

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

П. И. ГЕШЕВ

ОСНОВЫ ГИДРОДИНАМИКИ

Учебное пособие

Новосибирск
2021

УДК 532.5.01
ББК 22.253.3
Г 456

Рецензент
канд. физ.-мат. наук *Д. Ф. Сиковский*

Гешев, П. И.
Г 456 Основы гидродинамики : учеб. пособие / П. И. Гешев ; Новосиб. гос. ун-т. — Новосибирск : ИПЦ НГУ, 2021. — 206 с.

ISBN 978-5-4437-

Пособие является введением в гидродинамику, которая рассматривается как механика сплошной среды, основанная на законах Ньютона и принципах термодинамики. Пособие написано на основе лекционной и практической работы автора со студентами на кафедре физики неравновесных процессов ФФ НГУ.

Предназначено для студентов математических, физических, естественнонаучных факультетов университетов, инженерно-физических специальностей вузов, требующих углубленного знания законов механики.

УДК 532.5.01
ББК 22.253.3

ISBN 978-5-4437-

© Новосибирский государственный
университет, 2021
© П. И. Гешев, 2021

ПРЕДИСЛОВИЕ

По гидродинамике написаны прекрасные и очень объемные книги: Лэмбом, Милн-Томпсоном, Бэтчелором, Лойцяным, Ландау и Лившицем и др. В них изложено огромное количество результатов, полученных в механике жидкости за последние триста лет. Наш краткий курс лекций основан на этих книгах и преследует скромные цели:

- ввести студентов в новую для них область науки;
- познакомить с новым математическим аппаратом;
- показать, что с помощью этого аппарата можно распространить принципы механики Ньютона на сплошные среды;
- сформулировать основные теоремы гидродинамики и принципы термодинамики;
- рассмотреть интересные примеры решенных гидродинамических проблем.

Для вывода уравнений Навье — Стокса в курсе лекций использованы принципы неравновесной термодинамики Онзагера. Вывод замыкающих соотношений для вязкого трения и процессов теплопроводности из принципа возрастания энтропии для необратимых процессов представляется наиболее универсальным и обоснованным.

Учебное пособие предназначено для студентов физического и физико-технического профиля третьего или четвертого года обучения.

ЛЕКЦИЯ 1

КИНЕМАТИКА ДВИЖЕНИЙ СРЕДЫ. ТЕОРЕМЫ ГЕЛЬМГОЛЬЦА О СКОРОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ И О ВИХРЕВЫХ ТРУБКАХ. ТЕНЗОР СКОРОСТЕЙ ДЕФОРМАЦИИ

ВВЕДЕНИЕ

Сплошная среда, или континуум бесструктурной материи, — это удобная теоретическая модель, имеющая широкие границы применимости. Находящаяся в покое сплошная среда характеризуется только плотностью ρ , давлением P и температурой T . Характерное свойство жидкой среды — ее *сплошность*, т. е. отсутствие разрывов. Известное явление кавитации в жидкостях, возникающее при наложении отрицательных разрывающих жидкость сил, может быть рассмотрено в рамках модели сплошной среды при введении критического давления, т. е. давления насыщения паров жидкости, при котором наступает разрыв.

Другое характерное свойство сплошной среды — *текучесть*, которое означает способность среды приходить в состояние непрерывного движения под действием приложенных к ней сил. Упругие среды, в отличие от текучих жидких или газообразных, под действием приложенных сил переходят в новое деформированное состояние, но не текут.

Примеры сплошной среды: воздух, вода, нефть, битум. Сыпучие среды, такие как песок, гравий, грунт, также могут двигаться сплошным потоком. Следовательно, они также подчиняются законам движения сплошной среды, если рассматриваются масштабы, намного превышающие размеры отдельных песчинок. Можно ввести меру текучести среды — *скорость сдвига*, $S = du/dy$, которая возникает вследствие приложения касательной силы к пластинке (рис. 1.1).

Зависимость скорости сдвига S от приложенного касательного напряжения $\tau = F / \sigma$ (где F — приложенная сила; σ — площадь пласти-

ны) показана на рис. 1.2 для некоторых сред. Если реологические кривые на рис. 1.2 суть прямые, как у нефти, воды и воздуха, то такая среда называется *ньютоновской*. Наука, изучающая связь между скоростью сдвига S и приложенным напряжением τ , называется *реологией*.

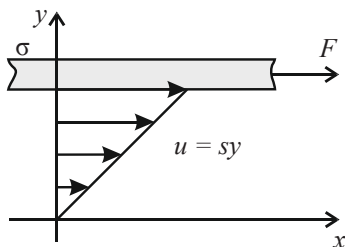


Рис. 1.1

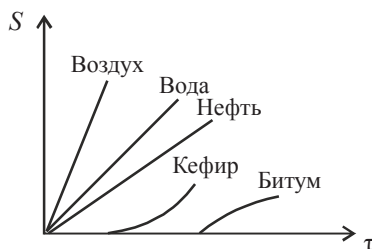


Рис. 1.2

Коэффициент пропорциональности μ в формуле $\tau = \mu S$ называют динамической вязкостью. Он вводится для ньютоновских сред. Неньютоновские жидкости (полимеры, битум, кефир, тесто и т. д.) обычно имеют сложную молекулярную структуру, которая на макроуровне проявляется в нелинейности реологических кривых.

В лекции 4 на основе линейной неравновесной термодинамики Онзагера будут выведены в общем виде основные уравнения движения вязкой сжимаемой ньютоновской среды — уравнения Навье — Стокса. Наиболее подробно в курсе будет рассмотрена модель идеальной несжимаемой и невязкой жидкости. Последние четыре лекции будут посвящены изложению законов движения вязкой жидкости.

КИНЕМАТИКА ДВИЖЕНИЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Кинематика — это раздел гидродинамики, в котором изучаются общие свойства полей скорости и завихренности в среде. Суще-

Лекция 1

ствует два способа описания движений сплошной среды. Лагранж предложил следить за отдельными частицами среды. Уравнение траекторий для частиц $\vec{X}(t)$ определяется по заданному полю скорости $\vec{u}(\vec{x}, t)$:

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{u}(\vec{x}, t), \quad \vec{X}(t = t_0) = \vec{X}_0, \quad (1.1)$$

здесь \vec{X}_0 — это начальные координаты жидкой частицы; вектор \vec{X}_0 отмечает данную частицу среды, его компоненты называются *лагранжевыми координатами*. Лагранжевыми координатами могут служить любые другие три параметра a, b, c , взаимно однозначно связанные с компонентами вектора \vec{X}_0 .

Эйлер предложил альтернативный подход к описанию динамики жидкости: рассматривать, как в фиксированных точках пространства \vec{x} с течением времени t меняются значения поля скорости жидкости $\vec{u}(\vec{x}, t)$. Эти подходы эквивалентны. По известному *лагранжевому закону движения* $\vec{X}(\vec{X}_0; t)$ можно дифференцированием получить *лагранжеву скорость* $\vec{U} = \dot{\vec{X}}$ и, выразив из соотношений $\vec{X}(\vec{X}_0; t) = \vec{x}$ вектор \vec{X}_0 через \vec{x} и t , после его подстановки в вектор \vec{U} получить *эйлерову скорость* $\vec{u}(\vec{x}, t)$. По известному эйлерову полю скорости $\vec{u}(\vec{x}, t)$ лагранжево описание рассчитывается по уравнению (1.1). Лагранжево описание дает *траектории жидких частиц* $\vec{X}(\vec{X}_0; t)$.

Линии тока — это кривые, направленные в каждой точке пространства вдоль вектора скорости. Дифференциальные уравнения линий тока в момент t_0 имеют вид

$$\frac{dx}{u(\vec{x}, t_0)} = \frac{dy}{v(\vec{x}, t_0)} = \frac{dz}{w(\vec{x}, t_0)}. \quad (1.2)$$

В подобной форме можно переписать и уравнение траектории (1.1):

$$\frac{dx}{u(\bar{x}, t)} = \frac{dy}{v(\bar{x}, t)} = \frac{dz}{w(\bar{x}, t)} = dt. \quad (1.3)$$

Для стационарных полей скорости, как видно из (1.2)–(1.3), траектории жидких частиц совпадают с линиями тока. Для нестационарных полей линии тока и траектории различны. Совокупность линий тока, исходящих из замкнутого контура, образует непроницаемую боковую поверхность *трубки тока* (рис. 1.3).

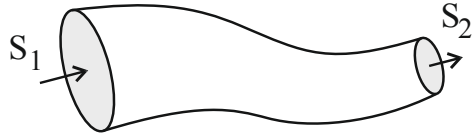


Рис. 1.3

В стационарном случае в силу непроницаемости боковой поверхности вдоль трубки тока остается постоянным массовый расход жидкости:

$$Q = \iint_S \rho u_n ds, \quad (1.4)$$

где интеграл берется по сечению трубки S от нормальной к поверхности сечения компоненты скорости u_n .

Рассмотрим теперь две теоремы Гельмгольца, в которых появляются такие важные для дальнейшего изложения понятия, как тензор скоростей деформаций, завихренность и вихревые трубки.

1-я теорема Гельмгольца (о разложении поля скорости в окрестности точки). Рассмотрим разложение поля скорости в ряд Тейлора в окрестности точки x_{0j} по малым расстояниям $\delta x_j = (x_j - x_{0j})$:

$$u_i(x_j) = u_i(x_{0j}) + \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right]_{x_{0j}} \delta x_j + \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right]_{x_{0j}} \frac{\delta x_j \delta x_k}{2} + \dots, \quad (1.5)$$

здесь и далее предполагается суммирование по парным индексам. Разложим тензор $u_{i,j} \equiv (\partial u_i / \partial x_j)_0$ на симметричную D_{ij} и антисимметричную A_{ij} части: $u_{i,j} = D_{ij} + A_{ij}$, где

Лекция 1

$$D_{ij} = 0,5(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (1.6)$$

$$A_{ij} = 0,5(u_{i,j} - u_{j,i}). \quad (1.7)$$

Тензор A_{ij} можно представить через дуальный ему вектор a_k по формуле

$$A_{ij} = \varepsilon_{ijk} a_k, \quad (1.8)$$

где ε_{ijk} — единичный абсолютно антисимметричный псевдотензор Леви-Чивита, обладающий следующими свойствами:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1 \\ \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1. \\ 0 (i = j; j = k; i = k) \end{cases} \quad (1.9)$$

При совпадении любых двух индексов тензора получаем нуль и ненулевые его значения возникают только с неравными индексами из выражений (1.9). В дальнейшем нам будут полезны следующие тождества:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}, \quad (1.10)$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ljk} = 2\delta_{il}, \quad (1.11)$$

здесь и далее δ_{ij} — символ Кронекера (или единичный тензор второго ранга): δ_{ij} равен 1 при $i = j$ и 0 при $i \neq j$. Используя соотношение (1.11) для дуального вектора, получаем

$$a_k = \frac{\varepsilon_{klm}}{2} A_{lm}. \quad (1.12)$$

Подставив A_{lm} из (1.7) в (1.12), получим

$$a_k = -\frac{\varepsilon_{klm}}{2} \nabla_l u_m = -\frac{\omega_k}{2}, \quad (1.13)$$

где ∇_l — оператор «набла»; ω — вектор завихренности ($\vec{\omega} = \text{rot} \vec{u}$). Окончательно формула (1.5) принимает вид

$$u_i = u_{0i} + \varepsilon_{ikj} \Omega_k \delta x_j + D_{ij} \delta x_j, \quad (1.14)$$

где $\Omega_k = \frac{\omega_k}{2}$ — локальная угловая скорость вращения частиц жидкости. В векторной форме получаем

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + [\vec{\Omega} \times \delta \vec{r}] + \vec{D} \cdot \delta \vec{r}, \quad (1.15)$$

здесь использована диадная форма записи тензора скорости деформации \vec{D} .

Выражение (1.15) и есть **1-я теорема Гельмгольца**: *скорость жидкости в окрестности точки раскладывается на перенос, вращение и чисто деформационное течение.*

Тензор скоростей деформаций D_{ij} отвечает за деформационную составляющую течения, которую, в отличие от двух первых (переноса и вращения), невозможно устранить выбором системы координат.

Покажем, что $\vec{\Omega} = \vec{\omega} / 2$ — это действительно локальная угловая скорость вращения жидкости. Для твердотельного вращения жидкости имеем

$$\begin{aligned} \vec{u} &= [\vec{\Omega} \times \vec{r}] \\ \vec{\omega} = \text{rot} \vec{u} &= [\nabla \times [\vec{\Omega} \times \vec{r}]] = \vec{\Omega} (\nabla \cdot \vec{r}) - (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{r} = 3\vec{\Omega} - \vec{\Omega} = 2\vec{\Omega}. \end{aligned}$$

Так что, действительно, завихренность равна удвоенной угловой скорости вращения частиц жидкости: $\vec{\omega} = 2\vec{\Omega}$.

2-я теорема Гельмгольца (об интенсивности вихревых трубок). Поле завихренности $\vec{\omega} = \text{rot} \vec{u}$ соленоидально, т. е. ($\text{div} \vec{\omega} \equiv 0$), и ли-

нии этого поля образуют вихревые трубки, аналогичные трубкам тока (см. рис. 1.3). Взяв интеграл по объему вихревой трубки от $\text{div} \vec{\omega}$ и преобразовав его в поверхностный по теореме Гаусса, получаем

$$\oint \omega_n ds = -\int_{S_1} \omega_n ds + \int_{S_2} \omega_n ds \equiv 0,$$

что позволяет ввести интенсивность вихревой трубки, одинаковую для разных сечений трубки.

$$I = \int_{S_1} \omega_n ds = \int_{S_2} \omega_n ds = \text{const.} \quad (1.16)$$

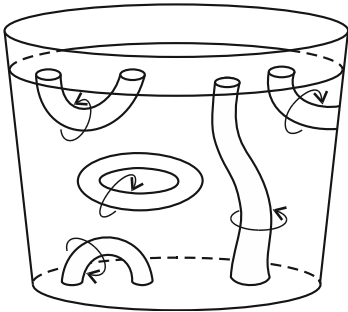


Рис. 1.4

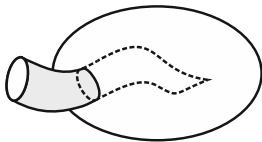


Рис. 1.5

Выражение (1.16) — это **2-я теорема Гельмгольца**, которая утверждает, что *интенсивность вихревой трубки I , определяемая как поток завихренности через ее поперечное сечение, остается постоянной вдоль трубки.*

Таким образом, вытекающее из этой теоремы Гельмгольца **следствие 1** гласит, что *вихревые трубки не могут обрываться в жидкости: они либо замкнуты, либо оканчиваются на ограничивающих жидкость поверхностях* (рис. 1.4). В противном случае было бы вытекание в объем потока завихренности, но не было бы вытекания, как показано на рис. 1.5.

Следствие 2: интенсивность вихревых трубок, согласно теореме Стокса, равна циркуляции поля скорости вокруг вихревой трубки.

Последнее утверждение легко доказывается:

$$I = \int_S (\text{rot } \vec{u})_n ds \equiv \oint_L \vec{u}_t dl = C, \quad (1.17)$$

здесь L — контур, ограничивающий поверхность поперечного сечения S вихревой трубки.

Если всюду в среде $\vec{\omega} = 0$, то движение жидкости безвихревое и можно ввести потенциал поля скорости $\vec{u} = \nabla \varphi$.

ДЕФОРМАЦИОННОЕ ТЕЧЕНИЕ. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ КОМПОНЕНТ ТЕНЗОРА СКОРОСТЕЙ ДЕФОРМАЦИИ

Рассмотрим происходящее за время dt изменение малого жидкого элемента $\delta \vec{x}$, показанное на рис. 1.6.

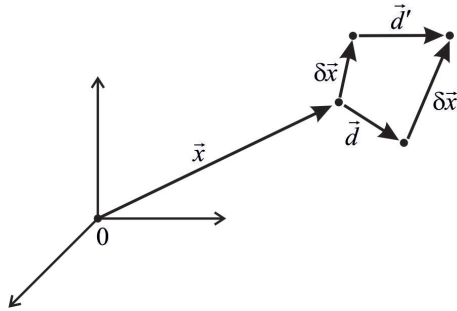


Рис. 1.6

За время dt жидкий отрезок $\delta \vec{x}$ перейдет в $\delta \vec{x}'$. Ясно, что смещение концов элемента определяется как $\vec{d}' = \vec{u}(\vec{r} + \delta \vec{x}) dt$; $\vec{d} = \vec{u}(\vec{r}) dt$. Из рис. 1.6 видно, что $\vec{d} + \delta \vec{x}' = \vec{d}' + \delta \vec{x}$ или $\delta \vec{x}' - \delta \vec{x} = \vec{d}' - \vec{d} = [\vec{u}(\vec{r} + \delta \vec{x}) - \vec{u}(\vec{r})] dt$.

Лекция 1

В результате получаем

$$\frac{d(\delta\vec{x})}{dt} = [\vec{\Omega} \times \delta\vec{x}] + (\vec{D} \cdot \delta\vec{x}). \quad (1.18)$$

Производная (1.18) — это скорость изменения жидкого отрезка $\delta\vec{x}$. Выберем жидкий отрезок вдоль направления оси x , $\delta\vec{x} = (\delta x, 0, 0)$, спроектируем уравнение (1.18) на ось x (умножив на орт \vec{i}). При этом выпадает член $(\vec{i} \cdot [\vec{\Omega} \times \vec{i}])$ и мы получаем

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = D_{11} \delta x_1$$

или

$$D_{11} = \frac{1}{\delta x_1} \frac{d(\delta x_1)}{dt} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}. \quad (1.19)$$

Формула (1.19) означает, что диагональный член тензора скоростей деформаций есть относительная скорость деформирования жидкости в данном направлении.

По правилу дифференцирования произведения для жидкого объема $\delta\tau = \delta x \delta y \delta z$ получаем

$$\frac{1}{\delta\tau} \frac{d(\delta\tau)}{dt} = \frac{1}{\delta x} \frac{d(\delta x)}{dt} + \frac{1}{\delta y} \frac{d(\delta y)}{dt} + \frac{1}{\delta z} \frac{d(\delta z)}{dt} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j}. \quad (1.20)$$

Следовательно, относительная скорость объемного расширения среды определяется следом тензора скоростей деформаций D_{ij} :

$$D_{ij} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \text{div} \vec{u},$$

т. е. величиной, инвариантной относительно выбора системы координат.

Вводя в формулу (1.20) вместо малого жидкого объема $\delta\tau$ плотность $\rho = \delta m / \delta\tau$, где δm — масса жидкости в объеме $\delta\tau$, получаем уравнение неразрывности, выражающее в дифференциальной форме закон сохранения массы для сплошной среды $\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \text{div } \vec{u}$ или в окончательной форме

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \vec{u} = 0. \quad (1.21)$$

Покажем, что недиагональные члены тензора D_{ij} при $i \neq j$ определяют скорости скошения углов между бесконечно малыми жидкими отрезками, исходящими из данной точки вдоль осей i и j .

Выберем два малых жидких отрезка $\delta\vec{x}_1$ и $\delta\vec{x}_2$, направленных вначале вдоль осей x и y соответственно. Через время dt , согласно формуле (1.18), эти два отрезка представляются в виде

$$\delta\vec{x}'_1 = \delta\vec{x}_1 + (\vec{\Omega} \times \delta\vec{x}_1 + \vec{D} \cdot \delta\vec{x}_1) dt, \quad (1.22)$$

$$\delta\vec{x}'_2 = \delta\vec{x}_2 + (\vec{\Omega} \times \delta\vec{x}_2 + \vec{D} \cdot \delta\vec{x}_2) dt. \quad (1.23)$$

Перемножая (1.22) и (1.23) скалярно, находим с точностью до членов первого порядка малости по dt косинус угла между ними:

$$\begin{aligned} \cos \theta_{12} &= \frac{(\delta\vec{x}'_1 \cdot \delta\vec{x}'_2)}{\left| \delta\vec{x}'_1 \right| \left| \delta\vec{x}'_2 \right|} = \\ &= \frac{(\delta\vec{x}_1 \cdot \delta\vec{x}_2) + [(\delta\vec{x}_1 \cdot \vec{D} \cdot \delta\vec{x}_2) + (\delta\vec{x}_2 \cdot \vec{D} \cdot \delta\vec{x}_1)] dt}{(\delta x_1^2 + 2\delta\vec{x}_1 \cdot \vec{D} \cdot \delta\vec{x}_1 dt)^{1/2} (\delta x_2^2 + 2\delta\vec{x}_2 \cdot \vec{D} \cdot \delta\vec{x}_2 dt)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Лекция 1

В (1.24) взаимно сократились члены первого порядка малости по dt , содержащие $\vec{\Omega}$. Учитывая ортогональность начальных отрезков $\delta\vec{x}_1$ и $\delta\vec{x}_2$ и симметрию тензора D_{ij} и вводя дифференциально

малый угол скошения $d\gamma_{12}(\theta_{12} = \frac{\pi}{2} - d\gamma_{12})$, получаем из (1.24)

$$\frac{d\gamma_{12}}{dt} = 2D_{12}. \quad (1.25)$$

Таким образом, внедиагональные члены тензора скоростей деформаций равны половинам скоростей скошения углов между жидкими координатными линиями:

$$D_{12} = \frac{1}{2} \frac{d\gamma_{12}}{dt}. \quad (1.26)$$

ЛЕКЦИЯ 2

СУБСТАНЦИОНАЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ. ОБЪЕМНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ СИЛЫ. ПРИНЦИП И ТЕОРЕМА КОШИ. СИММЕТРИЯ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ

Субстанциональная производная — это производная по времени от какой-либо субстанции вдоль траектории жидкой частицы, т. е. это по сути лагранжева производная, но выраженная в эйлеровом представлении. Для того чтобы получить общее выражение субстанциональной производной, рассмотрим изменение, например, поля температуры с точки зрения двух наблюдателей: А — покоящегося и В — движущегося со скоростью \vec{U} относительно системы координат \vec{x} . Покоящийся наблюдатель А будет видеть скорость изменения поля температур в точке \vec{x} согласно производной $\frac{\partial T(\vec{x}, t)}{\partial t}$. Координаты движущегося наблюдателя В будут равны $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{U}t$, и он регистрирует скорость изменения температуры в точке $\vec{x}' = \text{const}$ своей системы координат:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\vec{x}'} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\vec{x}} + (\vec{U} \cdot \nabla)T. \quad (2.1)$$

Если к каждой жидкой частице «привязать» свою систему координат, движущуюся со скоростью частицы (это фактически и означает переход к лагранжевому описанию), то закон движения частиц можно записать в форме $\vec{X} = \vec{X}_0 + \int_0^t \vec{U} dt$, где большими буквами \vec{X}_0 обозначены три начальные координаты частиц (лагранжевы переменные). Полная (субстанциональная) производная в этом случае, очевидно, определится формулой

Лекция 2

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)_{\vec{x}_0} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\vec{x}} + (\vec{U} \cdot \nabla)T, \quad (2.2)$$

или, применяя знак полной производной, запишем

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)T,$$

где использовано поле скорости частицы, но выраженное в эйлеровых переменных $\vec{u}(\vec{x}, t)$. Итак, скорость изменения любой субстанции в данной жидкой частице определяется формулой типа (2.2). Например, ускорение жидкой частицы есть

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}. \quad (2.3)$$

Как мы увидим в дальнейшем, лагранжева форма законов сохранения будет использовать полные производные типа (2.2)–(2.3).

Важнейшими понятиями при выводе законов гидродинамики являются интегралы от каких-либо субстанций по жидким объемам, поверхностям и линиям. В процессе движения жидкие объемы, поверхности и линии изменяют свою форму, но предполагается, что они состоят из одних и тех же жидких частиц. Рассмотрим, например, интеграл от плотности жидкости по жидкому объему. Ясно, что в силу непроницаемости стенок жидкого объема для жидких частиц этот интеграл со временем меняться не будет (это есть полная масса жидкости в объеме). Следовательно, интегральный закон сохранения массы (в лагранжевой форме) имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\tau} \rho \, d\tau \right) \equiv 0. \quad (2.4)$$

Будем в дальнейшем малыми греческими буквами обозначать жидкие лагранжевы объемы τ , поверхности σ и линии λ , а латинскими V, S, L — фиксированные (эйлеровы) объемы, поверхности и линии соответственно.

В процессе движения дифференциал жидкого объема $\delta\tau$ меняется, и для скорости его изменения ранее была получена формула

$$\frac{d(\delta\tau)}{dt} = \delta\tau \cdot \operatorname{div}\bar{u}. \quad (2.5)$$

Преобразуем закон сохранения массы (2.4) к дифференциальной форме. Можно вначале поступить формально: подействовать оператором полной производной на ρ и $d\tau$ и воспользоваться формулой (2.5):

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\tau} \rho d\tau \right) = \int_{\tau} \left(\frac{d\rho}{dt} d\tau + \rho \frac{d(d\tau)}{dt} \right) = \int_{\tau} (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div}\bar{u}) d\tau = 0. \quad (2.6)$$

В силу произвольности объема интегрирования по τ уравнению (2.6) равносильно локальное равенство

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}\bar{u} = 0. \quad (2.7)$$

Уравнение (2.7) — это дифференциальная форма закона сохранения массы жидкости.

Рассмотрим подробнее формулу дифференцирования интегралов по жидкому объему. Пусть за время dt жидкий объем перейдет из конфигурации 1 в 2 (рис. 2.1). Производную от интеграла по жидкому объему представим в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\tau} d\tau \right) = \frac{1}{dt} \left[\int_{\tau'} a(\bar{x} + \bar{u}dt, t + dt) d\tau' - \int_{\tau} a(x, t) d\tau \right]. \quad (2.8)$$

Лекция 2

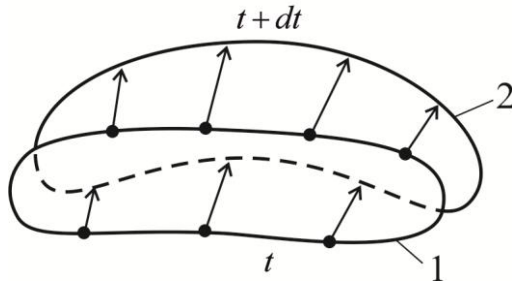


Рис. 2.1

За время dt координаты частиц изменятся и станут $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{u} dt$. Дифференциал $d\tau'$ интегрирования по новым координатам \vec{x}' можно связать с $d\tau$ через якобиан преобразования

$$J = \left| \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \right| = \left| \delta_{ij} + dt \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \approx 1 + dt \operatorname{div} \vec{u} + O(dt^2),$$

$$d\tau' = (1 + dt \operatorname{div} \vec{u}) d\tau. \quad (2.9)$$

После подстановки (2.9) в (2.8) получаем

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\tau} a d\tau \right) = \int_{\tau} \left(\frac{da}{dt} + a \operatorname{div} \vec{u} \right) d\tau, \quad (2.10)$$

где $\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) a$ — субстанциональная производная величины a .

Общий закон изменения какой-либо физической величины A через ее объемную плотность a и объемную интенсивность источников b_A запишется в интегральной форме

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{\tau} a d\tau \right) = \int_{\tau} b_A d\tau. \quad (2.11)$$

Применим к выражению (2.11) формулу (2.10) и получим дифференциальный вариант закона сохранения:

$$\frac{da}{dt} + a \operatorname{div} \bar{u} = b_A. \quad (2.12)$$

Запишем полную производную в (2.12) в виде (2.2) и получим другую (эйлерову) форму уравнения (2.12):

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \operatorname{div}(a\bar{u}) = b_A. \quad (2.13)$$

Используя формулу (2.13), получим общий вид законов сохранения для фиксированных объемов интегрирования. Для этого проинтегрируем (2.13) по некоторому фиксированному объему V . После преобразования по теореме Гаусса интеграла от дивергенции получаем

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V a dV \right) = - \oint_S a u_n ds + \int_V b_A dV. \quad (2.14)$$

Подставим теперь вместо a плотность ρ или плотность импульса $\rho \bar{u}$ и получим законы сохранения массы и импульса для фиксированного объема соответственно:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \rho dV \right) = - \oint_S \rho u_n ds, \quad (2.15)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \rho \bar{u} dV \right) = - \oint_S \rho \bar{u} u_n ds + \int_V \vec{f} dV, \quad (2.16)$$

где \vec{f} — удельная плотность объемных сил, действующих в среде.

Лекция 2

В правые части уравнений (2.15) и (2.16) входят нормальные к поверхности компоненты плотности потока массы ρu_n и импульса $\rho \bar{u} u_n$. Знаки «минус», стоящие перед интегралами справа в этих формулах, связаны с тем, что при вытекании из объема с положительным u_n количество субстанции A в объеме должно уменьшаться

ся ($\frac{dA}{dt} < 0$) и наоборот.

ОБЪЕМНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ СИЛЫ. ПРИНЦИП И ТЕОРЕМА КОШИ

Коши выдвинул важный постулат относительно природы сил, действующих между частицами жидкости. Он предположил, что эти силы имеют контактную природу, т. е. частицы среды могут действовать друг на друга силовым образом, только когда они находятся в непосредственном контакте — соприкасаются друг с другом. Ясно также, что эти силы зависят от выбора площадки контакта, т. е. от вектора нормали к ней, и пропорциональны размерам этой площадки. Обозначим вектор поверхностной плотности этих сил через $\vec{f}_\sigma(\vec{n})$, где \vec{n} — нормаль к площадке $d\sigma$. Тогда дифференциально малая сила, действующая на выделенную площадку, определяется выражением

$$d\vec{F} = \vec{f}_\sigma(\vec{n})d\sigma. \quad (2.17)$$

Отметим, что вектор $\vec{f}_\sigma(\vec{n})$ не образует поля, так как зависит от направления вектора нормали к площадке \vec{n} . Учитывая в (2.16) кроме объемных сил $\rho \vec{g}$ (\vec{g} — напряженность этих сил, т. е. сила/ед. массы) еще и выделенные отдельно поверхностные силы, интегральное уравнение баланса импульса (2.16) запишется в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\tau} \rho \bar{u} d\tau \right) = \int_{\tau} \rho \vec{g} d\tau + \oint_{\sigma} \vec{f}_\sigma(\vec{n}) d\sigma. \quad (2.18)$$

Докажем, что плотность поверхностных сил $\vec{f}_\sigma(\vec{n})$ по вектору нормали \vec{n} нечетна:

$$\vec{f}_\sigma(-\vec{n}) = -\vec{f}_\sigma(\vec{n}). \quad (2.19)$$

Рассмотрим малый объем, охватывающий площадку $d\sigma$ (рис. 2.2). Запишем для него уравнение (2.18) и устремим толщину объема к нулю. Получится, что в пределе интеграл поверхностный по $d\sigma$ в выражении (2.18) должен отдельно равняться нулю.

Это означает, что силы, приложенные к правой и левой сторонам площадки $d\sigma$, равны по величине и противоположны по знаку $\vec{f}(\vec{n}) + \vec{f}(-\vec{n}) = 0$. Таким образом выясняется физический смысл формулы (2.19) — это третий закон Ньютона (равенство сил действия и противодействия на границе между двумя соседними частицами жидкости).

Для доказательства теоремы Коши выделим контрольный объем в форме тетраэдра (рис. 2.3), образуемый малой треугольной площадкой σ с нормалью \vec{n} .

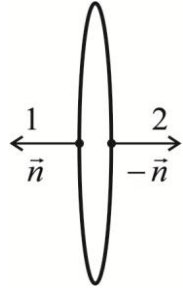


Рис. 2.2

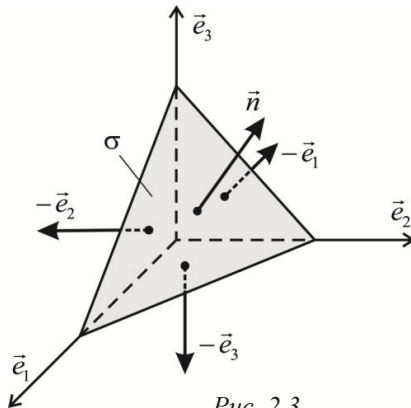


Рис. 2.3

Лекция 2

Для очень малых размеров тетраэдра уравнение (2.18) принимает вид

$$\begin{aligned} \rho \dot{u} \delta \tau - \rho \bar{g} \delta \tau = \bar{f}(\bar{n}) \sigma + \bar{f}(-\bar{e}_1) \sigma_1 + \\ + \bar{f}(\bar{e}_2) \sigma_2 + \bar{f}(-\bar{e}_3) \sigma_3 = \bar{f}(\bar{n}) \sigma - \sum_{j=1}^3 \bar{f}(\bar{e}_j) \sigma_j. \end{aligned}$$

Так как σ_j есть проекции площадки σ на плоскости, перпендикулярные соответствующим осям, то $\sigma_j = \sigma \cos \theta_j$, где θ_j — углы между вектором \bar{n} и осями соответствующих осей \bar{e}_j : $\cos \theta_j = \bar{e}_j \cdot \bar{n}$. При стремлении размеров тетраэдра к нулю имеем $(\delta \tau / \delta \sigma) \rightarrow 0$ и, следовательно,

$$\bar{f}(\bar{n}) = \bar{f}(\bar{e}_1)(\bar{e}_1 \cdot \bar{n}) + \bar{f}(\bar{e}_2)(\bar{e}_2 \cdot \bar{n}) + \bar{f}(\bar{e}_3)(\bar{e}_3 \cdot \bar{n}), \quad (2.20)$$

или в индексной форме равенство (2.20) принимает вид

$$f_i(n_j) = [f_i(e_{1j})e_{1j} + f_i(e_{2j})e_{2j} + f_i(e_{3j})e_{3j}] \cdot n_j = \tau_{ij} n_j. \quad (2.21)$$

Эта формула является основным результатом *теоремы Коши*, утверждающей, что вектор поверхностных сил среды $\bar{f}(\bar{n})$ представляется в виде произведения некоторого тензора τ_{ij} (*тензора напряжений*) на единичный вектор площадки наблюдения n_j . В то время как вектор сил $\bar{f}(\bar{n})$ не является полем, так как зависит от направления \bar{n} , тензор τ_{ij} зависит только от \bar{x} и t и образует тензорное поле. Теорема Коши вводит в рассмотрение тензор напряжений, но никак не определяет его.

Теперь интегральный закон сохранения импульса для среды, выражаемый через тензор напряжений τ_{ij} , принимает вид

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\tau} \rho u_i d\tau \right) = \int_{\tau} \rho g_i d\tau + \oint_{\sigma} \tau_{ij} n_j d\sigma. \quad (2.22)$$

Используя правила дифференцирования интегралов и теорему Гаусса во втором интеграле, получаем из подынтегрального выражения в (2.22) дифференциальное уравнение баланса импульса. Его также называют *уравнением движения в напряжениях*:

$$\rho \frac{du_i}{dt} = \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}. \quad (2.23)$$

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА И СИММЕТРИЯ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ

В сплошной среде закон сохранения момента импульса является новым независимым законом в отличие от аналогичного закона в механике материальной точки, где он является следствием уравнения движения и изотропии сил, действующих на точку. Интегральная форма закона сохранения момента импульса для жидкого объема имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\tau} [(\vec{R} + \vec{r}) \times \rho \vec{u}] d\tau \right\} = \\ = \int_{\tau} [(\vec{R} + \vec{r}) \times \rho \vec{g}] d\tau + \oint_{\sigma} [(\vec{R} + \vec{r}) \times \vec{\tau} \cdot \vec{n}] d\sigma, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где \vec{R} — вектор положения центра масс выделенного жидкого объема; \vec{r} — расстояние от центра масс до точки интегрирования (рис. 2.4). Слева в (2.24) стоит производная по времени от полного момента импульса жидкого объема, справа — суммарный момент объемных и поверхностных сил. Можно вынести вектор \vec{R} из-под знака интеграла и преобразовать левую часть к виду

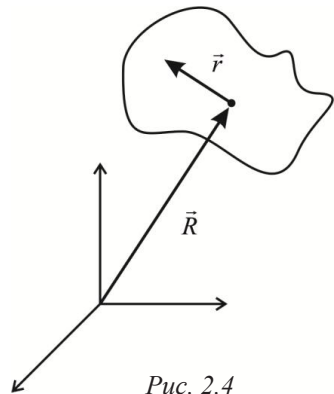


Рис. 2.4

Лекция 2

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\tau} [(\vec{R} + \vec{r}) \times \rho \vec{u}] d\tau \right\} &= \left[\dot{\vec{R}} \times \int_{\tau} \rho \vec{u} dt \right] + \\ &+ \left[\vec{R} \times \frac{d}{dt} \left(\int_{\tau} \rho \vec{u} d\tau \right) \right] + \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\tau} [\vec{r} \times \rho \vec{u}] d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Отметим, что интеграл по объему от $\rho \vec{u}$ есть импульс этого объема и он пропорционален скорости центра масс $\dot{\vec{R}}$, поэтому первый член, содержащий $\dot{\vec{R}}$ в формуле (2.25), обращается в ноль. Оставшаяся группа членов, содержащая множитель вектор \vec{R} , взаимно сокращается, так как все эти члены получаются при векторном умножении на \vec{R} уравнения (2.22). Окончательно получаем после всех преобразований

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_{\tau} [\vec{r} \times \rho \vec{u}] d\tau \right\} = \int_{\tau} [\vec{r} \times \rho \vec{g}] d\tau + \oint_{\sigma} [\vec{r} \times \vec{\tau} \cdot \vec{n}] d\sigma. \quad (2.26)$$

Преобразуем теперь поверхностный интеграл в (2.26) к объемному по теореме Гаусса и устремим объем $\delta\tau$ к нулю. Анализ показывает, что все интегралы, кроме последнего, стремятся к нулю как r^d и остается только один член порядка r^3 , содержащий величину

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial x_e} \tau_{ke} = \varepsilon_{ijk} \delta_{je} \tau_{ke} = \varepsilon_{ijk} \tau_{kj},$$

умноженную на объем интегрирования $\delta\tau$. Следовательно,

$$\varepsilon_{ijk} \tau_{kj} = 0. \quad (2.27)$$

Однако условие (2.27) есть условие симметрии тензора τ_{kj} . Рассмотрим, например, выражение (2.27) при значении индекса $i = 1$:

Принцип и теорема Коши. Симметрия тензора напряжений

$\varepsilon_{123} \cdot \tau_{32} + \varepsilon_{132} \cdot \tau_{23} = 0$. По свойству тензора ε_{ijk} получаем $\tau_{32} - \tau_{23} = 0$, т. е. $\tau_{23} = \tau_{32}$. Аналогичная симметрия справедлива для любого значения индекса i . Следовательно, тензор τ_{ij} симметричен:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} . \quad (2.28)$$

Подчеркнем, что симметрия тензора напряжений есть прямое следствие закона сохранения момента импульса (2.25) для сплошной среды, который, в свою очередь, является отображением свойства изотропии среды.

ЛЕКЦИЯ 3

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ. ТЕОРЕМА КЕЛЬВИНА О ЦИРКУЛЯЦИИ СКОРОСТИ ПО ЖИДКОМУ КОНТУРУ. УРАВНЕНИЕ ГИДРОСТАТИКИ

Дифференциальный закон сохранения массы запишем в лагранжовой и эйлеровой формах соответственно:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\bar{u}) = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{u}) = 0. \quad (3.2)$$

Закон сохранения массы в формах (3.1) и (3.2) справедлив всегда для любых моделей сплошной среды (вязкой или невязкой).

Для больших скоростей движения успешно применяется модель *идеальной жидкости*, т. е. среды *без вязкости* и *теплопроводности*. В идеальной жидкости энтропия отдельной жидкой частицы не изменяется, так как нет нагрева за счет вязкого трения и нет теплового потока из соседних частиц через механизм теплопроводности. Следовательно, интегральный закон сохранения для энтропии жидкого объема имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\tau} s \rho d\tau \right) = 0, \quad (3.3)$$

где введена удельная плотность энтропии на единицу массы s . Так как величина $\rho d\tau = \delta m$ — это малый элемент массы жидкого объема, сохраняющий свою величину, то при занесении производной под знак интеграла в (3.3) это произведение не дифференцируется. Получаем

интеграл по произвольному объему от произведения $\rho \frac{ds}{dt}$, который всегда равен нулю. Следовательно, подынтегральное выражение равно нулю и лагранжев дифференциальный закон сохранения энтропии принимает вид

$$\frac{ds}{dt} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial s}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)s = 0, \quad (3.4)$$

это означает, что энтропия вдоль траекторий жидких частиц остается постоянной. Выражения (3.3), (3.4) — это условия адиабатичности жидких частиц в модели *идеальной жидкости*.

Закон сохранения импульса в сплошной среде имел вид (уравнение в напряжениях, лекция 2)

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \vec{g} + (\nabla \cdot \vec{\tau}). \quad (3.5)$$

В идеальной жидкости при отсутствии вязкости касательные напряжения, описываемые внедиагональными компонентами тензора τ_{ij} , равны нулю и тензор принимает диагональный вид $\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$, где введено давление p , называемое далее механическим. После введения предположения, что τ_{ij} — шаровой тензор, получаем уравнение Эйлера идеальной жидкости:

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \vec{g} - \nabla p. \quad (3.6)$$

Рассмотренные ранее законы сохранения через жидкие (лагранжевы) объемы были интересны с методической и исторической точек зрения. В расчетах, однако, намного чаще используют фиксированные (эйлеровы) объемы и поверхности. Покажем на примере закона

Лекция 3

сохранения энтропии, как осуществляется переход к формулировке, использующей фиксированный объем.

Комбинируя выражение (3.4) с уравнением неразрывности (3.2), получим дивергентную форму уравнения переноса энтропии:

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \vec{u} s) = 0. \quad (3.7)$$

Проинтегрировав (3.7) по фиксированному объему V и используя теорему Гаусса, получим эйлерову интегральную форму баланса энтропии в идеальной жидкости:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \rho s dV \right) = - \oint_S \rho s u_n dS, \quad (3.8)$$

где величина $\rho \vec{u} s$ — это конвективная часть плотности потока энтропии в среде.

Мы рассмотрели уравнение баланса энтропии в идеальной жидкости. В наших уравнениях отсутствует часть плотности потока энтропии, обусловленная теплопроводностью реальной среды. Позже будет показано, что для реальной среды в уравнении баланса энтропии справа следует также учитывать объемные источники энтропии, связанные с необратимыми диссипативными процессами (эффектами вязкости и теплопроводности).

Приведем все формы законов сохранения в идеальной жидкости. В законе сохранения импульса используем представление тензора напряжений через давление ($\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$).

Дифференциальные формы:

Эйлеровы	Лагранжевы
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_j (\rho u_j) = 0$;	$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla_j u_j) = 0$;

 (3.9)

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla_j(s\rho u_j) = 0; \quad \frac{ds}{dt} = 0; \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \nabla_j(\rho u_j u_i) = \rho g_i - \nabla_i p; \quad \rho \frac{du_i}{dt} = \rho g_i - \nabla_i p. \quad (3.11)$$

Интегрируя дифференциальные эйлеровы законы сохранения по фиксированному объему V и преобразуя интегралы по теореме Гаусса, получим интегральные (эйлеровы) представления.

Вместе с лагранжевыми представлениями запишем все **интегральные формы**:

Эйлеровы

Лагранжевы

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \rho dV \right) = - \oint_S \rho u_j n_j dS; \quad \frac{d}{dt} \left(\int_\tau \rho d\tau \right) = 0; \quad (3.12)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \rho s dV \right) = - \oint_S s \rho u_j n_j dS; \quad \frac{d}{dt} \left(\int_\tau s \rho d\tau \right) = 0; \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_V \rho u_i dV \right) &= \int_V \rho g_i dV - \oint_S (p \delta_{ij} + \rho u_i u_j) n_j dS; & \frac{d}{dt} \left(\int_\tau \rho u_i d\tau \right) &= \int_\tau \rho g_i d\tau - \oint_\sigma p n_i d\sigma. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Аналогичные уравнения сохранения можно записать и для других термодинамических величин, например для удельной энтальпии h или удельной внутренней энергии e . Эти уравнения будут получены позже в общем виде с учетом диссипативных эффектов, приводящих к нагреву среды.

Лекция 3

ТЕОРЕМА КЕЛЬВИНА О ЦИРКУЛЯЦИИ СКОРОСТИ ПО ЖИДКОМУ КОНТУРУ

Обратимся теперь к вытекающей из законов динамики идеальной жидкости теореме Кельвина. Рассмотрим циркуляцию поля скорости по жидкому контуру λ

$$C = \oint_{\lambda} (\vec{u} \cdot d\vec{\lambda}) \quad (3.15)$$

и выведем формулу дифференцирования для циркуляции. Занесем производную под интеграл:

$$\frac{d}{dt} \left(\oint_{\lambda} (\vec{u} \cdot d\vec{\lambda}) \right) = \oint_{\lambda} \left[\left(\frac{d\vec{u}}{dt} \cdot d\vec{\lambda} \right) + \left(\vec{u} \cdot \frac{d}{dt} (d\vec{\lambda}) \right) \right].$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части этого уравнения. Запишем элемент интегрирования как разность координат двух соседних точек $\delta\vec{\lambda} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ или $\frac{d}{dt}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{u}_2 - \vec{u}_1 = \delta\vec{u}$. Так как $(\vec{u} \cdot \delta\vec{u}) = \delta\left(\frac{u^2}{2}\right)$, получаем интеграл по контуру от полного дифференциала, который обращается тождественно в ноль $\oint_{\lambda} \delta\left(\frac{u^2}{2}\right) \equiv 0$. В результате получаем формулу (кинематическую часть теоремы Кельвина)

$$\frac{d}{dt} \oint_{\lambda} (\vec{u} \cdot d\vec{\lambda}) = \oint_{\lambda} \left(\frac{d\vec{u}}{dt} \cdot d\vec{\lambda} \right). \quad (3.16)$$

Подставив в формулу (3.16) ускорение жидкой частицы по уравнению Эйлера

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{g} - \frac{\nabla p}{\rho}, \quad (3.17)$$

покажем, что интеграл справа в (3.16) обращается в ноль. Это будет вторая (динамическая) часть теоремы Кельвина. При условии, что справа в (3.17) стоит полный градиент, интеграл в (3.16) по замкнутому контуру действительно будет равен нулю. Полный градиент получается, если внешние силы потенциальны $\vec{g} = -\nabla\Phi$ и движение жидкости баротропно $\rho = f(p)$, т. е. плотность и давление связаны однозначно. Следовательно, циркуляция скорости по жидкому контуру сохраняется, если выполнены следующие условия:

- а) жидкость идеальная (невязкая), т. е. $\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$;
- б) движение баротропно $\rho = f(p)$ и, следовательно, $\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla \int \frac{dp}{\rho}$;
- в) внешние силы потенциальны $\vec{g} = -\nabla\Phi$.

Тогда ускорение (3.17) выражается как градиент некоторого выражения и интеграл по замкнутому контуру (3.16) обращается в ноль, т. е. справедливо выражение (теорема Кельвина)

$$\frac{d}{dt} \oint_{\lambda} (\vec{u} \cdot d\vec{\lambda}) = 0, \text{ или } C = \oint_{\lambda} (\vec{u} d\vec{\lambda}) = const. \quad (3.18)$$

СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ КЕЛЬВИНА

1. При указанных условиях сохраняется интенсивность вихревых трубок. Согласно известной теореме Стокса, имеем для интенсивности вихревых трубок

$$I = \int_{\sigma} \omega_n d\sigma = \int_{\sigma} (rot \vec{u})_n d\sigma = \oint_{\lambda} u_{\lambda} d\lambda = const. \quad (3.19)$$

Интенсивность вихревой трубки оказывается одинаковой для различных сечений трубки и постоянной во времени.

Лекция 3

2. Если жидкость была в момент $t = 0$ незавихрена ($\vec{\omega} = 0$), то и далее она остается незавихренной, так как в уравнении (3.19) $const = 0$, а площадка $d\sigma$ выбрана произвольно.

3. Если жидкость была в момент $t = 0$ завихрена ($\vec{\omega} \neq 0$), то и в следующие моменты времени завихренность не исчезает и всегда будет $\vec{\omega} \neq 0$ для данной жидкой частицы. Утверждения 2–3 — это теорема Лагранжа о завихренности жидкой частицы.

Но если завихренность $\vec{\omega}$ не может возникнуть из нуля, то как же она вообще возникает в жидкости? Ведь все движения начинаются из состояния покоя. Мы далее увидим, что действительно источники завихренности будут связаны с нарушением трех указанных выше условий: *идеальности* жидкости, *баротропности* и *потенциальности* сил в теореме Кельвина.

ГИДРОСТАТИКА

Из уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера (3.11)) в случае, когда жидкость покоится, получаем дифференциальное уравнение гидростатики

$$\nabla p = \rho \vec{g}. \quad (3.20)$$

Рассмотрим примеры применения уравнения гидростатики.

1. Барометрическая формула для изотермической атмосферы ($T = const$).

По уравнению состояния идеального газа $P = \frac{\rho RT}{M}$ и уравнению гидростатики после интегрирования получаем

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}}, \quad (3.21)$$

где ρ_0 — плотность газа на поверхности планеты; M — молярная масса газа; R — универсальная газовая постоянная; координата z от-

считывается от поверхности планеты. Вектор напряженности гравитационного поля есть $\vec{g} = (0, 0, -g)$.

2. Давление во вращающемся с угловой скоростью Ω сосуде.

В результате вращения свободная поверхность жидкости принимает форму параболоида вращения. Поместив начало координат в нижнюю точку мениска, запишем компоненты вектора \vec{g} (во вращающейся системе координат): $g_r = \Omega^2 r$; $g_z = -g$.

Для потенциала объемных сил получаем во вращающейся системе координат

$$\Phi = -\int_0^{\vec{r}} (\vec{g} \cdot d\vec{r}) = gz - \frac{\Omega^2 r^2}{2}. \quad (3.22)$$

На свободной поверхности давление в жидкости равно атмосферному p_0 . После интегрирования уравнения гидростатики получаем давление в любой точке жидкости

$$p = p_0 + \frac{\rho \Omega^2 r^2}{2} - \rho gz. \quad (3.23)$$

Поверхности постоянного давления (изобары $p = const$) имеют форму параболоидов вращения, а форма мениска свободной поверхности жидкости, на которой $p = p_0$, есть

$$z = \frac{\Omega^2 r^2}{2g}. \quad (3.24)$$

3. Давление в глубине жидкой планеты.

Пренебрегая вращением планеты, удельную плотность силы тяжести на глубине r запишем в виде $g_r = -\frac{r}{R}g$. Линейный закон для силы тяжести в глубине планеты получается вследствие того, что притягивающая сферическая масса с уменьшением r убывает как

Лекция 3

r^3 , а сила притяжения пропорциональна r^{-2} . Поэтому в результате для силы тяжести получается пропорциональность r . На поверхности планеты давление ноль. Проинтегрировав уравнение гидростатики $\frac{dp}{dr} = -\frac{r}{R}\rho g$ с условием $p = 0$ при $r = R$, получаем

$$p = \frac{\rho g}{2R}(R^2 - r^2). \quad (3.25)$$

В центре планеты при $r = 0$ давление равно $P_{\max} = \frac{\rho g R}{2}$. Отметим, что величина gR совпадает с квадратом первой космической скорости ($v_0 = \sqrt{gR} = 7,9$ км/с). Учитывая это случайное совпадение и взяв плотность вещества планеты $\rho = 5 \cdot 10^3$ кг/м³, что совпадает со средней плотностью вещества Земли, получаем для давления в центре жидкой планеты

$$p_{\max} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ Па} = 1,5 \cdot 10^6 \text{ атм}. \quad (3.26)$$

ЗАКОНЫ ПАСКАЛЯ И АРХИМЕДА

Выделив в жидкости площадку S и нормаль к ней \vec{n} , силу давления, действующую на эту площадку, запишем в виде

$$\vec{F}_s = \vec{n}pS. \quad (3.27)$$

Так как давление p — скаляр, эта сила будет одинакова по абсолютной величине для всех площадок S с разными направлениями \vec{n} . В этом суть *закона Паскаля*: сила давления в жидкости действует равномерно по всем направлениям.

Для доказательства закона Архимеда рассмотрим силу, действующую на тело со стороны жидкости, например, в системе координат вращающегося сосуда. Эта сила записывается в виде

$$\vec{F}_{\text{арх}} = -\oint \vec{n} p dS. \quad (3.28)$$

Знак «минус» в силе (3.28) стоит потому, что под \vec{n} понимается вектор внешней нормали к поверхности тела, тогда как сила давления жидкости на тело, приложенная к элементарным площадкам интегрирования по поверхности dS , направлена внутрь тела. Для эффективного вычисления архимедовой силы заменим мысленно тело жидкостью той же плотности. Эта жидкость неподвижна, т. е. находится в равновесии под действием сил тяжести и инерции, действующих на выделенную массу, и суммарной силы давления, действующей со стороны прилегающих к поверхности тела слоев жидкости. Однако суммарная сила давления, очевидно, действует одинаковым образом как на тело, так и на замещающее это тело жидкость. Следовательно, выталкивающая сила Архимеда должна равняться с обратным знаком весу вытесненной телом воды: $\vec{F}_{\text{арх}} = -\rho M(\vec{g} + \vec{a}_{cp})$.

Более строго закон Архимеда выводится из уравнения гидростатики при помощи следующей цепочки равенств: интеграл по поверхности тела S в формуле (3.28) преобразуем по теореме Гаусса в интеграл по объему жидкости, замещающей тело, и ∇p по уравнению гидростатики заменяем на $\rho(\vec{g} + \vec{a})$. В результате получаем

$$\vec{F}_{\text{арх}} = -\int_V \nabla p dV = -\int_V \rho(\vec{g} + \vec{a}) dV = -(\vec{g} + \vec{a}_{cp})\rho V, \quad (3.29)$$

где \vec{a}_{cp} — среднее по объему тела центробежное ускорение.

Таким образом, архимедова сила равна весу вытесненной воды и направлена в противоположную сторону.

ЛЕКЦИЯ 4

УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ И ЭНТРОПИИ В СПЛОШНОЙ СРЕДЕ. ВЫВОД ЗАМЫКАЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ НА ОСНОВЕ ТЕРМОДИНАМИКИ НЕРАВНОВЕСНЫХ ПРОЦЕССОВ. УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ — СТОКСА

Вывод уравнения баланса энтропии основан на законах сохранения энергии, импульса и на постулатах термодинамики. Будем исходить из строгого закона природы — закона сохранения полной энергии для некоторого жидкого объема τ :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\tau} \rho \varepsilon d\tau \right) + \oint_{\sigma} \vec{j}_{\varepsilon} \cdot \vec{n} d\sigma = d_{\varepsilon} \equiv 0. \quad (4.1)$$

Здесь ε — удельная (на единицу массы) полная энергия среды; \vec{j}_{ε} — вектор плотности потока полной энергии; d_{ε} — источники полной энергии, которые равны тождественно нулю в силу закона сохранения полной энергии. Удельная плотность полной энергии состоит из суммы внутренней (e), кинетической ($\frac{u^2}{2}$) и потенциальной (Φ) удельных энергий:

$$\varepsilon = e + \frac{u^2}{2} + \Phi. \quad (4.2)$$

Это удельные плотности энергий, т. е. отнесенные к единице массы среды.

Из уравнения (4.1) в силу произвольности объема интегрирования получаем дифференциальную лагранжеву форму закона сохранения полной энергии:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{u^2}{2} + \Phi \right) + \nabla \cdot \vec{j}_e = 0. \quad (4.3)$$

Очевидно, что плотность потока полной энергии \vec{j}_e также есть сумма нескольких плотностей потоков: внутренней энергии \vec{j}_e или просто плотности потока тепла \vec{q} , потоков потенциальной (\vec{j}_Φ) и кинетической энергии (\vec{j}_k). Поток потенциальной энергии \vec{j}_Φ будет ненулевым лишь в многокомпонентной смеси, с протекающими в ней процессами диффузии заряженных частиц во внешних полях или частиц разной массы в поле гравитационном. Этот поток \vec{j}_Φ определяется в курсе тепломассообмена; в нашем случае он всегда будет равен нулю, так как процессов диффузии мы рассматривать не будем.

Умножив полученное ранее уравнение движения в напряжениях на скорость \vec{u} скалярно, получаем уравнение баланса кинетической энергии

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \nabla_i (-\tau_{ij} u_j) + u_j \nabla_j \Phi = -\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (4.4)$$

Мы воспользовались представлением напряженности внешнего поля $g_i = -\nabla_i \Phi$. Поле внешних сил стационарно, поэтому в уравнении (4.3) имеем $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$ и, следовательно, $\rho \dot{\Phi} = \rho u_i \nabla_i \Phi = -\rho u_i g_i$. Вычитая из (4.3) уравнение (4.4), получаем после преобразований уравнение баланса внутренней энергии

$$\rho \frac{de}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_j} (j_{ej} + u_i \tau_{ij}) = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (4.5)$$

Из вида уравнения (4.5) для внутренней энергии следует, что под знаком дивергенции должен стоять вектор плотности потока внутренней энергии \vec{q} , поэтому для вектора плотности потока полной энергии получаем представление

Лекция 4

$$\vec{j}_{\varepsilon_j} = q_j - u_i \tau_{ij},$$

где величина $-u_i \tau_{ij}$ дает вектор плотности потока кинетической энергии \vec{j}_k . Этот комплекс стоит также под знаком дивергенции в уравнении баланса кинетической энергии (4.4).

Введем механическое давление p и разобьем тензор τ_{ij} на шаровую часть, пропорциональную давлению, и на девиатор напряжений $\overset{\circ}{\tau}_{ij}$, т. е. бесследовую часть, у которой $\overset{\circ}{\tau}_{jj} = 0$:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \overset{\circ}{\tau}_{ij}. \quad (4.6)$$

Представим тензор градиентов скоростей в виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = D_{ij} + A_{ij} = \frac{1}{3}\delta_{ij} \operatorname{div}(\vec{u}) + \overset{\circ}{D}_{ij} + A_{ij},$$

где $A_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ — антисимметричная часть тензора пространственных производных поля скорости и тензор скоростей деформации разложен на шаровую часть, пропорциональную $\operatorname{div} \vec{u}$, и бесследовый тензор, обозначаемый сверху ноликом ($\overset{\circ}{D}_{ij}$). После перемножения тензора τ_{ij} с тензором $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ получаем

$$\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -p \operatorname{div} \vec{u} + \overset{\circ}{\tau}_{ij} \overset{\circ}{D}_{ij}. \quad (4.7)$$

В правой части уравнения (4.7) был опущен член $\overset{\circ}{\tau}_{ij} A_{ij}$, тождественно равный нулю в силу симметрии тензора напряжений τ_{ij} . Бесследовый тензор скоростей деформаций имеет вид

$$\overset{\circ}{D}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_1}{\partial x_k}. \quad (4.8)$$

Таким образом, уравнение переноса внутренней энергии принимает окончательную форму

$$\rho \frac{de}{dt} = -\frac{\partial q_j}{\partial x_j} - p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \tau_{ij} \dot{D}_{ij}. \quad (4.9)$$

Это уравнение баланса внутренней энергии. Оно необходимо для дальнейшего вывода уравнения баланса энтропии в среде с вязкой диссипацией и теплопроводностью.

Для вывода уравнения баланса энтропии обратимся ко *второму началу термодинамики*, постулируемому для дифференциально малой массы в терминах локальной температуры T , удельной (на единицу массы) плотности энтропии s , удельного объема V и термодинамического давления p_e :

$$de = Tds - p_e dV, \quad (4.10)$$

здесь удельный объем $V = 1/\rho$.

Давление p_e определяется по равновесному уравнению состояния среды, на что указывает индекс e (*equilibrium* — равновесие). Так как время релаксации выведенной из равновесия системы быстро снижается с уменьшением ее размера, то для частиц малых размеров это время очень мало. Поэтому мы надеемся, что описание среды формулами локальной равновесной термодинамики будет адекватной моделью. Возможность использования для дифференциально малого объема первого и второго объединенного начала термодинамики, взятого в форме (4.10), разрешает нам *принцип локального равновесия*: для частиц малых размеров все термодинамические величины могут локально описываться соотношениями равновесной термодинамики.

Учитывая, что удельный объем есть $V = 1/\rho$, умножим уравнение (4.10) на ρ , поделим на dt и, используя затем уравнение переноса внутренней энергии (4.9), преобразуем (4.10) к виду

Лекция 4

$$\rho \frac{ds}{dt} = \frac{\rho}{T} \frac{de}{dt} - \frac{p_e}{T\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{T} \frac{\partial q_j}{\partial x_j} - \frac{p}{T} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{p_e}{T} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\tau_{ij}}{T} \dot{D}_{ij}. \quad (4.11)$$

Дальнейшее преобразование уравнения (4.11) дает дивергентный член с вектором плотности потока энтропии $\vec{j}_s = \vec{q} / T$ и суммой объемных источников энтропии d_s в правой части уравнения баланса энтропии:

$$\rho \frac{ds}{dt} + \nabla \cdot \vec{j}_s = -\frac{q_j}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_j} - \frac{p - p_e}{T} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\dot{D}_{ij}}{T} = d_s. \quad (4.12)$$

Мы привели уравнение переноса энтропии к канонической форме и ввели вектор плотности потока энтропии \vec{j}_s и объемный источник энтропии d_s . Подчеркнем, что пока еще механическое давление (p), плотность потока тепла (q_j) и тензор напряжений (τ_{ij}) остаются неопределенными.

Интегральная форма закона (4.12) для жидкого объема имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\tau} \rho s d\tau \right) + \oint_{\sigma} (\vec{j}_s \cdot \vec{n}) d\sigma = \int_{\tau} d_s d\tau. \quad (4.13)$$

Для изолированных систем поток энтропии через контрольную поверхность σ равен нулю, и второе начало термодинамики требует, чтобы полная энтропия S , заключенная в объеме τ , не убывала, т. е. $\frac{dS}{dt} \geq 0$. Это фундаментальное неравенство, в силу произвольности объема интегрирования τ , приводит к положительности объемных источников энтропии, т. е. к положительному производству энтропии:

$$d_s = -\frac{p - p_e}{T} (\nabla_j u_j) - \frac{q_j \nabla_j T}{T^2} + \frac{\tau_{ij} \dot{D}_{ij}}{T} \geq 0. \quad (4.14)$$

Выражение (4.14) для производства энтропии d_s состоит из суммы парных произведений обобщенных термодинамических сил

$$F_\alpha = \left(-\frac{\nabla_j u_j}{T}; -\frac{\nabla_j T}{T^2}; -\frac{\dot{D}_{ij}}{T} \right)$$

на сопряженные им обобщенные термодинамические потоки

$$J_\alpha = (p - p_e; q_j; -\tau_{ij}).$$

Производство энтропии есть положительно определенная билинейная форма:

$$d_s = \sum_\alpha J_\alpha F_\alpha \geq 0. \quad (4.15)$$

Положительность производства энтропии d_s — это суть *второго начала термодинамики* для неравновесных процессов. Во втором начале термодинамики содержатся два утверждения: 1) выражение (4.10) как закон сохранения энергии и принцип существования абсолютной температуры T и энтропии s ($I + II$ начала термостатики) и 2) формула (4.15), положительность производства энтропии d_s для неравновесных процессов.

Постулат Онзагера. Онзагер постулировал, что в линейном по силам F приближении связь между потоками J_α и силами F_α устанавливается через симметричную матрицу коэффициентов $L_{\alpha\beta}$ (феноменологические коэффициенты Онзагера):

$$J_\alpha = \sum_\beta L_{\alpha\beta} F_\beta \quad (L_{\alpha\beta} = L_{\beta\alpha}). \quad (4.16)$$

Свойство *симметрии коэффициентов Онзагера* строго доказывается в курсе статистической физики и является следствием обратимости во времени уравнений движения молекул на микроуровне. Это

свойство симметрии весьма полезно, так как позволяет существенно сократить количество экспериментов, необходимых для эмпирического определения коэффициентов $L_{\alpha\beta}$.

Принцип Кюри. Для случая *изотропной среды* принцип Кюри утверждает, что для явлений переноса их причины (обобщенные силы F_β) и следствия (обобщенные потоки J_α) должны быть связаны между собой *линейными соотношениями* одного тензорного ранга. Например, вектор потока тепла \vec{q} возникает в среде в результате наличия только вектора градиента температуры ∇T . Величины типа скаляра ($\nabla_j u_j$) и тензора $\overset{\circ}{D}_{ij}$ не могут влиять на векторный процесс, на поток тепла \vec{q} ; они генерируют, соответственно, собственные скалярный и тензорный процессы переноса. В изотропной среде нет каких-либо характерных векторов или тензоров, которые могли бы быть коэффициентами пропорциональности между скаляром $\nabla_j u_j$

или тензором $\overset{\circ}{D}_{ij}$ и вектором потока тепла \vec{q} .

Согласно принципу Кюри, тензорная $\left(-\frac{\overset{\circ}{D}_{ij}}{T} \right)$, векторная $\left(-\frac{\nabla_j T}{T^2} \right)$

и скалярная $\left(\frac{\nabla_j u_j}{T} \right)$ обобщенные силы вызывают тензорный $(-\overset{\circ}{\tau}_{ij})$,

векторный (q_i) и скалярный $(p - p_e)$ обобщенные термодинамические потоки соответственно. В этом случае матрица коэффициентов $L_{\alpha\beta}$ для изотропной среды должна быть блочно-диагональной. Иначе говоря, должны быть справедливы следующие замыкающие соотношения:

$$q_i = -\lambda \nabla_i T, \quad p = p_e - \kappa (\nabla_j u_j), \quad \overset{\circ}{\tau}_{ij} = 2\eta \overset{\circ}{D}_{ij}, \quad (4.17)$$

где λ , κ , η — некоторые определяемые из опыта, т. е. эмпирические, коэффициенты. Величины λ , κ и η называются коэффициентами теплопроводности, объемной и динамической вязкости среды соответственно. Эти коэффициенты всегда должны быть положитель-

ными согласно фундаментальному неравенству для производства энтропии

$$d_s = \lambda \left(\frac{\nabla T}{T} \right)^2 + \frac{\kappa}{T} (\nabla \cdot \vec{u})^2 + \frac{2\eta}{T} D_{ij}^2 \geq 0. \quad (4.18)$$

Подставляя выражение для потоков (4.17) в уравнение переноса импульса и внутренней энергии и добавляя к ним уравнение неразрывности и два уравнения состояния среды, получаем замкнутую систему, описывающую модель вязкой сжимаемой жидкости:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla_j u_j) = 0, \quad (4.19)$$

$$\rho \frac{du_i}{dt} + \nabla_i p_e = \rho g_i + \nabla_i \left[\left(\kappa - \frac{2}{3} \eta \right) \nabla_j u_j \right] + \nabla_j \left[\eta (\nabla_j u_i + \nabla_i u_j) \right], \quad (4.20)$$

$$\rho \frac{de}{dt} + p_e (\nabla_j u_j) = \nabla_j (\lambda \nabla_j T) + \kappa (\nabla_j u_j)^2 + \frac{\eta}{2} \left(\nabla_j u_i + \nabla_i u_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla_k u_k \right)^2, \quad (4.21)$$

$$p_e = \frac{\rho R T}{M}, \quad e = c_v T, \quad (4.22)$$

где c_v — удельная теплоемкость среды (для идеального одноатомного газа $c_v = \frac{3}{2} \frac{R}{M}$); R — газовая постоянная; M — молярная масса газа.

Для реальных газов уравнения состояния следует задавать в общей форме для давления и внутренней энергии:

$$p_e = f_1(\rho, T), \quad e = f_2(\rho, T). \quad (4.23)$$

Лекция 4

Эти уравнения называются термическим и калорическим уравнениями состояния среды соответственно.

Используя уравнение (4.19) и выполнив в уравнении (4.21) преобразование Лежандра, получаем уравнение переноса для удельной энтальпии $h = e + p_e / \rho$:

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dp_e}{dt} + \nabla_j (\lambda \nabla_j T) + Diss. \quad (4.24)$$

Здесь через $Diss$ обозначена плотность объемного тепловыделения в среде, вызванного диссипацией механической энергии в процессах вязкого трения:

$$Diss = \kappa (\nabla_j v_j)^2 + \frac{\eta}{2} \left(\nabla_j u_i + \nabla_i u_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla_k v_k \right)^2. \quad (4.25)$$

Для удельной энтропии из (4.12) получаем уравнение баланса в другой форме:

$$T \rho \frac{ds}{dt} = \nabla_j (\lambda \nabla_j T) + Diss. \quad (4.26)$$

Представляя энтропию в переменных «температура — давление» $s(T, p_e)$, получаем уравнение переноса для температурного поля из уравнения для энтропии (4.26):

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \beta_p \frac{dp_e}{dt} + \nabla (\lambda \nabla T) + Diss, \quad (4.27)$$

где введены $c_p = \left(T \frac{\partial s}{\partial T} \right)_p$ — удельная теплоемкость при постоянном давлении и безразмерный коэффициент изобарического объемного

расширения $\beta_p = \left(\frac{\partial \ln V}{\partial \ln T} \right)_p$, который получен при преобразовании производной с помощью якобианов:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = \frac{\partial(s, T)}{\partial(p, T)} = -\frac{\partial(T, s)}{\partial(p, T)} = -\frac{\partial(p, V)}{\partial(p, T)} = -\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p.$$

Отметим, что для идеального газа $\beta_p = 1$, $h = c_p T$, и мы опять приходим к уравнению (4.24).

Уравнения Навье — Стокса и уравнения переноса для энтальпии, энтропии, энергии и температуры служат для расчета поля скорости и процессов конвективного теплообмена в движущейся сплошной среде. В простейшем случае для несжимаемой среды, когда предполагаем $\rho = const$ и все коэффициенты переноса считаем постоянными, получаем упрощенную систему уравнений Навье — Стокса и переноса тепла:

$$\nabla_j u_j = 0, \quad (4.28)$$

$$\frac{du_i}{dt} + \nabla_i \frac{p}{\rho} = g_i + \nu \Delta u_i, \quad (4.29)$$

$$\frac{dT}{dt} = a \Delta T + \left(\frac{\nu}{2c_V} \right) (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)^2, \quad (4.30)$$

где $\nu = \eta / \rho$ — кинематическая вязкость; $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ — температуропроводность среды. Например, для воды $\nu = 10^{-6}$ м²/с, $a = 0,15 \cdot 10^{-6}$ м²/с, для воздуха $\nu = 15 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $a = 22 \cdot 10^{-6}$ м²/с (при температуре 20 С). С ростом температуры до 100 С вязкость воды уменьшается в три раза, ее температуропроводность повышается на 10 %, а для воздуха оба коэффициента увеличиваются в 1,5 раза.

Лекция 4

Система уравнений (4.28)–(4.30) прекрасно описывает огромное множество встречающихся в природе и технике ситуаций. Например, показано прямыми расчетами на суперкомпьютерах, что даже сложнейшее явление турбулентности можно очень точно рассчитывать по уравнениям Навье — Стокса.

Интересно отметить, что в несжимаемой жидкости для определения давления уже нет уравнения состояния. В этом случае давление описывается эллиптическим уравнением Пуассона, получаемым из уравнения (4.29), применением к нему оператора дивергенции

$$\Delta p = -\rho \frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (4.31)$$

ЛЕКЦИЯ 5

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЛОГАРИФМА ПЛОТНОСТИ И ЗАВИХРЕННОСТИ. ПОРОЖДЕНИЕ, РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ЗАТУХАНИЕ ЗВУКА.

УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ДАВЛЕНИЯ.

ФОРМУЛА БИО — САВАРА ДЛЯ СКОРОСТИ, НАВЕДЕННОЙ ВИХРЯМИ

В рамках модели идеальной жидкости энтропия малой жидкой частицы не изменялась ($\frac{ds}{dt} = 0$) и ее средняя завихренность при условиях теоремы Кельвина не могла в ней появиться или исчезнуть до нуля. Когда были учтены эффекты вязкости и теплопроводности, мы получили уравнения баланса энтропии энергии и энтальпии:

$$T\rho\frac{ds}{dt} = \nabla(\lambda\nabla T) + Diss, \quad (5.1)$$

$$\rho\frac{de}{dt} = -p_e(\nabla \cdot u) + \nabla(\lambda\nabla T) + Diss,$$

$$\rho\frac{dh}{dt} = \frac{dp_e}{dt} + \nabla(\lambda\nabla T) + Diss,$$

где $Diss = \kappa(\nabla_j u_j)^2 + 2\mu D_{ij}^{\circ 2}$ — диссипативная функция; s — удельная (на единицу массы) энтропия среды. Учет двух вязкостей — объемной и сдвиговой — привел к уравнению Навье — Стокса для вязкой жидкости:

$$\rho\frac{du_i}{dt} + \nabla_i p_e = \rho g_i + \nabla_i \left[\left(\kappa - \frac{2}{3}\eta \right) \nabla_j u_j \right] + \nabla_j \left[\eta(\nabla_j u_i + \nabla_i u_j) \right], \quad (5.2)$$

Лекция 5

где p_e — термодинамическое давление. Вместе с уравнением неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla_j u_j) = 0 \quad (5.3)$$

и заданными термодинамическими уравнениями состояния (термическим и калорическим)

$$p_e = f_1(\rho, T), \quad s = f_2(\rho, T) \quad (5.4)$$

мы получаем замкнутую систему уравнений, описывающую теплообмен и гидродинамику реальной среды с эффектом сжимаемости, вязкости и теплопроводности.

Далее будет сформулирована теорема о представлении поля скорости через ротор и дивергенцию скорости. Рассмотрим эволюционные уравнения, описывающие эти величины. Поделим уравнение (5.2) на плотность ρ и подействуем скалярно оператором «набла». В результате получаем уравнение для дивергенции поля скорости:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(\operatorname{div} \vec{u}) - \left[\frac{\kappa}{\rho} + \frac{4}{3} \nu \right] \Delta(\operatorname{div} \vec{u}) = \\ & = - \left(D_{ij}^2 - \frac{\omega_j^2}{2} \right) - \Delta\Phi - \nabla_k \left(\frac{\nabla_k p_e}{\rho} \right), \end{aligned} \quad (5.5)$$

где введен потенциал внешних сил Φ . Далее член с $\Delta\Phi$ опустим в силу гармоничности внешних потенциалов.

Учитывая, что дивергенция поля скорости выражается формулой (5.3) через производную от логарифма плотности, получаем после преобразований уравнение

$$\frac{d^2}{dt^2}(\ln \rho) - \nabla_k \left(\frac{\nabla_k p_e}{\rho} \right) - \left(\frac{\kappa}{\rho} + \frac{4}{3} \nu \right) \Delta \frac{d}{dt}(\ln \rho) = D_{ij}^2 - \frac{\omega_j^2}{2}, \quad (5.6)$$

где коэффициенты вязкости κ и μ рассматривались как постоянные и были вынесены за знаки операторов дифференцирования.

Если давление p_e считать функцией плотности ρ и энтропии s , то уравнение (5.6) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \ln \rho - \nabla_j (c_s^2 \nabla_j \ln \rho) - \nabla_j \left(\rho \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_s \nabla_j s \right) - \\ - \left(\frac{\kappa}{\rho} + \frac{4}{3} \nu \right) \Delta \frac{d}{dt} (\ln \rho) = D_{ij}^2 - \frac{\omega_j^2}{2}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

где $c_s^2 = \left(\frac{\partial p_e}{\partial \rho} \right)_s$ — это квадрат адиабатической скорости звука.

Эволюционное уравнение (5.7) описывает порождение, распространение и затухание звука в сплошной среде. Порождение звука производится источником — быстро осциллирующей правой частью в уравнении (5.7). При этом явно выделяются положительные вклады в звуковое давление от столкновения струй (D_{ij}^2) и отрицательные

вклады от быстро вращающихся вихрей ($\frac{\omega_j^2}{2}$). Распространение звука

(с учетом конвективного переноса в операторах $\frac{d}{dt}$) описывает гиперболический оператор, состоящий из первых двух членов в левой части уравнения (5.7). Затухание звука описывают члены с объемной (κ) и сдвиговой (ν) вязкостями и третий член, содержащий энтропию.

Энтропийный член в (5.7) приводит к затуханию звука из-за эффекта теплопроводности. Чтобы убедиться в этом, проведем линеаризацию в уравнениях (5.1) и (5.7). Вводим пульсации плотности, энтропии и температуры ($\tilde{\rho}$, \tilde{s} , \tilde{T}) в звуковой волне:

$$\rho = \rho_0 + \tilde{\rho} e^{i(kx - \omega t)}, \quad (5.8)$$

Лекция 5

$$s = s_0 + \tilde{s}e^{i(kx - \omega t)},$$

$$T = T_0 + \tilde{T}e^{i(kx - \omega t)};$$

отбросим все нелинейные члены в конвективных производных и источниках ($Diss$ и $\vec{D}_j^2 - \omega_j^2 / 2$); считаем множители-функции в уравнениях (5.1)–(5.2), $T, \rho, \lambda, \kappa, \mu, \rho \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_s$, не зависящими от координат.

Для энтропийного члена в (5.7) получаем из линеаризованного уравнения (5.1) связь пульсаций энтропии (\tilde{s}) и температуры (\tilde{T}). Также используем уравнение состояния идеального газа ($p_e = \rho RT$)

и адиабату Пуассона $\left(\frac{p_e}{p_0} \right) = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma$, которую преобразуем к виду

$\left(\frac{T}{T_0} \right) = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1}$. Это позволяет представить в уравнении (5.7) производную от температуры в виде $\left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_s = (\gamma - 1) \frac{T}{\rho}$.

В результате всех преобразований из линеаризованных уравнений (5.1) и (5.7) получаем дисперсионное соотношение, связывающее волновое число и частоту в звуковой волне:

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 + i\omega \frac{k^2}{c_s^2} \left(\frac{\kappa}{\rho} + \frac{4}{3} \nu \right) + ia \frac{k^4}{\omega} (\gamma - 1), \quad (5.9)$$

где $c_s^2 = c_p (\gamma - 1) T$ — адиабатическая скорость звука; $a = \lambda / \rho c_p$ — температуропроводность; c_p — удельная теплоемкость идеального газа. Будем считать, что звук затухает в пространстве. Это означает ненулевую мнимую часть в волновом числе: $k = k_r + ik_i$ ($k_i > 0$). Из уравнения (5.9), считая диссипативные эффекты малыми, приближенно получаем

$$k_r = \frac{\omega}{c_s}; k_i = \left[\frac{4}{3}v + \frac{\kappa}{\rho} + (\gamma - 1)a \right] \frac{\omega^2}{2c_s^3}. \quad (5.10)$$

Интенсивность звука затухает экспоненциально в пространстве по закону $|\tilde{p}|^2 \sim e^{-2k_i x}$, следовательно, $2k_i$ — это пространственный декремент затухания звука. Физический смысл вклада теплопроводности в затухание прост: сжатые и расширенные соседние участки в волне имеют различные температуры и через теплообмен теплопроводностью между ними происходит выравнивание температур, уменьшение разностей давления и плотности и, следовательно, диссипация звуковой энергии.

ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЗАВИХРЕННОСТИ

Рассмотрим теперь уравнение переноса завихренности. Поделим уравнение Навье — Стокса на плотность, вынесем за операторы дифференцирования коэффициенты вязкости, применим к уравнению оператор ротор, преобразуем нелинейные члены и в результате получим

$$\frac{d\omega_i}{dt} = D_{ij}\omega_j - D_{ji}\omega_i + \frac{[\nabla\rho \times \nabla p_e]_i}{\rho^2} + [\nabla \times \vec{g}]_i + \nu \Delta\omega_i. \quad (5.11)$$

Порождение завихренности описывает три последних члена в правой части уравнения (5.11). Для случая небаротропных течений градиенты от ρ и p_e не параллельны, так как p_e зависит не только от ρ . Например, температурные неоднородности в атмосфере — нагретые объемы воздуха вблизи земной поверхности — начинают всплывать под действием силы плавучести (силы Архимеда), формируя тороидальный вихрь. При благоприятных условиях (небольшой турбулентности атмосферы) такой вихрь поднимается в верхние холодные слои атмосферы, где происходит конденсация захва-

Лекция 5

ченных вихрем паров и он становится видимым как белое облако. Член $\nabla \times \vec{g}$ может порождать завихренность в случае вихревых токов и электромагнитных полей. Последний член с вязкостью описывает эффект диффузии завихренности в данную частицу жидкости из соседних частиц или от ограничивающих поток поверхностей. Это связано с граничным условием «прилипания» жидкости к твердой поверхности: на границе скорость обращается в ноль, появляется градиент касательной компоненты скорости по нормали к поверхности, т. е. завихренность.

Первые два члена в правой части уравнения (5.11) описывают нелинейную трансформацию уже имеющейся в жидкой частице завихренности. В развитых турбулентных потоках эти члены приводят к растяжению вихревых трубок, т. е. к интенсификации завихренности. Это не только нелинейный эффект, но и существенно нелокальный из-за нелокальной связи завихренности и поля скорости, определяющего тензор скоростей деформации D_{ij} . Чтобы продемонстрировать эту нелокальную связь, докажем *теорему векторного анализа*: любое векторное поле \vec{u} однозначно восстанавливается в области V , если в ней известны его дивергенция $D_{jj} = \text{div } \vec{u}$ и ротор $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$ и задана нормальная компонента скорости $u_n = f$ на границах S области V .

Представим \vec{u} через скалярный ϕ и векторный \vec{A} потенциалы:

$$\vec{u} = \nabla\phi + \nabla \times \vec{A}, \quad (5.12)$$

для которых, взяв дивергенцию и ротор, получаем

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= D_{jj} = \text{div } \vec{u}, \\ \nabla \times \nabla \times \vec{A} &= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \vec{\omega}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Так как вектор \vec{A} входит в формулу (5.12) под знаком ротора, к \vec{A} можно добавить градиент произвольной функции. Эта дополнитель-

ная свобода позволяет наложить на вектор \vec{A} условие соленоидальности, $(\nabla \cdot \vec{A}) \equiv 0$, называемое кулоновской калибровкой. Тогда из формулы (5.13) получаем

$$\Delta \vec{A} = -\vec{\omega}. \quad (5.14)$$

Решения уравнений (5.13)–(5.14) определяются интегралами Пуассона

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{D_{ij}(\vec{x}')}{|\vec{x}' - \vec{x}|} d^3 \vec{x}' + \varphi_0, \quad (5.15)$$

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\omega}(\vec{x}')}{|\vec{x}' - \vec{x}|} d^3 \vec{x}', \quad (5.16)$$

где φ_0 — гармоническая функция, которая определяется из задачи Неймана:

$$\Delta \varphi_0 = 0, \quad (5.17)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} \right|_{\Gamma} = f + \left(\frac{n_i}{4\pi} \int_V \frac{[D_{ij}(\vec{x}')\delta_{ik} + \varepsilon_{ijk}\omega_j(\vec{x}')] (x'_k - x_k)}{|x'_\alpha - x_\alpha|^3} d^3 \vec{x}' \right) \Bigg|_S. \quad (5.18)$$

Решив задачу Неймана (5.17)–(5.18) и вычислив интегралы Пуассона в формулах (5.15)–(5.16), мы по формуле (5.12) восстанавливаем искомое векторное поле \vec{u} , которое действительно оказывается нелокально связанным с дивергенцией D_{ij} и ротором $\vec{\omega}$.

ДАВЛЕНИЕ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Далее рассмотрим случай несжимаемой жидкости. Всюду в формулах (5.11)–(5.18) положим $\rho = \text{const}$. Тогда $d = \text{div} \vec{v} \equiv 0$. Для не-

Лекция 5

сжимаемой жидкости давление уже не определяется из уравнения состояния (5.4), а рассчитывается из уравнения Пуассона:

$$\Delta\left(\frac{p}{\rho}\right) = -\left(D_{ij}^2 - \frac{\omega_j^2}{2}\right), \quad (5.19)$$

получаемого из уравнения Навье — Стокса применением оператора дивергенции. Решение уравнения (5.19) дается интегралом Пуассона:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\left(D_{ij}^2 - \frac{\omega_j^2}{2}\right)}{|\vec{x}' - \vec{x}|} d^3\vec{x}' + \frac{p_0}{\rho}. \quad (5.20)$$

Из выражения (5.20) следует, что вклад в давление от сталкивающихся струй положителен (D_{ij}^2), а от вращающихся вихрей отрицателен ($-\omega_j^2/2$). Гармоническая функция $\frac{p_0}{\rho}$ определяется из задачи Неймана:

$$\Delta\left(\frac{p_0}{\rho}\right) = 0, \quad (5.21)$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{p_0}{\rho}\right)\right|_S = \left[n_j g_j - \frac{\partial u_n}{\partial t} - n_i (u_j \nabla_j) u_i \right] \Big|_S, \quad (5.22)$$

где граничное условие получено из нормальной к границе компоненты уравнения Навье — Стокса.

В случае развитой турбулентности движение несжимаемой жидкости сильно нестационарно и многомасштабно. Поток состоит из множества вложенных друг в друга сильно взаимодействующих вихрей. Расчеты турбулентности можно выполнять а) по уравнению Навье — Стокса или б) уравнению переноса завихренности. Однако

в обоих случаях проблема усложняется нелокальной связью: 1) между давлением p и скоростью u_i или 2) между скоростью u_i и завихренностью ω_i . Следовательно, прямое вычисление турбулентного движения чрезвычайно трудоемко и выполняется на суперкомпьютерах. Следует отметить, однако, что результаты таких вычислений возможны лишь для умеренно больших чисел Рейнольдса (меньше 10^5). Они прекрасно согласуются с экспериментальными измерениями, например для турбулентных течений в трубах и каналах.

ФОРМУЛА БИО — САВАРА ДЛЯ СКОРОСТИ, НАВЕДЕННОЙ ВИХРЯМИ

Рассмотрим случай, когда завихренность $\vec{\omega}$ сосредоточена на некоторых тонких линиях. Вектор $\vec{\omega}$ направлен вдоль линии и распределен δ -образно в плоскости, перпендикулярной линии. Тогда из векторного потенциала (5.16) следует формула Био — Савара

$$\vec{u}(\vec{x}) = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\omega}(\vec{x}') \times (\vec{x}' - \vec{x})}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} d^3\vec{x}' = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint_L \frac{d\vec{l} \times (\vec{l} - \vec{x})}{|\vec{l} - \vec{x}|^3}, \quad (5.23)$$

где Γ — циркуляция вокруг вихревой линии, задаваемой контуром L . Точка интегрирования \vec{l} лежит на контуре L и координата \vec{x} — это точка наблюдения, в которой вычисляется скорость. При вычислении интеграла (5.23) по малому поперечному сечению для элемента $d\vec{l}$ мы использовали δ -функцию, входящую в $\vec{\omega}$:

$$\int_V \vec{\omega} d^3\vec{x}' = \Gamma d\vec{l}.$$

При этом для всех элементов контура L циркуляция Γ одна и та же, согласно теореме Гельмгольца для интенсивности вихревых трубок.

Лекция 5

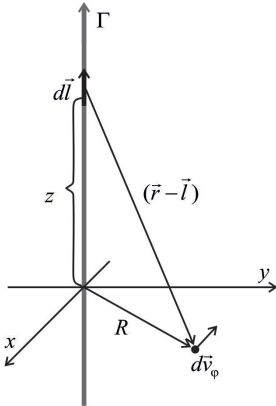


Рис. 5.1. Скорость от прямолинейной вихревой нити

Рассмотрим два примера.

1. Скорость от прямолинейной вихревой нити (рис. 5.1). Вычисление интеграла (5.23) дает для азимутальной скорости выражение

$$v_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi R}, \quad (5.24)$$

где R — расстояние до нити; Γ — циркуляция скорости вокруг нити.

2. Скорость на оси вихревого кольца радиусом R с циркуляцией Γ вокруг вихревой нити. Вычисление интеграла (5.23) для этого случая дает формулу

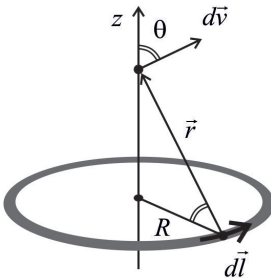


Рис. 5.2. К вычислению скорости жидкости на оси вихревого кольца

$$v_z = \frac{\Gamma R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (5.25)$$

где z — вертикальная координата, определяющая расстояние до плоскости вихревого кольца (рис. 5.2). Формула (5.25) дает

максимальную скорость в центре кольца

$v_{\max} = \frac{\Gamma}{2R}$ (рис. 5.3). На больших расстояниях

получаем убывание скорости по закону обратного куба: $\left(v_z \cong \frac{\Gamma R^2}{2z^3} \right)$, что характерно для электрического диполя в электростатике. Следовательно, малое вихревое кольцо можно рассматривать на больших расстояниях как вихревой диполь.

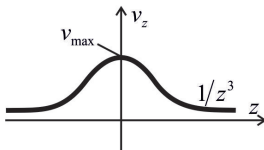


Рис. 5.3. Скорость на оси вихревого кольца

ЛЕКЦИЯ 6

ИДЕАЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ.
СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ. ЗАКОН БЕРНУЛЛИ.
НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ.
ИНТЕГРАЛ КОШИ — ЛАГРАНЖА

Для вывода законов сохранения уравнения движения идеальной жидкости, полученные на прошлых лекциях, запишем в форме Громеки — Ламба:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{u^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + \Phi \right) + [\vec{\omega} \times \vec{u}] = 0, \quad (6.1)$$

где $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$ — вектор завихренности.

При выводе уравнения (6.1) мы воспользовались известным тождеством

$$(\vec{u} \nabla) \vec{u} = \nabla \left(\frac{\vec{u}^2}{2} \right) + [\vec{\omega} \times \vec{u}], \quad (6.2)$$

ввели Φ — удельную потенциальную энергию жидкости во внешнем поле ($\vec{g} = -\nabla \Phi$) и преобразовали член с градиентом давления $\nabla p / \rho$ к виду $\nabla \left[\int \left(\frac{dp}{\rho} \right) \right]$, что справедливо при выполнении условия баротропности ($p = f(\rho)$).

ЗАКОН БЕРНУЛЛИ

Для идеальной жидкости (с нулевой вязкостью $\nu = 0$) в стационарном случае $\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \equiv 0\right)$ после скалярного умножения (6.1) на \vec{u} или $\vec{\omega}$ выпадает член, содержащий $[\vec{\omega} \times \vec{u}]$, и получаем два уравнения

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \left(\frac{u^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + \Phi \right) = 0, \quad (6.3)$$

$$(\vec{\omega} \cdot \nabla) \left(\frac{u^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + \Phi \right) = 0. \quad (6.4)$$

Следовательно, при выполнении условий, сформулированных выше, вдоль линий тока и вихревых линий сохраняется величина

$$\frac{u^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + \Phi = B = \text{const}, \quad (6.5)$$

где константа B на различных линиях тока может принимать разные значения. Выражение (6.5) известно в литературе под названием «закон Бернулли», который является законом сохранения полной энергии (на единицу массы) для жидкой частицы при переносе ее вдоль линии тока.

Существуют и другие формы закона Бернулли (6.5). Вспомним, что в идеальной невязкой и нетеплопроводной жидкости закон сохранения энергии в дифференциальной форме имеет вид

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dp}{dt}, \quad (6.6)$$

где h — удельная энтальпия жидкости. В стационарном случае из (6.6) следует $(\vec{u} \cdot \nabla)p = \rho(\vec{u} \cdot \nabla)h$. Подставляя это выражение в уравнение Эйлера, умноженное на \vec{u} скалярно, имеем

$$\rho(\vec{u} \cdot \nabla) \left(\frac{u^2}{2} + h + \Phi \right) = 0. \quad (6.7)$$

В общем случае при выполнении лишь трех условий: 1) идеальности жидкости, $\lambda, \nu = 0$; 2) потенциальности внешних полей, $\vec{g} = -\nabla\Phi$ и 3) стационарности движения, $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \equiv 0$, получаем, что сумма всех энергий — кинетической, внутренней (в форме энтальпии) и потенциальной — постоянна вдоль линий тока:

$$\frac{u^2}{2} + h + \Phi = const. \quad (6.8)$$

ИНТЕГРАЛ КОШИ — ЛАГРАНЖА

В случае безвихревого течения, когда в некоторой области движения выполняется условие $\vec{\omega} \equiv 0$, из уравнения движения идеальной жидкости (6.1) выпадает член $[\vec{\omega} \times \vec{u}]$. Так как $\vec{\omega} = rot \vec{u} \equiv 0$, то поле скорости представимо в виде

$$\vec{u} = \nabla\varphi, \quad (6.9)$$

где φ — потенциал поля скорости. Подставив (6.9) в уравнения Эйлера (6.1), получаем

$$\nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + \Phi \right) = 0. \quad (6.10)$$

Уравнение (6.10) можно проинтегрировать по координатам, и результат интегрирования содержит произвольную функцию времени $c'(t)$, не зависящую от пространственных координат:

Лекция 6

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + \Phi = c'(t). \quad (6.11)$$

Так как потенциал φ входит в поле скорости под знаком градиента, то он сам определен лишь с точностью до некоторой функции времени $c(t)$, т. е. замена $\varphi' \rightarrow \varphi + c(t)$ не изменяет поля скорости. Взяв функцию $c'(t) = \frac{dc(t)}{dt}$, мы можем избавиться от этой функции времени и в общем случае получаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + \Phi = 0$$

или через энтальпию

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + h + \Phi = 0. \quad (6.12)$$

Выражение (6.12) называют интегралом Коши — Лагранжа в нашей литературе. Иногда в зарубежной литературе этот интеграл называют также интегралом Бернулли. Интеграл Коши — Лагранжа — это закон сохранения для некоторой области, в которой справедливо предположение о потенциальности течения ($\vec{\omega} = 0$). В отличие от закона Бернулли, справедливого для линий тока, этот интеграл имеет глобальный характер для всей области потенциальности движения. При выводе интеграла (6.12) мы так же, как и при выводе закона Бернулли, использовали предположение о потенциальности внешних сил ($\vec{g} = -\nabla\Phi$) и баротропности движения жидкости ($p = f(\rho)$). Когда течение жидкости незавихренно ($\vec{\omega} = 0$) и стационарно ($\partial \vec{u} / \partial t \equiv 0$), то закон Бернулли и интеграл Коши — Лагранжа совпадают. В этом случае константа в законе Бернулли B , вообще говоря, различная на разных линиях тока, становится единой константой для всей области движения, где справедливо условие $\vec{\omega} = 0$.

Рассмотрим далее ряд примеров, иллюстрирующих эти два закона сохранения.

ДИНАМИЧЕСКИЙ НАПОР ПОТОКА

Рассмотрим давление в лобовой точке самолета, куда приходит разделяющаяся линия тока (рис. 6.1). На большом удалении от самолета задано гидростатическое давление p_∞ , плотность среды ρ и скорость набегающего потока в системе самолета U_∞ . В точке торможения на поверхности самолета скорость равна нулю и давление максимально. По закону Бернулли находим избыточное давление — динамический напор потока:

$$p - p_\infty = \rho \frac{U_\infty^2}{2}.$$

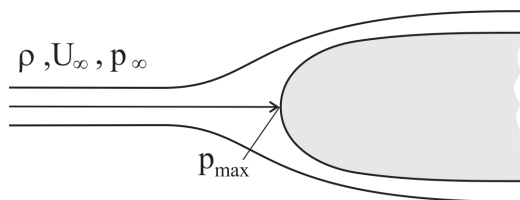


Рис. 6.1

При скорости современных пассажирских лайнеров 250 м/с (900 км/ч) динамический напор может достигать 0,5 атмосферы.

ВЫТЕКАНИЕ ИЗ СОСУДА

Скорость вытекания жидкости через отверстие с малой площадью сечения s (рис. 6.2) можно рассчитать по закону Бернулли, выбрав

Лекция 6

какую-либо линию тока и считая процесс стационарным (это приближение справедливо при $S \gg s$).

Тогда из закона сохранения массы следует $SU = su$, где U — скорость снижения уровня жидкости в сосуде; u — скорость вытекающей из отверстия струи жидкости. Так как давление в жидкости на свободной поверхности и в вытекающей струе на срезе трубки равно атмосферному, то в законе Бернулли члены с давлением сокращаются. Потенциальная энергия на единицу массы в поле тяжести есть $\Phi = gz$, где z — вертикальная координата. Приравнявая выражения на срезе струи, вытекающей из отверстия, и в точках свободной поверхности, получаем $\frac{u^2}{2} = \frac{U^2}{2} + gH$ и, так как $U = \frac{s}{S}u$, имеем

$$u = \sqrt{2gH} \left(1 - \frac{s^2}{S^2} \right)^{-1/2}.$$

Если отношение площадей $\frac{s}{S}$ пренебрежимо мало, то для скорости вытекания жидкости получается известная формула Торричелли $u = \sqrt{2gH}$.

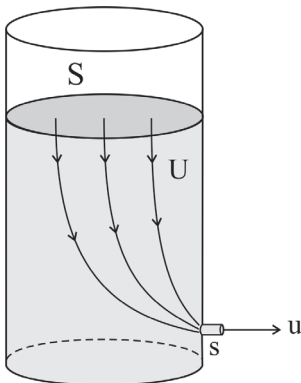


Рис. 6.2

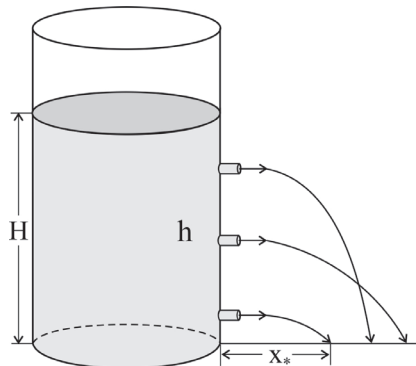


Рис. 6.3

Задача для самостоятельного решения: струя вытекает из бокового отверстия в сосуде с жидкостью высотой H . На какой высоте h от дна сосуда следует сделать отверстие, чтобы струя была самой дальнобойной (рис. 6.3)?

ВРАЩАЮЩИЙСЯ СОСУД С ЖИДКОСТЬЮ

Рассмотрим жидкость в сосуде, стационарно вращающемся с угловой скоростью Ω . Распределение давления в жидкости можно рассчитать сначала во вращающейся системе отсчета, где жидкость покоится, находясь под действием двух сил: центробежной, с потенциальной энергией $\Phi_1 = -\frac{\Omega^2 r^2}{2}$, и гравитационной, с потенциалом $\Phi_2 = gz$. Выбрав начало координат в нижней точке свободной поверхности (рис. 6.4), получаем из уравнения гидростатики

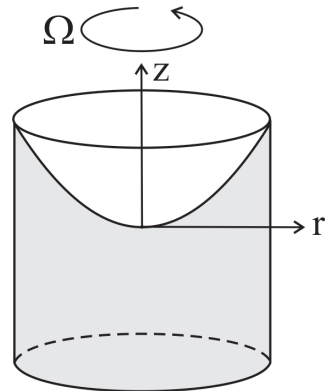


Рис. 6.4

$$\frac{p}{\rho} + \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{p_0}{\rho},$$

где p_0 — атмосферное давление. Под свободной поверхностью при $z < z_0$ для давления получается формула

$$p = p_0 + \rho \frac{\Omega^2 r^2}{2} - \rho gz. \quad (6.13)$$

Давление, согласно формуле (6.13), растет с расстоянием r от оси вращения и с глубиной $|z|$, так как $-z > 0$. На свободной поверхно-

Лекция 6

сти мениска $p = p_0$, и из (6.13) следует уравнение свободной поверхности (параболоид вращения):

$$z_0 = \frac{\Omega^2 r^2}{2g}. \quad (6.14)$$

Рассмотрим теперь эту задачу в инерциальной (лабораторной) системе отсчета, в которой сосуд с жидкостью вращается с угловой скоростью Ω . Скорость жидкости здесь определяется формулой $u = \Omega r$. Так как поле скорости вихревое (завихренность $\omega = 2\Omega$), следует ожидать, что константа в законе Бернулли на разных линиях тока будет различная:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = B(r). \quad (6.15)$$

Учитывая выражение (6.13) для давления p и формулу для скорости u , получаем константу Бернулли

$$B(r) = \frac{P_0}{\rho} + \Omega^2 r^2. \quad (6.16)$$

Мы видим, что, согласно (6.16), постоянная в законе Бернулли действительно зависит от расстояния до оси вращения, т. е. она различна на разных линиях тока.

ВИХРЬ РЭНКИНА

Рассмотрим вихревую трубку радиусом R , расположенную в тяжелой жидкости перпендикулярно к ее свободной поверхности (рис. 6.5). Жидкость в вихревой трубке имеет завихренность $\omega = 2\Omega$, где Ω — угловая скорость вращения жидкости. Вне вихревой трубки

$\omega = 0$, следовательно, здесь движение потенциальное. Скорость вне вихревой трубки на расстоянии r от ее оси определяется из условия постоянства циркуляции на разных радиусах с $r > R$:

$$\Gamma = \oint_L u_i dl = 2\pi r u. \quad (6.17)$$

Циркуляция Γ по теореме Стокса равняется потоку поля завихренности через поверхность S , ограниченную контуром L :

$$\Gamma = \iint_S \omega ds = \omega \pi R^2. \quad (6.18)$$

Из (6.17) и (6.18) получаем формулу для скорости при $r > R$:

$$u = \omega \frac{R^2}{2r} = \Omega \frac{R^2}{r}. \quad (6.19)$$

Во внешней области движение потенциально и постоянная Бернулли на разных линиях тока одна и та же. Ее значение можно вычислить по выражению (6.16) при $r = R$: $B_R = \frac{p_0}{\rho} + \Omega^2 R^2$. Для свободной поверхности, на которой $p = p_0$, получаем из закона Бернулли уравнение

$$g z_0 = \Omega^2 R^2 - \frac{\Omega^2 R^4}{2r^2}, \quad (6.20)$$

где координата z отсчитывается от нижней точки мениска. Полное уравнение для свободной поверхности имеет вид

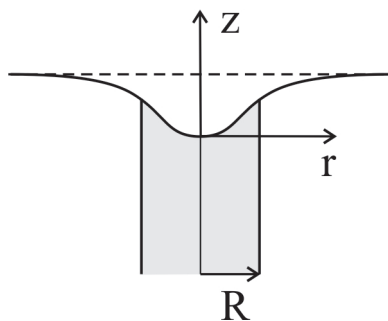


Рис. 6.5

$$z_0 = \begin{cases} \frac{\Omega^2 r^2}{2g} & (r \leq R), \\ \frac{\Omega^2 R^2}{g} \left(1 - \frac{R^2}{2r^2}\right) & (r \geq R). \end{cases} \quad (6.21)$$

Свободная поверхность в области вихревой трубки имеет форму параболоида вращения, а вне трубки — гиперboloида вращения второй степени. Такую форму поверхности можно наблюдать в различных природных процессах. Ее образуют, например, вихри от весла на воде, при вращательном вытекании воды в ванной или стакане с чаем, возникающие при легком касании свободной поверхности чайной ложкой.

Оценим глубину вихря Рэнкина. Например, для максимальной скорости в вихре $\Omega R = 0,1$ м/с:

$$z_{\max} = \frac{\Omega^2 R^2}{g} = \frac{0,1^2}{10} = 10^{-3} \text{ м.}$$

Глубина вихревой воронки z_{\max} относительно невозмущенного уровня жидкости получилась равной 1 мм.

ИНТЕГРАЛ КОШИ — ЛАГРАНЖА

Рассмотрим теперь два примера, иллюстрирующие закон сохранения (6.12), — интеграл Коши — Лагранжа для нестационарных потенциальных течений. Если в начальный момент времени из жидкости мгновенно удалить шаровой объем (рис. 6.6) радиуса R_0 , то в следующие моменты эта полость начнет ускоренно сжиматься, пока не произойдет ее полное схлопывание. Впервые такую задачу о времени схлопывания полости в безграничной жидкости решил Рэлей.

Задача Рэлея. Введем радиус полости $R(t)$ и скорость ее границы $U = \dot{R}(t)$. Из уравнения неразрывности $\text{div } \vec{u} = 0$ при помощи теоремы Гаусса и интегрирования по объему, заключенному между сферой радиусом r и поверхностью полости радиусом R , получаем $4\pi r^2 u = 4\pi R^2 \dot{R}$ или

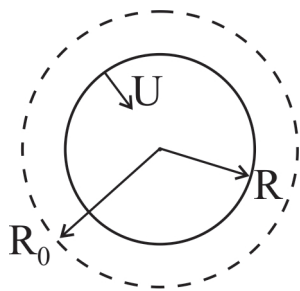


Рис. 6.6

$$u = U \left(\frac{R}{r} \right)^2. \quad (6.22)$$

Из формулы (6.22) для потенциала скорости имеем

$$\varphi = -U \frac{R^2}{r}. \quad (6.23)$$

Подстановка выражений (6.22), (6.23) в интеграл Коши — Лагранжа (6.12) дает на свободной поверхности уравнение Рэлея

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{p_0 - p_\infty}{\rho}, \quad (6.24)$$

где введено давление внутри полости p_0 . В задаче Рэлея это давление равно нулю, но уже в следующем примере внутри полости будет находиться газ, и тогда давление будет ненулевое.

Для дальнейшего интегрирования уравнения (6.24) положим в нем $p_0 = 0$ и перейдем к независимой переменной R и зависимой $U = \dot{R}$. Тогда получаем

$$\ddot{R} = \dot{U} = \frac{dR}{dt} \cdot \frac{dU}{dR} = U \frac{dU}{dR} = \frac{d}{dR} \left(\frac{U^2}{2} \right),$$

Лекция 6

$$R \frac{d}{dR} \left(\frac{U^2}{2} \right) + \frac{3}{2} U^2 = -\frac{p_\infty}{\rho}, \quad U(0) = 0. \quad (6.25)$$

Решение задачи (6.25) имеет вид

$$R^3 U^2 = -\frac{2}{3} \frac{p_\infty}{\rho} (R^3 - R_0^3) = \frac{2}{3} \frac{p_\infty}{\rho} (R_0^3 - R^3), \quad (6.26)$$

здесь $R_0 = R(0)$ — начальный радиус полости. При вычислении времени схлопывания полости, так как $U < 0$, берем после извлечения корня из правой части уравнения (6.26) отрицательный знак и интегрируем по R от начального радиуса R_0 до нуля:

$$T_* = -\int_{R_0}^0 \frac{dR}{U(R)} = -\int_{R_0}^0 \left(\frac{2p_\infty}{3\rho R^3} (R_0^3 - R^3) \right)^{-1/2} dR.$$

Окончательно результат вычисляется через бета-интеграл Эйлера $B(x, y)$, получается формула для времени схлопывания полости

$$\begin{aligned} T_* &= R_0 \sqrt{\frac{3\rho}{2p_\infty}} \int_0^1 \left(\frac{1}{\xi^3} - 1 \right)^{-1/2} d\xi = \\ &= R_0 \sqrt{\frac{\rho}{6p_\infty}} B\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{6}\right) = 0,915 R_0 \sqrt{\frac{\rho}{p_\infty}}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Например, для полости диаметром 2 мм ($R_0 = 10^{-3}$ м) в воде ($\rho = 10^3$ кг/м³) при атмосферном давлении ($p_\infty = 10^5$ Н/м²) получаем время схлопывания $T_* \cong 10^{-4}$ с = 0,1 мс, что весьма мало.

Задача о резонансной частоте колебаний пузырька. Если в полости находится газ, то при его сжатии давление внутри полости будет возрастать. Для очень маленьких по размеру пузырьков газа и до-

статочны малых частот колебаний газ будет успевать обмениваться теплом с окружающей жидкостью и все время будет иметь одну и ту же температуру T (изотермический режим). При очень быстрых колебаниях пузырька теплообмен не успевает выравнять температуру газа, и для уравнения состояния газа следует использовать другое приближение — адиабатическое.

Давление газа в пузырьке при изотермическом процессе есть $p = p_0(R_0 / R)^3$. Для малых амплитуд колебаний $x = \Delta R / R_0 \ll 1$ получаем для давления

$$p = p_0 \left(\frac{R_0}{R_0 + \Delta R} \right)^3 \cong p_0(1 - 3x). \quad (6.28)$$

Уравнение (6.24) линеаризуем по малым безразмерным амплитудам x и получаем уравнение колебаний

$$\frac{d^2}{dt^2} x + 3 \frac{p_0}{R_0^2 \rho} x = 0. \quad (6.29)$$

Из последнего уравнения (6.29) следует частота изотермических резонансных колебаний пузырька

$$\omega = \sqrt{\frac{3p_0}{\rho R_0^2}} \quad (6.30)$$

или для периода колебаний

$$T = 2\pi R_0 \sqrt{\frac{\rho}{3p_0}} = 3,64 R_0 \sqrt{\frac{\rho}{p_0}}. \quad (6.31)$$

Период T резонансных колебаний пузырька с газом (6.31) получается в 4 раза больше времени схлопывания T_* для полости того же радиуса в задаче Рэлея.

Лекция 6

Оценим время прогрева пузырька диаметром $2 \cdot R_0 = 1$ мм. Коэффициент температуропроводности воздуха равен $a = 2 \cdot 10^{-5}$ м²/с. По размерности время прогрева пузырька радиусом R_0 равно

$$T_a = \frac{R_0^2}{a} = \frac{0,5^2 \cdot 10^{-6}}{20 \cdot 10^{-6}} = \frac{0,25}{20} \cong 0,01 \text{ с.}$$

Это время намного больше, чем период изотермических колебаний $T = 3,6 \cdot 10^{-4}$ с. Следовательно, теплообмен не будет успевать происходить и режим движения газа в пузырьке адиабатический. Замена уравнения (6.28) адиабатическим законом $pV^\gamma = const$ приводит к следующей резонансной частоте колебаний пузырька:

$$\Omega_{ад} = \sqrt{\frac{3\gamma p_0}{\rho R_0^2}}. \quad (6.32)$$

Оценим критический размер пузырька R_* , до которого можно использовать изотермическое приближение для газа в пузырьке:

$$T_a = \frac{R_*^2}{a} \sim T = 3,64 R_* \sqrt{\frac{\rho}{p_0}}. \quad (6.33)$$

Из (6.33) следует критический размер воздушного пузырька

в воде: $R_* = 3,64 a \sqrt{\frac{\rho}{p_0}} \approx 7,3 \cdot 10^{-6}$ м = 7,3 мкм.

При $R \ll R_*$ газ в пузырьке изотермичен, а при $R \gg R_*$ воздух пузырька сжимается адиабатически.

Если учесть на границе пузырька вклад в давление вязкости жидкости ν и поверхностного натяжения σ , то можно вывести обобщенное уравнение Рэлея

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + 4\nu\frac{\dot{R}}{R} + \frac{2\sigma}{\rho R} = \frac{p_0 - p_\infty}{\rho}. \quad (6.34)$$

Из уравнения (6.34) нетрудно получить формулу для декремента затухания малых линейных колебаний пузырька. Однако при таком рассмотрении будет утерян вклад в диссипацию энергии колебаний, возникающий из-за эффекта теплопроводности жидкости и газа. Корректная модель диссипации должна быть основана на сопряженной задаче теплообмена между жидкостью и газом в пузырьке.

ЛЕКЦИЯ 7

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ИМПУЛЬСОВ. ПРИМЕРЫ

Закон сохранения импульсов сформулируем в эйлеровом интегральном представлении для фиксированного объема V :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \rho u_i dV \right) = \int_V \rho g_i dV - \oint_S (n_i p + n_j \rho u_j u_i - n_j \tau_{ij}) dS. \quad (7.1)$$

Для случая несжимаемой жидкости ($\rho = const$) объемный интеграл от плотности внешних сил ρg_i можно преобразовать в интеграл по поверхности

$$\int_V \rho g_i dV = -\rho \int_V \nabla_i \varphi dV = -\rho \oint_S n_i \varphi dS$$

и включить в член с давлением, вводя модифицированное давление $\tilde{p}' = p + \rho\varphi$.

Особенно простую форму принимает закон сохранения импульса в стационарном случае:

$$\oint_S (n_i \tilde{p}' + n_j \rho u_j u_i - n_j \tau_{ij}) dS = 0. \quad (7.2)$$

Для идеальной (невязкой) жидкости из (7.2) следует баланс двух потоков импульса: конвективного и обусловленного нормальным напряжением в среде, т. е. давлением:

$$\oint_S (n_i \tilde{p}' + n_j \rho u_j u_i) dS = 0. \quad (7.3)$$

Рассмотрим ряд примеров, иллюстрирующих применение закона сохранения импульса.

1. ЗАДАЧА ОБ УДАРЕ СТРУИ О ПЛАСТИНКУ

Плоская струя идеальной жидкости толщиной h падает со скоростью v под углом α на пластину и растекается по ней (рис. 7.1). Предполагаем, что поле тяжести отсутствует и что образующиеся струи с толщинами h_1 и h_2 стекают с пластины параллельно ее поверхности. На свободной поверхности давление равно постоянному давлению p_0 в окружающей неподвижной среде, поэтому скорость жидкости на граничных линиях тока постоянна и равна u . Струи, стекающие с пластины, имеют также скорость u . Выделим контрольный объем, изображенный на рис. 7.1, и применим к нему теорему импульсов (7.3). Для направления, параллельного пластине, баланс потоков импульса дает

$$h_1 \rho u^2 - h_2 \rho u^2 = h \rho u^2 \cos \alpha$$

или

$$h_1 - h_2 = h \cos \alpha. \quad (7.4)$$

Из закона сохранения массы, т. е. из баланса объемных расходов жидкости, получаем

$$h_1 + h_2 = h. \quad (7.5)$$

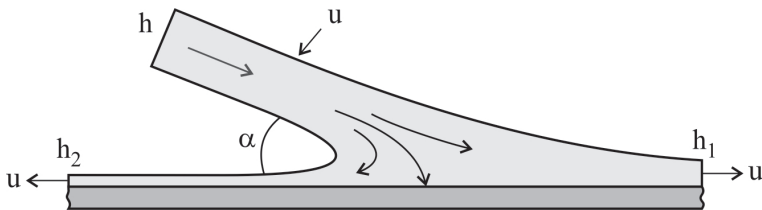


Рис. 7.1

Лекция 7

Из уравнений (7.4) и (7.5) находим

$$h_1 = \frac{1 + \cos \alpha}{2} h; \quad h_2 = \frac{1 - \cos \alpha}{2} h. \quad (7.6)$$

Для направления, перпендикулярного пластине, получаем из (7.3) силу, действующую на пластину по вертикали:

$$F = \int_0^L (p - p_0) dS = h \rho u^2 \sin \alpha. \quad (7.7)$$

При выводе выражения (7.7) для силы F мы воспользовались очевидным тождеством

$$\oint_S p_0 n_i dS = p_0 \oint_S n_i dS \equiv 0, \quad (7.8)$$

которое легко доказать с помощью теоремы Гаусса.

В точке на поверхности пластины, где происходит разделение потока, скорость обращается в нуль, здесь давление максимально и равно согласно закону Бернулли (справедливого вдоль линии тока)

$$p_{\max} = p_0 + \rho \frac{u^2}{2}. \quad (7.9)$$

2. ПАДЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ В КАНАЛЕ С РЕЗКИМ РАСШИРЕНИЕМ

Поток в канале с резким расширением формирует зоны с турбулентными вихрями, в которых происходит частичная диссипация энергии (рис. 7.2). Следовательно, законом Бернулли пользоваться нельзя, но можно применять закон сохранения импульса. Необходи-

мо сделать важное предположение о равенстве давления p на поверхности расширения давлению p_1 в подводящей трубе. Тогда баланс потоков импульса дает

$$p_2 S_2 - p_1 S_1 - p_1 (S_2 - S_1) + \rho u_2^2 S_2 - \rho u_1^2 S_1 = 0. \quad (7.10)$$

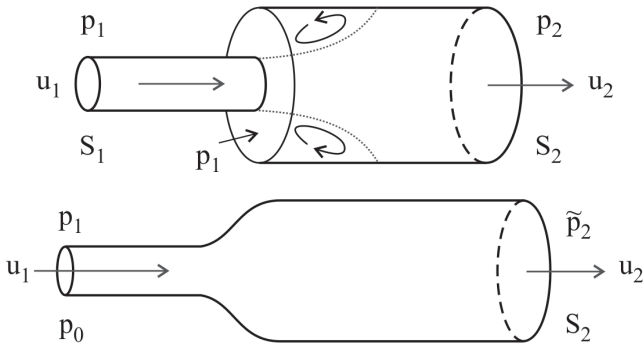


Рис. 7.2

Используя закон сохранения массы $\rho u_1 S_1 = \rho u_2 S_2$, из (7.10) получаем

$$p_2 = p_1 + \rho u_1^2 \frac{S_1}{S_2} \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \right). \quad (7.11)$$

Для сравнения рассчитаем изменение давления в трубе с плавным расширением. Здесь закон Бернулли справедлив и из него следует

$$\tilde{p}_2 = p_1 + \rho \frac{u_1^2}{2} - \rho \frac{u_2^2}{2} = p_1 + \frac{\rho u_1^2}{2} \left[1 - \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 \right]. \quad (7.12)$$

Составив разность выражений (7.12) и (7.11), получаем

$$\tilde{p}_2 - p_2 = \rho \frac{u_1^2}{2} \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \right)^2 > 0. \quad (7.13)$$

Последнее неравенство означает, что в случае плавного расширения канала восстановленное давление \tilde{p}_2 больше, чем в трубе с резким расширением, т. е. в такой трубе происходит потеря части энергии, связанной непосредственно с давлением.

3. ПАДЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ ЗА ПЕРФОРИРОВАННОЙ ПЛАСТИНОЙ

Перфорированная пластина — это пластина с пробитыми в ней отверстиями. Доля площади, занимаемая отверстиями, $\delta = S_1 / S_2$, где S_1 и S_2 — площади, указанные на рис. 7.3. Роль давления \tilde{p}'_2 играет давление p_0 перед пластиной. Давление в следе за пластиной p_2 вычисляется по формуле (7.11). В результате для перепада давления на перфорированной пластине получаем формулу (7.13)

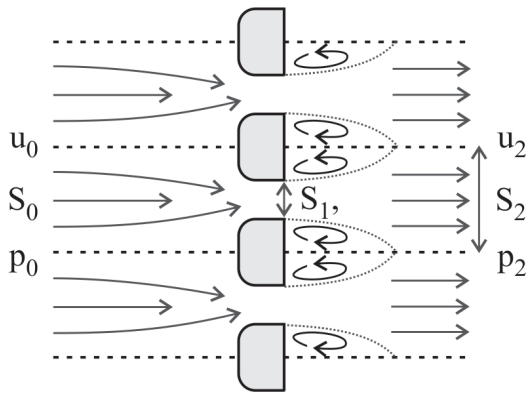


Рис. 7.3

$$p_0 - p_2 = \rho \frac{u_1^2}{2} \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 = \rho \frac{u_0^2}{2} \left(\frac{1}{\delta} - 1\right)^2. \quad (7.14)$$

Например, если $\delta = 0,1$; $\rho = 10^3$ (вода) и $u_0 = 1$ м/с, то перепад давления на пластине будет равен $\Delta p = 81 \frac{\rho u_0^2}{2} = 40,5 \cdot 10^3$ Па $\cong 0,4$ атм.

4. ПАДЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ НА РАСХОДОМЕРНОЙ ШАЙБЕ

Расходомерная шайба представляет собой вставленную в трубу диафрагму с центральным отверстием (рис. 7.4). Из сопоставления рис. 7.3 и 7.4 следует, что течение в трубе с шайбой и течение в выделенной ячейке с отверстием в перфорированной пластине одно и то же. Следовательно, полученная выше формула (7.14) для перепада давления на перфорированной пластине определяет потери давления $\Delta p = p_0 - p_2$ в расходомерной шайбе. Этот перепад давления Δp измеряется манометром через два отверстия, просверленные в стенках трубы до и после шайбы. Затем по формуле

$$u_0 = \frac{\delta}{1 - \delta} \sqrt{2 \frac{\Delta p}{\rho}} \quad (7.15)$$

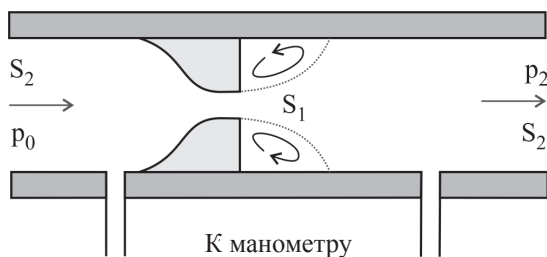


Рис. 7.4. Продольное сечение трубы с расходомерной диафрагмой

Лекция 7

находим среднерасходную скорость потока в трубе. Объемный и массовый расходы жидкости будут определяться формулами $Q = S_2 u_0$ и $G = \rho S_2 u_0$ соответственно.

5. ТРУБКА ПИТО ДЛЯ ЛОКАЛЬНОГО ИЗМЕРЕНИЯ СКОРОСТИ ЖИДКОСТИ

Устройство для измерения локальной скорости потока (трубка Пито) имеет два отверстия: одно направлено навстречу потоку, а другое (боковое) обтекается потоком по касательной (рис. 7.5). В первом отверстии устанавливается повышенное давление, так как оно размещено в точке торможения потока:

$$p_1 = p_0 + \rho \frac{u^2}{2}. \quad (7.16)$$

Во втором отверстии устанавливается статическое давление в среде p_0 . Присоединенный к трубке Пито манометр будет показывать разность давлений $p_1 - p_0 = \rho \frac{u^2}{2}$, равную динамическому напору по-

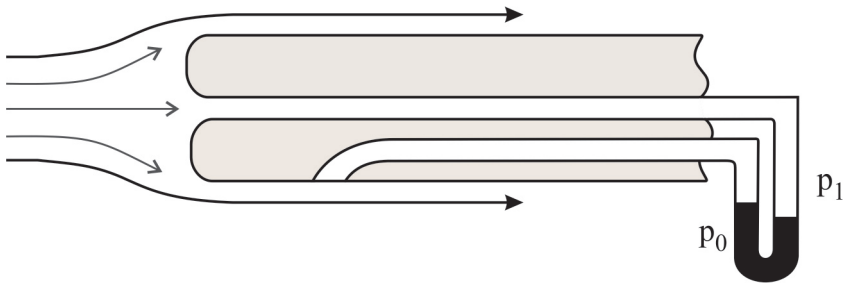


Рис. 7.5

тока. Если плотность жидкости в манометре $\rho_{ж}$, то скорость u можно рассчитать по перепаду уровней жидкости в манометре h по формуле

$$u = \sqrt{\frac{\rho_{ж}}{\rho} 2gh}, \quad (7.17)$$

где g — ускорение силы тяжести.

Отметим, что формула (7.17) построена по разности двух давлений, входящих в закон Бернулли (7.16). При этом мы не использовали теорему импульсов. Этот пример приведен здесь в качестве продолжения предыдущего пункта, описывающего широко применяемые простые устройства в экспериментальной гидродинамике.

6. СИЛА, ДЕЙСТВУЮЩАЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ИСТОЧНИКАМИ (СИЛА БЪЕРКНЕСА)

Силу, действующую на источник 2 со стороны источника 1, считаем по теореме импульсов. Пусть источники с объемными интенсивностями Q_1 и Q_2 расположены на расстоянии R друг от друга, как показано на рис. 7.6. Проведем вокруг источника 2 контрольную поверхность — сферу малого радиуса r . По методу суперпозиции построим поле скорости от двух источников на этой сфере:

$$u_i = \frac{Q_1(R_i + r\vec{n}_i)}{4\pi|\vec{R} + r\vec{n}|^3} + \frac{Q_2 n_i}{4\pi r^2}. \quad (7.18)$$

Нам потребуется также давление на сфере. Его вычисляем по закону Бернулли:

$$p = p_\infty - \rho \frac{u_j^2}{2},$$

где p_∞ — давление на большом расстоянии от источников. Силу, действующую на источник 2, определим как интеграл по контрольной

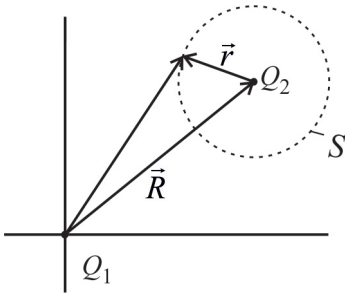


Рис. 7.5

поверхности от произведения тензора плотности потока импульса на внутреннюю нормаль $-\vec{n}$. По теореме импульсов этот интеграл определяет скорость изменения импульса контрольного объема и, следовательно, силу, действующую на расположенный в объеме источник:

$$\begin{aligned}
 F_i &= -\oint_S (p\delta_{ij} + \rho u_i u_j) n_j ds = -\rho \oint_S \left(u_i u_j n_j - \frac{1}{2} u_j^2 n_i \right) ds = \\
 &= -\rho \oint_S (R_i n_j n_j + R_j n_j n_i - R_j n_j n_i) \frac{Q_1 Q_2}{4\pi R^3 4\pi r^2} ds.
 \end{aligned} \tag{7.19}$$

При вычислении интегралов в формуле (7.19) мы пренебрегли в первом слагаемом выражения (7.18) малыми добавками, пропорциональными радиусу сферы r , и учли, что все члены с нечетными степенями вектора n_i дают нулевой вклад. В результате получаем силу притяжения между источниками — силу Бьеркнеса:

$$F_i = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi R^3} R_i. \tag{7.20}$$

Мы видим, что одноименные источники притягиваются, а источники с разными знаками отталкиваются. Полностью противоположны были направления сил в электростатическом законе Кулона для взаимодействующих зарядов: одноименные источники отталкиваются, а разноименные — притягиваются.

Следует подчеркнуть, что в точном смысле гидродинамические источники физически нереализуемы, так как они нарушают закон сохранения массы. Действительно, для источника имеем

$$\operatorname{div} \vec{u} = -Q\delta(\vec{r}), \quad (7.21)$$

и вместо точного нуля в правой части уравнения (7.21) стоит δ -функция, которая дает нуль всюду, кроме точки $\vec{r} = 0$, где она бесконечна. Однако если координаты источников не входят в расчетную область, то получающиеся потенциальные поля весьма полезны. Например, осциллирующий газовый пузырек генерирует в окружающей жидкости поле скорости как от источника. Следовательно, колеблющиеся в фазе пузырьки, как одноименные источники, должны притягиваться друг к другу под действием силы Бьеркнеса.

ЛЕКЦИЯ 8

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Рассмотрим безвихревые течения, когда завихренность нулевая $\bar{\omega} = 0$ в некоторой области V с границей S . Тогда скорость представляется в виде $\bar{u} = \nabla\varphi$, где φ — гидродинамический потенциал поля скорости. Для несжимаемой жидкости из уравнения неразрывности $div\bar{v} = 0$ получаем уравнение Лапласа, к которому добавляем граничное условие на границах области:

$$\Delta\varphi = 0, \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} \right)_{\Gamma} = (\bar{n} \cdot \bar{U})_{\Gamma}, \quad (8.1)$$

где \bar{U} — заданная скорость жидкости на границе (в (8.1) входит лишь нормальная компонента скорости границы). Полученное уравнение Лапласа с граничным условием второго рода известно в литературе как классическая задача Неймана. Потенциал φ , согласно (8.1), является гармонической функцией. Такие функции, как известно, обладают рядом замечательных свойств. В частности, нетрудно показать, что максимум и минимум φ достигаются только на границах области движения. Действительно, вспомним два условия экстремума для функции многих переменных: если в некоторой точке \bar{x} выполняется условие

$$\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_z = 0 \quad (8.2)$$

и все вторые производные имеют один знак, то в этой точке находится минимум функции φ (если $\varphi''_{xx}, \varphi''_{yy}, \varphi''_{zz} > 0$) или ее максимум

(при $\varphi''_{xx}, \varphi''_{yy}, \varphi''_{zz} < 0$). Однако, согласно уравнению Лапласа (8.1), вторые производные обязательно имеют разные знаки, так как их сумма равна нулю. Так что эти неравенства выполнить одновременно невозможно, и, следовательно, максимум и минимум потенциала φ достигаются только на границах области движения, но не в объеме V .

Аналогичным образом покажем, что модуль вектора скорости $|\vec{u}| = u$ не может достигать своего максимума, а давление p — иметь минимум внутри области потенциального движения V . Для этого вспомним, что при потенциальном движении сохраняется интеграл Коши — Лагранжа

$$p + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho \frac{u^2}{2} + \rho \Phi = const. \quad (8.3)$$

Поддействуем оператором Лапласа на уравнение (8.3). При этом члены, содержащие гармонические функции φ и Φ , исчезают, и в результате получаем

$$\Delta p = -\rho \Delta \frac{u^2}{2}. \quad (8.4)$$

Последнее выражение можно преобразовать, используя тождество

$$\Delta \frac{u^2}{2} = \nabla_j (u_i \nabla_j u_i) = (\nabla_j u_i)^2 + u_i \Delta u_i. \quad (8.5)$$

Но вектор скорости — гармоническая функция, поэтому $\Delta u_i = \Delta \nabla_i \varphi = \nabla_i \Delta \varphi \equiv 0$ и из (8.5) получаем

$$\Delta \left(\frac{u^2}{2} \right) = (\nabla_j u_i)^2 > 0. \quad (8.6)$$

Лекция 8

Это условие допускает только минимум модуля скорости u , а максимум величины u внутри области потенциального движения невозможен.

С учетом неравенства (8.6) из (8.4) получаем обратное неравенство для давления:

$$\Delta p = -\rho \Delta \left(\frac{u^2}{2} \right) < 0, \quad (8.7)$$

что позволяет полю давления иметь максимум внутри области V , но минимум давления в области потенциальности невозможен. Итак, согласно условиям (8.6), (8.7), квадрат скорости u , следовательно, модуль скорости u не могут достигать максимума, а давление p — минимума в области потенциального движения V . В то же время, очевидно, что функция u^2 может иметь минимум в V . Например, в критической точке при столкновении двух струй $u = 0$ это согласуется с неравенством (8.6). Очевидно, что тогда давление в этой точке будет иметь, согласно (8.2), максимум, что не противоречит условию (8.7).

Установленные свойства функций u и p приводят к интересным физическим следствиям:

а) так как максимум модуля скорости u всегда расположен на границах области V , то при повышении общей скорости течения переход через скорость звука u , следовательно, начало образования ударных волн впервые происходит именно на границах потока (на теле при внешнем обтекании или стенках трубы при внутреннем течении);

б) с повышением скорости минимума давления, достигаемые на границах области S , понижаются и, наконец, становятся меньше давления насыщенных паров данной жидкости, что приводит к появлению полостей (разрывов). Следовательно, с ростом скорости жидкости кавитация впервые возникает на границах течений, но не в объеме.

ОСОБЫЕ ТОЧКИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ СКОРОСТИ

Рассмотрим поведение потенциала скорости в окрестности критической точки, расположенной в начале координат ($\vec{x} = 0$).

Здесь справедливо разложение

$$\varphi = ax + by + cz + Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz \quad (8.8)$$

с условием $a = b = c = 0$ (так как $\vec{u} = 0$ в критической точке). Константы D , E и F можно положить равными нулю. Это соответствует переходу к координатной системе главных осей тензора скоростей деформации $D_{ij} = \nabla_i \nabla_j \varphi$. В этих координатах тензор D_{ij} диагональный (на его диагонали стоят константы $2A, 2B, 2C$). Уравнение (8.1) накладывает связь на оставшиеся константы:

$$A + B + C = 0.$$

Выбрав $C = -(A + B)$, получаем

$$\varphi = Ax^2 + By^2 - (A + B)z^2. \quad (8.9)$$

В двумерном случае $B = 0$ и потенциал имеет вид

$$\varphi = A(x^2 - z^2).$$

В осесимметричном случае имеем $A = B$ и получаем

$$\varphi = A(r^2 - 2z^2), \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Вектор скорости в этих двух случаях имеет компоненты

$$\begin{aligned} u_x &= 2Ax, \quad u_z = -2Az; \\ u_r &= 2Ar, \quad u_z = -4Az. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Линиями тока являются гиперболы.

ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ОБТЕКАНИЕ УГЛА

Выберем начало координат в вершине угла.

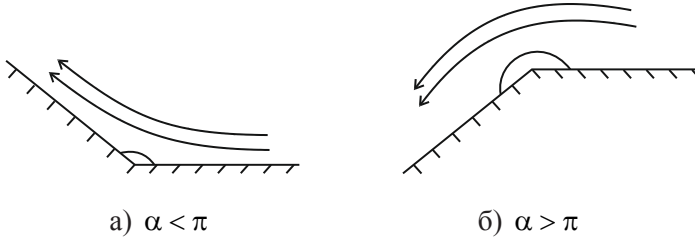


Рис. 8.1

Решение уравнения Лапласа для потенциала и две компоненты скорости в полярных координатах (r, θ) имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi &= Ar^\beta \cos(\beta\theta); \\ u_r &= A\beta r^{\beta-1} \cos(\beta\theta); \\ u_\theta &= -A\beta r^{\beta-1} \sin(\beta\theta). \end{aligned} \quad (8.11)$$

В выражении (8.11) уже выполнено условие непротекания на стенке $u_\theta = 0$ при $\theta = 0$. Для того чтобы оно выполнялось и на второй части стенки при $\theta = \alpha$, необходимо положить $\beta = \pi / \alpha$. Тогда для $\alpha < \pi$ (рис. 8.1, а) имеем $\beta > 1$ и при $r \rightarrow 0$ в точке излома границы скорость обращается в ноль. Если же $\alpha > \pi$ (рис. 8.1, б), то $\beta < 1$ и $r^{\beta-1} \rightarrow \infty$ и в точке излома скорость обращается в бесконечность.

В частности, когда угол $\alpha = 2\pi$, получаем обтекание острой кромки бесконечно тонкой пластины. При этом $\beta = 1/2$ и скорость имеет корневую особенность на острой кромке, а давление, связанное со скоростью интегралом Коши — Лагранжа, в этой точке обращается в отрицательную бесконечность:

$$u \sim 1/\sqrt{r} \rightarrow \infty, \quad p = p_0 - \rho \frac{u^2}{2} \rightarrow -\infty. \quad (8.12)$$

МУЛЬТИПОЛЬНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

В курсе математического анализа доказано полезное утверждение о свойствах гармонических функций. *Теорема Лиувилля: если гармоническая функция в безграничном пространстве не имеет особых точек, то она может быть только постоянной $\varphi = const$.* Из нее следует, что нетривиальные гармонические функции в безграничном пространстве обязательно должны иметь особые точки. Простейшие особенности в двумерном пространстве имеет логарифмический потенциал:

$$\varphi = \ln r, \quad (8.13)$$

а в трехмерном пространстве — кулоновский потенциал:

$$\varphi = 1/r. \quad (8.14)$$

Функции (8.13), (8.14) являются простейшими решениями уравнения Лапласа. Точнее следует говорить, что функции (8.13), (8.14) являются решениями уравнения Пуассона, так как применение оператора Лапласа к ним приводит к появлению $\delta(r)$ -функций. Они описывают потенциалы зарядов в электростатике или источников в гидродинамике. Заметим, что оператор «набла» коммутирует с оператором Лапласа и, следовательно, решениями уравнения (8.1) являются также потенциалы

$$\varphi_{\alpha, \dots, \gamma} = \underbrace{\nabla_{\alpha} \dots \nabla_{\gamma}}_n \varphi, \quad (8.15)$$

которые описывают мультиполи: диполи, квадруполь, октополи и т. д.

Рассмотрим подробнее поля скорости от источников в двумерном случае

$$\vec{u}_2 = \frac{Q_2}{2\pi} \nabla \ln r = \frac{Q_2}{2\pi} \vec{n} \quad (8.16)$$

и в трехмерном пространстве

$$\vec{u}_3 = -\frac{Q_3}{4\pi} \nabla \frac{1}{r} = \frac{Q_3}{4\pi r^2} \vec{n}. \quad (8.17)$$

Рассмотрим скорость от диполя. Потенциалы диполя в двумерном и трехмерном случаях есть

$$\varphi_2 = (\vec{D}_2 \cdot \nabla) \ln r, \quad (8.18)$$

$$\varphi_3 = -(\vec{D}_3 \cdot \nabla) \left(\frac{1}{r} \right). \quad (8.19)$$

Им соответствуют скорости

$$\vec{u}_2 = (\vec{D}_2 \cdot \nabla) \nabla \ln r = \frac{\vec{D}_2 - 2\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{D}_2)}{r^2}, \quad (8.20)$$

$$\vec{u}_3 = -(\vec{D}_3 \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{r} = \frac{\vec{D}_3 - 3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{D}_3)}{r^3}. \quad (8.21)$$

Движущиеся в жидкости со скоростью \vec{U} цилиндр или сфера радиусом R описываются дипольными полями (8.20) и (8.21) соответственно. На поверхности движущегося тела должно быть выполнено равенство нормальных скоростей: $(\vec{u} \cdot \vec{n})|_{r=R} = (\vec{n} \cdot \vec{U})$. Тогда в системе тела выполнится условие непротекания $(\vec{u} - \vec{U}) \cdot \vec{n} = 0$, которое определяет диполи \vec{D}_2 и \vec{D}_3 , и в результате получаем для полей скорости

$$u_{2i} = U_j (2n_i n_j - \delta_{ij}) \left(\frac{R}{r} \right)^2, \quad (8.22)$$

$$u_{3i} = \frac{1}{2} U_j (3n_i n_j - \delta_{ij}) \left(\frac{R}{r} \right)^3. \quad (8.23)$$

Потенциал точечного вихря можно получить из скорости циркулирующей вокруг точки жидкости:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = u_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (8.24)$$

Находим потенциал, интегрируя (8.24) по углу:

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta.$$

Потенциал вихря — многозначная функция угла, но на физической величине (скорости) это не отражается, скорость (8.24) — однозначная функция угла. В векторной форме скорость жидкости определяется выражением

$$\vec{u} = \frac{\vec{\Gamma} \times \vec{n}}{2\pi r}, \quad (8.25)$$

где $\vec{n} = \vec{r} / r$ — единичный вектор радиального направления, а вектор циркуляции $\vec{\Gamma}$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой происходит движение жидкости.

Вихреисточник — это результат суперпозиции полей скорости источника (8.16) и вихря (8.25):

$$\vec{u} = \frac{Q\vec{n} + \vec{\Gamma} \times \vec{n}}{2\pi r}. \quad (8.26)$$

Почему мы можем использовать суперпозицию двух полей скорости? Потому что основное уравнение (8.1) — уравнение Лапласа — линейно.

СИЛА СОПРОТИВЛЕНИЯ

Рассмотрим силу сопротивления при стационарном движении цилиндра или сферы в жидкости. Сила, действующая на тело со стороны жидкости, — это сила давления

$$F_i = -\oint_S p n_i ds. \quad (8.27)$$

Давление вычисляем по закону Бернулли для случая обтекания покоящегося тела стационарным потоком жидкости:

$$p = p_0 + \rho \frac{U^2}{2} - \rho \frac{u_i^2}{2}, \quad (8.28)$$

где u_i — это скорость жидкости в системе покоящегося тела (получаемая из формул (8.22), (8.23) преобразованием Галилея):

$$u_{2i} = \left[\delta_{ij} - (2n_i n_j - \delta_{ij}) \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] U_j, \quad (8.29)$$

$$u_{3i} = \left[\delta_{ij} - \frac{1}{2} (3n_i n_j - \delta_{ij}) \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] U_j. \quad (8.30)$$

При $r = R$ имеем скорость на поверхности тела в двумерном и трехмерном пространствах соответственно:

$$u_{2i} = 2(\delta_{ij} - n_i n_j) u_j, \quad (8.31)$$

$$u_{3i} = \frac{3}{2} (\delta_{ij} - n_i n_j) u_j. \quad (8.32)$$

Подстановка скоростей (8.31), (8.32) в формулу для давления (8.28) и силы (8.27) приводит к поверхностным интегралам, содержа-

шим лишь нечетные степени единичного вектора \vec{n} . В силу симметрии поверхности интегрирования все такие интегралы должны равняться нулю. Это и есть знаменитый **парадокс Даламбера**: при стационарном движении тела в идеальной жидкости сила сопротивления равна нулю. Как будет показано далее, это утверждение справедливо для тела любой формы.

СИЛЫ БЬЕРКНЕСА И ЖУКОВСКОГО

Сила, действующая на тело со стороны потока жидкости, также будет ненулевой в случае, если через контур тела проходит расход жидкости или вокруг тела имеется циркуляционное течение. Эти силы называются силами Бьеркнеса и Жуковского соответственно. Получим их для случая стационарного обтекания цилиндра со скоростью \vec{U} с расходом жидкости через поверхность цилиндра Q и с циркуляцией скорости Γ вокруг цилиндра.

Скорость на поверхности цилиндра при $r = R$ получаем суперпозицией формул (8.26) и (8.31):

$$u_i = 2(\delta_{il} - n_i n_l) u_l + \frac{Q n_i + \varepsilon_{ijm} \Gamma_j n_m}{2\pi R}. \quad (8.33)$$

Так как контур проницаемый, для расчета силы, действующей на тело, применим теорему импульсов:

$$F_i = -\oint_s (p n_i + \rho u_i u_k n_k) ds, \quad (8.34)$$

где давление p определяем по закону Бернулли:

$$p = p_0 + \rho \frac{U^2}{2} - \rho \frac{u_k^2}{2}. \quad (8.35)$$

Лекция 8

При расчете интеграла (8.34) обратим внимание на то, что все члены, содержащие в произведении нечетные количества единичных векторов (типа n_i , $n_i n_j n_k$), при осреднении по углу дают нулевой результат. В этом случае следует рассмотреть только перекрестные произведения, входящие в $u_i u_k$ и u_k^2 :

$$\begin{aligned}
 & 2\rho(Qn_k + \varepsilon_{kjm}\Gamma_j n_m)(\delta_{il} - n_i n_l)U_l n_k + \\
 & + 2\rho(Qn_i + \varepsilon_{ijm}\Gamma_j n_m)(\delta_{kl} - n_k n_l)U_l n_k - \\
 & - 2\rho(Qn_k + \varepsilon_{kjm}\Gamma_j n_m)(\delta_{kl} - n_k n_l)U_l n_i.
 \end{aligned} \tag{8.36}$$

После осреднения по всем направлениям векторов \vec{n} получаем из первой строки $\rho Q U_i$ (второй член исчезает, так как $\varepsilon_{kjm} n_m n_k \equiv 0$). Вторая строка в (8.36) дает нулевой вклад: $\overline{(\delta_{kl} - n_k n_l)n_k} = n_l - n_l \equiv 0$. Из третьей строки получаем $-\rho \varepsilon_{kji} \Gamma_j U_k = \rho [\vec{\Gamma} \times \vec{U}]_i$, где мы воспользовались известной формулой $\overline{n_m n_i} = \frac{1}{2} \delta_{mi}$. В результате получаем формулу для силы Бьеркнеса — Жуковского

$$\vec{F} = -\rho Q \vec{U} - \rho [\vec{\Gamma} \times \vec{U}]. \tag{8.37}$$

Интересно отметить, что сила Бьеркнеса направлена по скорости \vec{U} и получена из конвективного потока импульса интегрированием члена $-\rho u_i u_k n_k$, а сила Жуковского найдена при интегрировании члена с давлением $-\rho n_i$ по поверхности цилиндра и направлена перпендикулярно вектору скорости жидкости \vec{U} .

СИЛЫ МЕЖДУ ИСТОЧНИКАМИ

В трехмерном пространстве формула для силы, действующей на источник, расположенный в равномерном потоке жидкости, получается такой же, как и в двумерном пространстве:

$$\vec{F} = -\rho Q \vec{U}. \quad (8.38)$$

Однако размерности сил и источников в формулах (8.37) и (8.38) разные. В двумерном и трехмерном пространствах Q имеет размерность $\text{м}^2/\text{с}$ и $\text{м}^3/\text{с}$ соответственно.

Рассмотрим силу взаимодействия, возникающую между двумя источниками Q_1 и Q_2 в двумерном и трехмерном случаях. В формуле (8.38) скорость \vec{u} генерируется источником Q_1 в точке, где расположен источник Q_2 . Она равна $\vec{U} = \frac{Q_1 \vec{r}_{12}}{2\pi r_{12}^2}$ и $\vec{U} = \frac{Q_1 \vec{r}_{12}}{4\pi r_{12}^3}$ в этих двух случаях соответственно. Вектор \vec{r}_{12} — это вектор из точки 1 в точку 2. Следовательно, сила, действующая на источник Q_2 , для двумерного случая равна

$$F_i = -\rho \frac{Q_1 Q_2}{2\pi R^2} R_i. \quad (8.39)$$

Для трехмерного случая получаем результат, совпадающий с формулой (7.20) из лекции 7:

$$F_i = -\rho \frac{Q_1 Q_2}{4\pi R^3} R_i.$$

ТЕОРЕМА КЕЛЬВИНА О МИНИМУМЕ ЭНЕРГИИ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Кинетическая энергия для потенциального потока, заключенного внутри области V , определяется интегралом

$$T = \frac{\rho}{2} \int_V (\nabla\phi)^2 dV. \quad (8.40)$$

Лекция 8

Потенциал поля скорости находится через решение задачи Неймана (8.1) с заданной нормальной компонентой скорости u_n на границе потока S . Кроме рассмотренного потенциального движения, в области V при тех же граничных значениях скорости могут существовать и непотенциальные, т. е. вихревые формы движения. Скорость тогда представляется в виде суммы потенциального и вихревого поля:

$$\vec{u} = \nabla\varphi + \vec{w}. \quad (8.41)$$

Будем считать, что суммарная скорость на границе S та же самая u_n . Следовательно, вихревая скорость \vec{w} имеет нулевое граничное значение $w_n|_S = 0$. Очевидно, что вихревая скорость \vec{w} — это соленоидальное поле с нулевой дивергенцией $\nabla \cdot \vec{w} = 0$. Рассмотрим кинетическую энергию суммарного поля скорости:

$$\tilde{T} = \frac{\rho}{2} \int_V (\nabla\varphi + \vec{w})^2 dV = T + \frac{\rho}{2} \int_V w^2 dV + \rho \int_V (\vec{w} \cdot \nabla)\varphi \cdot dV. \quad (8.42)$$

Последний интеграл равен нулю, так как он преобразуется в интеграл от дивергенции $\nabla \cdot (\vec{w}\varphi)$ и далее по теореме Гаусса в интеграл по поверхности S , на которой $w_n|_S = 0$. Следовательно, кинетическая энергия движения в общем случае удовлетворяет неравенству

$$\tilde{T} = T + T_w > T, \quad (8.43)$$

где величина $T_w = \frac{\rho}{2} \int_V w^2 dV$ всегда положительная. Это *теорема*

Кельвина: при сравнении кинетических энергий двух потоков, имеющих одинаковую скорость на границах, энергия потенциального течения всегда меньше энергии потока, содержащего вихри.

ПРИСОЕДИНЕННАЯ МАССА ТЕЛА,
ДВИЖУЩЕГОСЯ В НЕПОДВИЖНОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим задачу о присоединенной массе для тела, движущегося в покоящейся на бесконечности среде. Решение описывается уравнением Лапласа для потенциала φ :

$$\Delta\varphi = 0; \quad (8.44)$$

с условием Неймана на границе тела S и с нулевыми условиями на бесконечности:

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_S = n_j U_j; \quad \varphi|_\infty = \left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_\infty = 0,$$

где U_j — скорость тела; n_j — внутренняя к поверхности тела нормаль. Формальное решение задачи (8.44) представим через функцию Грина, удовлетворяющую уравнению Пуассона

$$\Delta_{\vec{x}} G = -\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (8.45)$$

с нулевыми граничными условиями для нормальной производной на поверхности S и бесконечности:

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_S = 0, \quad \left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_\infty = 0. \quad (8.46)$$

По теореме Грина умножая уравнения (8.44) и (8.45) на G и φ соответственно, составляя разность и интегрируя по объему V , получаем представление потенциального решения через поверхностный интеграл

$$\varphi(\vec{x}) = \oint_S \left(G \frac{\partial\varphi}{\partial n'} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n'} \right) dS_{\vec{x}'} = U_j \oint_S G(\vec{x}, \vec{x}') n_j(\vec{x}') dS'. \quad (8.47)$$

Лекция 8

Для кинетической энергии потенциального движения, используя граничное условие на поверхности S и представление (8.47), находим

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \int_V (\nabla \phi)^2 dV = \frac{\rho}{2} \int_V \nabla_j (\phi \nabla_j \phi) dV = \\
 &= \frac{\rho}{2} \oint_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \frac{\rho}{2} U_i \oint_S \phi n_i dS = \\
 &= \frac{\rho}{2} U_i U_j \oint_S dS \oint_{S'} G(\vec{x}, \vec{x}') n_i(\vec{x}) n_j(\vec{x}') dS' = \frac{m_{ij}}{2} U_i U_j .
 \end{aligned} \tag{8.48}$$

Мы вывели выражение для кинетической энергии через тензор присоединенной массы, который определяется в виде двойного интеграла по поверхности тела от функции Грина

$$m_{ij} = \rho \oint_S dS \oint_{S'} G(\vec{x}, \vec{x}') n_i(\vec{x}) n_j(\vec{x}') dS' . \tag{8.49}$$

В силу известного свойства взаимности функции Грина

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = G(\vec{x}', \vec{x}) \tag{8.50}$$

и симметричности конструкции двойного интеграла (8.49), тензор присоединенной массы симметричен:

$$m_{ij} = m_{ji} . \tag{8.51}$$

Дифференцируя кинетическую энергию (8.48) по скорости U_i , можно определить импульс жидкости, индуцированный движением тела:

$$P_i = \frac{dT}{dU_i} = m_{ij} U_j . \tag{8.52}$$

СИЛА СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ УСКОРЕНИИ ТЕЛА

При ускоренном движении тела будет возникать дополнительная сила, ощущаемая телом как сила сопротивления или сила реакции со стороны жидкости. Эта сила может быть вычислена через производную от индуцированного телом импульса жидкости P_i :

$$F_i = - \frac{dP_i}{dt} = -m_{ij} \dot{U}_j. \quad (8.53)$$

Переносим этот член в левую часть уравнения Ньютона, получаем уравнение движения тела в жидкости:

$$(M\delta_{ij} + m_{ij}) \dot{U}_j = f_i, \quad (8.54)$$

где f_i — приложенная к телу внешняя сила, а M — собственная масса тела. Мы видим, что инерция окружающей жидкости, вовлеченной в движение телом, ощущается как увеличение массы тела на величину присоединенной массы m_{ij} .

Силу сопротивления при ускоренном движении тела можно было бы также определить из интеграла от давления по поверхности тела:

$$F_i = \oint_{S'} p n_i dS', \quad (8.55)$$

где n_i — внутренняя нормаль к поверхности тела. Интеграл (8.55) следует вычислять в движущейся системе координат (в сопутствующей системе), где тело покоится. Преобразуем к этой системе координат интеграл Коши — Лагранжа, который в исходной системе имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{u_j^2}{2} = \frac{p_\infty}{\rho}.$$

Координаты и скорости в движущейся системе связаны с величинами из покоящейся системы преобразованиями Галилея:

Лекция 8

$$x'_j = x_j - \int_0^t U_j(t) dt, \quad u'_j = u_j - U_j.$$

В интеграле Коши — Лагранжа преобразуем два члена:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{\bar{x}} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{\bar{x}'} - (U_j \nabla_j) \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{\bar{x}'} - U_j (u'_j + U_j) \\ \frac{u_j^2}{2} &= \frac{(u'_j + U_j)^2}{2} = \frac{u_j'^2 + U_j^2}{2} + u'_j U_j, \end{aligned}$$

которые дают в сумме

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{\bar{x}} + \frac{u_j^2}{2} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{\bar{x}'} + \frac{u_j'^2}{2} - \frac{U_j^2}{2}.$$

Следовательно, интеграл Коши — Лагранжа приобретает следующий вид в движущейся системе координат:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{\bar{x}'} + \frac{p}{\rho} + \frac{u_j'^2}{2} = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{U_j^2}{2}. \quad (8.56)$$

Отметим, что в этой системе координат на поверхности тела должно выполняться условие непротекания

$$(u'_j n_j) \Big|_S = 0, \quad (8.57)$$

а на бесконечности — условие

$$u'_j + U_j = 0. \quad (8.58)$$

Подставляя давление p из уравнения (8.56) в интеграл (8.55), получаем

$$F_i = - \oint_S \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{\bar{x}'} + \frac{u_j'^2 - U_j^2}{2} \right] n_i ds. \quad (8.59)$$

При этом поверхностный интеграл от величины

$$\frac{u_j'^2 - U_j^2}{2} n_i$$

превращается по теореме Гаусса в интеграл по объему V . Затем благодаря тождеству

$$\nabla_i \frac{u_j'^2}{2} = (u_j' \nabla_j) u_i' - [\vec{\omega}' \times \vec{u}']_i$$

и в силу несжимаемости ($\nabla \cdot \vec{u}' = 0$) и потенциальности ($\nabla \times \vec{u}' = 0$) движения он снова преобразуется в интеграл по поверхности S

$$\oint_S \frac{u_j'^2 - U_j^2}{2} n_i dS = \oint_S u_j' n_j (u_i' + U_i) dS = 0$$

и оказывается равным нулю в силу граничного условия (8.57) на теле и (8.58) на бесконечности. В результате, подставляя в (8.59) решение для потенциала (8.47), снова получаем формулу (8.53) для силы реакции со стороны жидкости F_i :

$$F_i = -\dot{U}_j \oint_S dS \oint_{S'} G(\vec{x}, \vec{x}') n_i(\vec{x}) n_j(\vec{x}') dS' = -m_{ij} \dot{U}_j. \quad (8.60)$$

ПАРАДОКС ДАЛАМБЕРА ДЛЯ ТЕЛА ЛЮБОЙ ФОРМЫ

Когда тело движется в идеальной жидкости с постоянной скоростью, его ускорение равно нулю, из формул (8.53), (8.60) следует, что тело не испытывает никакого сопротивления. Таким образом, парадокс Даламбера — отсутствие силы сопротивления при равномерном движении тела в идеальной жидкости — справедлив для тела любой формы.

ЛЕКЦИЯ 9

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ТФКП ДЛЯ РАСЧЕТА ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В двумерном случае уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (9.1)$$

можно удовлетворить введением функции тока ψ , определяющей компоненты скорости по формулам

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (9.2)$$

Покажем, что на линиях тока функция тока принимает постоянные значения и расход жидкости между двумя такими линиями тока определяется разностью значений функции ψ , взятой на этих линиях. Уравнение линий тока имеет вид

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}, \quad (9.3)$$

откуда получаем

$$u \, dy - v \, dx = \frac{\partial \psi}{\partial y} \, dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} \, dx = d\psi = 0.$$

Следовательно, получаем вдоль линии тока $\psi = const$.

Рассмотрим расход жидкости, протекающей через отрезок, соединяющий две линии тока. Расход определяется интегралом

$$Q_{12} = \int_1^2 (\vec{u} \cdot [d\vec{l} \times \vec{k}]) = \vec{k} \cdot \int_1^2 [\vec{u} \times d\vec{l}] = \int_1^2 (u dy - v dx) = \int_1^2 d\psi = \psi_2 - \psi_1,$$

здесь \vec{k} — единичный вектор нормали к плоскости x - y .

Таким образом, функция тока ψ :

- 1) позволяет выполнить уравнение неразрывности;
- 2) постоянна на линиях тока;
- 3) определяет объемный расход между двумя линиями тока.

Для потенциальных течений имеем также представление для скорости через градиент потенциала

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (9.4)$$

Из формул (9.4) и (9.2) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Уравнения (9.5) — это условия Коши — Римана, выражающие аналитичность комплексной функции $f(z)$

$$f = \varphi + i\psi \quad (9.6)$$

с аргументом

$$z = x + iy. \quad (9.7)$$

Лекция 9

Если использовать оператор комплексного дифференцирования

$$\frac{d}{dz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (9.8)$$

то можно ввести сопряженную комплексную скорость как производную от комплексного потенциала

$$\bar{q} = u - iv = \frac{df}{dz}. \quad (9.9)$$

Отделяя действительную и мнимую части в формуле (9.9) и используя (9.5), (9.6) и (9.8), мы получим компоненты скорости согласно формулам (9.2) и (9.4). Отметим, что условия Коши — Римана можно записать в виде $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, т. е. f зависит только от z , но не от \bar{z} .

Получим комплексные потенциалы скорости для рассмотренных ранее примеров.

ВИХРЕИСТОЧНИК

Комплексный потенциал вихреисточника получаем суперпозицией потенциалов источника и вихря:

$$f = \left(\frac{Q}{2\pi} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \right) \ln z. \quad (9.10)$$

Сопряженную комплексную скорость получаем из (9.10) дифференцированием

$$\bar{q} = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi iz}. \quad (9.11)$$

Отделим мнимую часть выражения (9.10). Это функция тока ψ . Положим $\psi = const$ и получим уравнение линий тока для вихреисточника. В полярных координатах $z = re^{i\theta}$ функция тока есть

$$\psi = \frac{Q}{2\pi}\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r = const. \quad (9.12)$$

В результате получаем уравнения изображенных на рис. 9.1 логарифмических спиралей

$$\frac{r}{r_0} = e^{\frac{Q(\theta-\theta_0)}{\Gamma}},$$

называемых еще спиральями Архимеда. Напомним свойство таких спиралей: угол между линией тока и радиус-вектором в точке спирали постоянен и равен

$$\chi = \text{arctg}\left(\frac{\Gamma}{Q}\right).$$

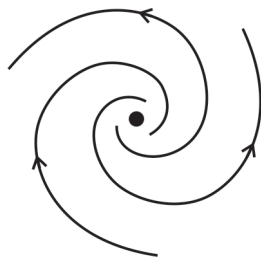


Рис. 9.1

ИСТОЧНИК В ПОТОКЕ (ТЕЛО РЭНКИНА)

Для этого случая комплексные потенциал и скорость имеют вид соответственно

$$f = Uz + \frac{Q}{2\pi}\ln z, \quad \bar{q} = U + \frac{Q}{2\pi z}. \quad (9.13)$$

Функция тока следует из (9.13):

$$\psi = Ur \sin \theta + \frac{Q\theta}{2\pi}. \quad (9.14)$$

Лекция 9

Линии тока показаны на рис. 9.2. Разделяющаяся линия тока расщепляется и дает контур тела Рэнкина. Эта линия получается из формулы (9.14) при $\theta = \pi$:

$$r = \frac{Q(\pi - \theta)}{2\pi U \sin \theta} \quad \begin{array}{l} \text{при } \theta \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty \\ \text{при } \theta \rightarrow \pi, \quad r \rightarrow \frac{Q}{2\pi U} = r_* \end{array} \quad (9.15)$$

При координатах $y = 0$, $x = -r_*$ расположена критическая точка, в которую слева приходит линия тока со значением функции тока

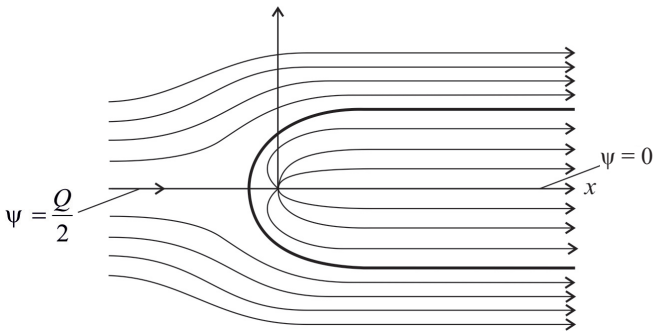


Рис. 9.2

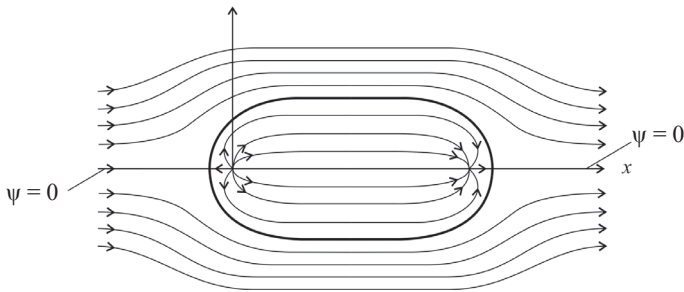


Рис. 9.3

$\psi = \frac{Q}{2}$. Здесь скорость жидкости обращается в ноль. Из (9.15) получаем также высоту тела Рэнкина: $2y_{\max} = \lim_{r \rightarrow \infty} (2r \sin \theta) = \frac{Q}{U}$.

Если вслед за источником поместить на ось x сток с интенсивностью $-Q$, то получим овал Рэнкина (рис. 9.3).

ДИПОЛЬ В РАВНОМЕРНОМ ПОТОКЕ

Комплексные потенциал и скорость для диполя запишем в виде

$$f = \frac{D}{z}, \quad \bar{q} = -\frac{D}{z^2}. \quad (9.16)$$

Складывая их с потенциалом и скоростью равномерного потока, получаем для диполя в потоке

$$f = Uz + \frac{D}{z}; \quad \bar{q} = U - \frac{D}{z^2}. \quad (9.17)$$

В формулах (9.16), (9.17) аргумент α комплексного числа $D = |D|e^{i\alpha}$ определяет направление оси диполя (рис. 9.4), а его модуль $|D|$ дает интенсивность диполя.

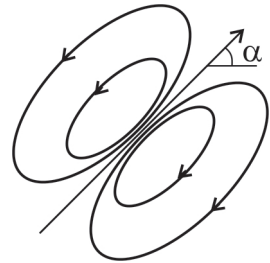


Рис. 9.4

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть аналитическая функция $\zeta(z) = \xi + i\eta$ задает конформное отображение части физического z -пространства V на область \tilde{V} в плоскости ζ (рис. 9.5). Напомним свойства конформных отображений:

Лекция 9

- 1) углы между двумя малыми отрезками и отношения их длин сохраняются;
- 2) эллипсы переходят в подобные эллипсы;
- 3) длины малых отрезков изменяются в $\left| \frac{d\zeta}{dz} \right|$ раз;
- 4) малые площади изменяются в $\left| \frac{d\zeta}{dz} \right|^2$ раз.

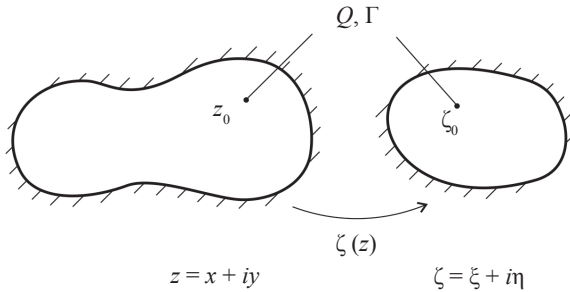


Рис. 9.5

По свойствам комплексных производных получаем связь между скоростями в ζ - и z -плоскостях:

$$\bar{q}_z = \frac{df}{dz} = \frac{d\zeta}{dz} \frac{df}{d\zeta} = \frac{d\zeta}{dz} \bar{q}_\zeta.$$

Кинетическая энергия жидкости определяется интегралом от $\rho \frac{u^2}{2}$ по области V в z -плоскости. Так как якобиан преобразования от z -плоскости к ζ -плоскости определяется в виде $\left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^2$, имеем

$$dxdy = \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^2 d\xi d\eta. \quad (9.18)$$

Для энергии получаем

$$E = \frac{\rho}{2} \int_V |\bar{q}_z| dxdy = \frac{\rho}{2} \int_\zeta |\bar{q}_\zeta|^2 d\xi d\eta, \quad (9.19)$$

где $\bar{q}_\zeta = \frac{df}{d\zeta}$ — комплексная скорость в ζ -плоскости. Мы видим, что в ζ -плоскости кинетическая энергия жидкости определяется таким же интегралом по площади, как и в z -плоскости.

Рассмотрим, как преобразуются особенности полей скорости типа вихрей и источников. Пусть логарифмическая особенность в z -плоскости имеет координату z_0 , а в ζ -плоскости она попадает в точку ζ_0 . Разложим разность $(z - z_0)$ до первого порядка малости по приращениям соответствующей разности $(\zeta - \zeta_0)$ в ζ -плоскости:

$$z - z_0 = \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_{\zeta=\zeta_0} (\zeta - \zeta_0) + \dots \quad (9.20)$$

Заметим, что производная $\frac{dz}{d\zeta}$ не имеет нулей и особенностей в области V (или \tilde{V}) как производная от функции, осуществляющей конформное отображение. Представим логарифмический потенциал вихреисточника в области ζ :

$$f = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \ln(z - z_0) = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} [\ln(\zeta - \zeta_0) + const], \quad (9.21)$$

где $const = \ln(dz/d\zeta)_{\zeta_0}$ — некое постоянное комплексное число. Но любые постоянные в потенциале скорости исчезают при дифференцировании и не входят в физическое поле скорости. Следовательно, из (9.21) заключаем, что логарифмические особенности, вихри и источники при конформных отображениях переходят в вихри и источники той же интенсивности. Ясно, что для диполей и высших мультиполей интенсивность при конформных отображениях будет изменяться. Например, вектор диполя будет поворачиваться на угол, равный аргументу числа $(dz/d\zeta)_{\zeta_0}$, и усиливаться в $|(dz/d\zeta)_{\zeta_0}|$ раз.

ТЕОРЕМА О ЛИНИИ И ОКРУЖНОСТИ

Для дальнейших действий нам будут полезны две теоремы: 1) *теорема о линии*; 2) *теорема об окружности*.

1) Построим новую формулу для комплексного потенциала $\tilde{f}(z)$ для случая, когда нет особенностей у исходного комплексного потенциала $f(z)$ в нижней полуплоскости при $y < 0$:

$$\tilde{f}(z) = f(z) + \overline{f(\bar{z})}. \quad (9.22)$$

Рассмотрим новый потенциал на линии $y = 0$, когда $z = x$. Мнимая часть модифицированного потенциала, т. е. новая функция тока, обращается в ноль на этой линии: $\tilde{\psi} = \text{Im } \tilde{f}(z) = \text{Im} [f(x) + \overline{f(x)}] = 0$, следовательно, линия $y = 0$ есть линия тока и теперь на ней выполняется условие непротекания. Рассмотрим для примера источник и вихрь и построим новый потенциал с непротеканием на линии $y = 0$:

$$\tilde{f} = \frac{Q}{2\pi} [\ln(z - z_0) + \ln(z - \bar{z}_0)] + \frac{\Gamma}{2\pi i} [\ln(z - z_\Gamma) - \ln(z - \bar{z}_\Gamma)].$$

Мы получили в сопряженной точке \bar{z}_0 дополнительный источник (изображение) с тем же знаком и в другой сопряженной точке \bar{z}_Γ дополнительный вихрь (изображение) с противоположным знаком.

2) Пусть имеется некий комплексный потенциал $f(z)$, такой что в круге при $|z| < R$ нет особенностей. Построим новый комплексный потенциал по формуле

$$\tilde{f}(z) = f(z) + \overline{f(R^2 / \bar{z})}. \quad (9.23)$$

Покажем, что на окружности $|z| = R$ выполняется условие непротекания. Для доказательства положим $z = R e^{i\theta}$ и, отделив в (9.23) мнимую часть, получим функцию тока $\tilde{\psi}$

$$\operatorname{Im} \tilde{f}(z) = \operatorname{Im} \left[f(Re^{i\theta}) + \overline{f(Re^{i\theta})} \right] = 0,$$

т. е. $\tilde{\psi} = \text{const}$ на окружности. Следовательно, эта окружность является линией тока и на ней выполнено условие непротекания $u_n = 0$.

Формулы (9.22) и (9.23) обосновывают так называемый метод изображений, справедливый в двумерном пространстве для плоскости или цилиндра.

ПРИМЕР 1. ЦИЛИНДР В РАВНОМЕРНОМ ПОТОКЕ

Комплексный потенциал невозмущенного потока $f(z) = (U - iV)z$, где U и V — это x - и y -компоненты скорости потока. Новый потенциал имеет вид

$$\tilde{f}(z) = (U - iV)z + (U + iV)\frac{R^2}{z}. \quad (9.24)$$

Комплексная сопряженная скорость получается из (9.24) дифференцированием

$$\bar{q} = (U - iV) - (U + iV)\left(\frac{R}{z}\right)^2. \quad (9.25)$$

Течение показано на рис. 9.6. Из (9.25) легко получаем координаты критических точек поля скорости, в которых $q = 0$:

$$z_{1,2} = \pm R \sqrt{\frac{U + iV}{U - iV}} = \pm R e^{i\alpha}, \quad (9.26)$$

где $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{V}{U}\right)$ — угол набегающего потока относительно оси x .

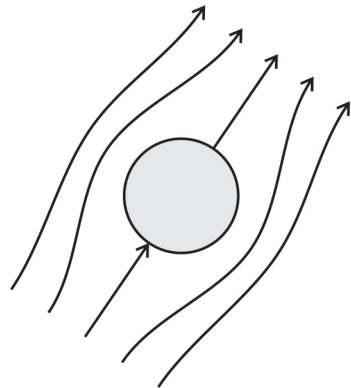


Рис. 9.6

ПРИМЕР 2. ВИХРЬ ВБЛИЗИ ЦИЛИНДРА

Потенциал вихря $f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0)$, где $|z_0| > R$. Новый потенциал есть

$$\tilde{f}(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln\left(\frac{R^2}{z} - \bar{z}_0\right).$$

В последнем члене сделаем преобразование

$$\ln\left(\frac{R^2}{z} - \bar{z}_0\right) = \ln\left(-\frac{\bar{z}_0}{z}\right)\left(z - \frac{R^2}{\bar{z}_0}\right),$$

что приводит нас к окончательной форме

$$\tilde{f}(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln\left(z - \frac{R^2}{\bar{z}_0}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z. \quad (9.27)$$

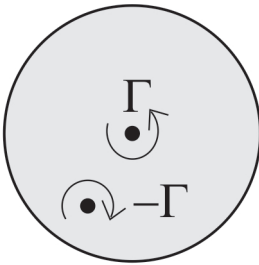


Рис. 9.7

В (9.27) мы опустили комплексную константу $\ln(-\bar{z}_0)$, исчезающую при дифференцировании и не входящую в физическое поле скорости. Формулу (9.27) можно интерпретировать следующим образом: вихрь Γ вблизи окружности индуцирует внутри окружности в точке инверсии $z_* = \frac{R^2}{\bar{z}_0}$ ан-

тивихрь с интенсивностью $-\Gamma$ и вихрь той же интенсивности Γ в центре окружности (рис. 9.7).

ПРИМЕР 3. ИСТОЧНИК ВБЛИЗИ ЦИЛИНДРА

Для источника получаем потенциал аналогичным образом:

$$\tilde{f}(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_0) + \frac{Q}{2\pi} \ln\left(z - \frac{R^2}{\bar{z}_0}\right) - \frac{Q}{2\pi} \ln z. \quad (9.28)$$

Формулу (9.28) можно интерпретировать следующим образом: источник Q вблизи окружности индуцирует внутри окружности в точке инверсии $z_* = \frac{R^2}{\bar{z}_0}$ источник-изображение с такой же интенсивностью Q и источник в центре окружности с противоположной интенсивностью $-Q$ (рис. 9.8).

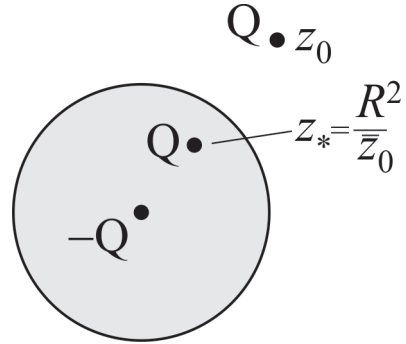


Рис. 9.8

ПРИМЕР 4. ОБТЕКАНИЕ ЦИЛИНДРА С ЦИРКУЛЯЦИЕЙ

Добавим к формуле (9.24) потенциал циркуляционного течения:

$$f(z) = (U - iV)z + (U + iV)\frac{R^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z. \quad (9.29)$$

Тогда сопряженная скорость описывается формулой

$$\bar{q} = (U - iV) - (U + iV)\frac{R^2}{z^2} + \frac{\Gamma}{2\pi iz}. \quad (9.30)$$

Далее будем считать, что поток горизонтальный, т. е. вертикаль-

Лекция 9

ная компонента скорости $V = 0$. Найдем критические точки, в которых скорость (9.30) обращается в нуль:

$$\left(\frac{z}{R}\right)_{1,2} = i \frac{\Gamma}{4\pi UR} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\Gamma}{4\pi UR}\right)^2}. \quad (9.31)$$

Получаем три характерных случая, определяемые параметром $A = \frac{\Gamma}{4\pi UR}$:

- a) $A < 1$: $z_{1,2} = R(iA \pm \sqrt{1 - A^2})$;
- b) $A = 1$: $z_{1,2} = iR$;
- c) $A > 1$: $z_{1,2} = iR(A \pm \sqrt{A^2 - 1})$.

Линии тока для этих трех случаев показаны на рис. 9.9.

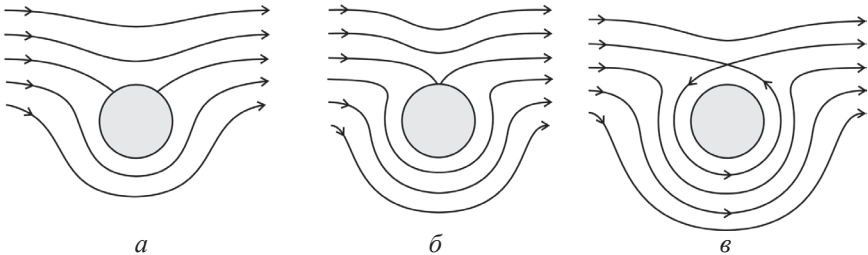


Рис. 9.9

В случае *a* критические точки лежат симметрично справа и слева от плоскости симметрии, в случае *б* корни совпадают, в случае *в* второй корень (нефизический) расположен внутри цилиндра, а первый «зависает» над цилиндром. При положительной циркуляции $\Gamma > 0$ под цилиндром скорость потока жидкости и циркуляционное течение складываются, а над цилиндром — вычитаются. Согласно закону Бернулли, давление внизу будет меньше, чем сверху, и результирующая сила (сила Жуковского) будет направлена вниз.

ЛЕКЦИЯ 10

КОМПЛЕКСНАЯ СИЛА И МОМЕНТ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ПРОИЗВОЛЬНЫЙ КОНТУР, ОБТЕКАЕМЫЙ ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ. ФОРМУЛА ЧАПЛЫГИНА — БЛАЗИУСА. ГИПОТЕЗА ЖУКОВСКОГО О ЦИРКУЛЯЦИИ ВОКРУГ КРЫЛА

Выведем формулы для силы и момента силы, действующих на контур C , помещенный в поток жидкости (рис. 10.1). Вокруг контура предполагается циркуляционное течение (с циркуляцией скорости Γ). Через поверхность контура во внешнее пространство вытекает поток жидкости с расходом Q .

Рассмотрим сначала силу, действующую на контур. Используем закон сохранения импульса в форме

$$\frac{d}{dt} \left(\int_S \rho u_i ds \right) = - \oint_C (p \delta_{ij} + \rho u_i u_j) n_j dl, \quad (10.1)$$

где ρ , p , u_i — плотность, давление и скорость в жидкости; n_i — нормаль к поверхности контура. Правая часть выражения (10.1) определяет силу, действующую на выделенный контрольный объем. Теперь наша задача — перевести эту силу в комплексную форму. Для этого сопоставим касательному и нормальному к линии контура векторам их комплексные аналоги:

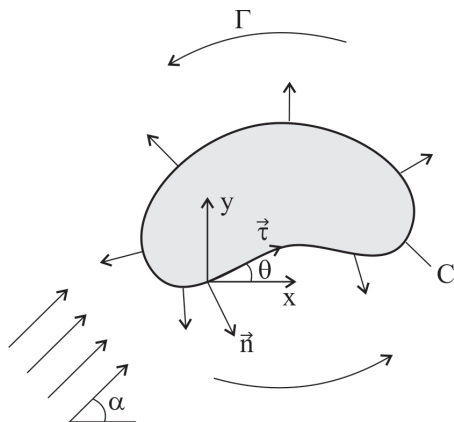


Рис. 10.1

Лекция 10

$$\bar{\tau} \rightarrow e^{i\theta}; \quad \bar{n} \rightarrow -ie^{i\theta}, \quad (10.2)$$

где θ — угол наклона элемента контура (см. рис. 10.1). Умножение экспоненты в (10.2) на $-i$ поворачивает касательный комплексный вектор $e^{i\theta}$ на угол 90° вправо, образуя внешнюю нормаль к контуру, что в комплексной форме есть $-ie^{i\theta}$.

Введем комплексную скорость $q = u + iv$. Давление на контуре представим через интеграл Бернулли

$$P = P_\infty + \rho \frac{U_\infty^2}{2} - \rho \frac{q\bar{q}}{2}, \quad (10.3)$$

где произведение $q\bar{q}$ дает квадрат скорости жидкости на контуре C .

Используя градиентный аналог теоремы Гаусса, можно показать, что постоянные слагаемые, входящие в формулу для давления, в интеграле (10.1) дают нулевой вклад:

$$\oint_C \left(P_\infty + \rho \frac{U_\infty^2}{2} \right) n_i de = \iint_S \nabla_i \left(P_\infty + \rho \frac{U_\infty^2}{2} \right) ds \equiv 0. \quad (10.4)$$

Тогда в формуле (10.1) от давления останется только вклад от последнего слагаемого $\left(-\rho \frac{q\bar{q}}{2} \right)$. Умножая его на комплексную нормаль и учитывая другие конвективные слагаемые, получаем для комплексной силы

$$\begin{aligned} F = X + iY &= -\oint_C \left[\left(-\rho \frac{q\bar{q}}{2} \right) (-ie^{i\theta}) + \rho \frac{i(qe^{-i\theta} - \bar{q}e^{i\theta})}{2} q \right] dl = \\ &= -\frac{\rho i}{2} \oint_C q^2 e^{-i\theta} dl. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Окончательно для сопряженной комплексной силы ($\bar{F} = X - iY$) получаем формулу

$$\bar{F} = \frac{\rho i}{2} \oint_C \bar{q}^2 dz = \frac{\rho i}{2} \oint_C \left(\frac{df}{dz} \right)^2 dz, \quad (10.6)$$

где мы ввели элемент интегрирования по контуру ($dz = e^{i\theta} dl$) и представили сопряженную скорость через производную от комплексного потенциала f . Так как f — аналитическая функция, формула (10.6) представляет силу через контурный интеграл от аналитической функции, что открывает путь к использованию теоремы Коши.

Аналогичным образом переведем в комплексную форму выражение для момента силы, действующей на произвольный контур, который дается интегралом

$$\vec{M} = \oint_C \vec{r} \times d\vec{F} = \vec{e}_z \oint_C (xdY - ydX), \quad (10.7)$$

где \vec{r} — радиус-вектор (x, y) ; $d\vec{F} = (dX, dY)$ — вектор силы, действующей на элемент контура. Вектор момента силы направлен перпендикулярно плоскости (x, y) . Из формулы (10.6) получаем для дифференциально малой комплексной силы

$$d\bar{F} = dF_x - idF_y = \frac{\rho i}{2} \bar{q}^2 dz. \quad (10.8)$$

Умножая (10.8) на z , отделяя мнимую часть и интегрируя по контуру, получаем комплексное представление для момента силы

$$M = -\text{Im} \left\{ \frac{\rho i}{2} \oint_C z \left(\frac{df}{dz} \right)^2 dz \right\} = -\frac{\rho}{2} \text{Re} \left\{ \oint_C z \left(\frac{df}{dz} \right)^2 dz \right\}. \quad (10.9)$$

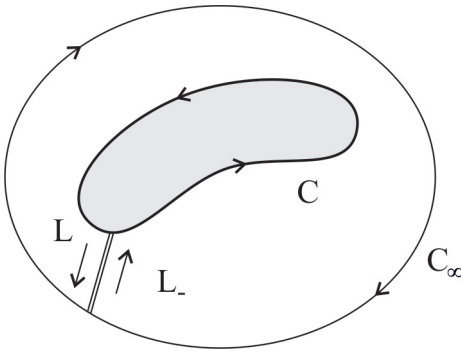


Рис. 10.2

Формулы (10.6) и (10.9) были получены Блазиусом и Чаплыгиным.

Применим теорему Коши. Дополним контур C контуром C_∞ бесконечно большого радиуса (рис. 10.2). Внутри составного контура ($C + C_\infty$) все подынтегральные функции в выражениях (10.6) и (10.9) есть аналитические функции без особен-

ностей. Следовательно, интеграл от них по составному контуру обращается в нуль по теореме Коши. В результате мы можем перевести интегрирование по произвольно заданному контуру C на бесконечно удаленный контур C_∞ , где подынтегральные функции представляются рядами Лорана:

$$\frac{df}{dz} = \bar{U}_\infty + \frac{\Gamma + iQ}{2\pi iz} + \frac{A_1}{z^2} + \dots, \quad (10.10)$$

где A_1 — коэффициент разложения, учитывающий детали формы контура C . Используя разложение (10.10), интегралы (10.6), (10.9) можно вычислить по теореме о вычетах:

$$\bar{F} = X - iY = \frac{\rho i}{2} \oint_{C_\infty} \left(\bar{U}_\infty + \frac{\Gamma + iQ}{2\pi iz} + \dots \right)^2 dz = \rho i (\Gamma + iQ) \bar{U}_\infty \quad (10.11)$$

$$\begin{aligned} M &= -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \left\{ \oint_{C_\infty} z \left(\bar{U}_\infty + \frac{\Gamma + iQ}{2\pi iz} + \frac{A_1}{z^2} + \dots \right)^2 dz \right\} = \\ &= -2\pi\rho \operatorname{Re}(i\bar{U}_\infty A_1) - \rho \frac{\Gamma Q}{2\pi}. \end{aligned} \quad (10.12)$$

После сопряжения формула (10.11) дает для комплексной силы выражение

$$F = X + iY = -\rho(Q + i\Gamma)U_\infty, \quad (10.13)$$

из которого, переходя к векторам, можно получить формулы для сил Жуковского и Бьеркнеса в физическом пространстве

$$\vec{F}_ж = -\rho[\vec{\Gamma} \times \vec{U}_\infty], \quad (10.14)$$

$$\vec{F}_б = -\rho Q \vec{U}_\infty. \quad (10.15)$$

Формула (10.14) обобщает полученный ранее результат для силы Жуковского для кругового цилиндра на произвольный контур. Силу Бьеркнеса (для источника, находящегося в потоке жидкости) и последнее слагаемое в формуле (10.12) для момента силы можно ясно интерпретировать на примере стока, когда $Q < 0$. Тогда на контрольную поверхность, контур C , действует сила, направленная вдоль вектора скорости набегающего потока, и момент силы, совпадающий с направлением циркуляции отсасываемой жидкости ($-\rho\Gamma Q / 2\pi$).

ОБТЕКАНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

Рассмотрим поток, набегающий под углом α к оси x на контур в форме эллипса с полуосями a и b . Внешняя область эллипса конформно отображается на внешность круга радиуса R при помощи функции Жуковского:

$$z = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{c^2}{\zeta} \right). \quad (10.16)$$

Обратное отображение описывается формулой

Лекция 10

$$\zeta = z + \sqrt{z^2 - c^2},$$

где c — параметр, определенный ниже.

Окружности радиуса r в ζ -плоскости переходят в эллипсы, описываемые уравнением

$$\frac{(2x)^2}{\left(r + \frac{c^2}{r}\right)^2} + \frac{(2y)^2}{\left(r - \frac{c^2}{r}\right)^2} = 1,$$

откуда находим для полуосей эллипса $a = \frac{1}{2}\left(R + \frac{c^2}{R}\right)$; $b = \frac{1}{2}\left(R - \frac{c^2}{R}\right)$ и для параметров конформного отображения

$$R = a + b; \quad c^2 = a^2 - b^2. \quad (10.17)$$

Величина $2c$ определяет расстояние между фокусами эллипса (рис. 10.3).

Для невозмущенного потока в z - и ζ -плоскостях комплексный потенциал имеет вид

$$f_0 = \bar{U}_\infty z = \bar{U}_\infty \frac{\zeta}{2}.$$

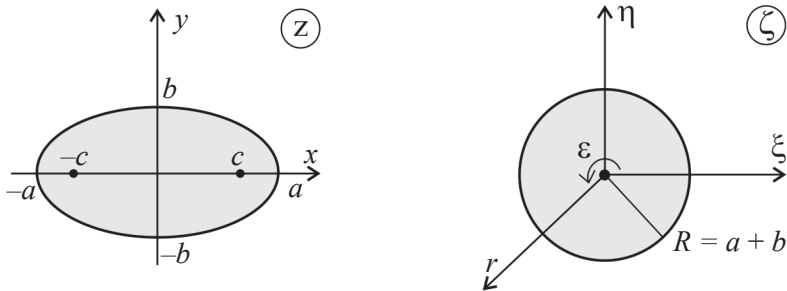


Рис. 10.3. Отображение внешней области эллипса на внешность круга радиуса R

При внесении кругового цилиндра радиусом R в ζ -плоскости по теореме об окружности получаем течение, изображенное на рис. 10.4 с потенциалом

$$f_1 = \bar{U}_\infty \frac{\zeta}{2} + U_\infty \frac{R^2}{2\zeta}.$$

Накладывая циркуляционное течение в ζ -плоскости, получаем окончательно течение, изображенное на рис. 10.5, которое описывается потенциалом

$$f = \bar{U}_\infty \frac{\zeta}{2} + U_\infty \frac{R}{2\zeta} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta.$$

Вычислим сопряженную комплексную скорость в z -плоскости с учетом дополнительного источника интенсивности Q , помещенного внутри контура.

$$\bar{q} = \frac{df}{dz} = \frac{df}{d\zeta} \cdot \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)^{-1} = \frac{\bar{U}_\infty - U_\infty \frac{R^2}{\zeta^2} + \frac{\Gamma + iQ}{\pi i \zeta}}{1 - \frac{c^2}{\zeta^2}}. \quad (10.18)$$

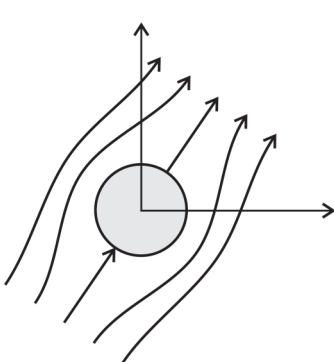


Рис. 10.4

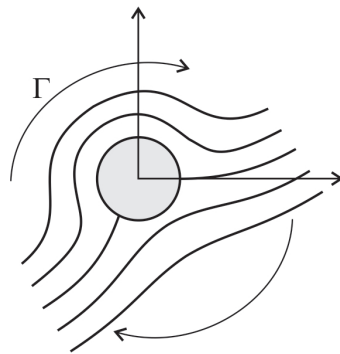


Рис. 10.5

Лекция 10

Используя при $z \rightarrow \infty$ формулы (10.16), (10.18), получаем разложение Лорана

$$\bar{q} = \bar{U}_\infty + (\bar{U}_\infty c^2 - U_\infty R^2) \frac{1}{4z^2} + \frac{\Gamma + iQ}{2\pi iz} + \dots \quad (10.19)$$

Откуда следует формула для коэффициента A_1 :

$$A_1 = \bar{U}_\infty \frac{a^2 - b^2}{4} - U_\infty \frac{(a + b)^2}{4}. \quad (10.20)$$

Подставляя этот коэффициент в выражение (10.12), получаем момент силы, действующей на эллиптический цилиндр:

$$\begin{aligned} M &= -\pi\rho U_x U_y (a^2 - b^2) - \rho \frac{\Gamma Q}{2\pi} = \\ &= -\pi\rho U_\infty^2 (a^2 - b^2) \text{Cos}\alpha \text{Sin}\alpha - \rho \frac{\Gamma Q}{2\pi}. \end{aligned} \quad (10.21)$$

Первое слагаемое в формуле (10.21) приводит к моменту силы, поворачивающему эллипс большой осью перпендикулярно потоку. Второе

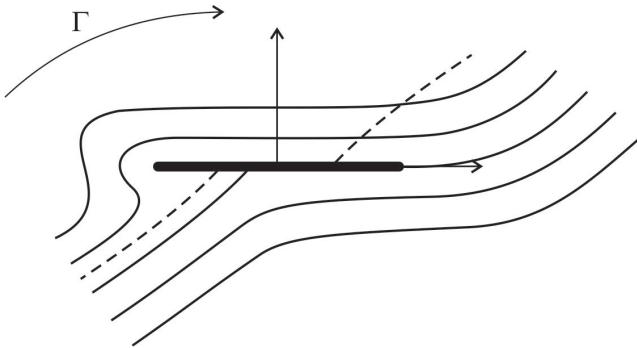


Рис. 10.6

слагаемое описывает момент силы, действующий на эллипс из-за постоянного вдува ($Q > 0$) или отсоса ($Q < 0$) циркулирующей жидкости.

ОБТЕКАНИЕ ПЛАСТИНКИ С ЦИРКУЛЯЦИЕЙ

Исключим источник из рассмотрения, положив $Q = 0$. Положим малую полуось эллипса равной нулю $b = 0$ и получим обтекание плоской пластинки. При этом $R = a$; $c = a$ и, согласно знаменателю формулы (10.18), в двух точках при $\zeta = \pm a$ в комплексной скорости \bar{q} имеем особенность. Устраним эту особенность на правом конце пластинки при $\zeta = a$. Для этого выберем циркуляцию Γ такой, чтобы в этой точке числитель формулы (10.18) также обратился в нуль. Это дает уравнение

$$\bar{U}_\infty - U_\infty + \frac{\Gamma}{\pi i a} = 0$$

или

$$\Gamma = -2\pi |U_\infty| a \sin \alpha. \quad (10.22)$$

Отметим, что при таком выборе циркуляции разделяющаяся линия тока на рис. 10.5 отходит от окружности именно в точке $\zeta = a$. На рис. 10.6 разделяющаяся линия тока отходит от пластины с правой острой кромки. Подставляя выражение (10.22) в формулу для силы Жуковского (10.13), получаем комплексную формулу силы

$$F = 2\pi \rho a \sin \alpha |U_\infty|^2 i e^{i\alpha} \quad (10.23)$$

или формулы для двух декартовых компонент силы

$$F_x = -2\pi \rho a \sin^2 \alpha |U_\infty|^2, \quad (10.24)$$

$$F_y = 2\pi \rho a \sin \alpha \cos \alpha |U_\infty|^2. \quad (10.25)$$

Формула (10.23) показывает, что сила Жуковского повернута на угол 90° относительно направления потока. Интересно отметить, что, наряду с компонентой силы, действующей по нормали к поверхности пластины (F_y — подъемная сила), имеется также горизонтальная составляющая в силе F_x . Появление этой «странной» силы, действующей вдоль бесконечно тонкой пластины, связано с неустранимой особенностью на левой острой кромке пластины. Здесь модуль скорости обращается в ∞ , а давление стремится к $-\infty$. В результате, когда ширина эллиптической пластины исчезает при $b \rightarrow 0$, произведение этого давления на b остается конечным и образует горизонтальную силу F_x . Эту силу называют «подсасывающей» из-за отрицательных больших давлений на левой кромке пластины.

ГИПОТЕЗА ЖУКОВСКОГО О ЦИРКУЛЯЦИИ ВОКРУГ КРЫЛА С ОСТРОЙ КРОМКОЙ

Жуковский предложил определять циркуляцию вокруг крыла с кромкой так, чтобы на острой кромке не возникало бесконечной скорости, как было бы при обтекании, показанном на рис. 10.7. Механизм возникновения такой циркуляции Жуковский объяснил через сходящийся с крыла в момент старта вихрь (рис. 10.8) с положительной циркуляцией Γ . В результате по теореме Кельвина (о сохранении циркуляции по жидкому контуру, охватывающему крыло и вихрь) вокруг крыла устанавливается циркуляция $-\Gamma$, которая и обеспечивает подъемную силу. При таком специальном выборе циркуляции линии тока сходят с острой кромки, как показано на рис. 10.9, и на кромке скорость жидкости остается конечной. В момент торможения самолета в аэропорту прибытия с острой кромки сходит вихрь с отрицательной циркуляцией $-\Gamma$ (тормозной вихрь, рис. 10.10).

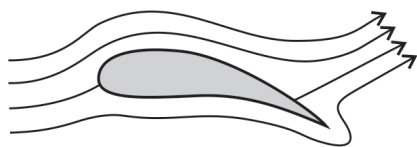


Рис. 10.7

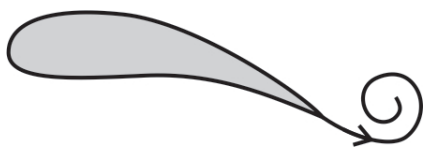


Рис. 10.8

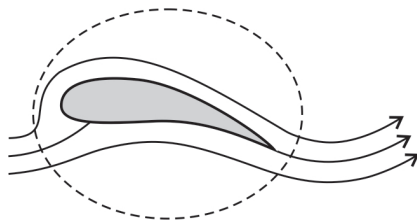


Рис. 10.9

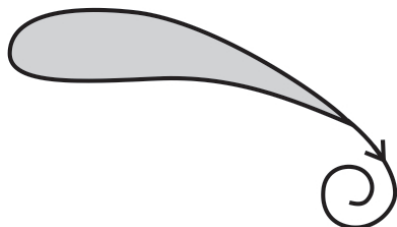


Рис. 10.10

Из рис. 10.9 видно, что при отрицательной циркуляции скорость внешнего потока и циркуляционная скорость над крылом складываются, а под крылом вычитаются. Поэтому результирующая скорость над крылом больше, чем под крылом, а давление, наоборот, над крылом меньше, чем под крылом (согласно закону Бернулли). В этом заключается физический механизм подъемной силы Жуковского.

ЛЕКЦИЯ 11

ДИНАМИКА ВИХРЕЙ. ИНТЕГРАЛЫ СОХРАНЕНИЯ

Рассмотрим теперь ограниченное распределение завихренности в двумерном пространстве без границ, т. е. когда завихренность $\omega(x \rightarrow \infty) \rightarrow 0$.

В двумерном случае имеет место уравнение

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial t} + u \frac{\partial\omega}{\partial x} + v \frac{\partial\omega}{\partial y} = 0. \quad (11.1)$$

Так как для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = -\frac{\partial(u_j\omega)}{\partial x_j},$$

из этого сразу же следует

$$\frac{d}{dt} \left(\int_S \omega ds \right) = -\oint_L u_j \omega n_j dl \rightarrow 0$$

или

$$\int_S \omega ds = \Gamma_\Sigma = const, \quad (11.2)$$

где Γ_Σ — это общая циркуляция поля скорости по удаленному на бесконечность контуру.

Умножим (11.1) на вектор x_i и проинтегрируем по пространству

$$\frac{d}{dt} \left(\int_S x_i \omega d^2 \vec{x} \right) = - \int_S x_i \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \omega) ds = - \oint_L x_i u_j \omega n_j dl + \int_S u_i \omega d^2 \vec{x}. \quad (11.3)$$

На больших расстояниях в силу убывания ω первый интеграл обращается в ноль. Рассмотрим последний интеграл, входящий в (11.3). Введем векторный потенциал $\vec{A} = \vec{k}\psi$, где для ψ получено уравнение $\Delta\psi = -\omega$, решение которого есть

$$\psi(\vec{x}) = -\frac{1}{2\pi} \iint \omega(\vec{x}') \ln|\vec{x}' - \vec{x}| d^2\vec{x}'.$$

Тогда для скорости получаем выражение через векторный потенциал \vec{A} :

$$\begin{aligned} u_i = \text{rot } \vec{A} &= -\nabla \times \vec{k} \left(\int_S \omega(\vec{x}') \frac{\ln|\vec{x} - \vec{x}'|}{2\pi} d^2\vec{x}' \right) = \\ &= \varepsilon_{ijk} k_j \left(\int_S \omega(\vec{x}') \frac{(x_k - x'_k)}{2\pi(\vec{x} - \vec{x}')^2} d^2\vec{x}' \right). \end{aligned} \quad (11.4)$$

Тогда получаем, что интеграл

$$\begin{aligned} &\int_S u_i(\vec{x}) \omega(\vec{x}) d^2\vec{x} = \\ &= \varepsilon_{ijk} k_j \int_S d^2\vec{x}' \int_S d^2\vec{x} \omega(\vec{x}) \omega(\vec{x}') \frac{x_k - x'_k}{2\pi(x_1 - x'_1)^2} \equiv 0 \end{aligned} \quad (11.5)$$

обращается в ноль в силу свойств антисимметрии подинтегральной функции, которая меняет знак при замене $\vec{x}' \rightarrow \vec{x}$. Окончательно получаем из (11.3) закон сохранения «центра масс» для произвольного распределения завихренности:

$$\Gamma_\Sigma X_i = \int_S x_i \omega d^2\vec{x} = \text{const}. \quad (11.6)$$

Покажем, что сохраняется еще один интеграл, а именно

$$\int_S x_i^2 \omega(\vec{x}) d^2\vec{x} = \text{const}.$$

Действительно,

$$\frac{d}{dt} \left(\int_S x_i^2 \omega(\vec{x}) d^2 \vec{x} \right) = - \oint_L x_i^2 u_n \omega dl + 2 \int_S x_i u_i \omega d^2 \vec{x}. \quad (11.7)$$

Последний интеграл в (11.7) имеет вид

$$\int_S x_i u_i \omega d^2 \vec{x} = \varepsilon_{ijk} k_j \int d^2 \vec{x}' \int d^2 \vec{x} \omega(\vec{x}) \omega(\vec{x}') \frac{x_k - x'_k}{2\pi(x_1 - x'_1)^2} x_i,$$

но $\varepsilon_{ijk} x_i x_k \equiv 0$ и остается симметричный по i, k объект

$$\iint \omega(\vec{x}) \omega(\vec{x}') \frac{x_i x'_k}{|x_1 - x'_1|^2} d^2 \vec{x}' d^2 \vec{x},$$

умноженный на ε_{ijk} , что тоже дает нуль. Отметим, что и дисперсия распределения завихренности также постоянна:

$$D = \int_S (x_i - X_i)^2 \frac{\omega(\vec{x}) d^2 \vec{x}}{\Gamma_\Sigma} = const, \quad (11.8)$$

так как интеграл (11.8) распадается на три предыдущих интеграла и все они сохраняются.

Энергия вихревого движения определяется интегралом

$$E = \frac{\rho}{2} \int_S u^2 d^2 \vec{x} = \frac{\rho}{2} \int_S \psi \omega d^2 \vec{x} - \frac{\rho}{2} \oint_L \psi (\vec{u} \cdot d\vec{l}),$$

где $\psi_{r \rightarrow \infty} = -\frac{\ln r}{2\pi} \cdot \Gamma_\Sigma \rightarrow \infty \cdot \Gamma_\Sigma$. Будем считать суммарную циркуляцию системы Γ_Σ равной нулю, поэтому этот член с контурным интегралом исчезает. В результате имеем выражение для энергии

$$E = \frac{\rho}{2} \int_S \psi \omega d^2 \bar{x} = -\frac{\rho}{8\pi} \iint_S \omega(\bar{x}) \omega(\bar{x}') \ln(\bar{x} - \bar{x}')^2 d^2 \bar{x} d^2 \bar{x}' . \quad (11.9)$$

Можно показать прямым вычислением, что при движении вихрей эта величина сохраняется. Действительно, из уравнения Эйлера получаем

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2}{2} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_j} \rho \left(u_j \frac{u^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j P) .$$

Интегрирование по пространству и применение теоремы Гаусса дает при $L \rightarrow \infty$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_S \rho \frac{u^2}{2} d^2 \bar{x} \right) = -\oint_L u_n \left(P + \rho \frac{u^2}{2} \right) dl \rightarrow 0 .$$

На больших расстояниях в силу условия $\Gamma_\Sigma = 0$ скорость и давление быстро исчезают по дипольному закону затухания. В этом случае контурный интеграл при устремлении контура интегрирования L к бесконечности обращается в ноль и, следовательно, $E = const$.

СИСТЕМА N ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ

Функция тока и завихренность связаны уравнением Пуассона

$$\Delta \psi = -\omega . \quad (11.10)$$

Завихренность представим суперпозицией точечных носителей (вихрей):

$$\omega = \sum_j^N \Gamma_j \delta |\bar{x} - \bar{x}_j| .$$

Лекция 11

Для системы N точечных вихрей интеграл Пуассона имеет вид

$$\psi = -\frac{1}{2\pi} \int_S \omega(\bar{x}') \ln|\bar{x} - \bar{x}'| d^2\bar{x}' = -\frac{1}{2\pi} \sum_j^N \Gamma_j \ln|\bar{x} - \bar{x}_j|. \quad (11.11)$$

Функция тока — это мнимая часть комплексного потенциала, который теперь легко построить на основе формулы (11.11):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^N \Gamma_j \ln(z - z_j). \quad (11.12)$$

Для того чтобы получить скорость i -го вихря, мы, следуя Раусу и Кирхгофу, вычтем логарифмическую особенность в точке $z = z_i$ из комплексного потенциала f , найдем комплексную скорость и затем устремим координату к точке вихря $z \rightarrow z_i$. В результате получаем сопряженную комплексную скорость i -го вихря:

$$\bar{q}_i = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j \neq i}^N \frac{\Gamma_j}{(z_i - z_j)}. \quad (11.13)$$

Из интеграла энергии E (формула (11.9)) получаем при $z \rightarrow z_i$ расходимость, так как $\ln|x - x_i| \rightarrow \infty$. Отбрасываем расходящийся член и определяем гамильтониан вихревой системы:

$$H = \frac{\rho}{2\pi} \sum_{i=1}^N \Gamma_i \psi'(x_i) = -\frac{\rho}{4\pi} \sum_{i \neq j}^N \Gamma_i \Gamma_j \ln|z_i - z_j|, \quad (11.14)$$

где сделана подстановка

$$\psi'(x_i) = \left\{ \psi(x) + \frac{\Gamma_i}{2\pi} \ln|x - x_i| \right\} \Big|_{x \rightarrow x_i},$$

исключающая логарифмическую расходимость в точке вихря.

Дифференцированием функции H по z_i можно показать, что получается сопряженная комплексная скорость \bar{q}_i вихря

$$\Gamma_i \bar{q}_i = 2i \frac{\partial}{\partial z_i} H(z_1, \bar{z}_1; \dots; z_N, \bar{z}_N) = \frac{\Gamma_i}{2\pi i} \sum_{j \neq i}^N \frac{\Gamma_j}{(z_i - z_j)}. \quad (11.15)$$

В действительной форме получаем из (11.14) для x - и y -компонент скорости i -го вихря выражения, согласующиеся с формулой (11.13):

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{1}{\Gamma_i} \frac{\partial}{\partial y_i} H = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq i}^{N'} \frac{\Gamma_j (y_i - y_j)}{|z_i - z_j|^2}, \\ v_i &= -\frac{1}{\Gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i} H = \frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq i}^{N'} \frac{\Gamma_j (x_i - x_j)}{|z_i - z_j|^2}. \end{aligned} \quad (11.16)$$

Мы получили гамильтоновы уравнения движения вихрей в неограниченной плоскости. Функция H — это часть кинетической энергии жидкости. Интересно отметить, что, хотя H — это часть кинетической энергии жидкости, она зависит только от пространственных координат вихрей и этим напоминает потенциальную энергию.

Инвариантность гамильтониана H относительно сдвигов и вращений приводит к дополнительным законам сохранения: «импульсу» и «моменту импульса» системы вихрей

$$\begin{aligned} P &= \sum_{j=1}^N z_j \Gamma_j, \\ M &= \sum_{j=1}^N |z_j|^2 \Gamma_j. \end{aligned} \quad (11.17)$$

ПРИМЕРЫ

ВИХРЕВАЯ ПАРА

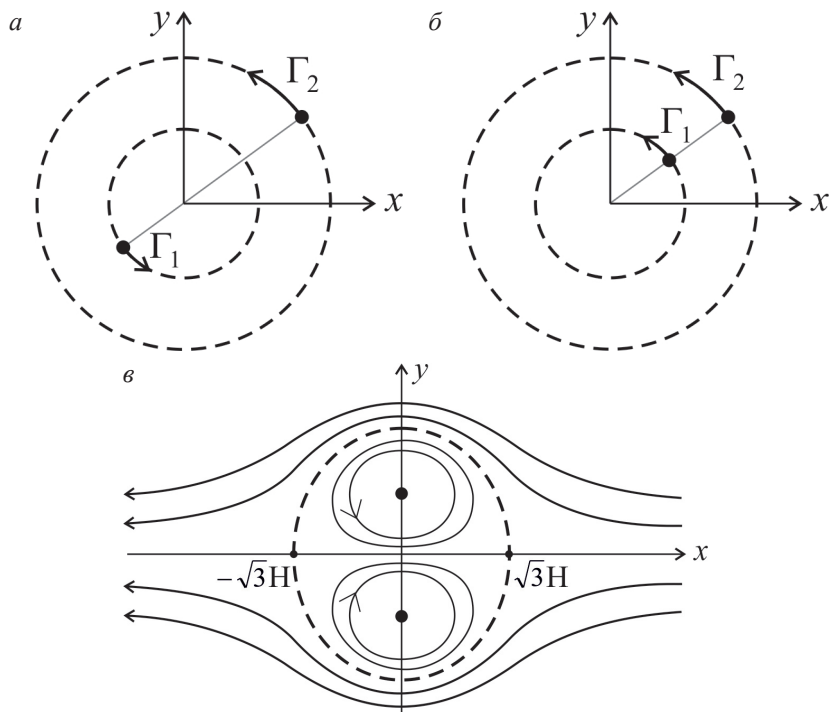


Рис. 11.1. Вихри с циркуляциями одного или разного знака:

$a - \Gamma_1 > \Gamma_2 > 0$; $б - \Gamma_1 > 0, \Gamma_2 < 0$; $в - \Gamma_1 = -\Gamma_2$

Скорость этих вихрей можно рассчитать по формуле (11.13). Если в вихревой паре циркуляции равны по величине и имеют одинаковые знаки, то они будут двигаться по одной окружности радиусом R со скоростью

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi R}.$$

Разноименные вихри равных циркуляций движутся по прямой. По формуле (11.13) получаем скорость прямолинейно движущейся вихревой пары

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi H},$$

где H — это половина расстояния между вихрями. В системе координат, движущейся со скоростью вихревой пары, получим стационарную картину с линиями тока, изображенными на рис. 11.1, в. Мы видим, что с парой вихрей переносится определенное количество жидкости, циркулирующей внутри замкнутой поверхности. Этот переносимый объем называется атмосферой вихревой пары.

Интегрируемость движения вихрей и стохастичность их траекторий. Движение трех вихрей, как показал Новиков, 1977¹, в безграничном пространстве интегрируются точно. В этом случае число интегралов сохранения четыре (энергия, два импульса и момент импульса) и этого достаточно, чтобы движение происходило в шестимерном фазовом пространстве по многообразию размерности 2. Для четырех вихрей этих сохраняющихся величин уже недостаточно, и они демонстрируют стохастические траектории.

ДВИЖЕНИЯ ВИХРЕЙ В ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Движение вихрей в случае ограничивающих поверхностей, близких к плоскости (а) или окружности (б), можно описать методами ТФКП.

а) Для этого случая комплексный потенциал получаем конформным отображением на верхнюю полуплоскость $z = z(\zeta)$:

¹ Гешев П. И., Черных А. И. Движение вихрей в двумерной ограниченной области // Теплофизика и аэромеханика. 2018. Т. 25, № 6. С. 841–854.

Лекция 11

$$f(z) = f_0(\zeta) + \overline{f_0(\bar{\zeta})} = \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln \left(\frac{\zeta(z) - \zeta(z_j)}{\zeta(z) - \bar{\zeta}(z_j)} \right). \quad (11.18)$$

Для того чтобы получить скорость i -го вихря в физической плоскости в точке $z_i = x_i + iy_i$, мы (следуя Кирхгофу и Раусу) вычтем из (11.18) расходящийся при $z \rightarrow z_i$ член $\frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - z_i)$, который представляет собственный комплексный потенциал i -го вихря. После этого вычитания вычислим сопряженную комплексную скорость i -го вихря

$$\frac{d\bar{z}_i}{dt} = \frac{\Gamma_i}{4\pi i} \frac{\zeta_i''}{\zeta_i'} - \frac{\Gamma_i}{2\pi i} \frac{\zeta_i'}{\zeta_i - \bar{\zeta}_i} + \zeta_i' \sum_{n \neq i}^N \frac{\Gamma_n}{2\pi i} \left[\frac{1}{\zeta_i - \zeta_n} - \frac{1}{\zeta_i - \bar{\zeta}_n} \right], \quad (11.19)$$

где $\zeta_i = \zeta(z_i)$; $\zeta_i' = d\zeta(z_i)/dz_i$; $\zeta_i'' = d^2\zeta(z_i)/dz_i^2$. При выводе формулы (11.19) мы использовали разложение в окрестности точки z_i

$$\frac{\zeta - \zeta_i}{z - z_i} = \zeta_i' + \frac{\zeta_i''}{2}(z - z_i) + \dots$$

Построим следующий пример, показанный на рис. 11.2, *a*: обтекание потоком со скоростью U_∞ уступа высотой h , за которым в точке z_0 для устранения расходимости на кромке уступа помещен вихрь определенной циркуляции. В этом случае функция, конформно отображающая физическую z -область на вспомогательную верхнюю ζ -полуплоскость, имеет вид

$$z = \frac{h}{\pi} \left[\sqrt{\zeta^2 - 1} + \ln(\sqrt{\zeta^2 - 1} + \zeta) \right]. \quad (11.20)$$

Точки излома контура $z = ih$ и $z = 0$ переходят в точки вспомогательной ζ -области $\zeta = -1$ и $\zeta = +1$ соответственно (рис. 11.2, *б*).

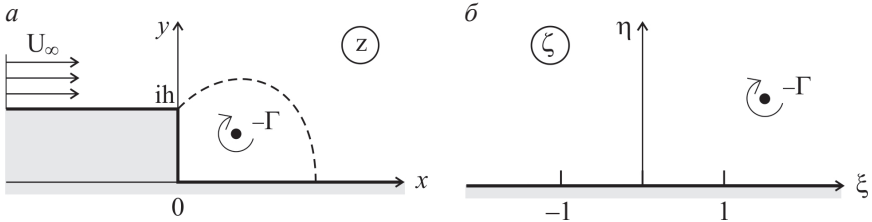


Рис. 11.2

Дифференцируя по z , получаем

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{\pi}{h} \sqrt{\frac{\zeta-1}{\zeta+1}}, \quad \frac{d^2\zeta}{dz^2} = \frac{\pi^2}{h^2(\zeta+1)^2}.$$

Вихревая часть потенциала имеет вид $f_1 = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left(\frac{\zeta(z) - \zeta(z_0)}{\zeta(z) - \zeta(\bar{z}_0)} \right)$,

где z_0 — комплексная координата вихря, получаемая как $z_0 = z(\zeta_0)$ через координаты вихря $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$ в ζ -пространстве.

На бесконечности комплексные координаты связаны соотношением $z = h\zeta/\pi$, получаемым из (11.20). Равномерный поток имеет в плоскости ζ потенциал $f_0 = U_\infty h\zeta/\pi$, где U_∞ — заданная физическая скорость потока в z -пространстве. Складывая потенциалы f_0 и f_1 , получаем полный комплексный потенциал

$$f(z) = \frac{hU_\infty\zeta(z)}{\pi} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left(\frac{\zeta(z) - \zeta(z_0)}{\zeta(z) - \zeta(\bar{z}_0)} \right).$$

Дополнительное условие на циркуляцию вихря возникает при выполнении условия Кутта — Жуковского на острой кромке. Устранение расходимости в точке излома $z = ih$ (или в точке $\zeta = -1$) приводит к уравнению на интенсивность вихря

$$\begin{aligned}\bar{q} &= \frac{df}{dz} = \zeta'_z \left[\frac{hU_\infty}{\pi} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \left(\frac{1}{\zeta - \zeta_0} - \frac{1}{\zeta - \bar{\zeta}_0} \right) \right] = \\ &= \zeta'_z \left[\frac{hU_\infty}{\pi} - \frac{\Gamma}{2\pi i} \left(\frac{1}{1 + \zeta_0} - \frac{1}{1 + \bar{\zeta}_0} \right) \right] = 0\end{aligned}$$

или окончательно

$$\Gamma = -hU_\infty \frac{|1 + \zeta_0|^2}{\eta_0} = -hU_\infty \frac{(1 + \xi_0)^2 + \eta_0^2}{\eta_0}. \quad (11.21)$$

Согласно формуле (11.19), комплексная скорость вихря, вычисленная в точке ζ_0 , имеет вид

$$\begin{aligned}\bar{q}(\zeta_0) &= \frac{hU_\infty}{\pi} \zeta'_0 + \frac{\Gamma}{4\pi i} \frac{\zeta_0''}{\zeta_0'} - \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{\zeta_0'}{\zeta_0 - \bar{\zeta}_0} = \\ &= \left[\frac{hU_\infty}{\pi} + \frac{\Gamma}{4\pi i (\zeta_0^2 - 1)} - \frac{\Gamma}{2\pi i (\zeta_0 - \bar{\zeta}_0)} \right] \cdot \frac{\pi}{h} \sqrt{\frac{\zeta_0 - 1}{\zeta_0 + 1}}.\end{aligned} \quad (11.22)$$

В стационарном случае скорость вихря должна равняться нулю. Это дает два уравнения для комплексных координат стационарного положения вихря:

$$\xi_0^2 - 1 - \eta_0^2 = 0, \quad (11.23)$$

$$3 - \frac{(1 + \xi_0)^2}{\eta_0^2} + \frac{2\xi_0}{(\xi_0 - 1)^2 + \eta_0^2} = 0, \quad (11.24)$$

решения которых есть $\xi_0 = 3/2$, $\eta_0 = \sqrt{5}/2$. В физическом пространстве вычисляем координаты неподвижного вихря по формуле (11.20): $x_0 = 0,828$, $y_0 = 0,639$. Из формулы (11.21) получаем для циркуляции вихря $\Gamma = -3\sqrt{5} h U_\infty$.

б) Рассмотрим теперь движение вихрей вне и внутри окружности. Схема Фёппля (1913)²: цилиндр радиуса R обтекается потоком со скоростью U_∞ и за цилиндром неподвижно стоит вихревая пара (рис. 11.3).

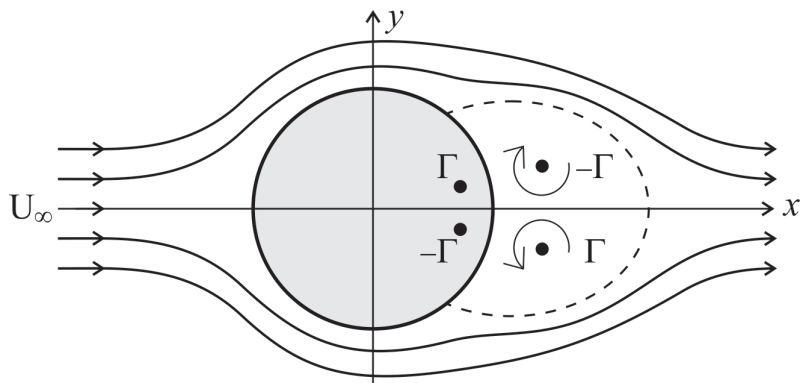


Рис. 11.3

Можно показать (Мили Томсон), что стационарными положениями вихрей будут такие точки, когда расстояние между реальными вихрями равно расстоянию между вихрем и его изображением в цилиндре $|z_1 - z_2| = |z_1 - R^2 / \bar{z}_1|$. В этой задаче нет острой кромки и условия типа Кутта — Жуковского. В связи с этим циркуляция вихрей Γ остается свободным параметром задачи.

Фёппл показал, что описанные стационарные положения вихрей неустойчивы для асимметричных относительно горизонтальной оси малых смещений вихрей. В этом случае из-за наложенного внешнего потока жидкости дополнительный интеграл — момент импульса — перестает сохраняться. По-прежнему сохраняется только энергия системы вихрей (гамильтониан). Этого одного интеграла недостаточно для полной интегрируемости движения в четырехмерном фазовом

² Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидромеханика. М.: Мир, 1964.

пространстве системы, и в результате вихревая система распадается (с уходом вихрей на бесконечность).

Построим комплексный потенциал системы вихрей в случае односвязной замкнутой области, используя конформное отображение области z на единичный круг $\zeta \leq 1$:

$$f(z) = f_0(\zeta) + \overline{f_0(1/\bar{\zeta})} = \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln \left(\frac{\zeta(z) - \zeta(z_j)}{\zeta(z) - \zeta(1/\bar{z}_j)} \right). \quad (11.25)$$

После этого, следуя Кирхгофу и Раусу, вычислим сопряженную комплексную скорость i -го вихря:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{z}_i}{dt} = & \frac{\Gamma_i}{4\pi i} \frac{\zeta_i''}{\zeta_i'} - \frac{\Gamma_i}{2\pi i} \frac{\zeta_i'}{\zeta_i - 1/\bar{\zeta}_i} + \\ & + \zeta_i' \sum_{n \neq i}^N \frac{\Gamma_n}{2\pi i} \left[\frac{1}{\zeta_i - \zeta_n} - \frac{1}{\zeta_i - 1/\bar{\zeta}_n} \right]. \end{aligned} \quad (11.26)$$

Наш анализ показал, что движение двух вихрей, согласно системе (11.26) в круге (при $\zeta = z$), интегрируется точно. В этом случае сохраняются момент импульса M (11.17) и энергия системы вихрей W , вычисляемые по формулам (11.17) и (11.14) соответственно. Два вихря в круге имеют два характерных периода движения: период T_1 вращающейся системы координат, в которой они совершают относительное периодическое движение с периодом T_2 . При деформировании границы от окружности до лемнискаты (при $\zeta = 1 - z^2$) точная интегрируемость исчезает, так как перестает сохраняться момент импульса системы вихрей. Сохраняется только энергия системы (гамильтониан). Пара вихрей в этом случае движется неинтегрируемым образом и демонстрирует стохастические траектории.

ДОПОЛНЕНИЕ. ДВИЖЕНИЕ ДВУХ ВИХРЕЙ В НЕКРУГОВОЙ ОБЛАСТИ

Момент системы вихрей M , вычисляемый по формуле (11.13), при движении в некруговой области не сохраняется. В четырехмерном фазовом пространстве системы изображающая точка движется по трехмерному многообразию энергии. В общем случае этой трехмерности достаточно для появления чрезвычайно сложных, стохастических траекторий.

Удобным аппаратом для исследования характера траекторий динамических систем является предложенный Пуанкаре метод секущих поверхностей в фазовом пространстве: траектория системы в фазовом пространстве многократно «прокалывает» некоторую заданную гиперповерхность (на единицу меньшей размерности, чем размерность фазового пространства). Затем координаты последовательных «проколов» проектируются на определенные двумерные плоскости. По распределению точек на двумерных плоскостях можно судить о типе движения. В случае полной интегрируемости точки должны укладываться на некоторые так называемые инвариантные кривые. Для стохастических же траекторий характерно случайное распределение точек на плоскости.

Область движения вихрей D показана на рис. 11.4. Эта каплевидная область отображается на единичный круг функцией

$$\zeta = 1 - z^2. \quad (11.27)$$

Кривая, ограничивающая область D , называется лемнискатой Бернулли и описывается формулой $y = \pm \left[(1 + 4x^2)^{1/2} - 1 - x^2 \right]^{1/2}$, получающейся из (11.27) при $|\zeta|^2 = 1$. Наш выбор обусловлен относительной простотой отображающей функции (11.27) и желанием исследовать движение в области, не слишком отличающейся от круга.

На рис. 11.4 пунктирными линиями изображены траектории одного вихря, определенные по методу Рауса из уравнения $W(x, y) = E$.

Для двух вихрей естественно исследовать сразу некоторое семейство траекторий с заданным значением энергии и сравнить картины инвариантных кривых, возникающие при движении в различных областях. Были построены сечения для вихрей единичной интенсивности $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$ при значениях энергии для круга 0,05; 0; -0,05 и для D -области — -0,05; -0,1; -0,15. Сечением Пуанкаре во всех случаях была гиперплоскость $y_2 = 0$. Начальные координаты в фазовом пространстве выбирались следующим образом: x_1 и y_1 задавались произвольно (в пределах некоторой области); $y_2 = 0$; x_2 определяли методом Ньютона из уравнения энергии при заданном значении E . В результате получали начальную точку траектории, лежащую на секущей гиперплоскости $y_2 = 0$ и одновременно на поверхности заданной энергии. Далее методом Рунге — Кутты решались динамические уравнения (11.26) и на каждом шаге контролировалось условие смены знака величины y_2 . Погрешность вычислений контролировалась сохранением интеграла энергии. Относительное отклонение $\Delta E / E$ для всех рассчитанных траекторий не превышало 10^{-5} .

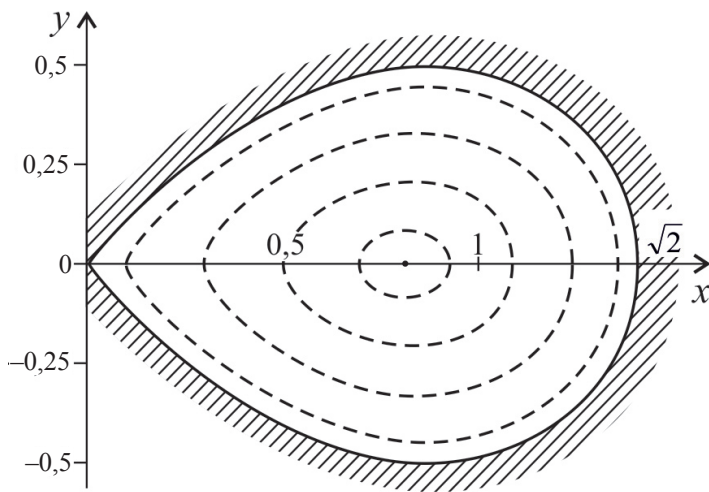


Рис. 11.4. Деформированная область D — лемниската

Приведены три сечения $y_2 = 0$ с различными энергиями для круга (рис. 11.5, а) и D -области (рис. 11.5, б). Обнаружено два типа инвариантных кривых: замкнутые и состоящие из отрезков. На рис. 11.5, а при $E = 0,05$ цифрой 1 отмечены эти два отрезка, построенные по точкам «проколов» на сечении и принадлежащие одной траектории. При этом точки появлялись значительно чаще на левом отрезке

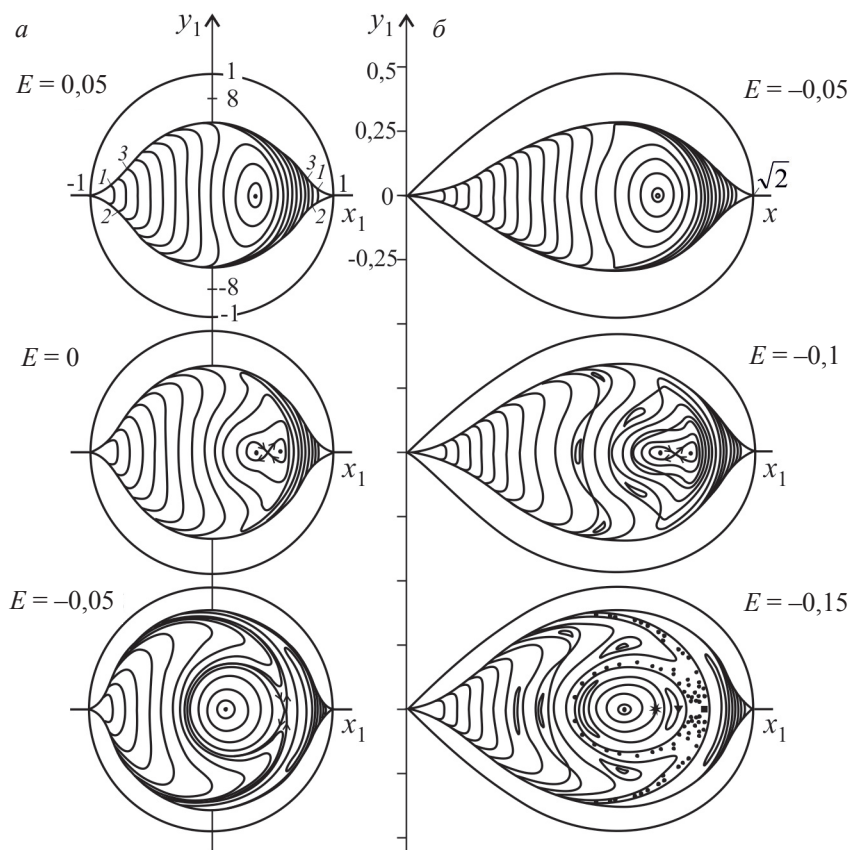


Рис. 11.5. Сечения Пуанкаре для круга (а) и лемнискаты (б)

инвариантной кривой, чем на правом. Это же характерно и для кривых, построенных по другим траекториям (цифры 2, 3 и т. д.). Почти все инвариантные кривые получились гладкими, поэтому точки на них не нанесены. Исключение составляют точки стохастической траектории в сечении с энергией $E = -0,15$ (см. рис. 11.5, б), не укладывающейся на кривую. Ограничивающая стохастическую область инвариантная кривая получилась негладкой. Эта траектория, по-видимому, является сложным длиннопериодическим циклом.

Увеличение энергии соответствует уменьшению расстояния между вихрями. При больших значениях энергии инвариантные кривые сосредотачиваются в узкой веретенообразной области вблизи оси x . Это объясняется тем, что при больших E вихри, расположенные на малом расстоянии друг от друга, быстро вращаются вокруг общего центра тяжести и движутся вместе, никогда не распадаясь. Фактически такое движение эквивалентно движению одного вихря суммарной интенсивности. В пределе $E \rightarrow \infty$ область инвариантных кривых вырождается в отрезок оси x .

В другом пределе $E \rightarrow -\infty$ область, содержащая инвариантные кривые, расширяется и занимает все доступное пространство. Большие отрицательные энергии получаются в результате очень близкого размещения у стенки одного из вихрей. При этом вихри движутся почти независимо друг от друга. Один перемещается вдоль границы на малом расстоянии от нее, а другой — внутри области по траекториям одиночного вихря (см. рис. 11.5). Влияние пристенного вихря на второй вихрь мало, так как он экранируется своим изображением в стенке. Серия сечений (см. рис. 11.4) позволяет увидеть, как меняется картина кривых в фазовом пространстве, и понять причину возникающей стохастичности.

Периодическое движение на сечениях изображается точкой. Для случая круга это движение интерпретируется особенно просто: два одинаковых вихря, помещенные симметрично относительно центра, движутся с постоянной скоростью по окружности с постоянным радиусом. Если расстояние между ними мало, то энергия

положительна и велика, а движение устойчиво. При малых возмущениях этого движения на сечениях возникают эллиптические инвариантные кривые, охватывающие периодическую точку. Однако с увеличением расстояния между вихрями возрастает влияние стенок. При достижении некоторого критического расстояния симметричное движение теряет устойчивость и происходит бифуркация. Из эллиптической периодической точки рождаются три новые: одна гиперболическая и две эллиптические по бокам (см. рис. 11.5, средние значения энергии E). Гиперболическая точка соответствует уже описанному прежде симметричному движению вихрей (теперь, однако, неустойчивому) и изображается точкой самопересечения инвариантной кривой. Стрелки на рис. 11.5 показывают направление «движения» точек на сечении Пуанкаре в окрестности гиперболической периодической точки. Характерно, что энергия, при которой происходит бифуркация, близка к нулю. Это означает, что положительная часть энергии взаимодействия между вихрями почти полностью компенсируется отрицательной энергией взаимодействия вихрей со стенками.

Подобие картин сечений (см. рис. 11.5, *a* и *б*) позволяет заключить, что с уменьшением энергии эволюция системы из двух вихрей в некруговой области качественно происходит сначала так же, как и для круговой. Естественно, что для D -области указанная выше бифуркация возникает при других значениях энергии ($E \approx -0,097$) и картины сечений сложнее в деталях. На рис. 11.5, *б* при $E = -0,1$ можно видеть распавшиеся «резонансные торы» — пятикратный и трехкратный «резонансы». Их появление характерно для возмущенных гамильтоновых систем и объясняется в теории Колмогорова — Арнольда — Мозера.

Существенное отличие между интегрируемым и неинтегрируемым случаями демонстрируют сечения на рис. 11.5 для наименьших энергий. Для некоторого множества начальных условий получаются стохастические траектории при движении двух вихрей в D -области.

Лекция 11

Как показывает серия сечений рис. 11.5, б, стохастическая область точек образуется в результате расщепления самопересекающейся сепаратрисной поверхности («восьмерки» в сечении с $E = -0,1$ на рис. 11.5). Явление расщепления сепаратрисных поверхностей

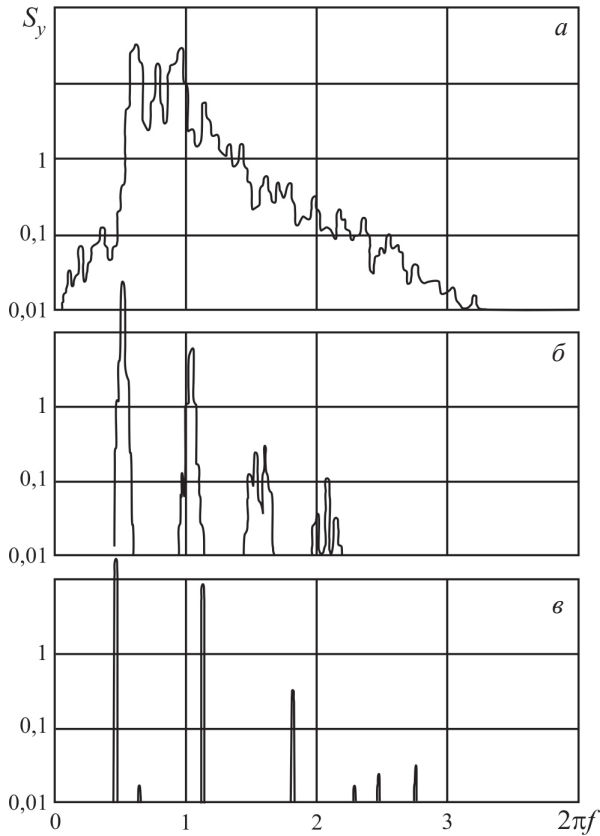


Рис. 11.6. Спектры мощности координаты y для трех начальных положений вихрей, заданных на рис. 11.5, б разными символами: а) *; б) ▼; в) ■

изучал Пуанкаре, и структура, образующаяся при этом, была названа им гомоклинической.

Чтобы убедиться, что фазовая точка действительно случайным образом блуждает по гомоклинической структуре, был проведен спектральный анализ некоторых траекторий. Удобно определять спектр мощности для y -координаты одного из вихрей, так как в силу симметрии ее среднее значение равно нулю.

На рис. 11.6 показаны спектры мощности S_y трех траекторий с энергией $E = -0,15$ как функции безразмерной частоты f . Соответствующие спектрам a , b , c инвариантные кривые отмечены на сечении с $E = -0,15$ рис. 11.5 символами \ast , \blacktriangledown , \blacksquare (справа налево). Чем ближе к стохастической области располагается траектория, тем шире пики в ее спектре. Спектр стохастической траектории сплошной (рис. 11.6, a), а соответствующие ей точки на сечении Пуанкаре не укладываются на какие-либо гладкие кривые.

Полученные сплошные спектры и случайное поведение точек на сечении Пуанкаре позволяют заключить, что даже два вихря могут двигаться случайным образом в замкнутой некруговой области и их движение не может быть проинтегрировано точно.

ЛЕКЦИЯ 12

ДИССИПАЦИЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ. ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ И КАНАЛАХ. КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ

Для сжимаемой жидкости система уравнений, описывающая движение вязкой среды, имеет вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + (u_j \nabla_j) u_i + \frac{\nabla_i P}{\rho} = g_i + \left(\frac{4}{3} \nu + \frac{\kappa}{\rho} \right) \nabla_i \nabla_j u_j + \nu \Delta u_i$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_j (\rho u_j) = 0,$$

где $\nu = \eta / \rho$ — кинематическая вязкость; η — динамическая вязкость среды.

Для несжимаемой жидкости получаем упрощенную систему уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + (u_j \nabla_j) u_i + \nabla_i \frac{p}{\rho} = g_i + \nu \Delta u_i \quad (12.1)$$

$$\nabla_j u_j = 0. \quad (12.2)$$

Приведем компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат:

$$\tau_{rr} = -p + 2\eta \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \tau_{r\phi} = \eta \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right), \quad (12.3)$$
$$\tau_{\phi\phi} = -p + 2\eta \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} \right), \quad \tau_{\phi z} = \eta \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} \right),$$

$$\tau_{zz} = -p + 2\eta \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \tau_{zr} = \eta \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right).$$

Уравнения Навье — Стокса и неразрывности имеют вид в цилиндрических координатах

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + (\bar{u}\nabla)u_r - \frac{u_\varphi^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + (\bar{u}\nabla)u_\varphi + \frac{u_r u_\varphi}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left(\Delta u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + (\bar{u}\nabla)u_z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta u_z, \end{aligned} \quad (12.4)$$

где

$$\begin{aligned} (\bar{u} \cdot \nabla) f &= u_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial f}{\partial z}, \\ \nabla \cdot \bar{u} &= \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Подобные уравнения в сферических координатах можно найти в книге Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшица (1986)³.

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА ПОВЕРХНОСТЯХ РАЗДЕЛА ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ

На движущейся твердой поверхности для вязкой жидкости должно быть выполнено равенство скоростей (условие прилипания)

$$\bar{u}|_\Gamma = \vec{U}, \quad (12.6)$$

³ Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.

где \vec{U} — скорость поверхности. На границе раздела двух жидкостей должны быть равны скорости сред

$$\vec{u}^{(1)}\Big|_{\Gamma} = \vec{u}^{(2)}\Big|_{\Gamma}. \quad (12.7)$$

Также должны быть равны нормальные и касательные напряжения. Если учесть скачок давления под искривленной поверхностью, определяемый формулой Лапласа (капиллярное давление), и ввести действующую вдоль свободной поверхности плотность термокапиллярной силы, то второе граничное условие принимает вид

$$n_i \left[P^{(1)} - P^{(2)} - \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] = (\tau_{ik}^{(1)} - \tau_{ik}^{(2)}) n_k + \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}. \quad (12.8)$$

Поверхностное натяжение σ может изменяться вдоль поверхности не только за счет изменений температуры, но и, например, из-за меняющейся концентрации растворенных в жидкости поверхностно-активных веществ (ПАВ). Известные ПАВ — это мыло или зубная паста, существенно снижающие σ . При попадании капли такого вещества на поверхность воды можно видеть быстрое расширение области, содержащей ПАВ. Это проявляется действие члена $\frac{\partial \sigma}{\partial x_i}$: градиент концентрации ПАВ максимален на границе области с ПАВ и сила направлена от участков с малыми σ к участкам чистой воды с большими коэффициентами σ .

ДИССИПАЦИЯ ЭНЕРГИИ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим величину диссипации механической энергии за счет вязкости для случая, когда скорость жидкости описывается потенциалом ϕ . Тогда для удельной плотности диссипации энергии имеем формулу

$$2\eta D_{ij}^2 = \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 = \frac{\eta}{2} (2\nabla_i \nabla_j \phi)^2 = 2\eta (\nabla_i u_j)^2. \quad (12.9)$$

Мы воспользовались тем, что $u_i = \nabla_i \phi$, где ϕ — гармоническая функция. Действительно, в силу уравнения неразрывности справедливо уравнение Лапласа $\Delta \phi = 0$. Получим выражение для полной диссипации энергии в жидкости при движении тела. Проинтегрируем формулу (12.9) по объему вне тела и получим диссипацию энергии в полном объеме жидкости:

$$\begin{aligned} \int_V 2\eta (\nabla_i u_j)^2 d^3 \vec{x} &= 2\eta \int_V \nabla_i (u_j \nabla_i u_j) d^3 \vec{x} = \\ &= 2\eta \oint_S u_j (\nabla_i u_j) dS_i = \eta \oint_S \frac{\partial u^2}{\partial n} ds. \end{aligned} \quad (12.10)$$

Рассмотрим два примера применения формулы (12.10): а) вычисление декремента затухания пульсирующего пузырька; б) вычисление скорости всплытия пузырька.

а) Скорость затухания амплитуды колебаний пульсирующего пузырька.

Используя формулу (12.10), можно вычислить диссипацию энергии в каком-либо известном потенциальном движении, например для газового пузырька, совершающего радиальные колебания с круговой частотой ω . Если радиус пузырька меняется по закону $R = R_0 + a \cos(\omega t)$, то его скорость объемного расширения $\dot{V} = 4\pi R^2 \dot{R}$ определяет потенциальное течение в виде $u = \dot{R} \frac{R^2}{r^2}$. Подставляя это выражение в формулу (12.10), получаем

$$\dot{E}_{\text{кин}} = \eta \oint_S \frac{du^2}{dr} ds = -4\eta \frac{\dot{R}^2 R^4}{R^5} 4\pi R^2 = -16\pi \eta R \dot{R}^2. \quad (12.11)$$

Лекция 12

Осредняя выражение (12.11) по периоду колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$, получаем

$$\bar{\dot{E}}_{\text{кин}} = -16\pi\eta a^2 \omega^2 \overline{(\sin \omega t)^2} = -8\pi\eta R a^2 \omega^2. \quad (12.12)$$

Средняя по периоду колебаний T кинетическая энергия жидкости, окружающей пульсирующий пузырек, определяется выражением

$$\bar{E}_{\text{кин}} = \frac{\rho}{2} \int_R^\infty \left(\dot{R} \frac{R^2}{r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = 2\pi R^3 \rho \bar{\dot{R}}^2 = \pi R^3 (a\omega)^2. \quad (12.13)$$

Разделив величины (12.12) на (12.13), получаем логарифмический декремент затухания кинетической энергии колебаний жидкости вокруг пузырька:

$$\gamma = -\frac{\bar{\dot{E}}_{\text{кин}}}{\bar{E}_{\text{кин}}} = \frac{8\pi\eta R (a\omega)^2}{\pi R^3 \rho (a\omega)^2} = \frac{8\eta}{\rho R^2}. \quad (12.14)$$

Так как для воды кинематическая вязкость есть $\nu = \eta / \rho = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ (при $t = 20^\circ\text{C}$), то для пузырька диаметром 1 мм получаем

$$\gamma = -\frac{8 \cdot 10^{-6}}{(5 \cdot 10^{-4})^2} = \frac{8}{25} 100 = 32 \text{ с}^{-1}. \quad (12.15)$$

Учитывая, что период резонансных изотермических колебаний есть

$$T = 3,6 \cdot R \sqrt{\rho / P_\infty} = 3,6 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \sqrt{10^3 / 10^5} = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ с}, \quad (12.16)$$

получаем безразмерный логарифмический декремент затухания:

$$\frac{(\Delta E)_T}{E} = \gamma T = 32 \cdot 1,8 \cdot 10^{-4} = 6,4 \cdot 10^{-3}.$$

Это доля энергии, теряемой пузырьком за одно колебание. Следовательно, данный осциллятор имеет довольно высокую добротность.

Среда, насыщенная малыми пузырьками, имеет сжимаемость газа и плотность жидкости. В такой среде могут распространяться возмущения с заметной дисперсией, т. е. с существенной зависимостью скорости звука от частоты. Иногда, выливая воду из водопроводного крана в сосуд, мы получаем газожидкостную смесь молочного цвета. Если стукнуть по сосуду с такой смесью, то будет слышен характерный очень низкий по частоте звук. Наличие даже небольшого количества газовых микропузырьков в среде приводит к сильному падению скорости звука, а резонансные частоты, на которых откликается сосуд с жидкостью, определяются по порядку величины соотношением $\omega = c / L$, где c — скорость звука, L — размеры сосуда. Следовательно, в воде с пузырьками частота отклика должна быть значительно ниже, чем в среде с жидкостью без пузырьков.

б) Модель Левича для скорости всплывающего пузырька.

Приравняем полную диссипацию энергии (12.10) к мощности архимедовой силы F_A , тянущей пузырек вверх со скоростью U :

$$\eta \oint_S \frac{\partial u^2}{\partial n} dS = F_A \cdot U. \quad (12.17)$$

Будем считать, что обтекание пузырька происходит при больших числах Рейнольдса. Тогда можно использовать потенциальное поле скорости, возникающее при обтекании сферы идеальной жидкостью. Скорость потенциального движения жидкости, возникающая в среде из-за движения пузыря со скоростью \vec{U} , определяется формулой

$$u_i = \frac{3n_i n_j - \delta_{ij}}{2(r/R)^3} U_j,$$

Лекция 12

где n_i — нормаль к поверхности пузыря; R — радиус пузыря. Вычислим $\frac{\partial u^2}{\partial n}$ на поверхности пузыря: $\frac{\partial u^2}{\partial n} = \frac{3}{2R} [3(\vec{n} \cdot \vec{U})^2 + \vec{U}^2]$. Проинтегрируем эту величину по поверхности пузыря и получим скорость диссипации кинетической энергии:

$$\dot{E}_{\text{кин}} = 12\pi R\eta U^2. \quad (12.18)$$

Приравняем эту величину к мощности силы Архимеда ($F_A U = \frac{3}{4}\pi R^3 \rho g U$). В результате получаем силу сопротивления Левича, равную силе Архимеда при стационарном всплытии пузырька,

$$F_\Lambda = 12\pi\eta R U = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g \quad (12.19)$$

и формулу Левича для скорости всплывающего пузырька

$$U = \frac{R^2 g}{9\nu}. \quad (12.20)$$

Оценка скорости всплытия воздушного пузырька диаметром $d = 1$ мм ($R = 5 \cdot 10^{-4}$ м) дает $U = 0,26$ м/с. Это значение хорошо согласуется с имеющимися экспериментальными данными, отмеченными на рис. 12.1 затемненной областью. Если построить число Рейнольдса, то оно оказывается равно

$$\text{Re} = \frac{Ud}{\nu} = 260.$$

Это значение достаточно велико, чтобы применить потенциальную модель, но все еще достаточно мало, чтобы не рассматривать формирование вихревой зоны в кормовой части пузыря и возникающую нестационарность (отрыв пограничного слоя и турбулентность). Сравнение с экспериментами по скорости всплытия пузыря дает хо-

рошее согласие с моделью Левича, хотя она имеет довольно узкий диапазон применимости. По числу Рейнольдса это приблизительно диапазон $Re = 100 \dots 300$.

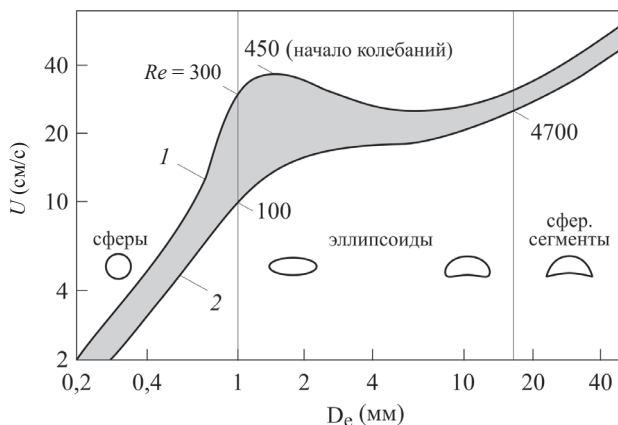


Рис. 12.1. Данные различных экспериментов по скорости всплытия воздушного пузыря в воде (затемненная область). Верхняя граница затемненной области 1 для чистой воды и нижняя граница 2 для воды с ПАВ. Данные собраны по 14 экспериментам в статье *Properties and characteristics of drops and bubbles*⁴

КРИТЕРИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОДОБИЯ. ЧИСЛА РЕЙНОЛЬДСА, СТРУХАЛЯ

Рассмотренное выше число Рейнольдса является относительной мерой сил инерции и сил вязкости. Составим отношение этих сил:

⁴ Grace J. R., Wairegi T. Encyclopedia of fluid mechanics, 1986.

Лекция 12

$$Re = \frac{\|u_j \nabla_j u_i\|}{\nu \|\Delta u_i\|} \approx \frac{U^2 / l}{\nu U / l^2} = \frac{Ul}{\nu}, \quad (12.21)$$

где l — это некий характерный масштаб задачи.

Для нестационарных задач вводится критерий Струхаля или безразмерная частота: $Str = fl/U$, где f , l , U — частота, масштаб и скорость соответственно. Например, для автоколебаний, возникающих самопроизвольно при обтекании цилиндра, было получено в экспериментах $Str = 0,18$ (рис. 12.2) в широкой области чисел Рейнольдса ($5 \cdot 10^2 < Re < 5 \cdot 10^5$). Эта зона охватывает широкий диапазон размеров от тонких проводов до самых толстых тросов.

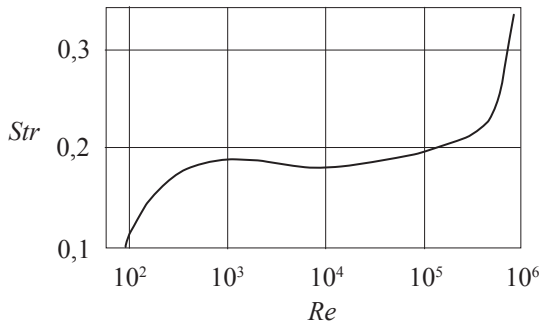


Рис. 12.2. Безразмерная частота колебаний потока за цилиндром

Древние греки устанавливали так называемые эоловы арфы на склонах гор. Конвективные потоки, спускающиеся со склонов гор по утрам и поднимающиеся по вечерам, приводили струны арф в режим автоколебаний. Срывающиеся со струн вихри колебали струны на резонансных частотах, и арфы издавали мелодичные звуки.

ДРУГИЕ КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ В ГИДРОДИНАМИКЕ И ТЕПЛОФИЗИКЕ: Fr , Eu , We , Mg , Gr , Ra , Pr , Nu , Ku

Существуют и другие безразмерные критерии, составленные из определяющих или определяемых параметров.

Критерий Фруда возникает в теории волнового сопротивления корабля: $Fr = U^2 / gL$.

Коэффициент гидравлического сопротивления для тела:

$$C_d = \frac{F_{\text{сопр}}}{(\rho u^2 / 2) \cdot S_{\perp}}, \text{ где } F_{\text{сопр}} \text{ — сила, действующая на обтекаемое тело}$$

со стороны потока; S_{\perp} — поперечное сечение тела. Например, для рассмотренного ранее в модели Левича всплывающего пузыря имеем закон гидравлического сопротивления

$$C_d = F_{\text{сопр}} \left(\frac{\rho U^2}{2} S \right)^{-1} = 2 \frac{12\pi R \eta U}{\rho U^2 \pi R^2} = \frac{48}{Re_D}, \quad (12.22)$$

где $Re_D = \frac{U 2R}{\nu}$ — число Рейнольдса, построенное по диаметру пузырька. Следует отметить, что коэффициент гидравлического сопротивления для движущегося корабля есть функция двух задаваемых критериев: чисел Рейнольдса и Фруда.

Критерий Вебера описывает устойчивость капель жидкости в газовом потоке. Капля распадается при значениях относительной скорости газа U , больших критической, когда $We = \frac{\rho U^2 L}{\sigma} > 12$, где σ — коэффициент поверхностного натяжения.

Критерий Эйлера используют для расчета потерь давления при течениях в трубах, каналах или за решетками тел с сильным отрывом потока: $Eu = \Delta p / (\rho U^2 / 2)$.

Критерий Грасгофа $Gr = \frac{gL^3\beta(t_1 - t_0)}{\nu^2}$ определяет режимы свободной конвекции (ламинарный или турбулентный), когда имеется нагретая до температуры t_1 поверхность размером L и среда с температурой t_0 ; $\beta = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT}$ — коэффициент объемного расширения среды.

Критерий Рэлея для свободно-конвективного теплообмена $Ra = Gr Pr$, где $Pr = \frac{\nu}{a}$ — число Прандтля (a — теплопроводность, ν — кинематическая вязкость среды).

Критерий Марангони $Mg = -\frac{\Delta T L d\sigma}{\rho \nu a dT}$ для термокапиллярной конвекции, когда движение жидкости вызвано температурной неоднородностью вдоль свободной поверхности.

При теплообмене нагретого до температуры ΔT тела с потоком жидкости можно рассмотреть безразмерную среднюю плотность теплового потока на теле и ввести *критерий Нуссельта* $Nu = \frac{qd}{\Delta T \kappa}$, где q — средняя по поверхности тела размерная плотность теплового потока; κ — теплопроводность среды.

Число Капицы $Ka = \frac{\sigma^3}{\rho^3 \nu^4 g}$ возникает при расчете движения тонких слоев, например, для стекающих по вертикальной поверхности пленок вязкой жидкости. Этот критерий полностью определяется физическими свойствами среды.

Критерий Кутателадзе $Ku = \frac{\Delta T C_p}{\lambda}$ (C_p — теплоемкость среды, λ — тепло испарения жидкости) играет существенную роль при интенсивном теплообмене с фазовым переходом (испарение, конденсация). Например, теплообмен для стекающих по нагретой трубе испаряющихся пленок жидкости описывается критерием Нуссельта

$$Nu = \frac{q}{\kappa} \left(\frac{\nu^2}{g} \right)^{1/3} = f(Re, Pr, Ka, Ku, Mg),$$

где $\left(\frac{v^2}{g}\right)^{1/3}$ — это характерный масштаб для толщины пленки жидкости; функция $f(\cdot)$ — это рассчитываемая или полученная в экспериментах зависимость от определяющих критериев.

На рис. 12.3 в полулогарифмических координатах показан экспериментально определенный коэффициент гидравлического сопротивления: 1) для круглого цилиндра; 2) диска; 3) сферы:

$$C_d = F_{\text{сопр}} \left(A \frac{\rho U^2}{2} \right)^{-1},$$

где A — площадь поперечного сечения тела. Видно, что в интервале $Re = 10^3 \div 10^5$ коэффициент C_d изменяется слабо, а затем происходит

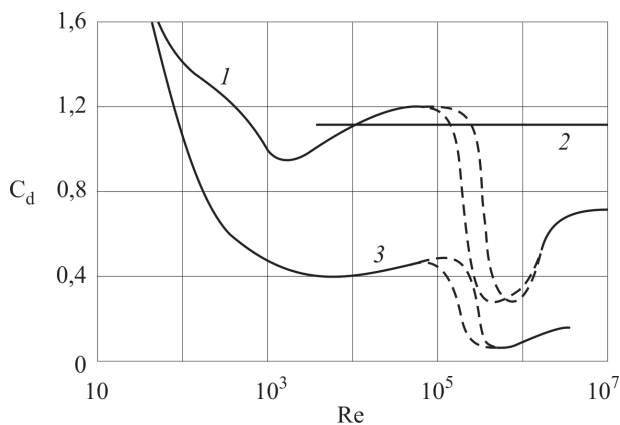


Рис. 12.3. Измеренное сопротивление кругового цилиндра на единицу длины ($A = 2R$), сферы ($A = \pi R^2$) и кругового диска, нормального к потоку ($A = \pi R^2$); все тела имеют одинаковый радиус R . Штриховыми линиями показаны результаты, полученные в различных аэродинамических трубах: 1 — цилиндр; 2 — диск; 3 — сфера

его быстрое уменьшение в три раза для цилиндра и в пять раз для сферы. Как показал Прандтль, при этих критических числах Рейнольдса пограничные слои на цилиндре и сфере становятся турбулентными, а в турбулентном слое профиль скорости более заполненный, и жидкость в пограничном слое имеет больший импульс и пробивается значительно дальше в кормовую зону плохо обтекаемого тела с отрицательным (тормозящим) градиентом давления. В результате турбулентная зона за телом сужается и сопротивление уменьшается. Для диска отрыв потока, очевидно, всегда происходит в одном месте — на краю диска, и переход к турбулентности в пограничном слое на диске не приводит к существенному изменению в коэффициенте сопротивления.

Рассмотрим устройство для измерения скорости потока — чашечный анемометр (рис. 12.4).

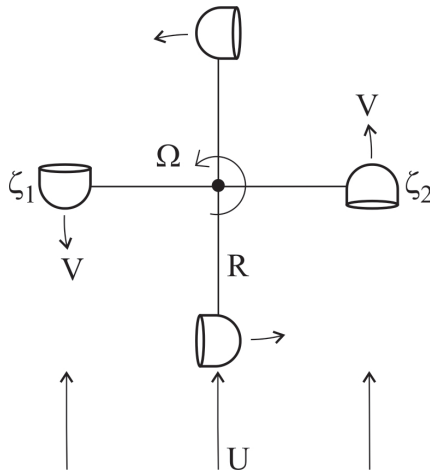


Рис. 12.4. Чашечный анемометр для измерения скорости воздушных потоков

Можно показать, что скорость набегающего потока газа определяется формулой

$$U = \Omega R \frac{\sqrt{C_{\text{н}} / C_{\text{в}} + 1}}{\sqrt{C_{\text{н}} / C_{\text{в}} - 1}},$$

где Ω — угловая скорость вращения устройства; $C_{\text{н}}$ и $C_{\text{в}}$ — два гидравлических коэффициента сопротивления при обтекании навстречу открытой полости чашки и с обратной стороны соответственно. Согласно экспериментам, при высоких скоростях получено $C_{\text{н}} / C_{\text{в}} = 3$, поэтому линейная скорость чашек $V = 0,27U$.

Получение таких *определяемых* критериев, как $Str(Re)$, $C_d(Re, Fr)$, $Eu(Re)$, $Nu(Re, Pr)$, в зависимости от *определяющих* (задаваемых) критериев (Re, Fr, Pr) — одна из главных задач гидродинамики, решаемая в полном объеме лишь экспериментальным путем. Рассмотренные критерии называются также критериями подобия. Если *определяемые* критерии подобия рассчитаны или получены в лабораторных экспериментах в виде зависимостей от *определяющих* критериев, то далее они могут использоваться для расчетов реальных крупномасштабных объектов: трубопроводов, турбин, кораблей, самолетов.

ТЕЧЕНИЯ В ТРУБАХ И КАНАЛАХ

1. *Плоское течение Куэтта* в щели между покоящейся и движущейся пластинами имеет профиль скорости $u = U \frac{y}{h}$, где y — координата, перпендикулярная стенкам канала; h — ширина канала; U — скорость движения верхней стенки канала.

2. *Течение Пуазейля* в канале (в плоской трубе) описывается уравнением

$$v \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dP}{\rho dx} = -\frac{\Delta P}{\rho L},$$

где ΔP — приложенный перепад давления; L — длина плоского канала. После интегрирования получаем профиль скорости

$$u = \frac{\Delta P}{2\eta L} y(h - y).$$

Расход жидкости на единицу длины плоского канала:

$$Q = \int_0^h u dx = \frac{\Delta P h^3}{12\eta L}.$$

3. Течение в круглой трубе (*течение Пуазейля*). Профиль скорости есть

$$u = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2).$$

Объемный расход жидкости, текущей в круглой трубе, получаем интегрированием скорости по сечению трубы:

$$Q = \int_0^R u 2\pi r dr = \pi \int_0^R u d(r^2) = \pi \frac{\Delta P}{4\eta L} \int_0^R (R^2 - r^2) dr^2.$$

После интегрирования получаем для расхода жидкости закон Гагена — Пуазейля:

$$Q = \frac{\pi \Delta P}{8\eta L} R^4.$$

Отметим сильную зависимость расхода от размера трубы — пропорциональность четвертой степени радиуса трубы. Определим также среднюю расходную скорость жидкости по формуле

$$U = \frac{Q}{S} = \frac{2\pi}{\pi R^2} \int_0^R u r dr = \frac{\Delta P R^2}{8\eta \Delta L}.$$

По этой скорости строится число Рейнольдса: $Re = \frac{UD}{\nu}$, где D — диаметр трубы.

КОЭФФИЦИЕНТ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ В ТРУБАХ

Зная число Рейнольдса Re , можно рассчитать перепад давления, необходимый для прокачки жидкости по круглой трубе диаметром D и длиной L :

$$\Delta p_L = \left(\frac{L}{D} \right) \frac{\rho U^2}{2} Eu(Re),$$

где коэффициент гидравлического сопротивления

$$Eu = \frac{64}{Re} \quad (12.23)$$

получен для круглой трубы. Аналогично можно выразить гидравлическое сопротивление для некруглых сечений труб. Коэффициенты C в зависимости

$$Eu = \frac{C}{Re_D} \quad (12.24)$$

для некруглых сечений труб приведены в табл. 1 (взято с сайта Thermopedia ⁵). В этой формуле использовано число Рейнольдса, построенное по средней скорости и гидравлическому диаметру трубы, который определяется формулой









$$D = \frac{4S}{\Pi}, \quad (12.25)$$

где S — площадь сечения трубы; Π — периметр границы сечения трубы.

⁵ <http://www.thermopedia.com/>

Таблица 1

Коэффициент С в формуле (12.24)

Форма сечения								
С	53,3	56,9	60,2	62,1	64,0	67,3	95,9	96,0

На рис. 12.5 в логарифмических координатах показан коэффициент гидравлического сопротивления для гладких и шероховатых труб: теоретическая прямая 1 $Eu = \frac{64}{Re_D}$ (для ламинарного режима) и экспериментальная прямая 2 $Eu = \frac{0,316}{Re_D^{0,25}}$ (для турбулентного режима течения — формула Блазиуса). Остальные кривые на рис. 12.5 определены экспериментально для шероховатых труб с различными значениями отношения радиуса трубы R к высоте шероховатости r_s .

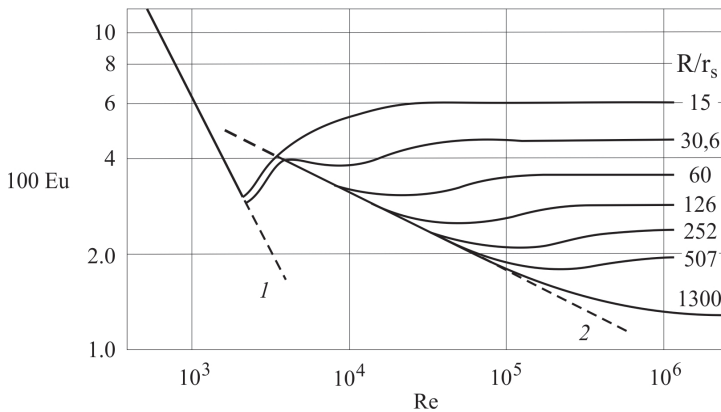


Рис. 12.5. Коэффициент гидравлического сопротивления для труб с различной относительной шероховатостью (r_s/R)

ЛЕКЦИЯ 13

ТЕЧЕНИЕ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА.
РЕШЕНИЕ СТОКСА ДЛЯ СФЕРЫ
И АДАМАРА — РЫБЧИНСКОГО ДЛЯ КАПЛИ.
ПРИБЛИЖЕНИЕ ОЗЕЕНА

Пусть при обтекании покоящейся сферы жидкостью с малой скоростью U число Рейнольдса мало: $Re = \frac{\rho U d}{\eta} \ll 1$, где d — диаметр сферы; η — динамическая вязкость жидкости. Оценим по порядку величин члены, входящие в уравнение Навье — Стокса:

$$\|\rho(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}\| \sim \frac{\rho U^2}{d}, \quad (13.1)$$

$$\|\eta \Delta \vec{u}\| \sim \eta \frac{U}{d^2}. \quad (13.2)$$

Отношение выражений (13.1) и (13.2) есть число Рейнольдса

$$Re = \frac{\|\rho(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}\|}{\|\eta \Delta \vec{u}\|} \sim \frac{\rho U d}{\eta}. \quad (13.3)$$

При очень малых числах Re Стокс предложил пренебречь конвективными членами. В результате этого приближения получаем уравнение Стокса

$$\eta \Delta \vec{u} - \nabla p = 0 \quad (13.4)$$

с двумя граничными условиями непротекания и прилипания на сфере при $r = R$:

Лекция 13

$$u_r = u_\theta = 0 \quad (13.5)$$

и условием на бесконечности

$$\vec{u} = \vec{U}. \quad (13.6)$$

Отметим, что в силу линейности уравнения Стокса наше решение, т. е. поле скорости \vec{u} , должно линейно зависеть от компонент заданного вектора скорости жидкости \vec{U} . Согласно условию (13.6), решение представим в виде

$$\vec{u} = \vec{U} + \nabla \times \vec{\nabla} \times \vec{B}, \quad (13.7)$$

где вектор \vec{B} как полярный вектор может быть линейно выражен через \vec{U} : $\vec{B} = f\vec{U}$. Функция $f(\vec{r})$ предполагается зависящей только от радиуса r . Следовательно,

$$\vec{u} = \vec{U} + \nabla(\nabla \cdot f\vec{U}) - \Delta f\vec{U}. \quad (13.8)$$

Подчеркнем, что \vec{U} — постоянный вектор и, следовательно, переставляется с дифференциальными операторами ∇ и Δ . Подстановка (13.8) в уравнение Стокса (13.4) дает

$$\nabla[\eta(\vec{U} \cdot \nabla)\Delta f - (p - p_\infty)] = \eta\vec{U}\Delta\Delta f. \quad (13.9)$$

Это уравнение распадается на два

$$p - p_\infty = \eta(\vec{U} \cdot \nabla)\Delta f, \quad (13.10)$$

$$\Delta\Delta f = 0. \quad (13.11)$$

Получим решение уравнения (13.11). Из условия (13.6) вектор \vec{B} на бесконечности исчезает, поэтому из представления (13.8) следует,

что $\Delta f \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. В этом случае для Δf из (13.11) следует затухающее на бесконечности выражение

$$\Delta f = \frac{2a}{r}, \quad (13.12)$$

где a — константа, которая будет определена из граничного условия на сфере.

Дальнейшее интегрирование уравнения (13.12) дает

$$f = ar + \frac{b}{r}, \quad (13.13)$$

где b — еще одна константа.

Запишем представление (13.8) в форме

$$u_i = U_i(1 - \Delta f) + U_j \nabla_j \nabla_i f$$

и заметим, что $\nabla_i f = f' n_i$ и $\nabla_j n_i = \frac{\delta_{ij} - n_i n_j}{r}$, поэтому

$$\nabla_j \nabla_i f = \nabla_j (f' n_i) = f' \frac{\delta_{ij} - n_i n_j}{r} + f'' n_i n_j. \quad (13.14)$$

Введем разложение скорости \vec{U} на радиальную и тангенциальную компоненты

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \vec{U}_r + \vec{U}_\theta = \vec{n}(\vec{U} \cdot \vec{n}) + (\vec{n} \times [\vec{U} \times \vec{n}]), \\ \vec{U}_r &= \vec{n}(\vec{U} \cdot \vec{n}), \quad \vec{U}_\theta = [\vec{n} \times [\vec{U} \times \vec{n}]]. \end{aligned} \quad (13.15)$$

Использование формул (13.14), (13.15) позволяет записать

$$\vec{u} = \vec{U}_r(1 + f'' - \Delta f) + \vec{U}_\theta \left(1 + \frac{f'}{r} - \Delta f \right). \quad (13.16)$$

Лекция 13

Далее из выражений (13.12)–(13.13) после их подстановки в представление (13.16) получаем

$$\vec{u} = \vec{U}_r \left(1 - \frac{2a}{r} + \frac{2b}{r^3} \right) + \vec{U}_\theta \left(1 - \frac{a}{r} - \frac{b}{r^3} \right). \quad (13.17)$$

Удовлетворим граничные условия прилипания (13.5). Для этого приравняем нулю два выражения в скобках формулы (13.17). Это дает два уравнения для констант a и b :

$$1 - \frac{2a}{R} + \frac{2b}{R^3} = 0, \quad (13.18)$$

$$1 - \frac{a}{R} - \frac{b}{R^3} = 0. \quad (13.19)$$

Следовательно,

$$a = \frac{3}{4}R, \quad b = \frac{1}{4}R^3. \quad (13.20)$$

Подставляем эти константы в выражение (13.17) и получаем решение задачи Стокса:

$$\vec{u} = \vec{U}_r \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right) + \vec{U}_\theta \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right). \quad (13.21)$$

Вычислим силу, действующую на сферу.

Рассмотрим выражение для плотности силы на поверхности сферы, задаваемой тензором напряжений

$$f_i = \tau_{ij}n_j = -pn_i + \eta(\nabla_j u_i + \nabla_i u_j)n_j.$$

Преобразуем второе слагаемое к виду

$$2\eta n_j \nabla_i u_j + \eta (\nabla_j u_i - \nabla_i u_j) n_j. \quad (13.22)$$

На твердой поверхности сферы получаем в силу граничных условий прилипания:

$$n_j \nabla_i u_j = \nabla_i (n_j u_j) - u_j \nabla_i n_j = 0. \quad (13.23)$$

Содержащийся в (13.23) член $\frac{\partial u_r}{\partial r} = 0$ на твердой стенке обращается в ноль в силу уравнения неразрывности и граничного условия «прилипания» ($\vec{u}|_{r=R} = 0$). Представим второе слагаемое в (13.22) в виде

$$\nabla_j u_i - \nabla_i u_j = -\varepsilon_{ijk} \omega_k.$$

В результате для плотности силы на поверхности сферы имеем

$$\vec{f} = -(p - p_\infty) \vec{n} - \eta [\vec{n} \times \vec{\omega}], \quad (13.24)$$

где

$$p - p_\infty = \eta (\vec{U} \cdot \nabla) \Delta f = -\frac{3\eta}{2R} (\vec{U} \cdot \vec{n}), \quad (13.25)$$

$$\vec{\omega} = [\vec{U} \times \nabla] \Delta f = -\frac{3}{2R} [\vec{U} \times \vec{n}]. \quad (13.26)$$

Формулы (13.24)–(13.26) дают для плотности силы на поверхности сферы удивительный результат. Эта величина оказывается постоянной и не зависит от положения точки на сфере:

$$\vec{f} = \frac{3\eta}{2R} \{ \vec{n} (\vec{U} \cdot \vec{n}) + [\vec{n} \times [\vec{U} \times \vec{n}]] \} = \frac{3\eta}{2R} \vec{U}. \quad (13.27)$$

Тогда для силы, действующей на сферу, простым умножением на площадь сферы получаем формулу Стокса

$$\vec{F} = \vec{f} \cdot 4\pi R^2 = 6\pi\eta R\vec{U}. \quad (13.28)$$

ПАРАДОКС СТОКСА. РЕШЕНИЕ ОЗЕЕНА ДЛЯ ЦИЛИНДРА

Если из соображений размерности попытаться построить формулу для силы, действующей на обтекаемый вязкой жидкостью цилиндр, то получим для силы F_2 (на единицу длины цилиндра) странный результат $F_2 \sim \eta U$, не зависящий от радиуса цилиндра. Попытка Стокса решить задачу обтекания цилиндра так же, как и для сферы, с отбрасыванием конвективных членов при $Re \ll 1$, привела его к заключению об отсутствии разумного решения в этом приближении. Это отсутствие решения в стоксовом приближении и называется *парадоксом Стокса*. Озеен показал, что конвективные и вязкие члены на больших расстояниях от сферы или цилиндра следует оценивать через расстояние r , тогда

$$\frac{\rho \|(\vec{u}\nabla)\vec{u}\|}{\eta \|\Delta\vec{u}\|} = \frac{\rho U^2 / r}{\eta U / r^2} = \frac{\rho U r}{\eta} \quad (13.29)$$

и при любых малых величинах $\frac{U}{\eta}$ всегда есть достаточно большие расстояния r , когда это отношение становится большим и, следовательно, приближение Стокса неприемлемо вдали от тела. Озеен предложил конвективные члены приближенно записывать в виде $(\vec{U}\nabla)\vec{u}$. Тогда получается линейное уравнение Озеена

$$(\vec{U}\nabla)\vec{u} + \nabla(p / \rho) = \nu\Delta\vec{u}. \quad (13.30)$$

Теперь решение задачи обтекания цилиндра, удовлетворяющее всем граничным условиям, существует, и в результате из него получается формула для силы на единицу длины цилиндра

$$F_2 = 4\pi\eta U \left[\frac{1}{2} - \gamma - \ln \frac{UR\rho}{2\eta} \right]^{-1}, \quad (13.31)$$

где $\gamma = 0,5772$ — постоянная Эйлера.

Аналогично была решена в озееновском приближении задача обтекания эллиптического цилиндра с полуосями a (по потоку) и b (перпендикулярно потоку ⁶). Сила в этом случае получена в виде

$$F = 4\pi\eta U \left[\frac{a}{a+b} - \gamma + \ln \frac{4\eta}{\rho U(a+b)} \right]^{-1}. \quad (13.32)$$

Из формулы (13.31) или (13.32) получаем для силы, действующей на круговой цилиндр,

$$F = 4\pi\eta U \left[\ln \left(\frac{3,703}{\text{Re}_d} \right) \right]^{-1}, \quad (\text{Re}_d = \frac{\rho d U}{\eta}, \quad d = 2R).$$

Для пластинки нулевой толщины, ориентированной вдоль и перпендикулярно потоку, получаем из (13.32) соответственно

$$F^{(||)} = 4\pi\eta U \left[\ln \left(\frac{12,21}{\text{Re}_d} \right) \right]^{-1}, \quad (\text{Re}_d = \frac{\rho d U}{\eta}, \quad d = 2a, \quad b = 0),$$

$$F^{(\perp)} = 4\pi\eta U \left[\ln \left(\frac{4,492}{\text{Re}_d} \right) \right]^{-1}, \quad (\text{Re}_d = \frac{\rho d U}{\eta}, \quad d = 2b, \quad a = 0).$$

⁶ Ламб Г. Гидродинамика. М.: ОГИЗ, 1947. 929 с.

РЕШЕНИЕ АДАМАРА — РЫБЧИНСКОГО
 ДЛЯ СФЕРИЧЕСКОЙ КАПЛИ В ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Пусть внутри сферы радиусом R находится жидкость вязкостью η' . Для внешнего и внутреннего полей скорости в приближении Стокса было получено представление

$$\vec{u} = \vec{U}_r \left(1 - \frac{2a}{r} + \frac{2b}{r^3} \right) + \vec{U}_\theta \left(1 - \frac{a}{r} - \frac{b}{r^3} \right), \quad (13.33)$$

$$\vec{v} = \vec{U}_r (-A - Br^2) + \vec{U}_\theta (-A - 2Br^2). \quad (13.34)$$

Четыре константы в формулах (13.33), (13.34) определяются из четырех граничных условий на сфере при $r = R$ (условий равенства скоростей и напряжений):

$$u_i = v_i, \\ \eta(\nabla_j u_i + \nabla_i u_j) n_j = \eta'(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j) n_j.$$

В результате было получено

$$a = \frac{R}{4} \left(\frac{2\eta + 3\eta'}{\eta + \eta'} \right); \quad b = \frac{R^3}{4} \left(\frac{\eta'}{\eta + \eta'} \right); \\ A = -BR^2 = \frac{\eta}{2(\eta + \eta')}. \quad (13.35)$$

Для силы, действующей на каплю, получено выражение (формула Адамара — Рыбчинского)

$$\vec{F}_{A-P} = 2\pi R \eta \vec{U} \left(\frac{2\eta + 3\eta'}{\eta + \eta'} \right). \quad (13.36)$$

Из формулы (13.36) снова получаем в пределе очень большой внутренней вязкости при $\eta' \rightarrow \infty$ силу Стокса $F_C = 6\pi\eta RU$. Для случая невязкого газа внутри сферы при $\eta' \rightarrow 0$ получаем силу, действующую на всплывающий пузырек,

$$\vec{F}_{A-P} = 4\pi R\eta U. \quad (13.37)$$

Интересно сравнить эту силу с силой Левича для всплывающего пузыря

$$F_{Л} = 12\pi R\eta U,$$

полученной для больших чисел Рейнольдса в приближении потенциального поля скорости вблизи пузыря. Эти формулы похожи по форме, но справедливы для разных пределов по числу Рейнольдса, поэтому количественно их сравнивать нельзя. (Сила (13.37) выведена для случая $Re < 1$, а формула Левича — для $Re \gg 1$.)

РЕШЕНИЯ ДЛЯ ДИСКА В СТОКСОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Были рассчитаны силы для случаев потоков ⁷:

а) перпендикулярного к плоскости диска

$$F = 16\eta RU; \quad (13.38)$$

б) продольного вдоль плоскости диска

$$F = \frac{2}{3}16\eta RU. \quad (13.39)$$

⁷ Ламб Г. Гидродинамика. М.: ОГИЗ, 1947. 929 с.

Эти выражения похожи на силу Стокса для сферы, однако из-за дополнительного множителя π в формуле Стокса (13.28) силы, действующие на диск с таким же радиусом R , получаются несколько меньше, чем сила Стокса для сферы ($16 < 6\pi$).

РЕШЕНИЕ ДЛЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СФЕРЫ В СТОКСОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассмотрим вращающуюся в вязкой жидкости с угловой скоростью $\vec{\Omega}$ малую сферу. Отсутствие внешних сил и градиента давления приводит в стоксовом приближении к уравнению Лапласа

$$\Delta \vec{u} = 0. \quad (13.40)$$

Граничные условия на поверхности сферы $\vec{u} = [\vec{\Omega} \times \vec{r}]$ и на бесконечности $\vec{u} = 0$. Решение дипольного типа (вихревой диполь), удовлетворяющее уравнению (13.40) и всем граничным условиям, есть

$$\vec{u} = [\vec{\Omega} \times \vec{r}] \frac{R^3}{r^3}. \quad (13.41)$$

Завихренность получаем из (13.41) в виде

$$\vec{\omega} = \frac{3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{\Omega}) - \vec{\Omega}}{r^3} R^3 = \frac{2\vec{\Omega}_r - \vec{\Omega}_\theta}{r^3} R^3,$$

где введено разложение угловой скорости $\vec{\Omega}$ на радиальную и меридиональную компоненты

$$\vec{\Omega}_r = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{\Omega}); \quad \vec{\Omega}_\theta = \vec{n} \times [\vec{\Omega} \times \vec{n}].$$

Интересно, что на полюсе сферы при $\theta = 0$ завихренность есть $\vec{\omega} = 2\vec{\Omega}$, а на экваторе сферы при $\theta = \pi/2$ получаем $\vec{\omega} = -\vec{\Omega}$.

Напряжение трения на поверхности сферы получаем в виде

$$\tau' = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right)_{r=R} = -3\eta\Omega \sin \theta .$$

Полный момент сил трения сферы о жидкость определяется интегралом

$$M = \int_0^\pi \tau' \cdot R \sin \theta \cdot 2\pi R^2 \sin \theta d\theta = -8\pi\eta R^3 \Omega . \quad (13.42)$$

Поле скорости в слое между двумя сферами радиусами R_1 и R_2 , вращающимися вокруг разных диаметров с произвольными угловыми скоростями $\vec{\Omega}_1$ и $\vec{\Omega}_2$ (рис. 13.1.), можно построить методом суперпозиции. Между сферами при $R_1 \leq r \leq R_2$ поле скорости строится на основе двух решений, описывающих: а) твердотельное вращение, $\vec{u}_1 = [\vec{\Omega}_1 \times \vec{r}]$; б) вихревой диполь, $\vec{u}_2 = [\vec{\Omega}_2 \times \vec{r}](R/r)^3$. Эти решения удовлетворяют векторному уравнению Лапласа (13.40). Производя суперпозицию двух решений с произвольными константами и удовлетворяя граничным условиям на вращающихся сферах при $r = R_1$ и $r = R_2$, получаем решение задачи в виде

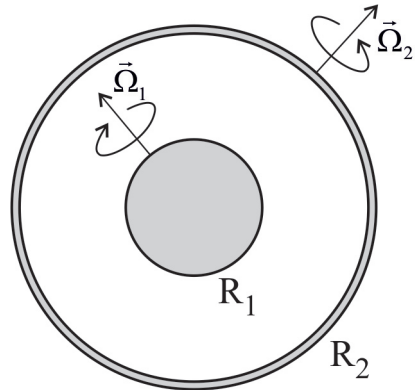


Рис. 13.1

$$\vec{u} = \frac{[\vec{\Omega}_1 \times \vec{r}](r^{-3} - R_2^{-3}) + [\vec{\Omega}_2 \times \vec{r}](R_1^{-3} - r^{-3})}{(R_1^{-3} - R_2^{-3})} . \quad (13.43)$$

Можно вычислить момент силы, действующий, например, на внутреннюю сферу. Он равен

$$\vec{M}_1 = -8\pi\eta \frac{R_1^3 R_2^3}{(R_2^3 - R_1^3)} (\vec{\Omega}_1 - \vec{\Omega}_2). \quad (13.44)$$

ВЫТЕКАНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ЩЕЛИ МЕЖДУ ДИСКАМИ

Рассмотрим задачу о выдавливании жидкости из щели между двумя дисками, сближающимися со скоростью V . Диски имеют радиусы R , плотность жидкости ρ , вязкость η , ширина щели h . Считаем, что $h \ll R$, течение вязкое и справедливо приближение Стокса. Задачу решаем в цилиндрической системе координат для двух компонент скорости u , w и давления p .

Уравнение неразрывности и уравнение Навье — Стокса в приближении Стокса имеют вид

$$\frac{\partial(ru)}{r \partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (13.45)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (13.46)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (13.47)$$

Проинтегрируем уравнение (13.45) по z от 0 до h . Введем локальный расход жидкости $q_r = \int_0^h u dz$, для которого получаем из (13.45)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rq_r) = w(0) - w(h) = V, \quad (13.48)$$

где V — скорость верхней пластины (так как $w(0) = 0$ и $w(h) = -V$). Интегрируя уравнение (13.48), получаем

$$q_r = \frac{Vr}{2}. \quad (13.49)$$

Так как из (13.47) следует, что давление есть функция только координаты r , из уравнения (13.46) после интегрирования получаем для радиальной скорости

$$u = \frac{dp}{dr} \frac{z(z-h)}{2\eta} \quad (13.50)$$

и для локального расхода жидкости имеем

$$q_r = \int_0^h u dz = -\frac{dp}{dr} \cdot \frac{h^3}{12\eta}. \quad (13.51)$$

Далее из уравнений (13.49) и (13.51) получаем давление

$$p = p_{\text{атм}} + \frac{3V\eta}{h^3}(R^2 - r^2) \quad (13.52)$$

и, интегрируя его по площади диска, выводим формулу для силы F , действующей на диск:

$$F = \int_0^a (p - p_{\text{атм}}) 2\pi r dr = \frac{3\pi\eta R^4}{2h^3} V. \quad (13.53)$$

Получим закон движения верхнего диска при постоянной силе F . Учитывая, что $V = -\frac{dh}{dt}$, после интегрирования уравнения (13.53) получаем

$$h(t) = \frac{h_0}{\sqrt{1 + \frac{4Fh_0^2}{3\pi\eta R^4} t}}. \quad (13.54)$$

ВЫТЕКАНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ЩЕЛИ
МЕЖДУ ПЛОСКИМИ ПЛАСТИНАМИ

Пусть полуширина пластины a и расстояние между ними h . Тогда аналогичные формулы для давления в щели, для силы, действующей на пластину, и закон движения пластины имеют вид

$$p(x) = p_{\text{атм}} + \frac{6\eta V}{h^3}(a^2 - x^2)$$
$$F_2 = 8\eta \left(\frac{a}{h}\right)^3 V \quad (13.55)$$
$$h(t) = \frac{h_0}{\sqrt{1 + \frac{F_2 h_0^2}{4\eta a^3} t}}$$

Отметим, что в этой двумерной задаче сила F_2 — это сила на единицу длины плоской пластины. Она имеет размерность [Н/м].

Формулы для сил (13.53), (13.55) содержат в знаменателе малый размер щели в кубе, что приводит к очень большим силам в случае тонких щелей. Это явление широко используется в технике при поддержке вращающихся осей механизмов тонкими слоями вязкой смазки. Теория смазки была развита в работах русских ученых (Петров, Жуковский, Чаплыгин).

ЛЕКЦИЯ 14

ТЕЧЕНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА. ТЕОРИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРАНДТЛЯ

Рассмотрим обтекание плоского тела потоком вязкой жидкости с большими числами Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu} \gg 1, \quad (14.1)$$

где U — скорость потока; L — характерный размер тела; ν — кинематическая вязкость. Будем предполагать задачу потенциального обтекания этого тела решенной и скорость идеальной жидкости на поверхности тела $U(x)$ заданной, где x — координата вдоль тела. Вводим координаты на теле: x — продольную вдоль поверхности тела и y — поперечную, нормальную к поверхности тела (рис. 14.1).

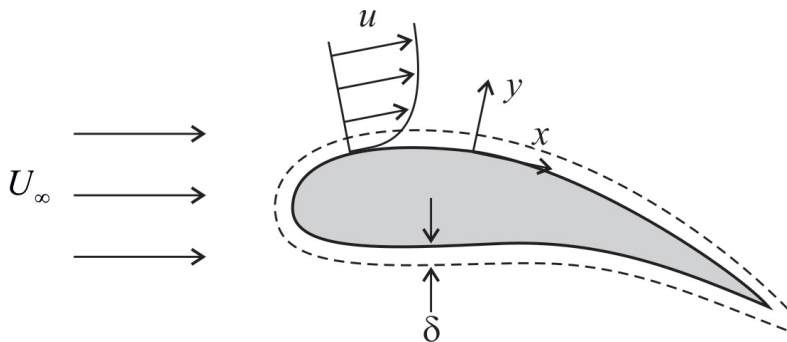


Рис. 14.1

Для описания компонент скорости имеем уравнения Навье — Стокса и неразрывности

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (14.2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (14.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (14.4)$$

Мы ожидаем при больших значениях критерия Рейнольдса, что толщина пограничного слоя мала: $\delta \ll L$. В пограничном слое продольная скорость u быстро уменьшается от внешней скорости $U(x)$ до нуля. Поперечная скорость v в пограничном слое мала. Это видно из уравнения неразрывности (14.4). Проинтегрируем его по толщине слоя:

$$v = - \int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} \partial y \sim \frac{\delta}{L} U \ll U. \quad (14.5)$$

Из уравнения (14.3) получаем, что изменение давления имеет второй порядок малости по толщине пограничного:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \sim v \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{U^2}{L} \cdot \frac{\delta}{L},$$

$$P - P_0^{(x)} \sim \rho U^2 \left(\frac{\delta}{L} \right)^2, \quad (14.6)$$

где $P_0^{(x)}$ — давление на поверхности тела, которое можно выразить через скорость внешнего потенциального обтекания тела. По закону Бернулли имеем

Большие числа Рейнольдса. Теория пограничного слоя Прандтля

$$P_{cm}^{(x)} = P_{\infty} + \rho \frac{U_{\infty}^2}{L} - \rho \frac{U^2(x)}{2}$$

и, следовательно, пренебрегая вторым порядком малости (14.6), получаем для градиента давления, входящего в уравнение (14.2),

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -U(x) \frac{dU(x)}{dx}. \quad (14.7)$$

Оценивая в уравнении (14.2) производные по x масштабом L , производные по y — толщиной δ , получаем неравенство

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

и, следовательно, можно пренебречь второй производной по x в уравнении (14.2).

В результате получаем систему уравнений пограничного слоя Прандтля, предложенную им в 1904 г.:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - U \frac{dU}{dx} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (14.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (14.9)$$

Сравнивая в (14.8) конвективные члены с вязкими и полагая их одного порядка, получаем

$$\frac{U^2}{L} \sim \nu \frac{U}{\delta^2}; \quad \delta = \sqrt{\frac{\nu L}{U}}. \quad (14.10)$$

При $Re \gg 1$ толщина пограничного слоя получается малой:

$$\delta = L / \sqrt{Re} \ll L. \quad (14.11)$$

Лекция 14

Уравнения (14.8)–(14.9) можно сделать безразмерными. Умножим (14.8) на L , поделим на U_∞^2 и введем новые переменные:

$$\bar{u} = u / U_\infty; \quad \bar{x} = x / L; \quad \bar{v} = \sqrt{\text{Re}} v / U_\infty; \quad \bar{y} = y / \delta = \sqrt{\text{Re}} y / L.$$

Уравнения (14.8)–(14.9) преобразуются к новой форме, не содержащей параметров

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \bar{U} \frac{d\bar{U}}{d\bar{x}} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}, \quad (14.12)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0. \quad (14.13)$$

Интересно, что число Рейнольдса не входит в уравнения (14.12)–(14.13). Это приводит к тому, что точка отрыва пограничного слоя не зависит от числа Рейнольдса. В точке отрыва обращается в нуль касательное трение на стенке: $\bar{u}'_{\bar{y}}(\bar{x}, \bar{y} = 0) = 0$. Корень этого уравнения не зависит от числа Рейнольдса. Например, для цилиндра эта точка расположена на угле 95° (угол отсчитывается от передней критической точки) и не смещается с ростом скорости. Однако с переходом к турбулентному режиму течения в пограничном слое отрыв смещается еще на $25\text{--}30^\circ$ в кормовую зону. Это явление известно как кризис сопротивления (см. рис. 12.3). При этом коэффициент сопротивления уменьшается в 2–3 раза (для цилиндра) и 4–5 раз (для сферы).

Решение системы Прандтля для плоской пластины получим, положив скорость постоянной $U(x) = U_\infty$ и вводя функцию тока для выполнения уравнения неразрывности:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (14.14)$$

Подставив (14.14) в уравнения (14.8)–(14.9), получаем

$$\psi_y \psi_{yx} - \psi_x \psi_{yy} = \nu \psi_{yyy} \quad (14.15)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned}\psi(y=0) &= \psi'_y(y=0) = 0, \\ \psi'_y(y=\infty) &= U_\infty.\end{aligned}\tag{14.16}$$

Используем далее метод масштабных множителей. Сделаем в уравнении (14.15)–(14.16) преобразование переменных:

$$x = c_1 \xi; \quad y = c_2 \eta; \quad \psi = c_3 f(\xi, \eta),$$

где ξ, η, f — безразмерные переменные. Это дает

$$\frac{c_3^2}{c_1 c_2^2} (f''_{\eta} f''_{\xi\eta} - f''_{\xi} f''_{\eta\eta}) = \nu f'''_{\eta\eta\eta} \frac{c_3}{c_2^3}, \quad \frac{c_3}{c_2} f'_\eta = U_\infty.$$

Чтобы исключить вязкость и скорость и получить безразмерную форму уравнений, наложим два условия на масштабные множители:

$$\begin{cases} c_3 = \nu \frac{c_1}{c_2}, \text{ что дает } c_2^2 = \frac{\nu}{U_\infty} c_1, \quad c_3 = U_\infty \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty}} c_1. \\ c_3 = U_\infty c_2 \end{cases}$$

Выбрав $c_1 = x$, получим $\xi = 1$ и $c_2 = \sqrt{\nu x / U_\infty}$, $c_3 = \sqrt{\nu x U_\infty}$. Вводя условную толщину пограничного слоя $\delta(x) = c_2 = \sqrt{\nu x / U_\infty}$, получим представление для функции тока

$$\psi = \sqrt{\nu x U_\infty} f(\eta); \quad \eta = y / \delta(x).$$

Отметим, что $\frac{\delta}{x} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_x}} \ll 1$.

Лекция 14

Для компонент скорости получаем формулы

$$\frac{u}{U_\infty} = f'(\eta); \quad \frac{v}{U_\infty} = \frac{1}{2} \frac{\eta f' - f}{\sqrt{\text{Re}_x}},$$

а для функции f — уравнение Блазиуса (1908 г.)

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \quad (14.17)$$

с граничными условиями

$$f(0) = f'(0) = 0; \quad f'(\infty) = 1. \quad (14.18)$$

Задачу (14.17)–(14.18) можно преобразовать к нелинейному интегральному уравнению для функции $\Phi = \frac{1}{2} \int_0^\eta f(\eta) d\eta$:

$$\Phi(\eta) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\int_0^\eta (\eta - \eta_1)^2 e^{-\Phi(\eta_1)} d\eta_1}{\int_0^\infty e^{-\Phi(\eta_1)} d\eta_1}. \quad (14.19)$$

Решение уравнения (14.19) можно получить методом простых итераций. Начиная с подстановки в правую часть функции $\Phi = \eta^2 / 4$, интегрируя численно выражение (14.19) и затем повторяя эти интегрирования с вновь рассчитанной функцией Φ , можно за 5–6 итераций получить решение уравнения (14.19) с точностью в 4–5 знаков.

Для функции, определяющей продольную скорость $f' = 2\Phi''$, получаем

$$f' = \int_0^\eta \exp(-\Phi(\eta)) d\eta / \int_0^\infty \exp(-\Phi(\eta)) d\eta. \quad (14.20)$$

На рис. 14.2 показан профиль безразмерной продольной скорости u / U_∞ , задаваемый функцией f' от $\eta = y / \sqrt{vx / U_\infty}$. На рис. 14.3 показан комплекс $\frac{v}{U_\infty} \sqrt{\frac{xU_\infty}{\nu}} = \frac{1}{2}(\eta f' - f)$, определяющий профиль безразмерной поперечной скорости.

Касательное напряжение трение на стенке пластины есть

$$\tau = \rho \nu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{\rho \nu U_\infty f''(0)}{\delta(x)} = 0,332 \cdot \rho \sqrt{\frac{\nu U_\infty^3}{x}}.$$

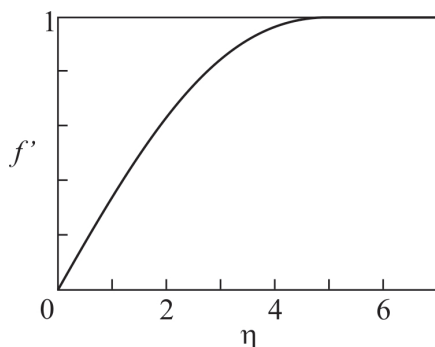


Рис. 14.2. Профиль безразмерной продольной скорости

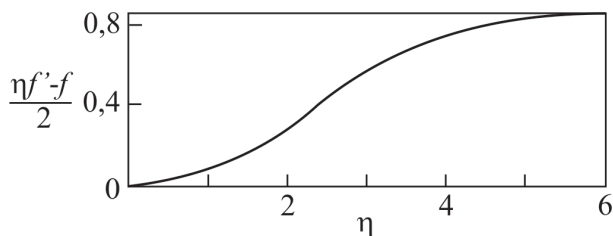


Рис. 14.3. Профиль безразмерной поперечной скорости

Сила трения для двух сторон пластины вычисляется по формуле

$$F = 2 \int_0^L \tau dx = 1,328 \rho \sqrt{\nu L U^3} .$$

Толщина вытеснения пограничного слоя δ_* определяется формулой

$$U_\infty \delta_* = \int_0^\infty (U_\infty - u) dy = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} [\eta - f(\eta)]_{\eta=0}^{\eta=\infty}, \delta_* = 1,72 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} .$$

На это расстояние пограничный слой оттесняет линии тока потенциального потока из-за вязкого торможения жидкости о стенку. Торможение продольного движения приводит к появлению движения по нормали к стенке. Следовательно, на внешней границе пограничного слоя получаем асимптотику для y -компоненты скорости:

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} (\eta f' - f)_{\eta \rightarrow \infty} = 0,86 \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} . \quad (14.21)$$

РЕШЕНИЕ ФОКНЕРА — СКЭН ДЛЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА КЛИНЕ

Автомодельное решение уравнений Прандтля для тела в форме клина с углом θ при вершине было описано Фокнером и Скэн (1930).

На плоском теле в форме клина скорость потенциального потока жидкости есть

$$U = cx^n ,$$

где параметр n связан с углом при вершине клина θ соотношением

$$n = \frac{\theta}{2\pi - \theta} .$$

Автомодельное решение было представлено в виде

$$\psi = \sqrt{vxU(x)}f(\eta), \quad \eta = y\sqrt{\frac{U(x)}{vx}}. \quad (14.22)$$

Для функции f было получено уравнение и граничные условия

$$\eta f'^2 - \frac{n+1}{2} ff'' = n + f''', \quad (14.23)$$

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1. \quad (14.24)$$

Численное решение задачи (14.23)–(14.24) получено Хартри (1937) для некоторых значений n (рис. 14.4). Отметим, что значение

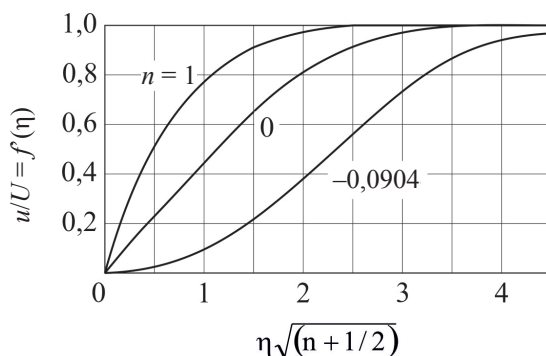


Рис. 14.4. Профили скорости в задаче Фокнера — Скэн для трех параметров n . Даже при отклонении поверхности пластины в отрицательную область до углов, отвечающих неравенству $n > -0,0904$, решение задачи Фокнера — Скэн дает профили скорости без отрыва погранслоя от поверхности

$n = 0$ (или $\theta = 0$) — это рассмотренный ранее случай потока вдоль плоской пластины, а случай $n = 1$ (или $\theta = \pi$) соответствует потоку, набегающему перпендикулярно на поверхность пластины.

ТЕМПЕРАТУРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЕ

Рассмотрим теперь задачу о теплообмене нагретой плоской пластины с потоком жидкости. Уравнение пограничного слоя для поля температуры T может быть получено аналогично уравнению Прандтля и имеет вид

$$\psi_y T_x - \psi_x T_y = a T_{yy}, \quad (14.25)$$

где a — температуропроводность среды.

Зададим граничные условия на пластине. Температуру стенки пластины считаем постоянной $T_{cm} = T_0$. Вдали от пластины задана температура натекающей жидкости T_∞ :

$$T(y=0) = T_0; \quad T(y=\infty) = T_\infty. \quad (14.26)$$

Введем безразмерную температуру $\theta(x, y) = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$ и автомодельную переменную $\eta = y / \sqrt{vx / U_\infty}$, для которых из уравнения (14.25) и граничных условий задачи (14.26) можно получить уравнение

$$\theta'' + \frac{f}{2} \text{Pr} \theta' = 0 \quad (14.27)$$

с граничными условиями

$$\theta(0) = 1; \quad \theta(\infty) = 0, \quad (14.28)$$

здесь f — это автомодельное решение Блазиуса (14.19)–(14.20);

$\text{Pr} = \frac{\nu}{a}$ — критерий Прандтля.

Решение задачи (14.27)–(14.28) выражается через Φ -функцию (14.19) и имеет вид

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\int_0^\infty e^{-\text{Pr}\Phi} d\eta}{\int_0^\infty e^{-\text{Pr}\Phi} d\eta}. \quad (14.29)$$

где $\Phi = \frac{1}{2} \int_0^\eta f(\eta) d\eta$.

В уравнении (14.27) введен критерий Прандтля — отношение коэффициентов кинематической вязкости и температуропроводности:

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a}. \quad (14.30)$$

Критерий Прандтля отвечает за подобие теплового и гидродинамического пограничных слоев. Рассмотрим, например, случай $\text{Pr} = 1$. Из уравнения Блазиуса (14.17) получаем

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_0^\eta f(\eta) d\eta = -\ln(f''(\eta) / f''(0)). \quad (14.31)$$

Подставляя (14.31) в (14.29), получаем после интегрирования связь безразмерных профилей температуры и скорости:

$$\theta(\eta) = \frac{\int_0^\infty f''(\eta) d\eta}{\int_0^\infty f''(\eta) d\eta} = 1 - f'(\eta). \quad (14.32)$$

Лекция 14

Следовательно, для случая $Pr = 1$ безразмерные профили температуры и скорости получаются подобными с точностью до аддитивной постоянной и знака.

На рис. 14.5 для различных значений критерия Прандтля показаны профили безразмерной температуры в пограничном слое на пластине. Отметим, что с увеличением числа Pr толщина температурного пограничного слоя уменьшается. Для обратного случая очень малых значений чисел Прандтля, который характерен для жидких металлов, толщина температурного пограничного слоя намного больше слоя гидродинамического и последним можно пренебречь, учитывая для расчета температуры только внешнее потенциальное поле скорости $U(x)$.

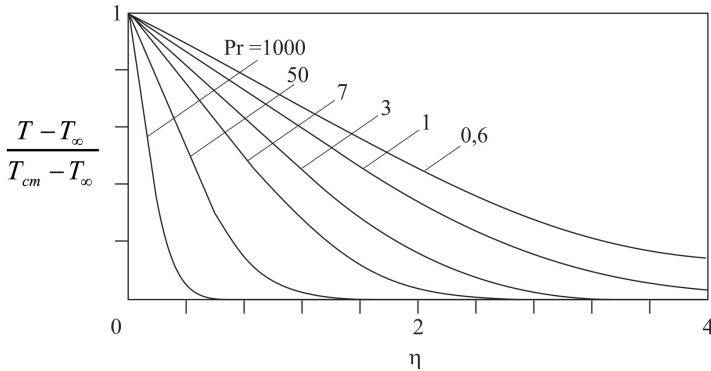


Рис. 14.5. Безразмерные профили температуры в пограничном слое на пластине для разных чисел Прандтля

ЛЕКЦИЯ 15

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА. ЗАДАЧИ С ОТСОСОМ ЖИДКОСТИ В СТЕНКУ. ТЕЧЕНИЯ ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ И ОКОЛО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА. ТЕЧЕНИЯ В КОНФУЗОРЕ И ДИФFUЗОРЕ. СТРУЯ ЛАНДАУ

В заключительной лекции будут рассмотрены некоторые точные решения уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости. Обычно такие решения могут быть получены в идеализированной постановке, когда, по сути, в задаче отсутствует какой-либо характерный пространственный масштаб. Для существования стационарного решения генерируемая стенками завихренность должна либо эффективно отсасываться в стенку, либо уноситься на бесконечность.

Рассмотрим сначала задачу об отсосе завихренности через плоскую стенку. Пусть вдали от плоскости существует продольное течение со скоростью U вдоль оси x . Плоскость $y = 0$ предполагается проницаемой для жидкости, и в нее осуществляется отсос жидкости с вертикальной скоростью $v = -V$. Для продольной компоненты скорости u предполагаем независимость от продольной координаты x . Градиент давления вдоль поверхности полагаем равным нулю. Тогда задача описывается простым уравнением

$$-V \frac{du}{dy} = \nu \frac{d^2u}{dy^2} \quad (y \geq 0) \quad (15.1)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad (y = 0), \\ u &= U \quad (y = \infty). \end{aligned}$$

Лекция 15

Решение задачи (15.1) записывается в виде

$$u = U \left(1 - e^{-\frac{v y}{\nu}} \right). \quad (15.2)$$

Касательное напряжение трения есть $\tau = \rho \nu \left(\frac{du}{dy} \right)_0 = \rho U V$. Интересно отметить, что τ не зависит от вязкости.

Толщина пограничного слоя (или условная толщина вытеснения)

$$\delta_* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy = \frac{\nu}{U}. \quad (15.3)$$

Аналогично можно рассмотреть осесимметричный аналог задачи с отсосом. Предположим, что отсос жидкости происходит через пористую поверхность цилиндра радиусом R и вдали от цилиндра имеется продольный поток жидкости со скоростью U . Выражение для радиальной скорости следует из уравнения неразрывности и имеет вид

$$v = -V \frac{R}{r}, \quad (15.4)$$

где V — скорость отсоса на поверхности цилиндра.

Уравнение для продольной скорости записываем в следующем виде:

$$-V \frac{R}{r} \frac{du}{dr} = \frac{\nu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) \quad (15.5)$$

с условиями

$$\begin{aligned} u &= 0, \quad (r = R), \\ u &= U, \quad (r = \infty). \end{aligned}$$

Решение уравнения (15.5), удовлетворяющее всем граничным условиям, есть

$$u = U \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^{\text{Re}} \right], \quad (15.6)$$

где $\text{Re} = \frac{VR}{\nu}$ — число Рейнольдса для отсасывающего потока.

Рассмотрим теперь вращающийся с угловой скоростью Ω цилиндр радиусом R , через пористую поверхность которого осуществляется отсос жидкости со скоростью $-V$ на его поверхности. Радиальная скорость имеет такой же вид (15.4), как и в предыдущей задаче. Генерируемая вращающимся цилиндром завихренность направлена вдоль оси цилиндра и описывается уравнением

$$-V \frac{R}{r} \frac{d\omega}{dr} = \nu \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\omega}{dr} \right), \quad (15.7)$$

которое совпадает с уравнением (15.5). Граничные условия для завихренности следующие:

$$\omega = \omega_R, \quad (r = R),$$

$$\omega = 0, \quad (r = \infty),$$

где ω_R — константа, которая будет определена далее. Решение задачи (15.7) есть

$$\omega = \omega_R \left(\frac{R}{r} \right)^{\text{Re}}, \quad (15.8)$$

где число Рейнольдса отсоса по-прежнему $\text{Re} = \frac{VR}{\nu}$.

Лекция 15

Завихренность связана со скоростью v_ϕ соотношением

$$\omega = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_\phi). \quad (15.9)$$

Граничные условия для скорости v_ϕ на цилиндре и в бесконечности поставим в виде

$$v_\phi = \Omega R \quad (r = R), \quad (15.10)$$

$$v_\phi = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (r \rightarrow \infty), \quad (15.11)$$

где Γ — циркуляция жидкости.

Условие (15.11) учитывает возможную циркуляцию жидкости вокруг цилиндра. Если построить решение задачи (15.8)–(15.11), то получаем

$$v_\phi = \frac{R^2 \Omega}{r} \quad (\text{Re} \leq 2), \quad (15.12a)$$

$$v_\phi = \frac{\Gamma}{2\pi r} + \left(\frac{R^2 \Omega}{r} - \frac{\Gamma}{2\pi r} \right) \left(\frac{R}{r} \right)^{\text{Re}-2} \quad (\text{Re} > 2). \quad (15.12b)$$

Решение (15.12b) общего вида, но при $\text{Re} < 2$ дает неограниченный рост для $r \rightarrow \infty$, что требует выполнения условия

$$\Gamma = 2\pi R^2 \Omega,$$

и тогда получается решение (15.12a).

Полученные результаты можно объяснить конкуренцией двух механизмов переноса завихренности: диффузии и конвекции (отсоса). При малом отсосе, при $\text{Re} \leq 2$, диффузия побеждает. За бесконечное время вся завихренность уходит на бесконечность и вокруг цилиндра

формируется потенциальное поле скорости ($v = \frac{\Gamma}{2\pi r}$), согласованное с граничным условием ($v = \Omega R$, $\Gamma = 2\pi R^2 \Omega$).

При $Re > 2$, когда конвекция жидкости преобладает над диффузией при отсутствии циркуляционного течения ($\Gamma = 0$), получаем убывающее на бесконечности поле скорости

$$v_{\varphi} = \Omega R \left(\frac{R}{r} \right)^{Re-1}. \quad (15.13)$$

С учетом наложенной произвольной циркуляции завихренность на цилиндре есть

$$\omega_R = (2 - Re) \left(\Omega - \frac{\Gamma}{2\pi R^2} \right).$$

Интересно отметить, что при $\Gamma = 0$ эта завихренность и угловая скорость вращения цилиндра Ω имеют разные знаки, так как $(2 - Re) < 0$.

ТЕЧЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ

В малой окрестности критической точки на плоском теле и/или на теле вращения легко показать, что зависимость скоростей потенциального потока определяются формулами $U = kx$, $V = -ky$ для плоского тела или $U = kr$, $V = -2kz$ для осесимметричного тела. К этим значениям должны стремиться компоненты скорости при выходе из вязкого пристенного слоя соответственно $u = U$, $v = V$. Давление в потенциальном потоке вдали от стенки будет $P = P_0 - \rho \frac{k^2}{2} (x^2 + y^2)$. Следовательно, $\frac{\partial P}{\partial x} = -k^2 x$ и при его использовании в уравнении Навье — Стокса получаем уравнение для функции тока $\psi = xf(y)$. Сокращая x , имеем для функции f уравнение

$$f_y'^2 + f f_{yy}'' - k^2 = \nu f_{yyy}'''$$

Лекция 15

или в безразмерной форме для $F_1(\eta) = \frac{f}{\sqrt{\nu k}}$

$$F_1'^2 - F_1 F_1'' - 1 = F_1''' , \quad (15.14)$$

где $\eta = y\sqrt{k/\nu}$. Для осесимметричного случая это уравнение слегка изменяется:

$$F_2'^2 - 2F_2 F_2'' - 1 = F_2''' .$$

Граничные условия $F_1(0) = F_1'(0) = 0$, $F_1'(\infty) = 1$. Профиль скорости $F_1'(\eta)$ показан на рис. 15.1.

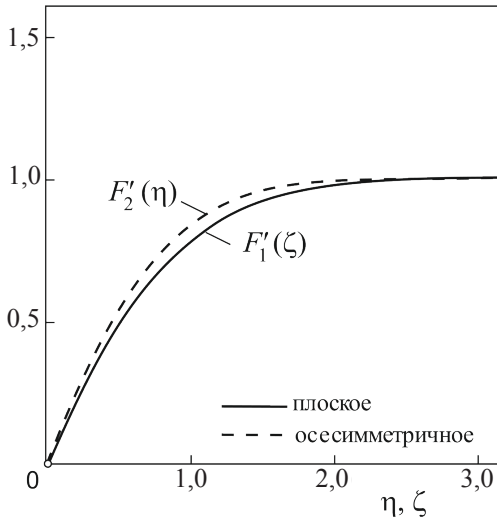


Рис. 15.1. Профили безразмерной скорости для плоского и осесимметричного течения вблизи критической точки. Безразмерные координаты для плоского и осесимметричного случаев: $\eta = y\sqrt{k/\nu}$; $\zeta = z\sqrt{k/\nu}$

ПОЛЕ СКОРОСТИ ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОГО ДИСКА,
ВРАЩАЮЩЕГОСЯ В БЕЗГРАНИЧНОЙ ОБЛАСТИ

Из-за прилипания к поверхности диска приповерхностные слои вовлекаются во вращение и в системе диска возникает действующее радиально центробежное ускорение. Эта задача была решена Карманом в 1921 г. Он представил все скорости и давление в виде

$$v_r = \Omega r F(\zeta), \quad (15.15)$$

$$v_\varphi = \Omega r \Phi(\zeta), \quad (15.16)$$

$$v_z = \sqrt{\nu \Omega} H(\zeta), \quad (15.17)$$

$$P - P_0 = -\nu \Omega \rho \Pi(\zeta), \quad (15.18)$$

где $\zeta = z/l$, $l = \sqrt{\nu/\Omega}$.

После подстановки этих выражений в уравнения неразрывности и Навье — Стокса получаем

$$2F + H' = 0, \quad (15.19)$$

$$F^2 + HF' - \Phi^2 = F'', \quad (15.20)$$

$$2F\Phi + H\Phi' = \Phi'', \quad (15.21)$$

$$HH' - \Pi' = H''. \quad (15.22)$$

Граничные условия к уравнениям (15.19)–(15.22) имеют вид
при $\zeta = 0$: $\Phi = 1$, $F = H = 0$;
при $\zeta = \infty$: $F = 0$, $\Phi = 0$.

Решения задачи Кармана показаны на рис. 15.2. Отметим, что для вертикальной скорости получено при решении асимптотическое значение $H(\infty) = -0,886$. Это означает, что вращающийся диск подсасывает жидкость на бесконечности со скоростью $v_z(\infty) = -0,886\sqrt{\nu\Omega}$. Затем эта жидкость закручивается вокруг оси

и отбрасывается в тонком пограничном слое, условная толщина которого $l = \sqrt{\nu / \Omega}$.

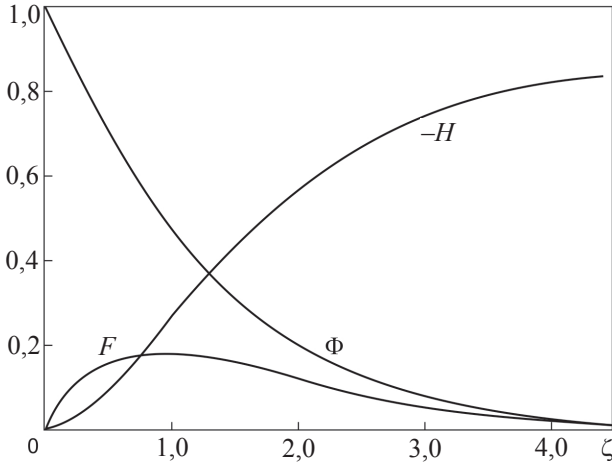


Рис. 15.2. Безразмерные скорости: радиальная (F), тангенциальная (Φ) и вертикальная (H) компоненты скорости

Полученное решение позволяет найти трение на поверхности диска

$$\tau = \rho \nu \left(\frac{\partial v_{\varphi}}{\partial z} \right)_{z=0} = \rho \nu \Omega r \Phi'(0) \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} \quad (15.23)$$

и полный момент силы трения, действующий на диск с двух сторон:

$$M = 2 \int_0^R 2\pi r^2 \tau dr = -\pi R^4 \rho \sqrt{\nu \Omega^3} \Phi'(0), \quad (15.24)$$

где $\pi \Phi'(0) = 1,94$.

Течение, вызываемое вращающимся диском, достаточно устойчивое до высоких угловых скоростей вращения. Затем оно с ростом

угловой скорости вращения теряет устойчивость, и происходит мягкий переход к турбулентности через появления на периферии диска спиральных вихрей. Область со спиральными вихрями с ростом скорости вращения стягивается к центру, а их продолжения вблизи края диска начинают колебаться и турбулизируются. Отметим, что вращающееся дисковое течение было использовано: а) в методе Чохральского роста кристаллов из расплава и б) дисковом вращающемся электроде для исследования закономерностей электрохимических реакций.

ТЕЧЕНИЯ В КОНФУЗОРЕ И ДИФFUЗОРЕ

Двумерное поле скорости жидкости в области между двумя плоскими поверхностями с углом α между ними вызвано источником с объемным расходом Q , расположенным в точке пересечения двух плоскостей. Если $Q < 0$, то такой поток принято называть конфузорным течением. При $Q > 0$ говорят о течении в диффузоре. В задаче возникает число Рейнольдса $Re = \frac{Q}{\nu}$ и интересно проследить изменения в решении с ростом параметра Re .

Задача сводится к одномерной по углу θ . Зависимость от радиуса в единственной ненулевой радиальной компоненте скорости предполагаем в виде

$$v = 6 \frac{\nu}{r} u(\theta),$$

где для функции $u(\theta)$ получаем из радиального уравнения Навье — Стокса нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + 4u + 6u^2 = 2c_1, \quad (15.25)$$

где c_1 — неопределенная пока константа.

Для давления получаем уравнение

$$\frac{P}{\rho} = 2 \frac{6v^2 u}{r^2} + f(r), \quad f(r) = -\frac{6v^2 c_1}{r^2}. \quad (15.26)$$

Уравнение (15.25) интегрируется и дает решение в неявном виде

$$2\theta = \pm \int \frac{du}{\sqrt{c_2 + c_1 u - u^2 - u^3}} + c_3, \quad (15.27)$$

где c_2, c_3 — дополнительные константы интегрирования. Константы c_1, c_2, c_3 определяются из двух граничных условий $u=0$ при $\theta = \pm \alpha / 2$ и из заданного полного расхода жидкости $Q = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} v_r r d\theta$.

Течение в конфузоре ($Q < 0$) не демонстрирует каких-либо особенностей. При малых числах $Re \sim 1$ профили скорости качественно показаны на рис. 15.3, а. Для больших значений $Re \gg 1$ вблизи стенок (при $\theta = \pm \alpha / 2$) возникают тонкие пограничные слои, в которых скорость быстро падает до нуля (рис. 15.3, б). В случае $Re \gg 1$ скорость вне тонких пограничных слоев совпадает со скоростью для стока.

Течение в диффузоре ($Q > 0$) оказывается намного более сложным, чем в конфузоре. Симметричный относительно угла $\theta = 0$ профиль скорости может существовать, как показывает анализ, только до определенных чисел Re (рис. 15.4, а). Затем при увеличении числа Re при некотором значении $Re = Re_1$ происходит спонтанная потеря симметрии профиля скорости. Вблизи одной из стенок (например, при $\theta = -\alpha / 2$) возникает и начинает далее развиваться с ростом Re обратный поток (рис. 15.4, б). Ясно, что также существует и аналогичное решение с обратным током жидкости, возникающим вблизи другой стенки (при $\theta = +\alpha / 2$, что не показано на рисунке). Таким образом, с ростом параметра при $Re = Re_1$ происходит расщепление

симметричного решения на два асимметричных профиля. Это явление называется ветвлением решения, или бифуркацией.

Если дальше увеличивать число Re , то при некотором $Re = Re_2$ обратный поток возникает и у противоположной стенки, далее при $Re > Re_2$ профиль скорости имеет два возвратных потока (рис. 15.4, в) и может при каких-то Re снова стать симметричным.

Если неограниченно увеличивать число Рейнольдса, то в профиле скорости возникает множество обратных потоков. Интересно отметить, что в случае $Q > 0$ и $Re \rightarrow \infty$ или $\nu \rightarrow 0$ предельный профиль скорости ничем не напоминает простое течение в двумерном источнике, в профиле скорости остается только та же зависимость от r : $v \sim \frac{1}{r}$.

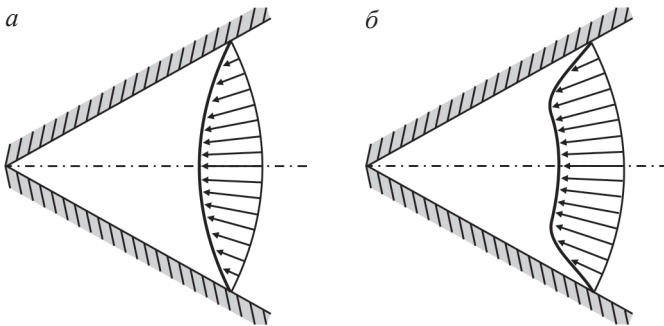


Рис. 15.3. Течение в конфузоре

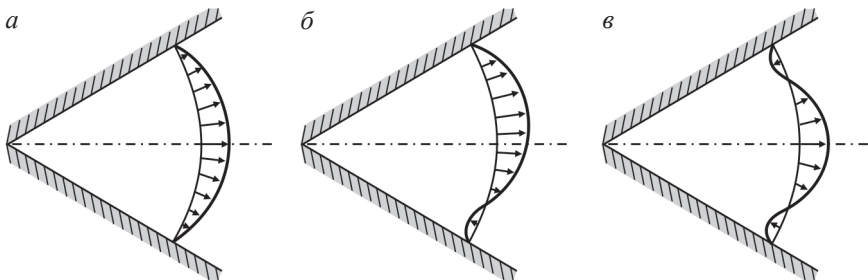


Рис. 15.4. Течение в диффузоре

ЗАТОПЛЕННАЯ СТРУЯ ЛАНДАУ

Ландау (1943) получил интересное решение задачи о струе жидкости, вытекающей из бесконечно тонкой трубки. В этом случае сохраняется поток импульса струи, задаваемый интегралом

$$F_i = \oint_S \Pi_{ik} ds_k = const ,$$

где F_i — сила, действующая на источник в результате вытекания струи. Этот закон сохранения приводит в сферических координатах к определенной зависимости скорости жидкости от радиуса:

$$v_r \sim v_\theta \sim \frac{1}{r} .$$

Для описания поля скорости введем функцию тока Стокса ψ для компонент скорости

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} ; \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} . \quad (15.28)$$

Функция ψ принимает постоянные значения на линиях тока, и скорость в виде (15.28) позволяет удовлетворить уравнение неразрывности

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta v_\theta)}{\partial \theta} = 0 . \quad (15.29)$$

Далее введем представление функции тока в виде

$$\psi = \nu r f(\theta), \quad (15.30)$$

где ν — кинематическая вязкость жидкости. Тогда скорости выражаются в виде

$$v_r = \frac{v}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta}; \quad v_\theta = -\frac{v}{r \sin \theta} f. \quad (15.31)$$

Представим эти скорости в уравнение Навье — Стокса:

$$(\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} + \frac{\nabla P}{\rho} = \nu \Delta \bar{v}. \quad (15.32)$$

Если ввести новую переменную $\xi = \cos \theta$ и для давления использовать представление

$$P - P_\infty = \rho \nu^2 \frac{g(\theta)}{r^2}, \quad (15.33)$$

то из двух уравнений (15.32) получаем

$$g = \frac{f^2}{2(1-\xi^2)} - \frac{1}{2} [ff'' - (1-\xi^2)f'']', \quad (15.34)$$

$$g' = -f'' - \frac{1}{2} \left(\frac{f^2}{1-\xi^2} \right)', \quad (15.35)$$

где штрих означает дифференцирование по ξ . Исключая g из системы (15.34)–(15.35), получаем для f после трехкратного интегрирования по ξ

$$f^2 - 2(1-\xi^2)f' - 4\xi f = c_1 \xi^2 + c_2 + c_3. \quad (15.36)$$

Легко показать, что $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Это следует из условия $f(\xi = \pm 1) = 0$ и нулевой производной левой части уравнения (15.36) в точках на оси симметрии $\xi = \pm 1$. Однородное уравнение (15.36) приводится к линейному уравнению подстановкой

$$f(\xi) = \frac{(1-\xi^2)}{\varphi(\xi)}. \quad (15.37)$$

Для функции $\varphi(\xi)$ получаем уравнение

$$\frac{d}{d\xi}\varphi(\xi) = -\frac{1}{2},$$

интегрируя которое, имеем

$$\varphi(\xi) = \frac{A - \xi}{2},$$

где A — некоторая константа.

Для функции f получаем окончательное выражение

$$f(\xi) = \frac{2(1 - \xi^2)}{A - \xi} = \frac{2\sin^2\theta}{A - \cos\theta}.$$

Функция тока ψ имеет вид

$$\psi = \nu r \frac{2\sin^2\theta}{A - \cos\theta} = \nu \frac{2y^2}{A\sqrt{x^2 + y^2} - x}. \quad (15.38)$$

Из формулы (15.38) получаем линии тока в декартовых координатах. Можно ввести угол полураствора конуса струи θ_0 , считая, что этот конус проходит через точку минимума координаты y на линии тока (рис. 15.5). Из формулы (15.38), зафиксировав значение функции

тока ψ , получаем на линии тока координату $y = r \sin\theta = \frac{\psi(A - \cos\theta)}{\nu \sin\theta}$, минимум которой легко находится при угле θ_0 :

$$\cos\theta_0 = \frac{1}{A}. \quad (15.39)$$

На рис. 15.5 показаны линии тока для значения $A = 1,1$, при котором угол полураствора конуса струи $\theta_0 = 24^\circ 37'$. На рис. 15.6 для разных параметров $A = 1,1; 2; 5,5$ построены линии тока и указаны соответствующие углы θ_0 .

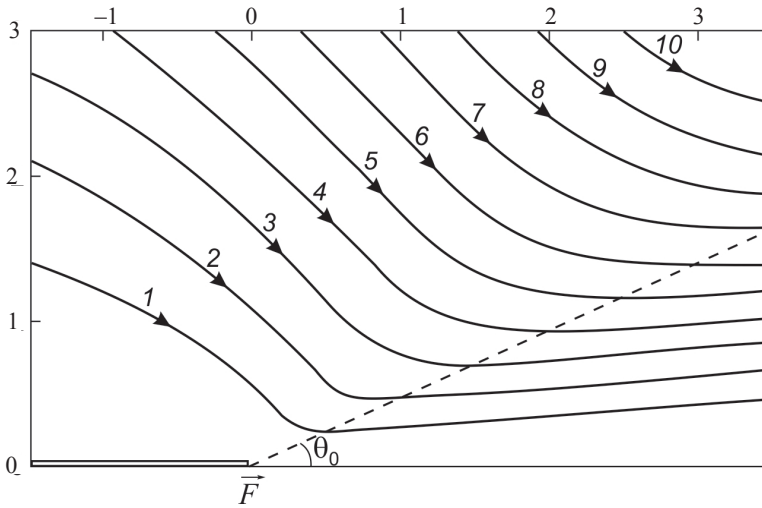


Рис. 15.5. Линии тока для значения $A = 1,1$ с углом полураствора струи $\theta_0 = 24^\circ 37'$

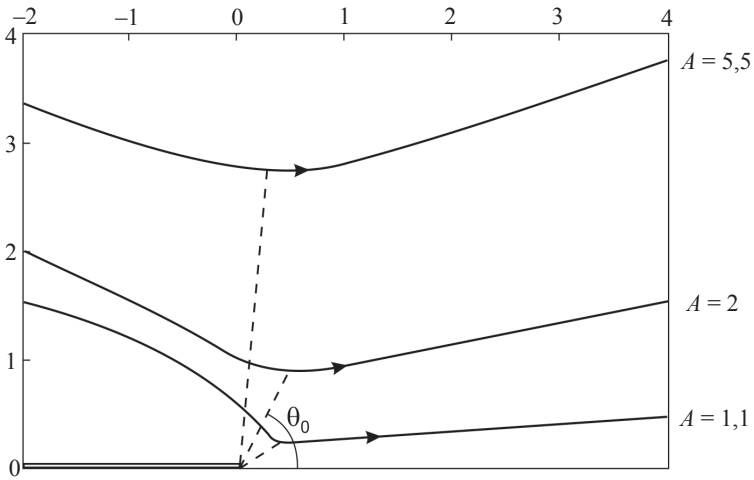


Рис. 15.6. Линии тока для различных значений параметра A

Лекция 15

Сила F , приложенная к источнику, может быть рассчитана по формуле

$$F = \oint_S \Pi_{rr} \cos \theta dS = 16\pi\rho v^2 A \left[1 + \frac{4}{3(A^2 - 1)} + \frac{A}{2} \ln \frac{A-1}{A+1} \right]. \quad (15.40)$$

Из формулы (15.40) получаем для больших значений параметра $A \gg 1$ малую силу F , для которой

$$\cos \theta_0 = \frac{F}{16\pi\rho v^2} \quad (15.41)$$

и угол при вершине конуса $\theta_0 \approx 90^\circ$. Для обратного случая $A \rightarrow 1$ и большой силы $F \gg 1$ получаем, что струя раскрывается на малый полуугол

$$\theta_0 = 8 \sqrt{\frac{2\pi\rho v^2}{3F}}. \quad (15.42)$$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
- Де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964.
- Ламб Г.* Гидродинамика. М.: ОГИЗ, 1947. 929 с.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
- Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973.
- Милн-Томсон Л. М.* Теоретическая гидромеханика. М.: Мир, 1964.
- Протодьяконов И. О., Марцулевич Н. А., Марков А. В.* Явления переноса в процессах химической технологии. Л.: Химия, 1981.
- Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
- Гешев П. И., Черных А. И.* Движение вихрей в двумерной ограниченной области // Теплофизика и аэромеханика. 2018. Т. 25, № 6. С. 841–854.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Лекция 1. Кинематика движений среды. Теоремы Гельмгольца о скорости в окрестности точки и о вихревых трубках. Тензор скоростей деформации	4
Лекция 2. Субстанциональная производная. Объемные и поверхностные силы. Принцип и теорема Коши. Симметрия тензора напряжений	15
Лекция 3. Интегральные и дифференциальные формы законов сохранения для идеальной жидкости. Теорема Кельвина о циркуляции скорости по жидкому контуру. Уравнение гидростатики	26
Лекция 4. Уравнение переноса энергии и энтропии в сплошной среде. Вывод замыкающих соотношений на основе термодинамики неравновесных процессов. Уравнения Навье — Стокса	36
Лекция 5. Эволюционные уравнения для логарифма плотности и завихренности. Порождение, распространение и затухание звука. Уравнение для давления. Формула Био — Савара для скорости, наведенной вихрями	47
Лекция 6. Идеальная жидкость. Законы сохранения. Стационарные течения. Закон Бернулли. Нестационарные течения. Интеграл Коши — Лагранжа	57

Лекция 7. Интегральная теорема импульсов. Примеры.....	72
Лекция 8. Потенциальные движения несжимаемой жидкости	82
Лекция 9. Использование методов ТФКП для расчета потенциальных течений несжимаемой жидкости	100
Лекция 10. Комплексная сила и момент силы, действующие на произвольный контур, обтекаемый потоком жидкости. Формула Чаплыгина — Блазиуса. Гипотеза Жуковского о циркуляции вокруг крыла.....	113
Лекция 11. Динамика вихрей. Интегралы сохранения.....	124
Лекция 12. Диссипация кинетической энергии. Течения вязкой жидкости в трубах и каналах. Критерии подобия	144
Лекция 13. Течение при малых числах Рейнольдса. Решение Стокса для сферы и Адамара — Рыбчинского для капли. Приближение Озеена.....	161
Лекция 14. Течения при больших числах Рейнольдса. Теория пограничного слоя Прандтля.....	175
Лекция 15. Точные решения системы уравнений Навье — Стокса. Задачи с отсосом жидкости в стенку. Течения вблизи критической точки и около вращающегося диска. Течения в конфузоре и диффузоре. Струя Ландау	187
Рекомендуемая литература.....	203

Учебное издание

Гешев Павел Иванович

ОСНОВЫ ГИДРОДИНАМИКИ

Учебное пособие

Редактор *Д. И. Ковалёва*
Верстка *А. С. Терёшкиной*
Обложка *Е. В. Неклюдовой*

Подписано в печать 5.04.2021 г.
Формат 60 × 84 1/16. Уч.-изд. л. 12,8. Усл. печ. л. 11,9.
Тираж 70 экз. Заказ № 156.

Издательско-полиграфический центр НГУ.
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2.