Freely receding evaporating droplet /C. Poulard, O. Benichou, A.M. Cazabat // Langmuir. —2003. —V.19, №21. —P. 8828-8834.
280. Rabani E. Drying-mediated self-assembly of nanoparticles / E. Rabani, D.R. Rechman, P. L. Gessler, L.E. Brus // Letters of Nature. —2003. —V.426. —P. 271-274.
281. Rauscher M. Wetting phenomena in nanofluidics / M. Rauscher, S. Dietrich // Annual Review of Materials Research. —2008. —V.38. —P.143-172.
282. Rednikov A. Truncated versus extended microfilms at a vapor-liquid contact line on a heated substrate / A. Rednikov, P. Conilet // Langmuir. — 2011. —V.27, №5. —P. 1758-1769.

283. Redon C. Festoon instabilities of slightly volatile liquids during spreading / C.Redon, F. Brochard-Wyart, F. Rondelez // Journal de Physique II France. –1992. –V.2, №9. –P. 1671-1676.
284. Redon C. Dewetting and slippage of microscopic polymer films / C.Redon, J.B. Brzoska, F. Brochard-Wyart // Macromolecules. –1994. –V.27, №2. – P. 468-471.
285. Reisfeld B. Nonlinear stability of a heated thin liquid film with variable viscosity / B. Reisfeld, S.G. Bankoff // Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. – 1990. – V. 2. – P. 2066-2073.
286. Reiter G. Dewetting of thin polymer films / G. Reiter // Physical Review Letters. – 1992. –V.68, №1. –P.75-78.
287. Reiter G. Unstable thin polymer films: rupture and dewetting processes / G. Reiter // Langmuir. – 1993. – V. 9. – P. 1344-1351.
288. Reiter G. Auto-optimization of dewetting rates by rim instabilities in slipping polymer films / G. Reiter, A.Sharma // Physical Review Letters. – 2001. –V.87,№16. –P.166103-166107.
289. Reyes L. Influence of conformational changes on diffusion properties of bovine serum albumin: a holographic interferometry study / Reyes L., Bert J., Fornazero J., Cohen R., Heinrich L. // Colloids and Surfaces B: Biointerfaces. – 2002. – T. 25, № 2. – P. 99-108.
290. Reynolds O. On the Theory of Lubrication and Its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments, Including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil / O. Reynolds // Proceedings of the Royal Society of London. – 1886. – T. 40, № 242-245. – P. 191-203.
291. Richardson A.T. The linear instability of a dielectric liquids contained in a cylindrical annulus and subjected to unipolar charge injection/ A.T. Richardson // Quarterly Journal Mechanics and Applied Mathematics. – 1980. – V.33. – P.277-292
292. Ristenpart W.D. Influence of substrate conductivity on circulation reversal

- in evaporating drops / W.D. Ristenpart, P.G. Kim, C. Dominigues, J. Wan, H.A. Stone // *Physical Review Letters*. – 2007. – V. 99, № 23. – P. 234-502.
293. Roberts P.H. Electrohydrodynamic convection. / P.H Roberts // *Quarterly Journal Mechanics and Applied Mathematics*. – 1969. – V.22, № 2. – P. 211-220.
294. Roche M. The spreading of hydrosoluble surfactants on water / M.Roches, Z. Li, I.M. Griffiths, A. Saint-Jalmes, H.A. Stone // *Physics of Fluids*. – 2013. – V. 25. – P. 091108-091121.
295. Rockford L. Polymers on nanoperiodic, heterogeneous surfaces / L. Rockford, P.M.Y. Liu, P. Mansky, T.P. Russell, M. Yoon, S.G.J. Mochrie // *Physical Review Letters*. – 1999. – V. 82, № 12. – P. 2602-2605.
296. Routh A.F. Drying of thin colloidal films / A.F. Routh // *Reports on Progress in Physics*. – 2013. – V. 76, № 4. – P. 046603-046649.
297. Ruckenstein E. Spontaneous rupture of thin liquid films / E. Ruckenstein, R.K. Jain // *Journal of the Chemical Society, Faraday Transactions 2*. – 1974. – V. 70. – P. 132-147.
298. Samid-Merzel N. Pattern formation in drying water films. / N. Samid-Merzel, S.G. Lipson, D.S. Tannhauser // *Physical Review E* – 1998. – V. 57. – P. 2906-2913.
299. Sarpkaya T. Vorticity, free surface, and surfactants // *Annual Review of Fluid Mechanics*. – 1996. – V. 28, № 1. – P. 83-128.
300. Saulinder F. Dewetting of thin polymer films near the glass transition / F. Saulinder, E. Raphael, P.-G. De Geenes // *Physical Review Letter*. – 2002. – V.88. – P. 196101-196105.
301. Scheid B. Wave patterns in film flows: modelling and three-dimensional waves / B. Scheid, C. Ruyer-Quil, P. Manneville // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2006. – Vol. 562. – P. 183-222.
302. Schmid P. J. Stability and transition in shear flows / P.J. Schmid,

- D.S. Henningson. – Springer, 2001. – Vol. 142. – 556 P.
303. Schneemilch M. Shock separation in wetting films driven by thermal gradients / M. Schneemilch, A.M. Cazabat // *Langmuir*. – 2000. – Vol. 16, № 25. – P. 9850-9856.
304. Schneider J. M. Electrohydrodynamic stability of space-charge-limited currents in dielectric liquids / J.M. Schneider , H.K. Watson // *Physical Fluids*. –1970. – V.19, № 8.– P.1948-1954.
305. Schneider J. M. Electrohydrodynamic stability of space-charge-limited currents in dielectric liquids / J.M. Schneider , H.K. Watson // *Physical Fluids*. –1970. – V.19, № 8.– P.1955-1961.
306. Seeman R.S. Dewetting patterns and molecular forces: a reconcilitaion / R.Seeman, S. Herminghaus and K.Jacobs // *Physical Review Letters*. – 2001. – Vol. 86, №24 – P. 5534-5537.
307. Seeman R.S. Gaining control of pattern formation of dewetting liquid films / R.Seeman, S. Herminghaus and K.Jacobs // *Journal of Physics: Condensed Matter*. – 2001. – Vol. 13, №21 – P. 4925-4938.
308. Seeman R.S. Dynamics and structure formation in thin polumer melt film/ R.S.Seeman, S. Herminghaus, C. Neto, S. Schlagowski, D. Podzimek, R. Konrad, H. Mantz, K. Jacobs // *Journal of Physics: Condensed Matter*. – 2005. –V. 17, №9 – P.267-290.
309. Sharma A. An analytical nonlinear theory of thin film rupture and its application to wetting films / A. Sharma, E. Ruckenstein // *Journal of colloid and interface science*. – 1986. – T. 113, № 2. – P. 456-479.
310. Sharma A. Nonlinear stability, rupture, and morphological phase separation of thin fluid films on apolar and polar substrates / A. Sharma, A.T. Jameel // *Journal of colloid and interface science*. – 1993. – V. 161, № 1. – P. 190-208.
311. Sharma A. Stability of thin polar films on non-wettable substrates / A. Sharma, A.T. Jameel // *Journal Chemical Society, Faraday Trans*. –

1994. – T. 90, № 4. – P. 625-627.
312. Sharma A. Pattern formation in unstable thin liquid films / A. Sharma, R. Khanna // *Physical Review Letters*. – 1998. – V.81, №16. – P.3463-3466.
 313. Sharma A. Pattern formation in unstable thin liquid films under the influence of antagonistic short- and long-range forces / A. Sharma, R. Khanna // *Journal of Chemical Physics*. – 1999. – V.110. – P.4929-4936.
 314. Sharma A. Many paths to dewetting of thin films: anatomy and physiology of surface instability / A. Sharma // *European Physics Journal E*. – 2003. – V.12, №3. – P.397-408.
 315. Sheludko A. Thin liquid films // *Advances in Colloid and Interface Science*. – 1967. – V. 1, № 4. – P. 391-464.
 316. Shenoy V. Dewetting of glassy polymer film / V. Shenoy, A. Sharma // *Physical Review Letter*. – 2002. – V.88. – P.236101-236106.
 317. Shklyaev O. Stability of an evaporating thin liquid film / O. Shklyaev, E. Fried // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2007. – V.584. – P.157-183.
 318. Shyy W. Moving boundaries in micro-scale biofluid dynamics / W. Shyy, M. Francois, H.S. Udaykumar, N. N'dri, R. Tran-Son-Tay // *Applied Mechanics Reviews*. – 2001. – T. 54. – P. 405-412.
 319. Sinz D.K.N. Insoluble surfactant spreading along thin liquid films confined by chemical surface / D.K.N. Sinz, M. Hanyak, J.C.H. Zeegers, A.A. Darhuber // *Physical Chemistry Chemical Physics*. – 2011. – V.20. – P.9768-9777.
 320. Squires T.M. Microfluidics: Fluid physics at the nanoliter scale / T.M. Squires, S.R. Quake // *Reviews of Modern Physics*. – 2005. – V. 77, № 3. – P. 977-1013.
 321. Stone H. A. Engineering flows in small devices: microfluidics toward a lab-on-a-chip / H.A. Stone, A.D. Stroock, A. Ajdari // *Annual Review Fluid Mechanics* – 2004. – V. 36. – P. 381-411.
 322. Stone H. L. Iterative solution of implicit approximations of

- multidimensional partial differential equations / H.L. Stone // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 1968. – V.5№3. – P. 530-548.
323. Stoylov Y.Y. Fluorocarbons as volatile surfactants. // Langmuir. – 1998. – V. 14. – P. 5685-5690.
 324. Sultan E. Diffusion-limited evaporation of thin polar liquid films / E. Sultan, A. Boudaoud, M.B. Amar // Journal of Engineering. – 2004. – V. 50. – P. 209-222.
 325. Sultan E. Evaporation of a thin film: diffusion of the vapour and Marangoni instabilities / E. Sultan, A. Boudaoud, M.B. Amar // Journal of Fluid Mechanics. – 2005. – V. 543. – P. 183-202.
 326. Suman B. Dynamics of thin liquid films of surfaces with a time-periodic wettable / B. Suman, S. Kumar // Journal of Colloids and Interface Science. – 2006. – V.304, №1. – P.208-213.
 327. Takashima M. The stability of a horizontal layer of dielectric fluid under the simultaneous action of a vertical dc electric field and a vertical temperature gradient / M. Takashima M, R.D. Aldridge // Quarterly Journal Mechanics and Applied Mathematics. – 1976. – V.29, № 1. – P. 71-87
 328. Thiele U. Dewetting of an evaporating thin liquid film: heterogenous nucleation and surface instability / U.Thiele, M. Merting, W. Pompe // Physical Review Letters. – 1998. – V.80, №13. – P.2869-2872.
 329. Thiele U. Dewetting: film rupture by nucleation in the spinodal regime / U.Thiele, K. Neuffer, M Velarde // Physical of Fluids. – 2001. – V.87, №1. – P.016104-06108.
 330. Thiele U. Open questions and promising new fields in wetting/ U. Thiele // European Physics Journal E. – 2003. – V. 12, – P. 409-416.
 331. Thiele U. Thermodynamically consistent description of the hydrodynamics of free surfaces covered by insiluble surfactants of high concentration / U. Thiele, A.J. Archer, M. Plapp // Physics of Fluids. – 2012. – V.24. – P.102107-102138.

332. Tomson J. On certain curious motions observable on the surface of wine and other alcoholic liquours / J.Tomson // Philosophical Magazine. –1885. –V.10. –P.330-333.
333. Tonks L. A theory of liquid surface rapture by uniform electric field / L. Tonks // Physical Review. – 1935. – V. 48. – P. 562-568.
334. Traore P. Numerical modelling of finite-amplitude electro-thermo-convection in a dielectric liquid layer subjected to both unipolar injection and temperature gradient / P. Traore, A.T. Perez, D. Koulova, H. Romat // Journal of Fluid Mechanics. –2010. –V.658, №10. –P.279-293.
335. Trefethen L. Hydrodynamic stability without eigenvalues/ L.N. Trefethen, A.E. Trefethen, S.C. Reddy, T.A. Driscoll //Science. – 1993. – V. 261, № 5121. – P. 578-584.
336. Tretheway D. C. A generating mechanism for apparent fluid slip in hydrophobic microchannels / D.C. Tretheway , C.D. Meinhardt //Physics of Fluids. – 2004. – V. 16. – № 5. – P. 1509-1515.
337. Trevelyan P.M.J. Dynamics of a reactive falling film at large Péclet numbers / P.M.J. Trevelyan, S. Kalliadasis // Physics of Fluids. – 2004. – V. 16. – P. 3191-3228.
338. Trevelyan, P.M.J. Dynamics of a vertically falling film in the presence of a first-order chemical reaction / P.M.J. Trevelyan, S. Kalliadasis, J.H. Merkin, S.K. Scott // Physics of Fluids. – 2002. – V. 14. – P. 2402-2427.
339. Troian S.M. Fingering instability in thin wetting films / S.M. Troian, X.L. Wu, S.A. Safran // Physical Review Letters. – 1989. – V. 62, № 13. – P. 1496-1500.
340. Troian S. M. Fingering instabilities of driven spreading films / S. M. Troian, E. Herbolzheimer, S.A. Safran, J.F. Joanny // Europhysics Letters. – 1989. – V. 10, № 1. – P. 25-29.

341. Turnbull R.J. Electroconvective instability with a stabilizing temperature gradient / R.J. Turnbull // *Physical Fluids*. – 1968. – V.11, № 12. – P.2588-2596.
342. Turnbull R.J. Electroconvective instability with a stabilizing temperature gradient / R.J. Turnbull // *Physical Fluids*. – 1968. – V.11, № 12. – P.2596-2603.
343. VanHook S.J. Long-wavelength instability in surface-tension-driven Bénard convection / S.J. van Hook, M.F. Schatz, W.D. McCormick, J.B. Swift, H.L. Swinney // *Physical Review Letters*. – 1995. – V. 75, № 24. – P. 4397-4400.
344. VanHook S.J. Long-wavelength instability in surface-tension-driven Bénard convection: experiment and theory / S.J. van Hook, M.F. Schatz, W.D.McCormick, J.B. Swift, H.L. Swinney // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1997. – V. 345. – P. 45-78.
345. Vazques P.A. Numerical analysis of the stability of the electrohydrodynamic (EHD) electroconvection between two plates / P.A. Vazques, G. E. Georgiou, A. Castellanos // *Journal of Physics D: Applied Physics*. –2008. –V.41, №17. –P.2754-2763
346. Vayblat D. Rupture of thin viscous films by van der Waals forces: evolution and self-similarity. / D. Vayblat, J.R. Lister, T.P. Witelski // *Physics of Fluids*. –2001. –V.13. –P.1130-1143.
347. Verma R. Defect sensitivity in instability and dewetting of thin liquid films: two regimes of spinodal dewetting / R. Verma, A. Sharma // *Industrial & Engineering Chemistry Research*. –2007. –V.46, №10. –P.3108-3118.
348. Vrij A. Possible mechanism for the spontaneous rupture of thin, free liquid films / A.Vrij // *Discussions of the Faraday Society*. – 1966. –V. 42. –P. 23-33.
349. Wallis G.B. One-dimensional two-phase flow. – New York: McGraw-Hill. – 1969. – 431 c.

350. Wang H. Characteristics of an evaporating thin film in a microchannel / H.Wang, S.V. Garimella, J.Y. Murthy // International Journal of Heat and Mass Transfer. –2007. –V.50, №19-20. –P.3933-3942.
351. Warner M.R.E. Dewetting of ultrathin surfactant-covered films / M.R.E. Warner, R.V. Craster, O.K. Matar // Physics of Fluids. –2002. –V.14. –P. 4040-4063.
352. Warner M.R.E. Unstable van der Waals driven line in Marangoni driven thin viscous films / M.R.E. Warner, R.V. Craster, O.K. Matar // Physics of Fluids. –2002. –V.14. –V. 1642-1668.
353. Warner M.R.E. Surface patternig via evaporation of ultrathin films containing nanoparticle / M.R.E. Warner, R.V. Craster, O.K. Matar // Journal of Colloid and Interface Science. –2003. –V.267, №1. –P. 92-110.
354. Warner M.R.E. Fingering phenomena associated with insoluble surfactant spreading on thin liquid films. / M.R.E. Warner, R.V.Craster, O.K. Matar // Journal of Fluids Mechanics. –2004. –V.510. –P.169-200.
355. Weinstein S.J. Coating flows / S.J. Weinstein, K.J. Ruschak //Annual Review Fluid Mechanics. – 2004. – V. 36. – P. 29-53.
356. Weh L. Self-organized structures at the surface of thin polymer films /L. Weh //Materials Science and Engineering:C. –1999. –V.8-9. –P.463-467.
357. Weh L. Evolution of fractal-like surface structures in layers of polyacrylonitrile solutions by interfacial dynamic processes /L.We, A. Venthur // Journal of Colloid and Interface Science. –2004. –V.271, №2. –P.407-415.
358. Weh L. Surface structures in thin polymer layers caused by coupling of diffusion-controlled Marangoni instability and local horizontal temperature gradient /L. Weh // Macromolecular Materials and Enginnring. –2005. – V.290, №10. –P.976-986.
359. Williams M. B. Nonlinear theory of film rupture / M.B. Williams, S.H. Davis // Journal of colloid and interface science. – 1982. – V. 90,

№ 1. – P. 220-228.

360. Witelski P. Stability of self-similar solutions for van der Waals driven thin film rupture / P. Witelski, A. J. Bernoff // *Physics of Fluids*. –1999. –V.11, №9. –P. 2443-2445.
361. Wong H. Deposition and thinning of the human tear film / H. Wong, I. Fatt, C.J. Radke // *Journal of Colloid and Interface Science*. – 1996. – V. 184, № 1. – P. 44-51.
362. Wong H. The motion of long bubbles in polygonal capillaries. Part 1. Thin films / H. Wong, C.J. Radke, S. Morris // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1995. – V. 292. – P. 71-94.
363. Worraker W. J. The effect of temperature-induced variations in charge carrier mobility on a stationary electrohydrodynamic instability / W.J. Worraker, A.T. Richardson // *Journal Fluid Mechanics*. –1979. – V.93, № 1. – P.29-45.
364. Xie R. Spinodal dewetting of thin polymer films / R.Xie, A.Karin, J.F. Douglas, C.C. Hain, R.A. Weiss // *Physical Review Letters*. –1998. – V.81, №6. – P.1251-1254.
365. Xu X. Marangoni flow in an evaporating water droplet / X.Xu, J.Luo // *Applied Physics Letters*. –2007. –V.91. –P.124102-124109.
366. Xue L. Pattern formation by dewetting of polymer thin film / L.Xue, Y.Han // *Progress in Polymer Science*. –2011. –V.36, №2. –P.269-293.
367. Yantsios S. G. A mechanism of Marangoni instability in evaporating thin liquid films due to soluble surfactant / S. G. Yantsios, B. G. Higgins // *Physics of Fluids*. – 2010. – № 22. – P. 022102-022118.
368. Yeo L.Y. Marangoni instability of a thin liquid film resting on a locally heated horizontal wall / L.Y. Yeo, R.V. Craster, O.K. Matar // *Physical Review*. – 2003. – V. 67 – P. 056315-056323.
369. Yih C.S. Instability due to viscosity stratification // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1967. – V. 27, № 2. – P. 337-352.

370. Yih C.S. Stability of liquid flow down an inclined plane // *Physics of Fluids*. – 1963. – V. 6. – P. 321-329.
371. Young G.W. Rivulet instabilities / G.W. Young, S.H. Davis // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1987. – V. 176. – P. 1-31.
372. Zang W. Similary solutions for van der Waals rupture of a thin film on a solid substrare. / W. Zang, J.R. Lister // *Physics of Fluids*. –1999. –V.11, №9. –P.2454-2462.
373. Zhang Y. L. A theoretical study of chemical delivery within the lung using exogenous surfactant / Y.L. Zhang, O.K. Matar, R.V. Craster // *Medical Engineering and Physics*. –2003. –V.25, №2. –P.115-132.
374. Zope M. Self-organized structures in thin liquid films on chemically heterogeneous substrare: effect of antagonistic short and long range interactions / M.Zope, K. Kargupta, A.Sharma // *Journal of Chemical Physics*. –2001. –V.114. –P. 7211-7219.