

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

Д.Ф. Сиковский

**Методы вычислительной теплопередачи**

Расширенный конспект лекций

**НОВОСИБИРСК, 2007**

## ИСТОРИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Развитие вычислительной гидрогазодинамики (CFD) началось с появлением компьютеров в начале 50-х годов прошлого века.

**1958 – 1967:** Los Alamos Scientific Lab. (Group T-3) заложены основы таких численных методов, как Particle-in-Cell, Marker-and-Cell и др.

**1960-е–70-е годы:** D.B.Spalding и др.: k-ε-модель турбулентности, алгоритм SIMPLE, модель обрыва вихря при горении (Eddy-Break-Up)

**1980-е годы:** появление первых коммерческих CFD кодов общего назначения PHOENICS, FLUENT, FIDAP, STAR-CD, CFX

**1990-е годы:** начало бурного развития индустрии CFD кодов вызванное ростом производительности компьютеров (закон Мура: производительность удваивается каждые 1.5-2 года). CFD коды становятся инструментами для инженеров-конструкторов.

В настоящее время активно развивается (за рубежом) индустрия пакетов программ (CFD-codes). Мировые лидеры – ANSYS CFX (позиции которого станут доминирующими после поглощения Fluent Inc.), CD adapco Group (пакеты StarCD, StarCCM+), и др.

Для дальнейшего распространения применения CFD кодов в промышленности как необходимого звена процесса конструирования, производства и поддержки продукта необходимо упрощение и автоматизация процедуры их использования, в особенности, импорта геометрии, генерации сетки и контроля процесса решения. Важную роль здесь играет дальнейшее развитие моделей турбулентности, в особенности, турбулентного теплопереноса.

Современные тенденции: интеграция с семейством пакетов программ для инженеров-конструкторов CAD, SolidWorks

### CFD КАК ВЕТВЬ АЭРОГИДРОДИНАМИКИ

В настоящее время вычислительная гидродинамика является одной из ветвей современной гидродинамики, в которой можно выделить три направления:

1) Теоретическая гидрогазодинамика: точные решения уравнений Навье-Стокса, построение решений с помощью асимптотических методов (теория пограничного слоя, теория групп и др.) и методов статистической физики (теория турбулентности)

2) Экспериментальная гидрогазодинамика: получение новой информации о свойствах потоков, проверка справедливости и пригодности приближённых решений уравнений гидрогазодинамики

3) Вычислительная гидрогазодинамика: дополнение экспериментальной и теоретической гидродинамики – альтернативное и экономически эффективное средство моделирования реальных течений.

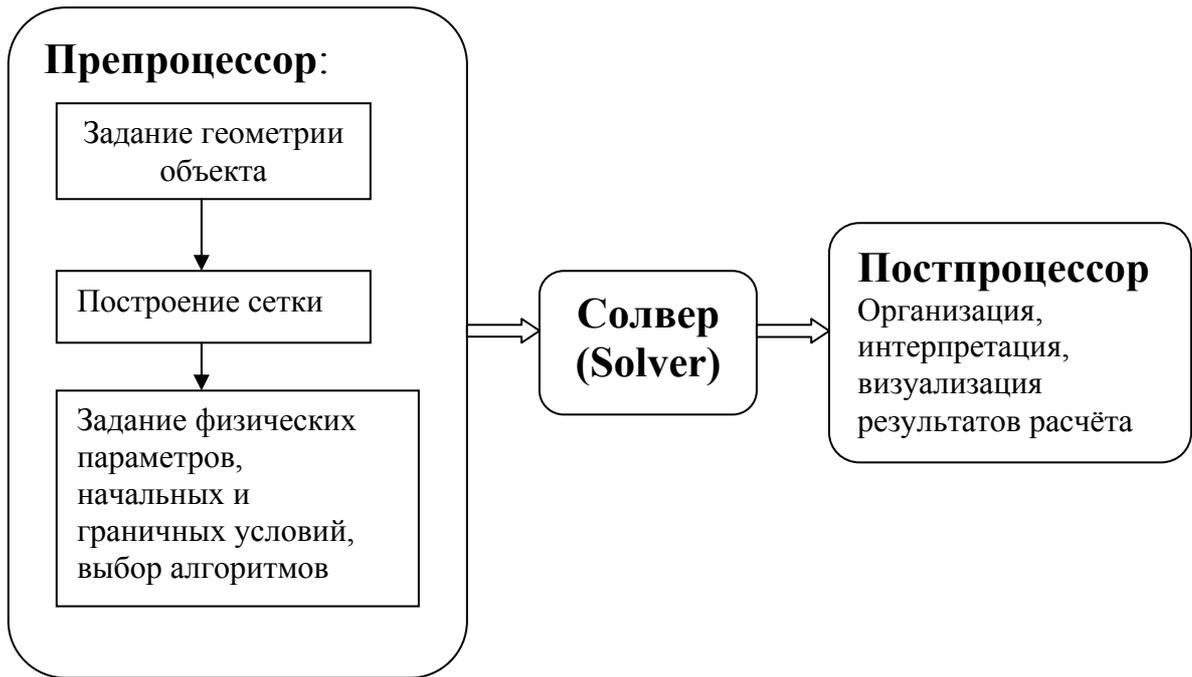
Преимущества CFD перед экспериментальной гидрогазодинамикой:

- 1) снижение времени предварительной подготовки при проектировании и при разработке
- 2) возможность моделирования условий течений, труднопроизводимых в эксперименте
- 3) получение более широкой и подробной информации о физических величинах потока
- 4) меньшая стоимость работ

Области применения:

- 1) Аэрокосмическая индустрия
- 2) Автомобильная промышленность
- 3) Медицина и биомедицина
- 4) Химическая промышленность
- 5) Производство товаров потребления
- 6) Охлаждение электронных приборов
- 7) Задачи динамики окружающей среды
- 8) Пищевая промышленность
- 9) Энергетика
- 10) Машиностроение
- 11) Металлургия
- 12) Нефтегазовый комплекс
- 13) Производство полимеров
- 14) Спортивная индустрия

## Структура CFD-пакета программ



### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АЭРОГИДРОДИНАМИКИ И ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

Уравнения переноса, следующие из законов сохранения массы, импульса, энергии

Уравнение неразрывности: 
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0$$

Уравнение переноса импульса: 
$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i + \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Тензор напряжений ньютоновской жидкости 
$$\Pi_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \zeta \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

Тензор напряжений реологической или турбулентной среды 
$$\Pi_{ij} = L_{ij} [\vec{u}(\vec{x}', t'); \vec{x}, t], t' < t$$

Уравнение переноса тепла (несжимаемая жидкость):

$$\rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \Pi_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \sigma_T$$

Уравнение диффузии: 
$$\frac{\partial C}{\partial t} + u_i \frac{\partial C}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( D \frac{\partial C}{\partial x_i} \right) + \sigma_c$$

Уравнения пограничного слоя вдоль плоской поверхности, обтекаемой потоком со скоростью  $U(x)$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U(x)U'(x) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = +a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

### НАЧАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

1. *Условие Дирихле*  $u_i(\vec{x}, t) = f_i(x, t)$  на границе области.

Примеры: условие прилипания для скорости на твёрдых границах  $\vec{u} = 0$ ,  
условие заданной температуры на границе

2. *Условие Неймана*  $\frac{\partial u_i(\vec{x}, t)}{\partial n} = g_i(\vec{x}, t)$  на границе области.

Примеры: заданный поток тепла на границе  $\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = q_w(\vec{x}, t)$

3. *Смешанные граничные условия*  $\frac{\partial u_i(\vec{x}, t)}{\partial n} + \kappa u_i(\vec{x}, t) = g_i(\vec{x}, t)$  на границе области.

Примеры: условие теплоотдачи  $\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = h_w(T - T_a) + \varepsilon \sigma(T^4 - T_a^4)$

пристеночные функции для турбулентного течения вблизи твёрдой границы

$$\frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=y_1} = \frac{v_\tau(U_1, y_1, \nu)}{\kappa y_1}$$

## МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

**Дискретизация уравнений** – замена непрерывной области совокупностью изолированных точек (**сетка**), причём решение уравнений ищется только в этих точках (**узлах сетки**).

Уравнение в частных производных сводится к системе алгебраических уравнений.

### Основные обозначения, которые будут использоваться в дальнейшем

на примере решения некоторой задачи  $u(x, y)$  в прямоугольнике  $0 \leq x \leq L_x$ ,  $0 \leq y \leq L_y$

Введём декартову сетку, узлы которой являются точками пересечений линий декартовой системы координат с абсциссами  $\{x_i\}$  и ординатами  $\{y_j\}$ , где  $i = 1, \dots, N_x$ ,  $j = 1, \dots, N_y$  – индексы узлов,  $N_x$ ,  $N_y$  – количество узлов вдоль  $x$ - и  $y$ -направлений.

Значение вычисляемой переменной в узле сетки с **пространственными** координатами  $x_i$  и  $y_j$  обозначается **нижними** индексами:

$$u_{ij} = u(x_i, y_j)$$

Если имеется зависимость от времени, то аналогично вводится временная сетка  $\{t_n\}$ , при этом номер узла во времени обозначается **верхним** индексом

$$u_{ij}^n = u(x_i, y_j, t_n)$$

Верхним индексом обозначается также любая маршевая координата.

Шаг сетки:  $h_i^x = x_i - x_{i-1}$

В случае если в уравнениях присутствуют производные не только от физической величины, но и от её градиентов (потоков), удобно вводить также значения функции в **полуцелых узлах** сетки

$$u_{i-1/2,j} = u\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, y_j\right)$$



КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
ОПЕРАТОРОВ

Математический аппарат – ряд Тейлора.

**Определение:** Пусть  $Lu(x)$  – дифференциальное выражение, а  $L_h u_i$  – его конечно-разностное выражение в точке  $x_i$ . Если при достаточно малых  $h$  имеет место соотношение

$$Lu(x_i) - L_h u_i = \psi_i = O(h^\gamma), \quad \gamma > 0$$

то  $\psi_i$  называется погрешностью аппроксимации (невязкой), а величина  $\gamma$  – порядком аппроксимации.

Символ  $O$  широко используется в асимптотических методах. Выражение  $f(x) = O(g(x))$  для всех  $x \in S$  означает, что существует такая константа  $K$ , не зависящая от  $x$ , что для всех  $x \in S$  имеет место  $|f(x)| \leq K|g(x)|$ .

**Конечно-разностные аппроксимации первой производной**

**правая разность** (берутся величины по правую сторону от узла):

$$\nabla^+ u_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i + \psi_i^+$$

**левая разность** (берутся величины по левую сторону от узла):  $\nabla^- u_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i + \psi_i^-$

где  $\psi_i^\pm$  – погрешности аппроксимаций.

Из формулы Тейлора следует

$$\psi_i^+ = \frac{h_{i+1}}{2!} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i + \frac{h_{i+1}^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_i + O(h_{i+1}^3), \quad \psi_i^- = -\frac{h_i}{2!} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i + \frac{h_i^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_i + O(h_i^3)$$

т.е.  $\psi_i^\pm = O(h)$  – правая и левая разности имеют погрешность аппроксимации **первого порядка**.

Если сложим правую разность, умноженную на  $h_i$  и левую разность, умноженную на  $h_{i+1}$ , то главные члены погрешностей сократятся, что позволяет нам повысить порядок аппроксимации производной до второго

$$\nabla u_i = \frac{h_i \nabla^+ u_i + h_{i+1} \nabla^- u_i}{h_i + h_{i+1}} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i + \frac{h_i h_{i+1}}{3!} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_i + O(h_i^3)$$

на равномерной сетке  $h_i = h$  получаем **центральную разность**  $\nabla u_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$

### **Конечно-разностная аппроксимация второй производной**

Для получения аппроксимации второй производной применим два раза центрально-разностный оператор

$$\nabla^2 u_i = \frac{\nabla u_{i+1/2} - \nabla u_{i-1/2}}{\hbar_i} = \frac{1}{\hbar_i} \left( \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right), \text{ где } \hbar_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2} - \text{ шаг «полуцелой сетки»}$$

Применяя формулу Тейлора, можно показать, что

$$\nabla^2 u_i = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i + \frac{h_{i+1} - h_i}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_i + \frac{h_{i+1}^2 - h_i h_{i+1} + h_i^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_i + O(h_i^3)$$

т.е.  $\nabla^2 u_i$  является аппроксимацией первого порядка.

На «слабонеровномерных» сетках, таких, что  $h_{i+1} - h_i = O(h^2)$ ,  $\nabla^2 u_i$  можно рассматривать, как аппроксимацию второго порядка.

На равномерной сетке  $\nabla^2 u_i$  является аппроксимацией второго порядка:

$$\nabla^2 u_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i + O(h^2)$$

### **Конечно-разностная аппроксимация диффузионного оператора**

$$\frac{d}{dx} \left[ \lambda(x) \frac{du}{dx} \right] \Big|_i = \frac{1}{\hbar_i} \left( \lambda_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - \lambda_{i-1/2} \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right) + \psi_i$$

$$\psi_i = \frac{h_{i+1} - h_i}{12} \left[ \lambda u''' + 3(\lambda u')'' \right] \Big|_i + O(h^2)$$

### **Компактные аппроксимации высоких порядков точности**

Рассмотрим выражение для невязки конечно разностной аппроксимации второй производной

$$\nabla^2 u_i = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_i + O(h^4)$$

Введём обозначение  $q = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  и перепишем выражение следующим образом

$$\nabla^2 u_i = q_i + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \Big|_i + O(h^4) = q_i + \frac{h^2}{12} \nabla^2 q_i + O(h^4), \text{ или}$$

$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = \frac{q_{i+1} + 10q_i + q_{i-1}}{12} + O(h^4)$  – неявная аппроксимация второй производной четвёртого порядка, построенная на трёхточечном шаблоне.

## КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Определение:** Если при достаточно малых  $h$  после подстановки решения  $u(x)$  дифференциального уравнения  $Lu(x) = f(x)$  в его конечно-разностную аппроксимацию  $L_h U_i = P_h f_i$  в виде  $u_i = u(x_i)$  выполняется соотношение

$$L_h u_i - P_h f_i = \psi_i = O(h^\gamma), \quad \gamma > 0$$

то  $\psi_i$  называется погрешностью аппроксимации (невязкой) разностного уравнения, а величина  $\gamma$  – порядком аппроксимации.

### Аппроксимации уравнения конвекции-диффузии

Одномерное стационарное уравнение конвекции-диффузии:

$$u(x) \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ \lambda(x) \frac{d\varphi}{dx} \right] - k(x)\varphi + \sigma$$

Рассмотрим конечно-разностную аппроксимацию

$$u_i \left[ \alpha \nabla^+ \varphi_i + (1 - \alpha) \nabla^- \varphi_i \right] = \frac{1}{h_i} \left( \lambda_{i+1/2} \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h_{i+1}} - \lambda_{i-1/2} \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h_i} \right) - k_i \varphi_i + \sigma_i, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

(\*)

погрешность аппроксимации которой на «слабонервномерной» сетке составляет

$$\frac{u_i [\alpha h_{i+1} - (1 - \alpha) h_i]}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_i + O(h^2)$$

Конечно-разностную схему (\*) можно записать в виде трёхточечного разностного уравнения

$$\boxed{a_i \varphi_{i+1} + d_i \varphi_i + b_i \varphi_{i-1} = c_i} \quad (**)$$

$$a_i = \alpha \frac{u_i}{h_{i+1}} - \frac{\lambda_{i+1/2}}{h_i h_{i+1}}, \quad b_i = -(1 - \alpha) \frac{u_i}{h_i} - \frac{\lambda_{i-1/2}}{h_i h_i}, \quad d_i = k_i - a_i - b_i, \quad c_i = \sigma_i$$

$d_i$  – диагональный коэффициент

$a_i, b_i$  – внедиагональные коэффициенты разностного уравнения

**Принцип максимума:** Если в разностном уравнении (\*\*) правая часть положительна (отрицательна):  $c_i \geq 0$  ( $c_i \leq 0$ ) для всех  $i$ , то при выполнении условий  $d_i > 0$ ,  $a_i, b_i < 0$ , а также условия диагонального преобладания:

$$d_i \geq -a_i - b_i, \text{ (преобладание по строкам), или}$$

$$d_i \geq -a_{i-1} - b_{i+1}, d_1 \geq -b_2, d_N \geq -a_{N-1} \text{ (преобладание по столбцам)}$$

имеет место  $\varphi_i \geq 0$  ( $\varphi_i \leq 0$ )

*Доказательство* проводится от противного. Предположим, что при положительной правой части  $c_i \geq 0$  решение  $\varphi_i$  не везде неотрицательно. Пусть  $\varphi_k$  – наименьшее отрицательное значение. Тогда можно записать

$$a_k \varphi_{k+1} + d_k \varphi_k + b_k \varphi_{k-1} = a_k (\varphi_{k+1} - \varphi_k) + (d_k + a_k + b_k) \varphi_k + b_k (\varphi_{k-1} - \varphi_k) = c_k$$

левая часть – отрицательна, правая – положительна  $\Rightarrow$  противоречие.

Разностные схемы, удовлетворяющие принципу максимума, называются **монотонными**. Условие монотонности необходимо для обеспечения отсутствия осцилляций в численном решении.

Рассмотрим условия монотонности для выписанной выше схемы. Из условия диагонального преобладания следует прежде всего условие для коэффициента  $k$

$$1) k_i \geq 0$$

Из условия отрицательности внедиагональных коэффициентов следует

$$2) \alpha \frac{u_i \bar{h}_i}{\lambda_{i+1/2}} \leq 1, \text{ при } u_i > 0,$$

$$-(1 - \alpha) \frac{u_i \bar{h}_i}{\lambda_{i-1/2}} \leq 1, \text{ при } u_i < 0$$

Схема с центрально-разностной аппроксимацией конвективного члена  $\alpha = 1/2$ , которая имеет второй порядок аппроксимации, монотонна при выполнении следующего условия на *сеточное число Пекле*

$$Pe_i = \frac{u_i \bar{h}_i}{\min\{\lambda_{i+1/2}, \lambda_{i-1/2}\}} \leq 2$$

Чтобы сделать схему монотонной при любых сеточных числах Пекле, используют аппроксимацию конвективного члена **разностями против потока**, для которой:

$$\alpha = 0, \text{ при } u_i > 0$$

$$\alpha = 1, \text{ при } u_i < 0$$

$$u(x) \frac{d\varphi}{dx} \Big|_i = u_i^+ \nabla^+ \varphi_i + u_i^- \nabla^- \varphi_i, \text{ где } u_i^+ = \frac{u_i + |u_i|}{2}, u_i^- = \frac{u_i - |u_i|}{2}$$

Однако, эта схема имеет первый порядок аппроксимации. Рассмотрим один из способов повышения точности аппроксимации.

Погрешность аппроксимации схемы с разностями против потока равна

$$\begin{aligned} \psi_i &= \frac{(u_i^+ h_{i+1} - u_i^- h_i)}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_i + O(h^2) = \frac{[|u_i| \tilde{h}_i + u_i (h_{i+1} - h_i)/2]}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_i + O(h^2) = \\ &= \frac{|u_i| \tilde{h}_i}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_i + O(h^2) \text{ («схемная вязкость»)} \end{aligned}$$

Для достижения второго порядка аппроксимации можно видоизменить коэффициенты диффузии в схеме следующим образом

$$\lambda_{i\pm 1/2} \rightarrow \lambda_{i\pm 1/2} - \frac{|u_i| \tilde{h}_i}{2}$$

порядок аппроксимации не изменится, если примем  $\lambda_{i\pm 1/2} \rightarrow \frac{\lambda_{i\pm 1/2}}{1 + \frac{|u_i| \tilde{h}_i}{2\lambda_{i\pm 1/2}}}$

Такая схема называется схемой Самарского (А.А.Самарский, 1965).

## КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ АППРОКСИМАЦИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

### Одномерные задачи

Условие Дирихле:  $u|_{x=a} = u_a, u|_{x=b} = u_b$

1) Граница области совпадает с узлами сетки:  $x_0 = a, x_N = b$

$$u_0 = u_a, u_N = u_b$$

2) не совпадает:  $x_0 \neq a$ . Используем разложение в ряд Тейлора

$$u_a = u_0 + u'_0(a - x_0) + O(h^2)$$

для сохранения порядка аппроксимации достаточно аппроксимировать  $u'_0$  правой разностью с первым порядком, в итоге получим

$$u_0 = \frac{u_a h_1 - u_1(a - x_0)}{x_1 - a} \quad (\text{метод линейной интерполяции})$$

Смешанное граничное условие:  $\alpha u - \beta \frac{\partial u}{\partial n} = \gamma$ , при  $x = a$

Поступая аналогичным образом, получим

$$\alpha \frac{x_1 - a}{h_1} u_0 + \alpha \frac{a - x_0}{h_1} u_1 - \beta \frac{u_1 - u_0}{h_1} = \gamma$$

точность аппроксимации определяется точностью аппроксимации производной –  $O(h)$ , за исключением случая, когда  $a = x_{1/2}$ , когда точность аппроксимации =  $O(h^2) \Rightarrow$  выгодно размещать границу в полуцелом узле сетки.

Перепишем в виде

$$[\alpha(x_1 - a) + \beta]u_0 - [\beta - \alpha(a - x_0)]u_1 = \gamma h_1$$

откуда следует, что при  $\alpha\beta < 0$  разностное уравнение не является уравнением положительного типа. При  $\alpha\beta \geq 0$  оно обладает таким свойством только при достаточно малых шагах сетки, конкретнее, при  $[\alpha(x_1 - a) + \beta][\beta - \alpha(a - x_0)] \geq 0$

Если нормаль к границе совпадает с одной из координатных линий, то методы аппроксимации сводятся к одномерным (остальные координаты входят, как параметры).

Если граница нерегулярной формы, то можно

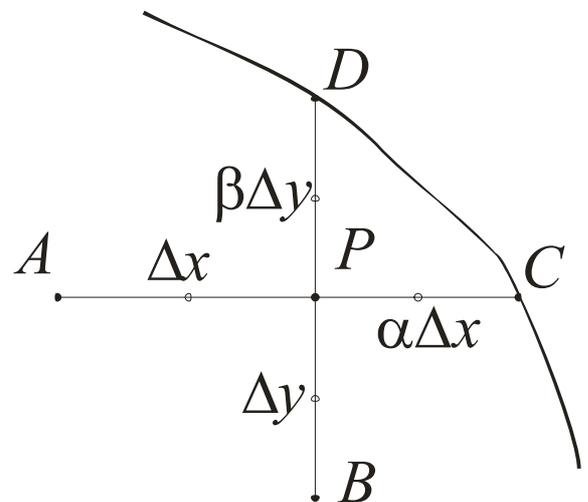
задать граничные условия двумя способами:

1) используя линейную интерполяцию по одному из направлений:

$$u_P = u_A + \frac{\Delta x}{\Delta x + \alpha \Delta x} (u_C - u_A)$$

$$u_P = u_B + \frac{\Delta y}{\Delta y + \beta \Delta y} (u_D - u_B)$$

или среднее арифметическое обоих выражений



Конечно-разностная сетка вблизи нерегулярной границы

2) построив конечно-разностную схему для усечённого шаблона (проще с помощью интегро-интерполяционного метода).

## МЕТОД КОНЕЧНЫХ ОБЪЕМОВ

Дифференциальные уравнения переноса эквивалентны некоторым интегральным законам сохранения. Эти интегральные законы сохранения также могут быть аппроксимированы путём применения квадратурных формул приближения интегралов для каждой элементарной ячейки сетки (объёма). Такой метод получил название **метода конечных объёмов**. Такой метод позволяет построить консервативные разностные схемы, т.е. схемы для которых выполняются сеточные аналоги законов сохранения.

### Интегро-интерполяционный метод построения разностных схем

Рассмотрим одномерное уравнение диффузии

$$u(x) \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ \lambda(x) \frac{d\varphi}{dx} \right] - k(x)\varphi + \sigma$$

Обозначим поток величины  $\varphi$ , как  $q = -\lambda d\varphi/dx$

$$u(x) \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{dq}{dx} - k(x)\varphi + \sigma$$

и проинтегрируем его в интервале  $[x_{i-1/2}; x_{i+1/2}]$

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x) \frac{d\varphi}{dx} dx = -q_{i+1/2} + q_{i-1/2} + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [\sigma - k\varphi] dx \quad (*)$$

Потоки в полужелтых узлах выразим, интегрируя соотношение  $d\varphi/dx = -q/\lambda$  в интервале  $[x_{i-1}; x_i]$

$$\varphi_i - \varphi_{i-1} = -\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{q(x)}{\lambda(x)} dx = -q_{i-1/2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{\lambda(x)} + O(h^3)$$

Обозначив

$$\lambda_{i-1/2} = \left[ \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{\lambda(x)} \right]^{-1}$$

можно записать

$$q_{i-1/2} = -\lambda_{i-1/2} \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h_i} + O(h^2)$$

Источниковые члены аппроксимируем с помощью формулы прямоугольников

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [\sigma - k\varphi] dx = \bar{h}_i [\sigma_i - k_i \varphi_i] + O(h^3)$$

Конвективное слагаемое можно аппроксимировать, например, таким образом

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x) \frac{d\varphi}{dx} dx = \int_{\varphi_{i-1/2}}^{\varphi_{i+1/2}} u d\varphi = u_i (\varphi_{i+1/2} - \varphi_{i-1/2}) + O(h^3) = u_i \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1})}{2} + O(h^3)$$

Подставляя полученные выражения в исходное уравнение (\*), получим

$$u_i \nabla \varphi_i = \frac{1}{\bar{h}_i} \left( \lambda_{i+1/2} \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h_{i+1}} - \lambda_{i-1/2} \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h_i} \right) - k_i \varphi_i + \sigma_i + O(h^2)$$

что эквивалентно полученной выше аппроксимации уравнения диффузии с помощью метода конечных разностей.

Формы аппроксимации членов конвективного переноса с помощью различных квадратурных формул соответствуют разным типам разностных схем МКР:

$$1) \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x) \frac{d\varphi}{dx} dx = \int_{\varphi_{i-1/2}}^{\varphi_{i+1/2}} u d\varphi = u_i (\varphi_{i+1/2} - \varphi_{i-1/2}) + O(h^3) = u_i \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1})}{2} + O(h^3) -$$

эквивалентна схеме МКР с центральными разностями

$$2) \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x) \frac{d\varphi}{dx} dx = \frac{1}{2} [u_{i+1/2} (\varphi_{i+1} - \varphi_i) + u_{i-1/2} (\varphi_i - \varphi_{i-1})] + O(h^3)$$

$$3) \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x) \frac{d\varphi}{dx} dx = u_i^+ (\varphi_i - \varphi_{i-1}) + u_i^- (\varphi_{i+1} - \varphi_i) + O(h^2) - \text{ эквивалентна разностям}$$

против потока

### **Преимущества метода конечных объёмов:**

- 1) Выполнение законов сохранения
- 2) Возможность расчёта уравнений с разрывными коэффициентами переноса

## УСТОЙЧИВОСТЬ, СОГЛАСОВАННОСТЬ И СХОДИМОСТЬ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Можно ли быть уверенным, что численное решение дифференциального уравнения в частных производных будет близким к точному решению?

Можно, если разностная схема удовлетворяет условиям **согласованности** и **устойчивости**.

Система алгебраических уравнений, полученных в процессе дискретизации, **согласуется** с исходным дифференциальным уравнением в частных производных, если в пределе, когда размеры ячеек сетки стремятся к нулю, система алгебраических уравнений эквивалентна дифференциальному уравнению в частных производных в каждом узле сетки.

Проверка на согласованность: точное решение подставляется в конечно-разностные уравнения с последующим разложением всех узловых значений в ряд Тейлора в окрестности одной точки. Полученное выражение должно состоять из исходного дифференциального уравнения + остаточного члена. Если остаточный член стремится к нулю при измельчении сетки, конечно-разностная схема является согласованной.

*Пример*: уравнение конвекции-диффузии  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$

и его конечно-разностная аппроксимация  $\frac{\varphi_i^n - \varphi_i^{n-1}}{\tau} + u_i \frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_{i-1}^n}{2h} = D \frac{\varphi_{i+1}^n - 2\varphi_i^n + \varphi_{i-1}^n}{h^2}$

Заменяем каждый член разложениями в ряд Тейлора:

$$\varphi_{i\pm 1}^n = \varphi_i^n \pm h \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_i + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_i \pm \frac{h^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right|_i + \frac{h^4}{4!} \left. \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \right|_i + O(h^5)$$

$$\varphi_i^{n-1} = \varphi_i^n - \tau \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_i + \frac{\tau^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right|_i + O(\tau^3)$$

и подставляем в КРС

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} - D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_i - \frac{\tau}{2} \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right|_i + \frac{h^2}{6} u \left. \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right|_i - \frac{h^2}{12} D \left. \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \right|_i = O(\tau^2)$$

из исходного уравнения можно выразить все временные производные через пространственные

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left( D \frac{\partial^2}{\partial x^2} - u \frac{\partial}{\partial x} \right)^2$$

в результате получим

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} - D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_i - \frac{u^2 \tau}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_i + \frac{uh^2}{6} \left( 1 + \frac{6D\tau}{h^2} \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \Big|_i - \frac{h^2}{12} D \left( 1 + \frac{6D\tau}{h^2} \right) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \Big|_i = O(\tau^2, h^3)$$

видно, что для согласованности необходимо выполнение условий на шаги сетки

$$\tau \ll \frac{D}{u^2}, \quad \frac{h^2}{L^2} \ll 1, \quad \text{где } L - \text{характерный масштаб длины изменения поля } \varphi(x, t)$$

### Устойчивость конечно-разностных схем. Метод фон Неймана

Не всякая согласованная конечно-разностная схема обеспечивает сходимость численного решения к решению исходного дифференциального уравнения в частных производных. Необходимо также, чтобы она была устойчивой.

**Два определения устойчивости:**

1) Пусть для приближённого решения задачи

$$Lu = f$$

составлена разностная схема

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)} \tag{1}$$

Разностная схема (1) называется устойчивой, если существуют числа  $h_0 > 0$ ,  $\delta > 0$  такие, что при любом  $h < h_0$  и  $\| \varepsilon^{(h)} \| < \delta$  разностная задача

$$L_h z^{(h)} = f^{(h)} + \varepsilon^{(h)}$$

имеет единственное решение  $z^{(h)}$ , удовлетворяющее оценке

$$\| z^{(h)} - u^{(h)} \| \leq c \| \varepsilon^{(h)} \|, \tag{2}$$

где  $c$  не зависит от  $h$ .

2) Разностная схема (1) называется устойчивой, если для любого  $f^{(h)}$  уравнение (1) имеет единственное решение, для которого справедлива оценка

$$\| u^{(h)} \| \leq c \| f^{(h)} \|$$

**Теорема (Лакс):** Пусть разностная схема  $L_h u^{(h)} = f^{(h)}$  аппроксимирует задачу  $Lu = f$  с порядком  $h^k$  и устойчива. Тогда решение  $u^{(h)}$  разностной задачи сходится к  $[u]_h$ , как

$$\| [u]_h - u^{(h)} \| = O(h^k)$$

Доказательство: Невязка  $\delta f^{(h)}$  точного решения, определяемая путем подстановки точного решения  $[u]_h$  в конечно-разностное уравнение (1)

$$L_h [u]_h = f^{(h)} + \delta f^{(h)}$$

удовлетворяет оценке

$$\| \delta f^{(h)} \| = O(h^k)$$

Положим  $\varepsilon^{(h)} = \delta f^{(h)}$ ,  $z^{(h)} = [u]_h$ . Тогда оценка (2) принимает вид

$$\| [u]_h - u^{(h)} \| \leq c \| \delta f^{(h)} \| = O(h^k)$$

*Необходимым и достаточным условием сходимости разностной схемы для решения корректно поставленной задачи с начальными данными является выполнение условий согласованности и устойчивости.*

### Пример 1

Проанализируем на устойчивость явную схему для уравнения теплопроводности

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = a \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h^2} \quad (*)$$

Решение этого уравнения можно представить в виде суммы точного решения разностного уравнения и погрешности округления:  $T_i^n = \tilde{T}_i^n + \varepsilon_i^n$ . Тогда, подставляя это выражение в (\*) получим уравнение для погрешности

$$\frac{\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n}{\tau} = a \frac{\varepsilon_{i+1}^n - 2\varepsilon_i^n + \varepsilon_{i-1}^n}{h^2}, \text{ или } \varepsilon_i^{n+1} = s\varepsilon_{i+1}^n + (1-2s)\varepsilon_i^n + s\varepsilon_{i-1}^n, \text{ где } s = \frac{a\tau}{h^2} \quad (**)$$

Представим погрешность  $\varepsilon(x)$  в виде суммы ряда Фурье<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Представление Фурье для функции  $g(x)$  на интервале  $0 \leq x \leq L$  имеет вид

$$g(x) = \sum_m g_m e^{ik_m x}, \quad k_m = \frac{2\pi m}{L}, \quad g_m = \frac{1}{L} \int_0^L g(x) e^{-ik_m x} dx$$

Для сеточной функции Фурье-амплитуда записывается, как аппроксимация

$$g_m = \frac{1}{L} \int_0^L g(x) e^{-ik_m x} dx \approx \frac{h}{L} \sum_{j=0}^N g_j \exp\left(-i \frac{2\pi h}{L} mj\right)$$

$$\varepsilon(x, t) = \sum_m \varepsilon_m(t) e^{ik_m x}, \text{ где } k_m = \frac{2\pi m}{L}, \varepsilon_m = \frac{1}{L} \int_0^L \varepsilon(x) e^{-ik_m x} dx$$

Линейность уравнения позволяет рассматривать каждую гармонику по отдельности.

Ищем решение (\*\*\*) в виде  $\varepsilon_i^n = G^n e^{ikx}$ ; подставляя в (\*\*), получаем

$$G = se^{ikh} + 1 - 2s + se^{-ikh} = 1 - 4s \sin^2 \frac{kh}{2}$$

Величина  $G$  называется коэффициентом перехода (amplification factor).

Для устойчивости необходимо, чтобы  $|G| \leq 1$ , что выполняется при  $s \leq \frac{1}{2}$ , или  $\frac{a\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$

### Пример 2

Проанализируем устойчивость схемы с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространству (ВВЦП) для решения одномерного уравнения конвекции

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Схема имеет вид

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} = 0$$

Подставляя  $u_i^n = G^n e^{ikx}$ , находим  $G = 1 - i \frac{c\tau}{h} \sin kh = 1 - iC \sin kh$ , где  $C = \frac{c\tau}{h}$  – так

называемое число Куранта.

Схема **безусловно неустойчива**.

Применим вместо центральной разности левую разность (разность против потока)

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} = 0$$

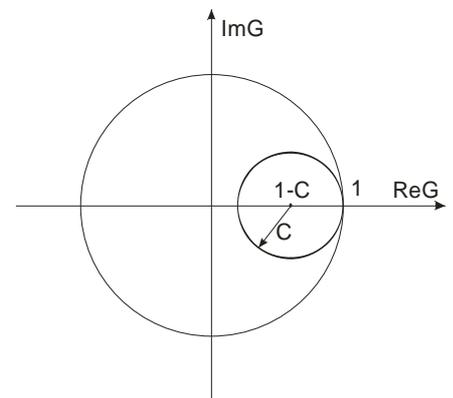
В этом случае  $G = 1 - C(1 - e^{-ikx}) = 1 - C + Ce^{-ikx}$

Модуль  $G$  меньше единицы и схема устойчива (см. рисунок), когда выполняется **условие Куранта-Фридрихса-Леви**

$$0 < C < 1$$

применимое ко всем явным схемам для уравнений гиперболического типа.

Условие КФЛ означает, что частица среды за один шаг по времени не должна продвигаться более чем на один пространственный шаг.



# МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

## ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ

Методы решения систем с трёхдиагональными матрицами

$$(Au)_i = -a_i u_{i-1} + b_i u_i - c_i u_{i+1} = f_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad a_1 = c_N = 0 \quad (*)$$

В развернутом виде:

$$\begin{aligned} b_1 u_1 - c_1 u_2 &= f_1 \\ -a_2 u_1 + b_2 u_2 - c_2 u_3 &= f_2 \\ &\dots \\ -a_N u_{N-1} + b_N u_N &= f_N \end{aligned}$$

Первая и последняя строчки представляют собой граничные условия, поэтому важно, чтобы конечно-разностная формулировка граничных условий была двухточечной:

$$\text{Дирихле: } b_1 = 1, c_1 = 0, f_1 = u_a$$

$$\text{Неймана: } b_1 = 1, c_1 = 1, f_1 = -h_2 \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_{1/2}}$$

### Метод прогонки (Thomas Algorithm, TDMA)

Ищем решение (\*) в виде  $u_i = \beta_i u_{i+1} + z_i$ ,  $i = N, \dots, 1$

Подставляем  $u_{i-1} = \beta_{i-1} u_i + z_{i-1}$  в (\*) и получаем

$$u_i = \frac{c_i}{b_i - a_i \beta_{i-1}} u_{i+1} + \frac{f_i + a_i z_{i-1}}{b_i - a_i \beta_{i-1}}$$

отсюда

$$\beta_i = \frac{c_i}{b_i - a_i \beta_{i-1}}, \quad z_i = \frac{f_i + a_i z_{i-1}}{b_i - a_i \beta_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, N$$

Если система (\*) обладает свойством диагонального преобладания:

$a_i \neq 0, c_i \neq 0$  для  $i = 2, \dots, N-1$ ,  $|b_i| \geq |a_i| + |c_i|$ , причём хотя бы для одного  $i$  неравенство строгое, то метод прогонки корректен.

Доказательство: Для  $i=1$ ,  $|\beta_i| \leq 1$

Для  $i > 1$ ,  $|b_i - a_i \beta_{i-1}| \geq \|b_i\| - \|a_i\| \|\beta_{i-1}\| \geq \|b_i\| - \|a_i\| \geq \|c_i\| \Rightarrow |\beta_i| \leq 1$

Доказательство справедливо только при абсолютно точной арифметике. Рассмотрим симметричную матрицу  $b_i = 2$ ,  $a_i = c_i = 1$  для  $i = 1, \dots, N-1$ ,  $a_N = b_N = 1$ . Для такой матрицы

$$\beta_i = \frac{1}{2 - \beta_{i-1}}, \quad 1 - \beta_i = \frac{1 - \beta_{i-1}}{1 + (1 - \beta_{i-1})}, \quad \varepsilon_i = 1 - \beta_i = \frac{\varepsilon_{i-1}}{1 + \varepsilon_{i-1}} \rightarrow 0$$

Найдётся такое  $N$ , что  $\beta_{N-1}$  будет с точностью до всех разрядов равна 1, что приведёт при расчёте  $z_N$  к делению на нуль.

Можно взять альтернативный вариант с противоположным направлением вычислений

$$\hat{\beta}_i = \frac{a_i}{b_i - c_i \hat{\beta}_{i+1}}, \quad \hat{z}_i = \frac{f_i + c_i \hat{z}_{i+1}}{b_i - c_i \hat{\beta}_{i+1}}, \quad i = N, \dots, 1$$

$$u_i = \hat{\beta}_i u_{i-1} + \hat{z}_i, \quad i = 1, \dots, N$$

На основе двух вариантов прогонок можно построить метод встречных прогонок.

Пусть дано некоторое  $i_0$ ,  $1 < i_0 < N$ , – «место встречи»

Выполним прямой ход для  $1 \leq i \leq i_0 - 1$

$$\beta_i = \frac{c_i}{b_i - a_i \beta_{i-1}}, \quad z_i = \frac{f_i + a_i z_{i-1}}{b_i - a_i \beta_{i-1}},$$

и обратный ход для  $i_0 + 1 \leq i \leq N$

$$\hat{\beta}_i = \frac{a_i}{b_i - c_i \hat{\beta}_{i+1}}, \quad \hat{z}_i = \frac{f_i + c_i \hat{z}_{i+1}}{b_i - c_i \hat{\beta}_{i+1}},$$

Затем в уравнение для  $u_{i_0}$   $-a_{i_0} u_{i_0-1} + b_{i_0} u_{i_0} - c_{i_0} u_{i_0+1} = f_{i_0}$  подставляем  $u_{i_0} = \beta_{i_0} u_{i_0+1} + z_{i_0}$ ,

$u_{i_0} = \hat{\beta}_{i_0} u_{i_0-1} + \hat{z}_{i_0}$ . В результате получим

$$u_{i_0} = \frac{f_{i_0} + a_{i_0} z_{i_0-1} + c_{i_0} \hat{z}_{i_0+1}}{b_{i_0} - a_{i_0} \beta_{i_0-1} - c_{i_0} \hat{\beta}_{i_0+1}}$$

После этого находим  $u_i$  из выражений

$$u_i = \beta_i u_{i+1} + z_i, \quad \text{для } 1 \leq i < i_0$$

$$u_i = \hat{\beta}_i u_{i-1} + \hat{z}_i, \quad i_0 < i \leq N$$

Метод встречных прогонок может применяться для повышения численной устойчивости (снижение длины рекурсии) и для распараллеливания задачи.

О численной реализации алгоритма Томаса:

1) Для  $i = 2, \dots, N$  вычисляем  $b_i \leftarrow b_i - \frac{a_i c_i}{b_{i-1}}, f_i \leftarrow f_i + \frac{a_i f_{i-1}}{b_{i-1}}$

2) Для  $i = N, \dots, 1$  вычисляем  $c_i \leftarrow \frac{c_i c_{i+1} + f_i}{b_i}$

Число арифметических операций в методе прогонки =  $9N$

### Быстрое дискретное преобразование Фурье

Тип задач: постоянные коэффициенты, прямоугольная область с условиями 1-го рода на границах, постоянный шаг сетки.

Применяется для решения систем разностных уравнений вида

$$\begin{aligned} Du_1 - u_2 &= f_1 \\ -u_{i-1} + Du_i - u_{i+1} &= f_i, \quad i = 2, \dots, N-1 \\ -u_{N-1} + Du_N &= f_N \end{aligned} \quad (*)$$

где  $u_i, f_i$  – векторы порядка  $M$ , т.е.  $u_i = \{u_{i,j}\}$  – совокупность значений функции в узлах на  $i$ -й линии сетки,  $j = 1, \dots, M$ ,  $D$  – квадратная матрица  $M \times M$ .

Пусть матрица  $D$  имеет собственные числа  $\lambda_q$  и собственные вектора  $z_q$ ,  $q = 1, \dots, M$ , т.е.

$$Dz_q = \lambda_q z_q$$

Используя матрицу  $Z$ , у которой столбец с номером  $q$  равен  $z_q$ , можно привести матрицу  $D$  к диагональному виду

$$Z^T D Z = \Lambda = \text{diag}\{\lambda_q\}$$

Умножим каждое из уравнений (\*) слева на  $Z^T$  и используем новые переменные  $\hat{u}_i = Z^T u_i$ ,

т.е.  $\hat{u}_{q,i} = \sum_{j=1}^M z_{q,j} u_{i,j}$  – конечномерное преобразование Фурье вектора  $u_i$ . Из (\*) получим  $M$

систем уравнений

$$\begin{aligned} \lambda_q \hat{u}_{q,1} &= \hat{f}_{q,1} \\ -\hat{u}_{q,i-1} + \lambda_q \hat{u}_{q,i} - \hat{u}_{q,i+1} &= \hat{f}_{q,i}, \quad (i = 2, \dots, N-1) \\ -\hat{u}_{q,N-1} + \lambda_q \hat{u}_{q,N} &= \hat{f}_{q,N}, \quad \text{для } q = 1, \dots, M \end{aligned}$$

Далее каждое из  $M$  уравнений решается методом прогонки с затратой  $9N$  арифметических операций (итого  $9NM$ ). После этого выполняем обратное преобразование Фурье

$$u_{i,j} = \sum_{q=1}^M z_{q,j} \hat{u}_{q,i}, \quad i = 1, \dots, N$$

Каждое из преобразований Фурье требует  $2M^2$  арифметических операций – самая дорогая операция в рассматриваемом способе решения. Сократить число операций позволяет алгоритм **быстрого дискретного преобразования Фурье**, который мы рассмотрим на примере решения уравнения Пуассона на равномерной прямоугольной сетке

$$\frac{-u_{i-1,j} + 2u_{ij} - u_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{-u_{ij-1} + 2u_{ij} - u_{ij+1}}{h_y^2} = f_{ij}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M$$

$$u_{0,j} = g_{0j}, \quad u_{Nj} = g_{Nj}, \quad u_{i0} = g_{i0}, \quad u_{iM} = g_{iM}$$

$$\text{Матрица } D = 2E + \frac{h_y^2}{h_x^2} T, \quad \text{где } T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \\ -1 & 2 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & 2 & -1 \\ \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Собственные числа и вектора матрицы  $T$ :

$$\lambda_q^T = 4 \sin^2 \frac{\pi q}{2(M+1)}, \quad z_{q,j} = \sqrt{\frac{2}{M+1}} \sin \frac{\pi q j}{M+1}$$

Собственные вектора матрицы  $D$  точно такие же, а собственные числа равны

$$\lambda_q = 2 + \frac{h_y^2}{h_x^2} \lambda_q^T$$

Таким образом, нужно вычислять произведения вида

$$w_p = \sum_{i=1}^N u_i \sin \frac{\pi p i}{M+1}, \quad p = 1, \dots, M$$

Пусть имеется функция дискретного аргумента  $f(k)$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ . Представим её в виде конечного ряда Фурье

$$f(k) = \sum_{n=0}^{N-1} A(n) W^{kn}, \quad A(n) = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) W^{-kn}, \quad W = \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} \right] \quad (*)$$

Если назвать операцией выполнение подряд двух действий в комплексной арифметике (сложение и умножение), то для нахождения  $f(k)$  требуется  $N^2$  операций.

**Если  $N$  – не простое число, то можно уменьшить число операций, представив (\*) в виде кратной суммы.**

Пусть  $N = N_1 N_2$ . Представим  $k$  и  $n$  в виде

$$k = k_1 N_2 + k_2, \quad \text{где } k_1 = 0, \dots, N_1 - 1, \quad k_2 = 0, \dots, N_2 - 1,$$

$$n = n_1 + n_2 N_1, \text{ где } n_1 = 0, \dots, N_1 - 1, n_2 = 0, \dots, N_2 - 1,$$

Так как  $W^{k_1 n_2 N_1 N_2} = (W^N)^{k_1 n_2} = 1$ , то

$$W^{k n_2 N_1} = W^{k_2 n_2 N_1}, W^{kn} = W^{k n_1 + k_2 n_2 N_1}$$

и

$$f(k) = f(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \left[ \sum_{n_2=0}^{N_2-1} A(n_1, n_2) W^{k_2 n_2 N_1} \right] W^{k n_1}$$

или последовательно находим две суммы

$$A_1(n_1, k_2) = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} A(n_1, n_2) W^{k_2 n_2 N_1}, f(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} A_1(n_1, k_2) W^{k n_1}$$

Итого, вместо  $N^2$  операций получаем  $(N_1 + N_2)N$ .

Если  $N_2$ — составное число, то рассмотренное преобразование можно применить к  $A_1(n_1, k_2)$ .

Если  $N = N_1 N_2 \dots N_m$ , то вместо  $N^2$  операций придём к  $N(N_1 + N_2 + \dots + N_m)$  операциям.

Можно показать, что наибольшее уменьшение получается при  $N_i = 2, 3, 4$ . Если  $N = 256$ , то скорость вычислений повышается в 16 раз.

Рассмотрим наиболее удобный случай  $N = 2^m$ . Представим  $k$  и  $n$  в двоичной системе счисления:

$$k = \overline{k_{m-1} k_{m-2} \dots k_0} \equiv k_{m-1} 2^{m-1} + k_{m-2} 2^{m-2} + \dots + k_0, n = \overline{n_{m-1} n_{m-2} \dots n_0} \equiv n_{m-1} 2^{m-1} + n_{m-2} 2^{m-2} + \dots + n_0$$

Тогда

$$f(k_{m-1}, \dots, k_0) = \sum_{n_0=0}^1 \left[ \sum_{n_1=0}^1 \left[ \dots \sum_{n_{m-1}=0}^1 \left( A(n_{m-1}, \dots, n_0) W^{k n_{m-1} 2^{m-1}} \right) \dots W^{k n_1 2^1} \right] W^{k n_0} \right]$$

Так как

$$W^{k n_{m-1} 2^{m-1}} = W^{k_0 n_{m-1} 2^{m-1}},$$

$$W^{k n_{m-2} 2^{m-2}} = W^{\overline{k_1 k_0} n_{m-2} 2^{m-2}},$$

...

то вычисляем последовательно  $m$  сумм

$$A_1(k_0, n_{m-2}, \dots, n_0) = \sum_{n_{m-1}=0}^1 A(n_{m-1}, \dots, n_0) W^{k_0 n_{m-1} 2^{m-1}}$$

$$A_2(k_0, k_1, n_{m-3}, \dots, n_0) = \sum_{n_{m-2}=0}^1 A_1(k_0, n_{m-2}, \dots, n_0) W^{\overline{k_1 k_0} n_{m-2} 2^{m-2}}$$

...

$$f(k) = A_m(k_{m-1}, \dots, k_0) = \sum_{n_0=0}^1 A_{m-1}(k_{m-2}, \dots, k_0, n_0) W^{\overline{k_{m-1} \dots k_0 n_0}}$$

К сожалению, метод БПФ можно применять к решению конечно-разностных задач только в случае, если известны собственные функции и собственные числа соответствующей одномерной задачи. При применении ЭВМ, в которых округление результата арифметических действий производится путём простого отбрасывания лишних цифр, при достаточно больших  $N$  может происходить значительное уменьшение точности конечного результата.

## ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

### Итерационные методы решения нелинейных уравнений.

Требуется решить уравнение

$$\boxed{f(x) = 0}$$

т.е., найти корни уравнения в заданной области  $[a, b]$ .

1. Изучается расположение корней и выделяются области, содержащие только один корень. Исследуется кратность корней.
2. Используя начальные приближения, строится итерационный процесс.

Численные методы решения нелинейных уравнений являются, как правило, итерационными методами, которые предполагают задание достаточно близких к искомому решению начальных данных

#### Простые методы решения:

1. Вычисляется таблица значений  $f(x_k)$ ,  $k = 0, \dots, N$ ,  $x_k \in [a, b]$ . Если  $f(x_k)$  и  $f(x_{k+1})$  имеют разные знаки, корень уравнения находится в интервале  $x_k < x^* < x_{k+1}$ . Снова разбиваем этот отрезок на более мелкие интервалы и уточняем расположение  $x^*$

2. **Метод бисекции.** Пусть  $f(a) > 0$ ,  $f(b) < 0$ . Положим  $x_0 = \frac{a+b}{2}$ . Если  $f(x_0) < 0$ , то корень находится в интервале  $[a, x_0]$ , если  $f(x_0) > 0$ , то – в интервале  $[x_0, b]$ . Выбираем из интервалов  $[a, x_0]$ ,  $[x_0, b]$  тот, в котором  $f(x)$  на концах имеет разные знаки и повторяем процесс до того момента, пока длина интервала не станет меньше некоторого  $\varepsilon > 0$ .

Для нахождения корня отребуется число операций  $N = \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}$

Если имеется несколько корней на  $[a, b]$ , процесс бисекции сойдётся к одному из них, но заранее неизвестно, к какому. Тогда можно повторить указанный процесс к функции

$$g(x) = \frac{f(x)}{(x-x^*)^m}, \text{ где } m - \text{ кратность корня.}$$

3. **Метод простой итерации.** Рассмотрим уравнение  $x = s(x)$  и будем решать его с помощью итерационного процесса  $x_{n+1} = s(x_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Функция  $s(x)$  обычно выбирается в виде  $s(x) = x + \tau(x)f(x)$ , где  $\tau(x)$  не меняет знака на том отрезке, где отыскивается корень.

*Итерации сходятся*, если последовательность  $\{x_n\}$  имеет предел при  $n \rightarrow \infty$ .

Метод простой итерации сходится, если  $|s'(x^*)| < 1$ , что очевидно из соотношения

$$x_{k+1} - x_k = s(x_k) - s(x_{k-1}) = s'(x_k)(x_k - x_{k-1}) + O(\Delta x^2).$$

Для сходимости метода простой итерации должно выполняться  $|1 + (\tau f)'| < 1$  – функцию  $\tau(x)$  можно подобрать так, чтобы процесс сходил.

Разновидности метода: метод релаксации ( $\tau = \text{const}$ )

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} = f(x_n)$$

который сходится при условии  $-2 < \tau f'(x^*) < 0$ . Исходя из этого

при  $f'(x^*) > 0$ , нужно выбирать  $\tau < 0$

при  $f'(x^*) < 0$  –  $\tau > 0$

Если  $f'(x^*) < 0$  и  $0 < m < |f'(x^*)| < M$ , то метод сходится при  $0 < \tau < 2/M$ .

**Какой параметр  $\tau$  оптимальный?**

Рассмотрим уравнение для погрешности  $z_n = x_n - x^*$

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{\tau} = f(x^* + z_n) - f(x^*) = f(x^*) + z_n f'(x^* + \theta z_n) - f(x^*) = z_n f'(x^* + \theta z_n) \quad (\text{по т. о среднем})$$

$$|z_{n+1}| \leq |1 + \tau f'(x^* + \theta z_n)| |z_n| \leq |z_n| \max_x |1 + \tau f'(x + \theta z_n)|$$

Учитывая  $0 < m < |f'(x^*)| < M$ , из последнего соотношения получим

$$|z_{n+1}| \leq \max\{|1 - \tau M|, |1 - \tau m|\} |z_n|$$

Нужно минимизировать функцию  $q(\tau) = \max\{|1 - \tau M|, |1 - \tau m|\}$

Из рассмотрения графика функции  $q(\tau)$  видно, что точка минимума определяется условием

$$|1 - \tau_{opt} M| = |1 - \tau_{opt} m|$$

Отсюда

$$\tau_{opt} = \frac{2}{M + m}$$

При этом значении  $q(\tau_{opt}) = \rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}$ ,  $\xi = \frac{m}{M}$  и для погрешности справедлива оценка

$$|z_n| \leq \rho_0^n |z_0|$$

Величина  $\rho_0$  называется коэффициент подавления ошибки.

Количество итераций, необходимое для уменьшения ошибки в  $\varepsilon$  раз:  $n(\varepsilon) = \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\rho_0)}$

4. **Метод Ньютона.** Разложим  $f(x)$  в ряд Тейлора вблизи текущего значения  $x_n$ :

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + O(\Delta x^2)$$

Следующее приближение найдём из уравнения

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0, \text{ т.е. } \boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Метод имеет квадратичную сходимость, т.к.  $\Delta x_{n+1} = O(\Delta x_n^2)$

Соответствует методу простой итерации при выборе  $s(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Исследуем сходимость: т.к.  $s'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}$ , то  $|s'(x^*)| = 0 \Rightarrow$  при надлежащем выборе

начального приближения оно попадёт в окрестность решения, где  $|s'(x)| < 1$ .

Рассмотрим уравнение для погрешности  $z_n = x_n - x^*$

$$z_{n+1} = x_{n+1} - x^* = -\frac{f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n)}{f'(x_n)} = -\frac{f(x^*) - f''(x_n)z_n^2/2 + O(z_n^3)}{f'(x_n)} = \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}z_n^2 + O(z_n^3)$$

Пусть  $\inf|f'(x)| = m > 0$ ,  $\sup|f''(x)| = M$ ,  $\Delta x = |x_0 - x^*|$ , и величина  $q = \frac{M\Delta x}{2m} < 1$ ,

тогда метод Ньютона сходится, причём для погрешности справедлива оценка

$$|z_n| \leq q^{2^n - 1} |z_0|$$

отсюда  $n(\varepsilon) \sim \frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln 2}$  – существенное увеличение скорости сходимости по сравнению с методом релаксации.

Если мы в исходном разложении Тейлора учтём следующий член, то получим

$$n(\varepsilon) \sim \frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln 3} \text{ – несущественное ускорение скорости сходимости}$$

5. **Метод секущих.** 
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$$

## Итерационные методы решения систем уравнений

Каноническая форма одношаговых итерационных методов для системы линейных уравнений  $Ax = f$ :

$$B_{n+1} \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau_{n+1}} + Ax_n = f$$

$B_{n+1}$  – матрица, задающая тот или иной итерационный метод, которую также называют предобуславливателем (preconditioner)

$\tau_{n+1}$  – итерационный параметр

Решение на данном шаге находится из уравнения

$$x_{n+1} = (E - \tau_{n+1} B_{n+1}^{-1} A)x_n + \tau_{n+1} B_{n+1}^{-1} f \equiv R_{n+1} x_n + C_{n+1}$$

Метод называется **явным**, если  $B_{n+1} = E$  – единичной матрице, и **неявным** в противном случае. Метод является **стационарным**, если  $R_{n+1} = R$  и  $C_{n+1} = C$  не зависят от  $n+1$ .

Для характеристики скорости сходимости используют такие же параметры:

коэффициент подавления ошибки  $\rho$ :  $\|R_{n+1}\| \leq \rho < 1$

число итераций  $n(\varepsilon) = \min \left\{ n : \frac{\|z_n\|}{\|z_0\|} \leq \varepsilon \right\}$

Здесь норма матрицы определена, как  $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

**Итерационный метод сходится**, если  $\|R_{n+1}\| < 1$

**Общая теорема о сходимости стационарного итерационного метода:** итерационный метод сходится, когда максимальное по модулю собственное значение матрицы  $R$  меньше единицы:  $|\lambda_{\max}| < 1$

**Когда остановить итерационный процесс?**

1) Вычислять вектор невязки  $r_n = f - Ax_n = -Az_n$

При этом  $r_n = f - Ax_n = -Az_n$  и  $\|z_n\| \leq \|A^{-1}\| \|r_n\|$  (если известна норма обратной матрицы)

2) Критерий близости соседних приближений

$\|x - x_n\| = \|x_{n+1} - x_n + x_{n+2} - x_{n+1} + \dots\| \leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_{n+2} - x_{n+1}\| + \dots \leq \|x_{n+1} - x_n\| (1 + \rho + \rho^2 + \dots) = \frac{\|x_{n+1} - x_n\|}{1 - \rho}$ , откуда видно, что для использования этого критерия итерационный метод не

должен быть медленно сходящимся, т.е. когда  $1 - \rho = o(1)$ .

## Методы Якоби и Зейделя

Для матрицы общего вида  $A$  с ненулевыми диагональными элементами можем переписать исходное уравнение в виде

$$x_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j - \sum_{j=i+1}^N \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{f_i}{a_{ii}}$$

Представим матрицу  $A$  в виде разложения  $A = L + U + D$ , где  $D$  – диагональная матрица с той же диагональю, что у  $A$ ,  $L$  – нижняя,  $U$  – верхняя треугольные части матрицы  $A$  с нулевыми диагоналями. Тогда верхнее уравнение можно записать в компактной матричной форме

$$x = -D^{-1}Lx - D^{-1}Ux + D^{-1}f$$

**Методом Якоби** называется следующий итерационный процесс:

$$x_{n+1} = -D^{-1}Lx_n - D^{-1}Ux_n + D^{-1}f, \text{ или } x_{n+1,i} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_{n,j} - \sum_{j=i+1}^N \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_{n,j} + \frac{f_i}{a_{ii}}$$

**Метод Гаусса-Зейделя** при вычислении каждого значения использует частично уже ранее вычисленные:

$$x_{n+1} = -D^{-1}Lx_{n+1} - D^{-1}Ux_n + D^{-1}f, \text{ или } x_{n+1,i} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_{n+1,j} - \sum_{j=i+1}^N \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_{n,j} + \frac{f_i}{a_{ii}}$$

Приводя эти методы к канонической форме, можно получить

$$\text{для метода Якоби: } D(x_{n+1} - x_n) + Ax_n = f$$

$$\text{для метода Гаусса-Зейделя: } (D + L)(x_{n+1} - x_n) + Ax_n = f$$

**Реализация метода Гаусса-Зейделя** отличается от реализации метода Якоби тем, что нужно следить, какие переменные приобрели новые значения, а какие сохранили прежние, что, в свою очередь, зависит от принятого **порядка обхода узлов сетки**.

**Сходимость методов Якоби и Гаусса-Зейделя:** Если матрица  $A$  обладает свойством диагонального преобладания и неразложима, то методы Якоби и Гаусса-Зейделя сходятся.

Матрица  $A$  разложима, если перестановками строк и столбцов её можно свести к блочно-

треугольному виду  $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$  с квадратными матрицами. Матрица  $A$  обладает

свойствами диагонального преобладания, если  $|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N |a_{ij}|$ , для всех  $i = 1, \dots, N$ , причём

хотя бы для одного  $i$  неравенство строгое.

**Оценки скорости сходимости для симметричных матриц  $A, B$  в стационарном**

**одношаговом методе:**  $B \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} + Ax_n = f$

Ниже будем использовать матричные неравенства  $A \geq B \Leftrightarrow (Ax, x) \geq (Bx, x), \forall x$

**Теорема:** Для симметричных положительно определённых<sup>2</sup> матриц  $A$  и  $B$ , для которых справедливы неравенства  $\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B$  ( $\gamma_2 > \gamma_1 > 0$ ), при выборе  $\tau = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$

итерационный метод сходится с коэффициентом подавления ошибки  $\rho = \frac{1-\xi}{1+\xi}$ ,  $\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ .

Можно показать, что  $\gamma_1 \leq \lambda_{\min}(B^{-1}A)$ ,  $\gamma_2 \geq \lambda_{\max}(B^{-1}A)$ , тогда параметр

$\tau_{opt} = \frac{2}{\lambda_{\min}(B^{-1}A) + \lambda_{\max}(B^{-1}A)}$  – оптимальный, поскольку минимизирует  $\rho$ .

Для метода простой итерации ( $B = E$ )  $\xi = \frac{\lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(A)}$  (обратное число обусловленности).

Если матрица  $A$  плохообусловлена, т.е.  $\xi \ll 1$ , то  $\rho = \frac{1-\xi}{1+\xi} \approx 1-2\xi$  и для числа

необходимых итераций получим  $n(\varepsilon) = \frac{\ln 1/\varepsilon}{\ln 1/\rho} \approx \frac{\ln 1/\varepsilon}{2\xi}$  – для плохообусловленных матриц

метод простой итерации медленно сходится.

Цель использования неявных итерационных методов – повысить отношение

$$\xi(B^{-1}A) = \frac{\lambda_{\min}(B^{-1}A)}{\lambda_{\max}(B^{-1}A)}$$

Для этой цели стараются выбрать матрицу-предобуславливатель  $B$ , чтобы его норма была близкой к норме матрицы  $A$ .

Идея основана на известном из линейной алгебры свойстве собственных чисел произведения матриц:

$$\lambda_{\min}(A)\lambda_{\min}(B) \leq \lambda(AB) \leq \lambda_{\max}(A)\lambda_{\max}(B),$$

откуда нетрудно получить оценку обратного числа обусловленности матрицы  $B^{-1}A$ :

$$\xi(B^{-1}A) \sim \frac{\xi(A)}{\xi(B)}$$

в соответствии с которой близость матрицы-предобуславливателя  $B$  к матрице  $A$  позволяет повысить

$$\text{величину } \xi(B^{-1}A)$$

---

<sup>2</sup> Положительно определённой называется матрица  $A$ , для которой  $(Ax, x) \geq \delta(x, x)$ ,  $\delta > 0$  для любого  $x$ .

Рассмотрим в качестве модельной задачи матрицу  $A$  конечно-разностной системы уравнений – пятиточечной аппроксимации уравнения Пуассона на равномерной сетке  $h_x = h_y = h$  в квадратной области  $1 \times 1$ . Собственные числа задачи определяются выражением

$$\lambda_{pq} = \frac{4}{h^2} \left( \sin^2 \frac{\pi p h}{2} + \sin^2 \frac{\pi q h}{2} \right), \quad \lambda_{\min} = \frac{8}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}, \quad \lambda_{\max} = \frac{8}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2}$$

Отношение минимального и максимального собственных чисел при малом шаге сетки пропорционально квадрату шага

$$\xi = \frac{8}{h^2} \frac{\pi^2 h^2}{4} \approx \frac{\pi^2 h^2}{4}, \quad \text{при } h \ll 1$$

Отсюда, число необходимых итераций для метода простых итераций растёт обратно пропорционально квадрату шага сетки

$$n(\varepsilon) \sim \frac{\ln 1/\varepsilon}{h^2}$$

Такая же сходимость у методов Якоби:  $n(\varepsilon) \approx \frac{2 \ln 1/\varepsilon}{\pi^2 h^2}$  и Гаусса-Зейделя:  $n(\varepsilon) \approx \frac{\ln 1/\varepsilon}{\pi^2 h^2}$ .

Погрешность решения с помощью итерационного метода должна иметь тот же порядок, что и погрешность аппроксимации, например для модельной задачи:  $\varepsilon \sim h^2$ . Отсюда, число необходимых итераций метода Гаусса-Зейделя для модельной задачи растёт с уменьшением шага сетки, как  $n(\varepsilon) \approx \frac{2 \ln 1/h}{\pi^2 h^2}$ .

### Метод последовательной верхней релаксации (SOR)

Схема метода имеет следующий вид

$$1) \hat{x}_{n+1} = -D^{-1} L \hat{x}_{n+1} - D^{-1} U x_n + D^{-1} f$$

$$2) x_{n+1} = \omega \hat{x}_{n+1} + (1 - \omega) x_n \quad \text{где } \omega - \text{ параметр релаксации, } 1 < \omega < 2$$

При  $\omega = 1$  имеем метод Гаусса-Зейделя.

При оптимальном выборе параметра  $\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \lambda^2}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho_s}}$ , где  $\lambda$  – максимальное

собственное число матрицы перехода  $(E - D^{-1}A)$  в методе Якоби, а , число итераций по

сравнению с методами Я. и Г.-З. существенно уменьшается:  $n(\varepsilon) \approx \frac{2 \ln 1/\varepsilon}{\pi h}$

## Метод переменных направлений (ADI)

Для случая  $A = A_1 + A_2$ , где  $A_i$  – трёхдиагональные матрицы можно реализовать следующий итерационный алгоритм:

$$1) \frac{x_{n+1/2} - x_n}{\tau} + A_1 x_{n+1/2} + A_2 x_n = f, (E + \tau A_1) x_{n+1/2} = (E - \tau A_2) x_n + \tau f$$

$$2) \frac{x_{n+1} - x_{n+1/2}}{\tau} + A_1 x_{n+1/2} + A_2 x_{n+1} = f, (E + \tau A_2) x_{n+1} = (E - \tau A_1) x_{n+1/2} + \tau f$$

Предобуславливатель этого метода:  $B = \frac{1}{2}(E + \tau A_1)(E + \tau A_2)$

При  $\tau = \frac{h}{2\pi}$ , число итераций  $n(\varepsilon) \approx \frac{\ln 1/\varepsilon}{2\pi h}$  примерно в 4 раза меньше, чем в методе SOR.

Приведённые выше оценки сходимости получены для матрицы модельной задачи. В общем случае сходимость окончательно не исследована. Существуют, например, несимметричные матрицы, для которых метод Якоби сходится, а метод Гаусса-Зейделя – нет, а также матрицы, для которых справедливо обратное.

Для эффективного применения описанных методов задача должна быть существенно эллиптической (уравнение Пуассона, уравнение для потенциала и т.п.). Если добавляются 1-е производные по пространственным координатам (например, конвекция), описанные методы теряют эффективность и могут расходиться.

## Методы неполной факторизации

МНФ представляют собой многомерное обобщение метода прогонки.

В методе прогонки трёхдиагональная матрица  $A$  представляется (факторизуется) в виде произведения двух треугольных матриц:  $A = LU$

$$L = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & g_2 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & -a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & g_{N-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -a_N & g_N \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & -\beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\beta_2 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\beta_{N-1} & 0 \\ \dots & \dots & 0 & 1 & -\beta_N \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, g_i = (b_i - a_i \beta_{i-1})^{-1}$$

затем производится последовательное обращение треугольных матриц  $L$  и  $U$ , соответствующее рекуррентным формулам метода прогонки

$$\begin{aligned} Lz &= f, & g_i z_i - a_i z_{i-1} &= f_i \\ Ux &= z, & u_i - \beta_i u_{i+1} &= z_i \end{aligned}$$

В методе неполной факторизации для матриц коэффициентов конечно-разностных уравнений многомерных задач используется следующее представление матрицы  $A$

$$A = \Gamma^{-1}RS - P, \quad R = E + \Gamma L, \quad S = E + \Gamma U \quad (*)$$

где  $L, U$  – нижняя и верхняя треугольные части матрицы  $A$ ,  $\Gamma$  – диагональная матрица.

Алгоритм решения методом НФ записывается следующим образом

$$\Gamma^{-1}RSx_{n+1} = f + Px_n,$$

или

$$Rz_{n+1} = \Gamma f + \Gamma Px_n$$

$$Sx_{n+1} = z_{n+1} \quad (**)$$

Треугольная структура матриц  $R, S$  позволяет просто проводить их обращение. Так для двумерной конечно-разностной задачи на пятиточечном шаблоне

$$-a_{ij}x_{i-1,j} - c_{ij}x_{i+1,j} - b_{ij}x_{ij-1} - d_{ij}x_{ij+1} + p_{ij}x_{ij} = f_{ij} \quad (***)$$

уравнения (\*\*\*) принимают вид рекуррентных соотношений, похожих на соответствующие формулы метода прогонки (итерационный индекс опущен)

$$z_{ij} = \gamma_{ij} (a_{ij}z_{i-1,j} + b_{ij}z_{ij-1} + f_{ij}) + (Px)_{ij}$$

$$x_{ij} = \gamma_{ij} (c_{ij}x_{i+1,j} + d_{ij}x_{ij+1}) + z_{ij}$$

с помощью которых массивы  $z$  и  $x$  вычисляются явно.

В отличие от метода прогонки в методе НФ факторизацию матрицы  $A$  удаётся выполнить лишь приближенно – с точностью до матрицы невязки  $P$ , по которой осуществляется итерационный процесс (\*\*) до достижения сходимости. В этой матрице присутствуют дополнительные элементы помимо элементов конечно-разностного шаблона, входящих в матрицу  $A$  (например, для матрицы уравнения (\*\*\*) – элементы  $x_{i-1,j+1}$  и  $x_{i+1,j-1}$ ).

«Лишние» коэффициенты  $(Px)_{ij}$  для **явного метода неполной факторизации Булеева**<sup>3</sup>

имеют вид

$$(Px)_{ij} = \mu_{ij}x_{i-1,j+1} + \nu_{ij}x_{i+1,j-1} + \theta_{ij}(\mu_{ij} + \nu_{ij})x_{ij}$$

$$\mu_{ij} = \gamma_{ij}a_{ij}\gamma_{i-1,j}d_{i-1,j}, \quad \nu_{ij} = \gamma_{ij}b_{ij}\gamma_{ij-1}c_{ij-1}$$

<sup>3</sup> Н.И.Булеев. Пространственная модель турбулентного обмена. М., Наука, 1989. 344 с.

где параметр  $\theta_{ij}$  фиксирован и принимает значения в интервале  $0 \leq \theta_{ij} \leq 1$ .

Для элементов диагональной матрицы  $\Gamma$  в явном методе Булеева получены рекуррентные соотношения

$$\gamma_{ij} = \left[ p_{ij} - a_{ij} (c_{i-1,j} + \theta_{ij} d_{i-1,j}) \gamma_{i-1,j} - b_{ij} (d_{ij-1} + \theta_{ij} c_{ij-1}) \gamma_{ij-1} \right]^{-1}$$

Предобуславливателем этого метода является матрица  $\pi \Gamma^{-1} RS$ . Учитывая близость матрицы  $RS$  к матрице  $A$ , наиболее существенное отличие МНФ от рассмотренного выше метода переменных направлений состоит в наличии нормирующей матрицы  $\Gamma$  в предобуславливателе. По-видимому, именно с этим связана наблюдающаяся меньшая чувствительность МНФ к числу обусловленности матрицы  $A$ .

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

## УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Пример: уравнения газовой динамики в акустическом приближении

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Считая возмущения плотности и скорости малыми величинами, получим линеаризованные уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

При высоких частотах колебаний каждый газовый объём можно считать адиабатическим, поэтому малое изменение давления связано с малым изменением плотности через уравнение состояния

$$p = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \rho = c_s^2 \rho$$

Отсюда следует уравнение акустики

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

Уравнение можно представить в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \rho = 0$$

Более общий случай: система квазилинейных уравнений 1-го порядка

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + A_{ij}(x, t, \vec{u}) \frac{\partial u_j}{\partial x} = b_i(x, t, \vec{u})$$

Для определения типа уравнения необходимо найти собственные числа  $\lambda^{(n)}$  и собственные вектора  $l_i^{(n)}$  матрицы  $A_{ij}$  из уравнения

$$A_{ij} l_j = \lambda l_i$$

Система будет гиперболической, если все собственные значения в рассматриваемой области пространства  $(x, t, \vec{u})$  вещественны и различны.

Умножим уравнения на  $k$ -й собственный вектор и учтём его определение

$$l_i^{(k)} \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + A_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) = l_i^{(k)} \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda^{(k)} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) = l_i^{(k)} b_i$$

Оператор  $\frac{\partial}{\partial t} + \lambda^{(k)} \frac{\partial}{\partial x} = \left( \frac{d}{dt} \right)_k$  является производной вдоль линии, задаваемой уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \lambda^{(k)}(x, t, \vec{u}), \text{ которая называется характеристикой.}$$

Уравнения можно записать в характеристической форме

$$l_i^{(k)} \left( \frac{du_i}{dt} \right)_k = l_i^{(k)} b_i$$

Начальные условия для гиперболической системы уравнений можно задавать на любой кривой  $C$ , направление которой не совпадает с направлением характеристик.

Простейшим гиперболическим уравнением является одномерное линейное **уравнение переноса**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

имеющее точное решение для начальных условий  $u(x, 0) = F(x)$

$$u(x, t) = F(x - ct)$$

### Разностные схемы для уравнения переноса

#### Явный метод Эйлера

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

Погрешность аппроксимации  $O(\Delta t, \Delta x^2)$

Анализ устойчивости методом Неймана

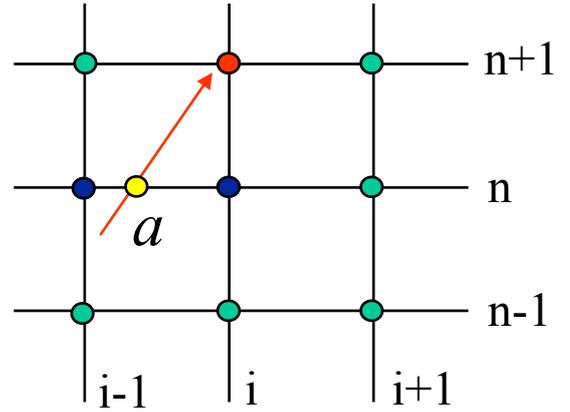
Перепишем схему в виде

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{C}{2} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n), \quad \text{где } C = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \text{ — число Куранта}$$

подставляем в неё  $u_i \sim \exp(\lambda t + ikx)$ , после чего получим

$$e^{\lambda \Delta t} = 1 - Ci \sin k\Delta x \text{ — всегда неустойчива!}$$

Ниже будем пользоваться так называемым **интерполяционно-характеристическим методом** построения разностных схем для уравнения переноса. В этом подходе используется свойство переноса решения вдоль характеристик. Решение в точке  $u_i^{n+1} = u(x_i, t^{n+1})$  будет равно значению функции с предыдущего слоя в точке  $a$  (см. рис.):



$$u_i^{n+1} = u(a, t^n), \quad a = x_i - c\Delta t = x_i - C\Delta x$$

Чтобы построить конечно-разностную схему, нужно выразить величину  $u(a, t^n)$  через значения функции в соседних узлах с помощью интерполяции.

### Метод разностей против потока

Линейная интерполяция по соседним узлам:

$$u(a, t^n) = u_i^n - (u_i^n - u_{i-1}^n) \frac{a - x_i}{x_i - x_{i-1}} \text{ — опорные узлы берутся, как на картинке}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{Погрешность аппроксимации } O(\Delta t, \Delta x)$$

Тем не менее, схема является точной при  $C = 1$ , когда  $a = x_{i-1}$

Выведем **уравнение дифференциального приближения** (или модифицированное уравнение). Для этого подставим в конечно-разностную схему разложения в ряд Тейлора в окрестности точки  $(x_i, t^n)$  для функции  $u(x, t)$ , совпадающей с численным решением в узлах сетки

$$\frac{1}{\Delta t} \left\{ u_i^n + \Delta t u_t + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt} + \frac{\Delta t^3}{6} u_{ttt} + O(\Delta t^4) - u_i^n \right\} + \frac{c}{\Delta x} \left\{ u_i^n - \left[ u_i^n - \Delta x u_x + \frac{\Delta x^2}{2} u_{xx} - \frac{\Delta x^3}{6} u_{xxx} + O(\Delta x^4) \right] \right\} = 0$$

$$u_t + cu_x = -\frac{\Delta t}{2} u_{tt} + \frac{c\Delta x}{2} u_{xx} - \frac{\Delta t^2}{6} u_{ttt} - c \frac{\Delta x^2}{6} u_{xxx} + \dots$$

Поскольку  $u_t + cu_x = O(\Delta t, \Delta x)$ , то  $u_{tt} = c^3 u_{xxx} + O(\Delta t, \Delta x)$ , кроме того

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \Delta t \left[ -\frac{u_{ttt}}{2} + \frac{c}{2} u_{ttx} + O(\Delta t) \right] + \Delta x \left[ \frac{cu_{xxt}}{2} + \frac{c^2}{2} u_{xxx} + O(\Delta x) \right] =$$

$$= c^2 u_{xx} - c^2 \Delta x (1-C) u_{xxx} + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

в итоге получаем дифференциальное приближение:

$$u_t + cu_x = \frac{c\Delta x}{2}(1-C)u_{xx} - \frac{c\Delta x^2}{6}(1-C)(1-2C)u_{xxx} + O(\Delta x^3)$$

Видно, что при числах Куранта, отличных от единицы, присутствуют схемные вязкость и дисперсия.

Дисперсионное соотношение для этого уравнения имеет вид:

$$\omega = ck - \frac{c\Delta x^2}{6}(1-C)(1-2C)k^3 - i\frac{c\Delta x}{2}(1-C)k^2$$

$$\text{Фазовая скорость: } c_{ph} = c - \frac{c\Delta x^2}{6}(1-C)(1-2C)k^2$$

При  $0 < C < 0.5$  – отставание по фазе, при  $0.5 < C < 1$  – опережение

### Схема Лакса

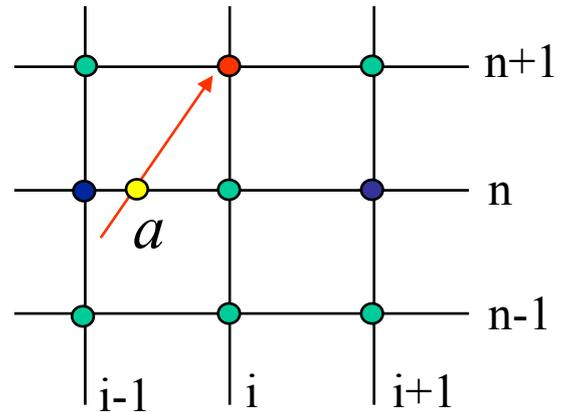
Линейная интерполяция по узлам  $i-1$  и  $i+1$ :

$$u(a, t^n) = u_{i-1}^n + (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \frac{a - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \quad \text{– (см. рис.)}$$

Отсюда

$$u(a, t^n) = \frac{1-C}{2} u_{i+1}^n + \frac{1+C}{2} u_{i-1}^n, \text{ или}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)/2}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$



Устойчивость:

$$e^{\lambda \Delta t} = \cos k\Delta x - iC \sin k\Delta x \Rightarrow \text{устойчива при } C \leq 1$$

Дифференциальное приближение:

$$u_t + cu_x = \frac{c\Delta x}{2} \left( \frac{1}{C} - C \right) u_{xx} + \frac{c\Delta x^2}{3} (1-C)^2 u_{xxx} + O(\Delta x^3)$$

Погрешность аппроксимации  $O\left(\Delta t, \frac{\Delta x^2}{\Delta t}\right)$

Для повышения порядка аппроксимации необходимо использовать квадратичную интерполяцию по трём узлам с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа:

$$L_{2,i}(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)}u_1 - \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_3-x_2)}u_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}u_3$$

### Схема с перешагиванием («чехарда», Midpoint Leapfrog Method)

Квадратичная интерполяция по узлам  $i-1$ ,  $b$  и  $i+1$ :

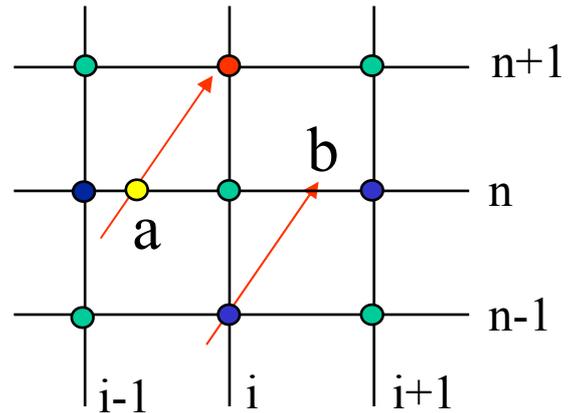
$$u(a, t^n) = Cu_{i-1}^n + u(b, t^n) - Cu_{i+1}^n \quad (\text{см. рис.})$$

$$u(b, t^n) = u_i^{n-1}$$

Отсюда

$$u(a, t^n) = \frac{1-C}{2}u_{i-1}^n + \frac{1+C}{2}u_{i+1}^n, \text{ или}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$



Устойчивость:

$$e^{\lambda \Delta t} = \pm(1 - C^2 \cos k\Delta x)^{1/2} - iC \sin k\Delta x \Rightarrow \text{устойчива при } C \leq 1$$

Дифференциальное приближение:

$$u_t + cu_x = -\frac{c\Delta x^2}{6}(1 - C^2)u_{xxx} - \frac{c\Delta x^4}{120}(9C^2 - 10C + 1)u_{xxxx} - O(\Delta x^6)$$

Погрешность аппроксимации  $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$

Недостатки:

- 1) Необходимость задания начальных условий на 2-х временных слоях
- 2)  $u_i^{n+1}$  не зависит от  $u_i^n$  – появляются два независимых решения
- 3) Трёхслойный по времени.

### Схема Лакса-Вендроффа

Квадратичная интерполяция по узлам  $i-1, i$  и  $i+1$ :

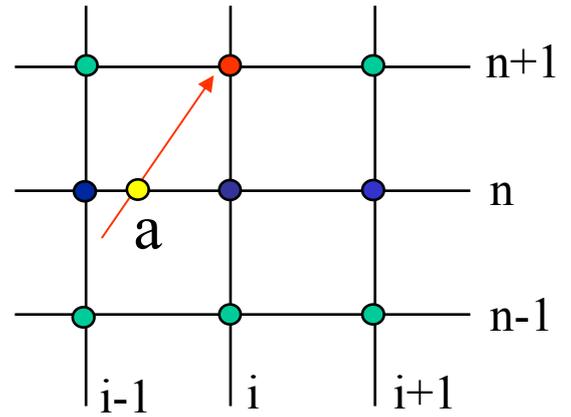
$$u(a, t^n) = \frac{C(1+C)}{2} u_{i-1}^n + (1-C^2) u_i^n - \frac{C(1-C)}{2} u_{i+1}^n$$

(см. рис.)

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{C}{2} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{C^2}{2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = \frac{c^2 \Delta t}{2} \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

Погрешность аппроксимации  $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$



Устойчивость:

$$e^{\lambda \Delta t} = 1 - C^2(1 - \cos k\Delta x) - iC \sin k\Delta x \Rightarrow \text{устойчива при } C \leq 1$$

Дифференциальное приближение:

$$u_t + cu_x = -\frac{c\Delta x^2}{6}(1-C^2)u_{xxx} - \frac{c\Delta x^3}{8}C(1-C^2)u_{xxxx} - O(\Delta x^4)$$

Характерно запаздывание по фазе, кроме коротковолновых гармоник при  $\frac{1}{\sqrt{2}} < C < 1$

### Двухшаговый метод Лакса-Вендроффа

$$1) \frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - (u_{i+1}^n + u_i^n)/2}{\Delta t/2} + c \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0$$

$$2) \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = 0$$

Эквивалентен методу Лакса-Вендроффа (для линейного уравнения)

### Метод Мак-Кормака

Рассмотрим метод Лакса-Вендроффа

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{C}{2} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{C^2}{2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (*)$$

Замечаем, что

$$u_{i+1}^n - u_{i-1}^n - C(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) = u_i^n - C(u_{i+1}^n - u_i^n) - u_{i-1}^n + C(u_i^n - u_{i-1}^n) + u_{i+1}^n - u_i^n =$$

$$= \hat{u}_i^{n+1} - \hat{u}_{i-1}^{n+1} + u_{i+1}^n - u_i^n$$

где  $\hat{u}_i^{n+1} = u_i^n - C(u_{i+1}^n - u_i^n)$ , или  $\frac{\hat{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0$

Подставляя в (\*), получим

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} [u_i^n - C(u_{i+1}^n - u_i^n) + u_i^n - C(\hat{u}_i^{n+1} - \hat{u}_{i-1}^{n+1})] = \frac{1}{2} [\hat{u}_i^{n+1} + u_i^n - C(\hat{u}_i^{n+1} - \hat{u}_{i-1}^{n+1})] = \frac{1}{2} [\hat{u}_i^{n+1} + \tilde{u}_i^{n+1}]$$

Алгоритм метода Мак-Кормака можно переписать в виде

$$1) \frac{\hat{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0 \text{ (предиктор)}$$

$$2) \frac{\tilde{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{\hat{u}_i^{n+1} - \hat{u}_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0$$

$$3) u_i^n = \frac{\tilde{u}_i^{n+1} + \hat{u}_i^{n+1}}{2} \text{ (корректор)}$$

### Схема «Кабаре»

(В.М.Головизнин, А.А.Самарский)

Квадратичная интерполяция по узлам  $i-1, i$  и  $b$ :

$$u(a, t^n) = -(1 - 2C)u_{i-1}^n + (1 - 2C)u_i^n + u(b, t^n)$$

$$u(b, t^n) = u_{i-1}^{n-1}$$

Отсюда

$$u_i^{n+1} = (1 - 2C)u_i^n - (1 - 2C)u_{i-1}^n + u_{i-1}^{n-1}$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{u_{i-1}^n - u_{i-1}^{n-1}}{\Delta t} \right) + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

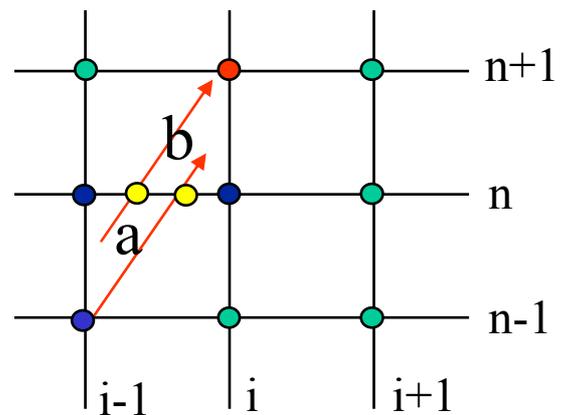
Два канала точности:

при  $C = 1$ ,  $u_i^{n+1} = u_{i-1}^n - u_i^n + u_{i-1}^{n-1} \Rightarrow u_i^{n+1} = u_{i-1}^n$  — точное решение

при  $C = 0.5$ ,  $u_i^{n+1} = u_{i-1}^{n-1}$  — точное решение

Нахождение условия устойчивости и дифференциального приближения предлагается в **качестве задачи**.

### Двухшаговая формулировка метода «Кабаре»



Введём значения в полуцелых узлах по пространству и времени:  $u_{i+1/2}^{n+1/2} = (u_i^n + u_{i+1}^{n+1})/2$

тогда схема Кабаре запишется следующим образом:

$$\frac{u_{i-1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^{n-1/2}}{\Delta t} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (*)$$

Представим производную по времени, как

$$\frac{u_{i-1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left( \frac{u_{i-1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^n}{\Delta t/2} + \frac{u_{i-1/2}^n - u_{i-1/2}^{n-1/2}}{\Delta t/2} \right)$$

Тогда метод Кабаре можно записать в двухшаговой формулировке:

$$1) \frac{u_{i-1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^n}{\Delta t/2} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$$2) u_i^{n+1} = 2u_{i-1/2}^{n+1/2} - u_{i-1}^n$$

$$3) \frac{u_{i-1/2}^{n+1} - u_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta t/2} + c \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0$$

Если сложить уравнение (1) и уравнение (3) с предыдущего шага, получим (\*)

### Центрированная по времени неявная схема (Crank-Nicolson Method)

Аппроксимируем уравнение в точке  $(x_i, t^{n+1/2})$

$$\frac{\partial u(x_i, t^{n+1/2})}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t^2), \quad \frac{\partial u(x_i, t^{n+1/2})}{\partial x} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u(x_i, t^n)}{\partial x} + \frac{\partial u(x_i, t^{n+1})}{\partial x} \right) + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{1}{2} \left( \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) = 0$$

Погрешность аппроксимации  $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$

Устойчивость:

$$e^{\lambda \Delta t} = \frac{1 - (iC/2) \sin k\Delta x}{1 + (iC/2) \sin k\Delta x} \Rightarrow \text{безусловно устойчива}$$

Дифференциальное приближение:

$$u_i + cu_x = -\frac{c\Delta x^2}{6} \left( 1 + \frac{C^2}{2} \right) u_{xxx} - \frac{c\Delta x^4}{120} \left( 1 + 5C^2 + \frac{3C^4}{2} \right) u_{xxxx} - O(\Delta x^4)$$

схемная вязкость равна нулю.

## УРАВНЕНИЯ РИМАНА И БЮРГЕРСА

Простейшее нелинейное уравнение переноса - уравнение Римана

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Начальные условия:  $u(x,0) = u_0(x)$

Решение (в неявном виде) получается с помощью метода характеристик:  $u(x,t) = u_0(x-ut)$

Найдём производную:  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{u'_0(x-ut)}{1+tu'_0(x-ut)}$ , откуда видно, что при  $t_b = -\frac{1}{\min u'_0(x)}$

производная обращается в бесконечность («градиентная катастрофа»).

На самом деле при  $t \geq t_b$  становятся существенны диссипативные эффекты, которые можно учесть, например, с помощью **уравнения Бюргера**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Уравнение Бюргера с помощью замены переменных  $u = -2\nu \frac{\partial \ln \varphi}{\partial x}$  приводится к линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

имеющему следующее решение для заданного начального распределения

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y,0) \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}\right] dy$$

В результате получим решение уравнения Бюргера:

$$u(x,t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-y}{t} \exp\left[-\frac{\Phi(x,y,t)}{2\nu}\right] dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\Phi(x,y,t)}{2\nu}\right] dy}, \quad \Phi(x,y,t) = \int_{x_0}^y u_0(x') dx' + \frac{(x-y)^2}{2t}$$

При малых значениях вязкости ( $\nu \rightarrow 0$ ) основной вклад в интегралы дают окрестности точек  $y = \xi$  максимума  $\Phi$ , в которых имеет место

$$u_0(\xi) - \frac{x-\xi}{t} = 0, \quad u'_0(\xi) + \frac{1}{t} > 0$$

При  $t < t_b = -\frac{1}{\min u'_0(x)}$  такая точка, очевидно, одна. В этом случае

$$u(x, t) = \frac{x - \xi}{t} = u_0(\xi) = u_0(x - ut), \quad \text{что совпадает с решением уравнения Римана,}$$

полученного выше с помощью метода характеристик.

При  $t > t_b$  возникает ударная волна, в окрестности которой существенна вязкость. Ширину области ударной волны  $\delta$  можно определить из оценок величин членов уравнения:

$$\delta \sim \nu / \max u$$

При  $\nu \rightarrow 0$  толщина ударной волны стремится к нулю, и ударную волну можно рассматривать, как контактный разрыв.

Контактный разрыв движется со скоростью, которую можно вычислить, проинтегрировав уравнение Бюргера в малой окрестности разрыва:

$$\int_{x_s-0}^{x_s+0} \frac{\partial u}{\partial t} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_s-0}^{x_s+0} u dx - (u_+ - u_-) \frac{dx_s}{dt} = -\frac{1}{2} \int_{x_s-0}^{x_s+0} \frac{\partial u^2}{\partial x} dx + O(\nu) = -\frac{u_+^2 - u_-^2}{2} + O(\nu)$$

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{u_+ + u_-}{2}$$

### **Разностные схемы для нелинейного уравнения переноса**

Рассмотрим нелинейное уравнение переноса скалярной величины  $u$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad (*)$$

где  $f(u)$  - поток величины  $u$ , решение которого аппроксимируется на равномерной сетке.

Введём среднее по контрольному объёму

$$\bar{u}_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t) dx$$

Которое может быть связано с узловыми значениями  $u_i$  с помощью какой-либо формулы численного интегрирования

$$\bar{u}_i = \sum C_{ij} u_j$$

В наиболее простом случае, соответствующем формуле прямоугольников,

$$C_{ij} = \delta_{ij}$$

Из уравнения (\*) следует

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{h_{i+1/2} - h_{i-1/2}}{\Delta x} = 0, \text{ где } h_{i+1/2} - \text{ т.н. функции численного потока (numerical flux functions)}$$

Основная цель метода конечных объёмов – правильная аппроксимация численных потоков. Такие аппроксимации могут быть записаны в общем виде, как

$$h_{i+1/2} = h(\bar{u}_{i-m+1}, \dots, \bar{u}_{i+m}) \quad (**)$$

Аппроксимации (\*\*) должны удовлетворять условиям согласованности

$$h(u, \dots, u) = f(u)$$

$$\sum_{j=-m+1}^m \frac{\partial h}{\partial u_j} \Big|_u = \frac{\partial f(u)}{\partial u} = c(u), \quad \forall u$$

Функции численного потока можно определить, как 1) взвешенное среднее от узловых потоков  $f(\bar{u}_{i-m+1}) \dots f(\bar{u}_{i+m})$ , 2) как поток в некоторой промежуточной точке  $u^*$ , 3) как гибрид первых двух случаев.

Например, для  $m=1$  в (\*\*) функции численного потока можно определить, как

$$1) h_{i+1/2}^{(f)} = \frac{f(u_i) + f(u_{i+1})}{2}$$

2)  $h_{i+1/2}^{(u)} = f(u^*)$ , где  $u^* = I(u_i, u_{i+1})$  - промежуточная величина между  $u_i, u_{i+1}$ , а  $I$  - интерполирующий оператор

$$3) h_{i+1/2} = H(h_{i+1/2}^{(f)}, h_{i+1/2}^{(u)})$$

## Схемы первого порядка

### Схема Куранта-Изаксона-Риса (противопоточная)

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{h_{i+1/2}^n - h_{i-1/2}^n}{\Delta x} = 0,$$

где

$$h_{i+1/2} = \frac{f(u_i) + f(u_{i+1})}{2} - \frac{1}{2} d_{i+1/2}, \quad (*)$$

где  $d_{i+1/2}$  - т.н. диссипативный поток

$$d_{i+1/2} = |c_{i+1/2}| (u_{i+1} - u_i),$$

Величина  $c_{i+1/2} = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u_{i+1/2}}$  может быть определена по следующим формулам

$$c_{i+1/2} = \begin{cases} \frac{f_{i+1} - f_i}{u_{i+1} - u_i}, \\ or \\ \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u^*}, u^* \in [u_i, u_{i+1}] \end{cases}$$

или гибрид этих двух случаев

### Схема Годунова

$$h_{i+1/2} = \begin{cases} \min_{(u_i, u_{i+1})} f(u), u_i < u_{i+1} \\ \max_{(u_i, u_{i+1})} f(u), u_i > u_{i+1} \end{cases}, \text{ или}$$

$$h_{i+1/2} = \frac{1}{2} \left[ \min_{(u_i, u_{i+1})} f(u) + \max_{(u_i, u_{i+1})} f(u) \right] - \frac{\text{sgn}(u_{i+1} - u_i)}{2} \left[ \max_{(u_i, u_{i+1})} f(u) - \min_{(u_i, u_{i+1})} f(u) \right]$$

Если  $f(u)$  - монотонная функция на интервале  $[u_i, u_{i+1}]$ , то схема Годунова аналогична схеме Куранта-Изаксона-Риса (\*) с диссипативным потоком

$$d_{i+1/2} = \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)(f_{i+1} - f_i)$$

## **Схемы высокого порядка**

### **Схема Лакса-Вендроффа**

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{h_{i+1/2}^n - h_{i-1/2}^n}{\Delta x} = 0, \quad h_{i+1/2}^n = \frac{f(u_i) + f(u_{i+1})}{2} - \frac{1}{2}d_{i+1/2},$$

$$d_{i+1/2} = \frac{\Delta t}{\Delta x} c_{i+1/2}^2 (u_{i+1} - u_i),$$

### **Метод Мак-Кормака**

Модификация метода Лакса-Вендроффа на основе схемы предиктор-корректор.

Более прост в реализации, так как не требует вычисления матрицы  $A$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x} &= 0 \\ \frac{\hat{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{\tilde{f}_i^{n+1} - \tilde{f}_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} &= 0 \\ u_i^{n+1} &= \frac{\tilde{u}_i^{n+1} + \hat{u}_i^{n+1}}{2} \end{aligned}$$

Схема Мак-Кормака хорошо описывает разрывы. Лучше всего разрывы описываются, когда на шаге предиктор используются разности по потоку.

**Общий принцип применения аппроксимаций высокого порядка:** для функции численного потока берётся линейная комбинация аппроксимации низкого порядка (обычно противопоточная) и аппроксимации высокого порядка. Аппроксимацию численного потока высокого порядка можно представить в виде

$$h_{i+1/2} = h_{i+1/2}^l + (h_{i+1/2}^h - h_{i+1/2}^l) = h_{i+1/2}^l + h_{i+1/2}^a$$

где  $h_{i+1/2}^a$  - так называемый антидиффузионный поток, т.е. снижающий численную диффузию противопоточной схемы

Прямое применение аппроксимаций численного потока высокого порядка может привести к появлению нефизичных осцилляций в численном решении, что является следствием нарушения **монотонности** схемы.

Условие монотонности для решения исходной задачи заключается в том, что для двух заданных начальных данных таких, что одно везде больше другого:  $u(x,0) \geq w(x,0)$ , далее это свойство сохраняется:  $u(x,t) \geq w(x,t)$ .

Для конечно-разностной схемы

$$u_i^{n+1} = H(u_{i-m}^n, \dots, u_i^n, \dots, u_{i+m}^n)$$

условие монотонности имеет вид

$$\frac{\partial H}{\partial u_{i+j}^n} \geq 0, \quad j \in [-m, m]$$

Для линейных схем

$$u_i^{n+1} = \sum_j a_{ij} u_j^n$$

из этого условия вытекает **неотрицательность коэффициентов**  $a_{ij}$ .

Согласно теореме С.К.Годунова (1959) не существует линейных монотонных схем с порядком аппроксимации выше первого. Для достижения более высокой точности можно ослаблять свойство монотонности в пользу более слабого свойства **сохранения монотонности** начального распределения.

Это достигается в классе схем, обладающих так называемым свойством уменьшения полной вариации (Total Variation Diminishing property), или **TVD-схем**.

Этим свойством обладает исходное непрерывное уравнение, для которого справедливо

$$TV(u(x, t_2)) \leq TV(u(x, t_1)), \quad \forall t_2 \geq t_1$$

где **полная вариация** определена, как

$$TV(u(x,t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right| dx$$

Доказать выполнение TVD-свойства для решения уравнения Бюргера

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

предлагается в качестве задачи.

Для конечно-разностных схем TVD-свойство записывается в виде

$$TV(u^{n+1}) \geq TV(u^n), \quad TV(u) = \sum_i |u_{i+1} - u_i| = \sum_i |V_i|$$

Одним из распространённых способов построения TVD-схем является **метод ограничителей потока (Flux limiter method)** (Harten, 1984):

$$h_{i+1/2} = h_{i+1/2}^l + \psi_{i+1/2} (h_{i+1/2}^h - h_{i+1/2}^l) \quad (*)$$

в котором вводится функция-ограничитель потока  $\psi_{i+1/2}$ , меняющаяся в пределах от 0 до 1, близкая к единице в областях с гладким изменением решения и близкая к нулю в областях с сильными градиентами. Таким образом, в областях с резкими изменениями включается диссипативная противопоточная схема, сглаживающая нефизические осцилляции.

Обычно ограничитель потока выбирается в виде ограниченной функции от отношения приращений решения в соседних узлах

$$\psi_{i+1/2} = \psi(r_i), \quad r_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_i}$$

Величина  $r_i$  является индикатором различных типов поведения решения:

- 1)  $r_i \leq 0$  - область осцилляций
- 2)  $0 \leq r_i < 1$  - область экспоненциального роста, характерного при приближении к разрыву
- 3)  $r_i \sim 1$  и  $r_i > 1$  - области плавных изменений

Исходя из этого ограничитель потока должен иметь следующее асимптотическое поведение:

$$\psi(r) = O(r), \text{ при } r < 1$$

$$\psi(r) = 0, \text{ при } r < 0$$

$$\psi(r) = O(1), \text{ при } r \geq 1$$

Дальнейшие ограничения на вид функции  $\psi(r)$  накладывают условие выполнения TVD-свойства. Так, для линейного уравнения переноса и противопоточной схемы для  $h_{i+1/2}^l$  и схемы Лакса-Вендроффа для  $h_{i+1/2}^h$  для выполнения TVD-свойства ограничитель потока должен удовлетворять неравенству (Davis, 1984; Roe, 1984; Sweby, 1984)

$$0 \leq \psi(r) \leq 2 \min(r, 1)$$

при условии справедливости условия Куранта  $c_{i+1/2} \Delta t / \Delta x < 1$ .

Наиболее часто встречающиеся в литературе популярные ограничители имеют вид:

Minmod	$\psi(r) = \max[0, \min(r, 1)]$
Superbee	$\psi(r) = \max[0, \min(2r, 1), \min(r, 2)]$
VanLeer	$\psi(r) = (r +  r ) / (1 + r)$
VanAlbada	$\psi(r) = (r^2 + r) / (1 + r^2)$

## **Влияние вязкости на устойчивость конечно-разностных аппроксимаций уравнения**

### **Бюргера**

#### **Метод ВВЦП**

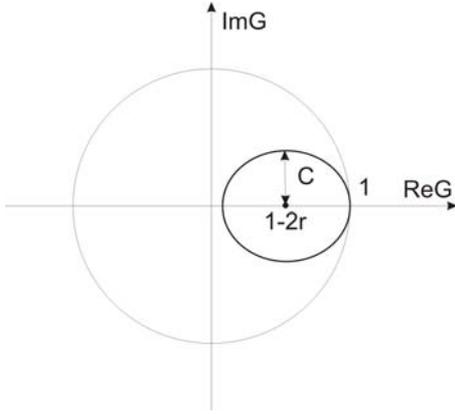
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} = \nu \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

**Анализ устойчивости** для линеаризованного уравнения

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = \nu \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$G = 1 - 2r(1 - \cos \beta) + iC \sin \beta$$

Функция  $G$  описывает эллипс, который должен находиться внутри круга:



1) левый край не должен выходить за круг:  $r \leq \frac{1}{2}$

2) радиус кривизны правого края должен быть больше 1

$$\text{Кривизна} = \frac{\partial^2 x}{\partial y^2}, \quad x = \text{Re}G \approx 1 - r\beta^2, \quad y \approx -C\beta \Rightarrow \frac{C^2}{2r} \leq 1$$

$r \leq \frac{1}{2}, \frac{C^2}{2r} \leq 1$  отсюда получаются довольно узкие границы устойчивости при  $C \leq 1$ :

$$\frac{C^2}{2} \leq r \leq \frac{1}{2},$$

Но даже при выполнении этих условий может наблюдаться потеря монотонности

схемы. Это следует из записи схемы в виде  $u_i^{n+1} = \left(r - \frac{C}{2}\right)u_{i+1}^n + (1 - 2r)u_i^n + \left(r + \frac{C}{2}\right)u_{i-1}^n$

При  $\frac{C}{2} \geq r$ , или  $\text{Re}_\Delta = \frac{c\Delta x}{\nu} \geq 2$  имеет место  $\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial u_{i+1}^n} \leq 0$  – немонотонное поведение. При

расчётах возникают осцилляции. Поэтому рабочий диапазон схемы ВВЦП сужается

$$\frac{C}{2} \leq r \leq \frac{1}{2}$$

**Для неявной по диффузионным членам схемы**

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = \nu \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

остаётся только одно условие устойчивости  $\frac{C^2}{2} \leq r$

### Метод Мак-Кормака для уравнения Бюргера

$$\frac{\tilde{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+1}^n - F_i^n}{\Delta x} = \nu \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\hat{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{\tilde{F}_i^{n+1} - \tilde{F}_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} = \nu \frac{\tilde{u}_{i+1}^{n+1} - 2\tilde{u}_i^{n+1} + \tilde{u}_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

$$u_i^{n+1} = \frac{\tilde{u}_i^{n+1} + \hat{u}_i^{n+1}}{2}$$

Устойчив при  $\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{u_{\max} \Delta x + 2\nu}$

### Метод Кранка-Николсона с линеаризацией

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}(\nabla_x F_i^n + \nabla_x F_i^{n+1}) = \frac{\nu}{2}(\nabla_x^2 u_i^n + \nabla_x^2 u_i^{n+1})$$

Квазилинеаризация по Ньютону:  $F_i^{n+1} \approx F_i^n + \left(\frac{\partial F_i}{\partial u_i}\right)^n (u_i^{n+1} - u_i^n)$

для  $F = u^2/2$   $\frac{(u_i^{n+1})^2 + (u_i^n)^2}{2} \approx u_i^n u_i^{n+1}$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{u_{i+1}^n u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^n u_{i-1}^{n+1}}{4\Delta x} = \frac{\nu}{2} \left( \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right)$$

### УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Виды граничных условий ( $n$  – внутренняя нормаль):

1) Условие Дирихле:  $T(0, t) = b(t)$

2) Условие фон Неймана:  $\frac{\partial T(0, t)}{\partial n} = c(t)$

3) Условие теплообмена с окружающей средой:  $\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial n} = h_w [T(0, t) - T_a]$ , где  $n$  – внутренняя нормаль к границе области.

Задача корректно поставлена если  $\lambda > 0$ ,  $h_w > 0$ , тогда  $-a \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  является положительно определённым эрмитовым оператором, имеющим положительные собственные значения (малые начальные возмущения будут экспоненциально затухать).

## Явная схема

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = a \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$T_i^{n+1} = (1 - 2r)T_i^n + rT_{i-1}^n + rT_{i+1}^n, \quad r = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} - \text{«сеточное» число Фурье}$$

Погрешность аппроксимации:  $O(\Delta t, \Delta x^2)$

Устойчивость: подставляем  $T \sim \exp(\lambda t + ikx)$

$$e^{\lambda \Delta t} = 1 - 2r + 2r \cos k\Delta x = 1 - 4r \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} - \text{схема устойчива при } 0 \leq r \leq \frac{1}{2}$$

Дифференциальное приближение:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{a\Delta x^2}{12} (1 - 6r) \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \left[ \frac{a^3 \Delta t^2}{3} - \frac{a^2 \Delta t \Delta x^2}{12} + \frac{a\Delta x^4}{360} \right] \frac{\partial^6 T}{\partial x^6} + \dots$$

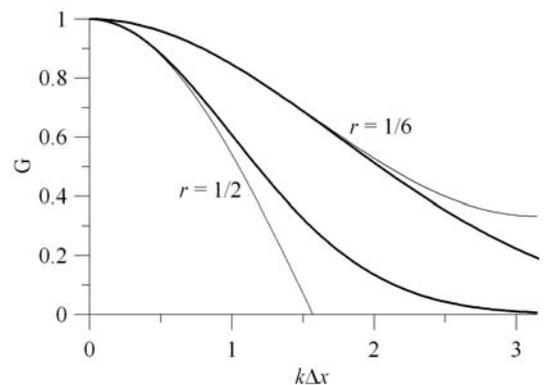
при  $r = \frac{1}{6}$  точность аппроксимации повышается до  $O(\Delta t^2, \Delta x^4)$

Численная дисперсия отсутствует, т.к. нет производных нечётных порядков

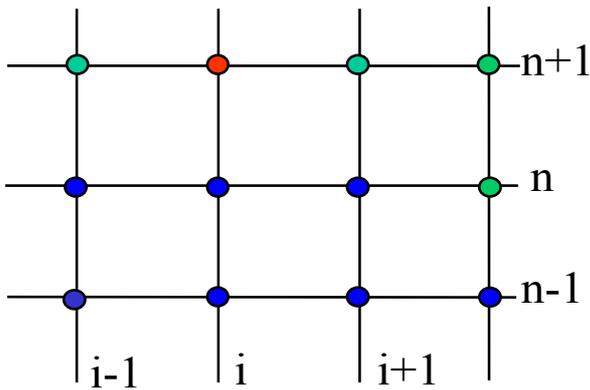
Сравним коэффициент перехода  $G$  с его точным значением, которое можно получить из решения для гармоник Фурье  $T \sim \exp(-ak^2 t + ikx)$

$$G_{\text{exact}} = \frac{T(t + \Delta t)}{T(t)} = \exp[-r(k\Delta x)^2]$$

Из графика видно, что при  $r = \frac{1}{6}$  расхождение в «рабочей» области волновых векторов  $0 \leq k\Delta x \leq \pi$  наименьшее.



Зона влияния явного метода включает только точки в предыдущие моменты времени:



численное решение не зависит от граничных условий в данный момент времени, что не соответствует свойствам решения параболического уравнения.

### Неявная схема

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = a \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

$$-rT_{i-1}^{n+1} + (1 + 2r)T_i^{n+1} - rT_{i+1}^{n+1} = T_i^n,$$

Погрешность аппроксимации:  $O(\Delta t, \Delta x^2)$

Устойчивость:  $e^{\lambda \Delta t} = \left(1 + 4r \sin^2 \frac{k \Delta x}{2}\right)^{-1}$  – схема абсолютно устойчива

Дифференциальное приближение:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{a \Delta x^2}{12} (1 + 6r) \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \left[ \frac{a^3 \Delta t^2}{3} + \frac{a^2 \Delta t \Delta x^2}{12} + \frac{a \Delta x^4}{360} \right] \frac{\partial^6 T}{\partial x^6} + \dots$$

### Метод Кранка-Николсона

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{a}{2} \left( \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right)$$

$$-\frac{r}{2} T_{i-1}^{n+1} + (1+r)T_i^{n+1} - \frac{r}{2} T_{i+1}^{n+1} = \frac{r}{2} T_{i-1}^n + (1-r)T_i^n + \frac{r}{2} T_{i+1}^n,$$

Погрешность аппроксимации:  $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$

Устойчивость:  $e^{\lambda \Delta t} = \frac{1 - 2r \sin^2 \frac{k \Delta x}{2}}{1 + 2r \sin^2 \frac{k \Delta x}{2}}$  – схема абсолютно устойчива

Дифференциальное приближение:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{a \Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \left[ \frac{a^3 \Delta t^2}{12} + \frac{a \Delta x^4}{360} \right] \frac{\partial^6 T}{\partial x^6} + \dots$$

### Комбинированный метод

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = a \left[ \theta \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + (1-\theta) \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right]$$

$\theta = 0$  – явная схема,  $\theta = 1$  – неявная схема,  $\theta = 1/2$  – схема Кранка-Николсона

Погрешность аппроксимации:  $O(\Delta t, \Delta x^2)$  кроме случаев

- 1)  $\theta = 1/2$  – погрешность  $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$
- 2)  $\theta = 1/2 - 1/(12r)$  – погрешность  $O(\Delta t^2, \Delta x^4)$
- 3)  $\theta = 1/2 - 1/(12r)$ ,  $r = 1/\sqrt{20} = 0.224$  – погрешность  $O(\Delta t^2, \Delta x^6)$

Устойчивость: при  $1/2 \leq \theta \leq 1$  – схема абсолютно устойчива

при  $0 \leq \theta \leq 1/2$  – схема устойчива при  $0 \leq r \leq 1/(2-4\theta)$

Дифференциальное приближение:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{a\Delta x^2}{12} \left[ 1 + 12r \left( \theta - \frac{1}{2} \right) \right] \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \left[ \left( \theta^2 - \theta + \frac{1}{3} \right) a^3 \Delta t^2 + \left( \theta - \frac{1}{2} \right) \frac{a^2 \Delta t \Delta x^2}{6} + \frac{a\Delta x^4}{360} \right] \frac{\partial^6 T}{\partial x^6} + \dots$$

### Трёхслойные схемы

#### Метод Дюфорты-Франкела

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n-1}}{\Delta t} = a \frac{T_{i+1}^n - T_i^{n+1} - T_i^{n-1} + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} \text{ — явная схема}$$

Устойчивость:  $e^{\lambda \Delta t} = \frac{2r \cos k\Delta x \pm \sqrt{1 - 4r^2 \sin^2 k\Delta x}}{1 + 2r}$  — безусловно устойчива!

Дифференциальное приближение:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{a\Delta x^2}{12} [1 - 12r^2] \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \dots = \left[ \frac{a\Delta x^2}{12} - a^3 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \right] \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \dots$$

если  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$ , но  $\frac{\Delta t}{\Delta x} \rightarrow \gamma$ , то модифицированное уравнение стремится к т.н.

телеграфному уравнению  $\frac{\partial T}{\partial t} + a\gamma^2 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$

### Многомерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Граничные условия Дирихле:

$$T(0, y, t) = a(y, t)$$

$$T(1, y, t) = b(y, t)$$

$$T(x, 0, t) = c(x, t)$$

$$T(x, 1, t) = d(x, t)$$

### Явный метод

$$\frac{T_{ij}^{n+1} - T_{ij}^n}{\Delta t} = a \frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{ij}^n + T_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + a \frac{T_{ij+1}^n - 2T_{ij}^n + T_{ij-1}^n}{\Delta y^2}$$

$$T_{ij}^{n+1} = (1 - 2r_x - 2r_y)T_{ij}^n + r_x T_{i+1,j}^n + r_x T_{i-1,j}^n + r_y T_{ij+1}^n + r_y T_{ij-1}^n$$

Устойчивость:  $G = 1 - 4r_x \sin^2 \frac{k_x \Delta x}{2} - 4r_y \sin^2 \frac{k_y \Delta y}{2}$      $r_x = \frac{a \Delta t}{\Delta x^2}$ ,  $r_y = \frac{a \Delta t}{\Delta y^2}$

Схема устойчива, если  $r_x + r_y \leq \frac{1}{2}$

При  $\Delta x = \Delta y$ ,  $r_x = r_y = r \leq \frac{1}{4}$  – более строгое условие, чем для одномерного уравнения

### Неявный метод переменных направлений (ADI)

$$1) \frac{T_{ij}^{n+1/2} - T_{ij}^n}{\Delta t/2} = a \frac{T_{i+1,j}^{n+1/2} - 2T_{ij}^{n+1/2} + T_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + a \frac{T_{ij+1}^n - 2T_{ij}^n + T_{ij-1}^n}{\Delta y^2}$$

$$2) \frac{T_{ij}^{n+1} - T_{ij}^{n+1/2}}{\Delta t/2} = a \frac{T_{i+1,j}^{n+1/2} - 2T_{ij}^{n+1/2} + T_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + a \frac{T_{ij+1}^{n+1} - 2T_{ij}^{n+1} + T_{ij-1}^{n+1}}{\Delta y^2}$$

$$(1 + r_x)T_{ij}^{n+1/2} - \frac{r_x}{2}T_{i+1,j}^{n+1/2} - \frac{r_x}{2}T_{i-1,j}^{n+1/2} = (1 - r_y)T_{ij}^n + \frac{r_y}{2}T_{ij+1}^n + \frac{r_y}{2}T_{ij-1}^n$$

$$(1 + r_y)T_{ij}^{n+1} - \frac{r_y}{2}T_{i,j+1}^{n+1} - \frac{r_y}{2}T_{i,j-1}^{n+1} = (1 - r_x)T_{ij}^{n+1/2} + \frac{r_x}{2}T_{i+1,j}^{n+1/2} + \frac{r_x}{2}T_{i-1,j}^{n+1/2}$$

Чтобы понять, как ставить граничные условия для  $T_{ij}^{n+1/2}$ , рассмотрим погрешность аппроксимации  $z_{ij}^n = T_{ij}^n - T_e(x_i, y_j, t^n)$ , где  $T_e$  – точное решение

$$\frac{z^{n+1/2} - z^n}{\Delta t/2} - aD_{xx}z^{n+1/2} - aD_{yy}z^n = -\frac{T_e^{n+1/2} - T_e^n}{\Delta t/2} + aD_{xx}T_e^{n+1/2} + aD_{yy}T_e^n = \psi_1$$

$$\frac{z^{n+1} - z^{n+1/2}}{\Delta t/2} - aD_{xx}z^{n+1/2} - aD_{yy}z^{n+1} = -\frac{T_e^{n+1} - T_e^{n+1/2}}{\Delta t/2} + aD_{xx}T_e^{n+1/2} + aD_{yy}T_e^{n+1} = \psi_2$$

Положим  $T_e^{n+1/2} = \frac{T_e^n + T_e^{n+1}}{2} - \varphi$ , подставляя в первое уравнение, получим

$$\psi_1 = -\frac{T_e^{n+1} - T_e^n}{\Delta t} + \frac{2\varphi}{\Delta t} + aD_{xx}\frac{T_e^n + T_e^{n+1}}{2} - aD_{xx}\varphi + aD_{yy}T_e^n$$

Так как

$$\begin{aligned} -\frac{T_e^{n+1} - T_e^n}{\Delta t} + aD_{xx}\frac{T_e^n + T_e^{n+1}}{2} + aD_{yy}T_e^n &= -\frac{T_e^{n+1} - T_e^n}{\Delta t} + a(D_{xx} + D_{yy})\frac{T_e^n + T_e^{n+1}}{2} + aD_{yy}\frac{T_e^n - T_e^{n+1}}{2} = \\ &= O(\Delta t^2) + aD_{yy}\frac{T_e^n - T_e^{n+1}}{2}, \end{aligned}$$

где использовано выражение для невязки схемы Кранка-Николсона, то

$$\psi_1 = \frac{2\varphi}{\Delta t} - aD_{xx}\varphi - \frac{a}{2}D_{yy}(T_e^{n+1} - T_e^n) + O(\Delta t^2)$$

Если возьмём  $\varphi = \frac{\Delta t}{4}aD_{yy}(T_e^{n+1} - T_e^n)$ , то  $\psi_1 = O(\Delta t^2)$ . Легко также проверить, что  $\psi_1 = \psi_2$ .

Таким образом, в методе ADI

$$T_e^{n+1/2} = \frac{T_e^n + T_e^{n+1}}{2} - \frac{\Delta t}{4}aD_{yy}(T_e^{n+1} - T_e^n)$$

именно для этой величины должны ставиться граничные условия на первом шаге.

**Устойчивость** определяется произведением двух коэффициентов перехода для каждого полушага

$$G = G_1G_2 = \frac{1 - 2r_y \sin^2 \frac{k_y \Delta y}{2}}{1 + 2r_x \sin^2 \frac{k_x \Delta x}{2}} \cdot \frac{1 - 2r_x \sin^2 \frac{k_x \Delta x}{2}}{1 + 2r_y \sin^2 \frac{k_y \Delta y}{2}}$$

При любых  $r_x, r_y, k_y \Delta y, k_x \Delta x$   $|G| \leq 1$ , однако  $|G_1|, |G_2|$  могут быть больше единицы.

Метод безусловно устойчив.

### Трёхмерное обобщение метода ADI

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \frac{T_{ijk}^{n+1/3} - T_{ijk}^n}{\Delta t/3} = aD_{xx}T_{ijk}^{n+1/3} + aD_{yy}T_{ijk}^n + aD_{zz}T_{ijk}^n \\
 2) \quad & \frac{T_{ijk}^{n+2/3} - T_{ijk}^{n+1/3}}{\Delta t/3} = aD_{xx}T_{ijk}^{n+1/3} + aD_{yy}T_{ijk}^{n+2/3} + aD_{zz}T_{ijk}^{n+1/3} \\
 3) \quad & \frac{T_{ijk}^{n+1} - T_{ijk}^{n+2/3}}{\Delta t/3} = aD_{xx}T_{ijk}^{n+2/3} + aD_{yy}T_{ijk}^{n+2/3} + aD_{zz}T_{ijk}^{n+1}
 \end{aligned}$$

$$\left(1 + \frac{2}{3}r_x\right)T_{ijk}^{n+1/2} - \frac{r_x}{3}T_{i+1,jk}^{n+1/2} - \frac{r_x}{3}T_{i-1,jk}^{n+1/2} = \left(1 - \frac{4}{3}r_y\right)T_{ijk}^n + \frac{r_y}{3}T_{ij+1,k}^n + \frac{r_y}{3}T_{ij-1,k}^n + \frac{r_z}{3}T_{ijk+1}^n + \frac{r_z}{3}T_{ijk-1}^n \text{ и т.д.}$$

уже не является безусловно устойчивым, т.к.

$$G = G_1G_2G_3 = \frac{1 - \frac{4}{3}r_y \sin^2 \frac{k_y \Delta y}{2} - \frac{4}{3}r_z \sin^2 \frac{k_y \Delta y}{2}}{1 + \frac{4}{3}r_x \sin^2 \frac{k_x \Delta x}{2}} \cdot \dots \text{ не всегда меньше единицы}$$

### Методы расщепления

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \frac{T_{ij}^{n+1/2} - T_{ij}^n}{\Delta t} = a \frac{T_{i+1,j}^{n+1/2} - 2T_{ij}^{n+1/2} + T_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} \\
 2) \quad & \frac{T_{ij}^{n+1} - T_{ij}^{n+1/2}}{\Delta t} = a \frac{T_{ij+1}^{n+1} - 2T_{ij}^{n+1} + T_{ij-1}^{n+1}}{\Delta y^2}
 \end{aligned}$$

Обозначим  $\Delta T = T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}$ , тогда можно записать

$$(E - r_x \Delta_{xx})T^{n+1/2} = T^n, \quad (E - r_y \Delta_{yy})T^{n+1} = T^{n+1/2}$$

$$(E - r_x \Delta_{xx})(E - r_y \Delta_{yy})T^{n+1} = T^n$$

$$(E - r_x \Delta_{xx} - r_y \Delta_{yy} + r_y r_x \Delta_{yy} \Delta_{xx})T^{n+1} = (E - r_x \Delta_{xx} - r_y \Delta_{yy} + O(\Delta t^2))T^{n+1} = T^n,$$

что эквивалентно неявной схеме  $\frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} = a(D_{xx}T^{n+1} + D_{yy}T^{n+1})$

Схема 2-го порядка точности по времени

$$1) \frac{T^{n+1/2} - T^n}{\Delta t} = aD_{xx} \frac{T^{n+1/2} + T^n}{2}$$

$$2) \frac{T^{n+1} - T^{n+1/2}}{\Delta t} = aD_{yy} \frac{T^{n+1/2} + T^{n+1}}{2}$$

$$T^{n+1} = \left( E - \frac{r_y}{2} \Delta_{yy} \right)^{-1} \left( E + \frac{r_y}{2} \Delta_{yy} \right) \left( E - \frac{r_x}{2} \Delta_{xx} \right)^{-1} \left( E + \frac{r_x}{2} \Delta_{xx} \right) T^n$$

$$T^{n+1} = \left( E + r_y \Delta_{yy} + r_x \Delta_{xx} + \frac{1}{2} (r_x^2 \Delta_{xx}^2 + 2r_x \Delta_{xx} r_y \Delta_{yy} + r_y^2 \Delta_{yy}^2) \dots \right) T^n$$

Для коммутирующих операторов  $\Delta_{xx}$ ,  $\Delta_{yy}$

$$T^{n+1} = \left( E + r_y \Delta_{yy} + r_x \Delta_{xx} + \frac{1}{2} (r_y \Delta_{yy} + r_x \Delta_{xx})^2 \right) T^n = \left( 1 + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots \right) T^n$$

Общая схема метода расщепления

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^M A_{\alpha} T = f$$

На интервале  $t^{n-1} \leq t \leq t^{n+1}$ :

$$\frac{T^{n+1/M-1} - T^{n-1}}{\Delta t} + A_1^n \frac{T^{n+1/M-1} + T^{n-1}}{2} = 0$$

...

$$\frac{T^n - T^{n-1/M}}{\Delta t} + A_M^n \frac{T^n + T^{n-1/M}}{2} = f^n$$

$$\frac{T^{n+1/M} - T^n}{\Delta t} + A_M^n \frac{T^n + T^{n+1/M}}{2} = f^n$$

...

$$\frac{T^{n+1} - T^{n+(M-1)/M}}{\Delta t} + A_1^n \frac{T^{n+1} + T^{n+(M-1)/M}}{2} = 0$$

где  $A^n = A(t^n, \tilde{T}^n)$ ,  $\tilde{T}^n = T^{n-1} - \Delta t A(t^{n-1}, T^{n-1}) T^{n-1}$

## ЧИСЛЕННЫЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Уравнение Кортевега-де Вриза (КдВ): простейшая модель нелинейных волн в дисперсионной среде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

Компенсирова действие нелинейности, дисперсия даёт возможность формироваться стационарным волнам конечной амплитуды – уединённым и периодическим.

Уравнение КдВ имеет решение в виде уединённой волны – солитона

$$u = u_0 \operatorname{cosh}^{-2} \left[ \frac{u_0^{1/2} (x - u_0 t / 3)}{(12\beta)^{1/2}} \right]$$

Уравнение КдВ можно решать с помощью следующих конечно-разностных методов:

1. Трёхслойная явная схема с порядком аппроксимации  $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + u_i^n \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \beta \frac{u_{i+2}^n - 2u_{i+1}^n + 2u_{i-1}^n - u_{i-2}^n}{2\Delta x^3} = 0$$

схема устойчива при  $\frac{\Delta t}{\Delta x} \left( |u| + \frac{3\sqrt{3}\beta}{2\Delta x^2} \right) \leq 1$

2. Двухшаговая явная схема Лакса-Вендроффа с порядком аппроксимации  $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$

$$u_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_i^n) - \frac{\Delta t}{4\Delta x} \left[ (u_i^{n+1})^2 - (u_i^n)^2 + \frac{2\beta}{\Delta x^2} (u_{i+2}^n - 3u_{i+1}^n + 3u_i^n - u_{i-1}^n) \right]$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ (u_{i+1/2}^{n+1/2})^2 - (u_{i-1/2}^{n+1/2})^2 + \frac{2\beta}{\Delta x^2} (u_{i+3/2}^{n+1/2} - 3u_{i+1/2}^{n+1/2} + 3u_{i-1/2}^{n+1/2} - u_{i-3/2}^{n+1/2}) \right]$$

условие устойчивости  $\Delta t \leq \Delta x^3 / 4\beta$ , более жёсткое, чем для схемы 1

3. Трёхслойная явная схема с порядком аппроксимации  $O(\Delta t^2, \Delta x^4)$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + u_i^n \frac{-u_{i+2}^n + 8u_{i+1}^n - 8u_{i-1}^n + u_{i-2}^n}{12\Delta x} + \beta \frac{-u_{i+3}^n + 8u_{i+2}^n - 13u_{i+1}^n + 13u_{i-1}^n - 8u_{i-2}^n + u_{i-3}^n}{8\Delta x^3} = 0$$

условие устойчивости  $\Delta t \leq 0.216 \Delta x^3 / \beta$

Уравнение КдВ можно также решать с помощью спектрального метода, используя разложение в ряд Фурье

$$u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(t) \exp(ikx)$$

Подставляя это разложение в уравнение КдВ, получаем бесконечную систему уравнений для амплитуд гармоник

$$\frac{da_k}{dt} = -\frac{ik}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{k-n} a_n + i\beta k^3 a_k$$

Система обрезается на некотором максимальном волновом числе  $k_{max}$ , значение которого подбирается с помощью методических расчётов с возрастающим  $k_{max}$ . Спектральный метод сложнее конечно-разностного и неэффективен в смысле затрат машинного времени.

## МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Уравнение движения

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - U_e \frac{dU_e}{dx} \right) = \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial y} \left[ r^m (\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial y} \right]$$

Уравнение энергии

$$\rho \left( u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) = \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial y} \left[ r^m \left\{ \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial h}{\partial y} + \left\{ \mu \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) + \mu_t \left( 1 - \frac{1}{Pr_t} \right) \right\} u \frac{\partial u}{\partial y} \right\} \right]$$

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial}{\partial x} (r^m \rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (r^m \rho v) = 0$$

Уравнение состояния:

$$\rho = \rho(T, p)$$

Граничные условия:

$$u = 0, \quad h = h_w, \quad T = T_w, \quad \text{при } y = 0$$

$$u = U_e, \quad h = h_e, \quad T = T_e, \quad \text{при } y \rightarrow \infty$$

Начальные условия:

$$u(y,0) = u_0(y), \quad h(y,0) = h_0(y) \dots$$

Для задания поперечной скорости  $v$  в начальном сечении необходимо знать продольную производную продольной скорости  $\partial u / \partial x$ . Если такая информация отсутствует, можно воспользоваться уравнениями движения и неразрывности для того чтобы получить искомое условие

$$v(y,0) = -\frac{u}{r^m} \int_0^y u^{-2} \left( U_e \frac{dU_e}{dx} + \frac{1}{\rho r^m} \frac{\partial}{\partial y} \left[ r^m (\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right) r^m dy$$

Уравнения пограничного слоя являются нелинейными уравнениями параболического типа, поэтому численные методы их решения сходны с численными методами решения нелинейного уравнения теплопроводности. Наиболее распространёнными методами являются неявный метод и метод Кранка-Николсона. Иногда, особенно при расчёте турбулентных течений схема Кранка-Николсона является неустойчивой, поэтому более популярна неявная схема второго порядка точности, в которой производная по  $x$  аппроксимируется, как

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{n+1} = \frac{3u_i^{n+1} - 4u_i^n + u_i^{n-1}}{2\Delta x}$$

Будем обозначать ниже  $u_i^{n+1}$  как  $u_i$ ,  $u_i^n$  как  $\tilde{u}_i$ ,  $u_i^{n-1}$  как  $\hat{u}_i$ .

Схему неявного метода для уравнения

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right]$$

можно записать, как

$$u_i \frac{u_i - \tilde{u}_i}{\Delta x} + v_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta y} = U_e \frac{U_e - \tilde{U}_e}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta y} \left( \nu_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta y} - \nu_{i-1/2} \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta y} \right)$$

поперечную скорость можно определить с помощью численного интегрирования

$$v_i = - \int_0^{y_i} \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

**Методы линеаризации уравнений:**

1) Запаздывающие коэффициенты:  $u_i = \tilde{u}_i + O(\Delta x)$

$$\tilde{u}_i \frac{u_i - \tilde{u}_i}{\Delta x} + \tilde{v}_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta y} = \tilde{U}_e \frac{U_e - \tilde{U}_e}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta y} \left( v_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta y} - v_{i-1/2} \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta y} \right)$$

2) Итерационная замена коэффициентов: на каждом шаге по  $x$  проводятся внутренние итерации до достижения сходимости

$$u_i^k \frac{u_i^{k+1} - \tilde{u}_i}{\Delta x} + v_i^k \frac{u_{i+1}^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}}{2\Delta y} = \tilde{U}_e \frac{U_e - \tilde{U}_e}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta y} \left( v_{i+1/2}^k \frac{u_{i+1}^{k+1} - u_i^{k+1}}{\Delta y} - v_{i-1/2}^k \frac{u_i^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}}{\Delta y} \right)$$

начальное приближение:  $u_i^0 = \tilde{u}_i$ ,

3) Квазилинеаризация по Ньютону

$$F_i^{n+1} \approx F_i^n + \left( \frac{\partial F_i}{\partial u_i} \right)^n (u_i^{n+1} - u_i^n)$$

$$(u_i^{k+1})^2 \approx 2u_i^k u_i^{k+1} - (u_i^k)^2$$

$$\left( v \frac{\partial u}{\partial y} \right)^{k+1} \approx v^k \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^{k+1} + v^{k+1} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^k - v^k \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^k$$

из-за присутствия  $v^{k+1}$  уравнения приходится решать методом модифицированной прогонки (см. Андерсон, Танненхилл, Плетчер, 1990, т.2, с.411)

4) Экстраполяция коэффициентов:

$$u_i = \tilde{u}_i + \left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right|_i \Delta x + O(\Delta x^2) = \tilde{u}_i + \frac{\tilde{u}_i - \hat{u}_i}{\Delta x} \Delta x + O(\Delta x^2) = 2\tilde{u}_i - \hat{u}_i + O(\Delta x^2)$$

итерации не требуются

Для коэффициентов вязкости в полужелых узлах могут быть использованы различные

аппроксимации, например  $v_{i+1/2} = \frac{v_i + v_{i+1}}{2}$ ,  $v_{i+1/2} = \frac{2v_i v_{i+1}}{v_i + v_{i+1}}$  и др.

Рекомендации по использованию:

- 1) Наиболее простым является метод запаздывающих коэффициентов, не требующий внутренних итераций. Погрешность аппроксимации может быть снижена уменьшением шага  $\Delta x$ .
- 2) При необходимости можно использовать экстраполяцию коэффициентов или квазилинеаризацию
- 3) От проблем с определением поперечной скорости можно избавиться с помощью преобразования Мизеса:  $x, y \rightarrow x, \psi$ , где функция тока определена, как

$$\psi(x, y) = \int_0^y u(x, y') dy', \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ v u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right]$$

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

Уравнение переноса импульса:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i, \quad \tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Уравнение переноса тепла:

$$\rho c_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(u_i T)}{\partial x_i} \right] = - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \sigma, \quad q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

Уравнения Навье-Стокса для сжимаемой жидкости образуют смешанную систему гиперболически-параболических уравнений, а для несжимаемой жидкости – эллиптически-параболических. Поэтому в этих двух случаях используются разные численные методы решения.

Для решения уравнений сжимаемой жидкости широко используются явные методы расчёта: методы Дюфорта-Франкела, Лакса-Вендроффа, Мак-Кормака и др. Использование этих методов для расчёта несжимаемых течений невозможно из-за ограничения на шаг по времени, налагаемого условием Куранта-Фридрихса-Леви  $\Delta t \leq \Delta x / c_{sound}$ , так как скорость звука в жидкости слишком велика ( $\sim 10^3$  м/с).

Несжимаемость течения приводит к дополнительным вычислительным трудностям: в уравнение неразрывности входят лишь компоненты скорости. Поэтому в данном случае нет прямой связи с давлением, которая в случае сжимаемых течений осуществляется через плотность. Для расчёта давления требуется решать эллиптическое уравнение Пуассона совместно с уравнением импульсов.

### Особенности дискретизации уравнений Навье-Стокса

Наиболее часто встречающиеся уравнения переноса субстанций в несжимаемой жидкости имеют вид **обобщённого уравнения переноса**:

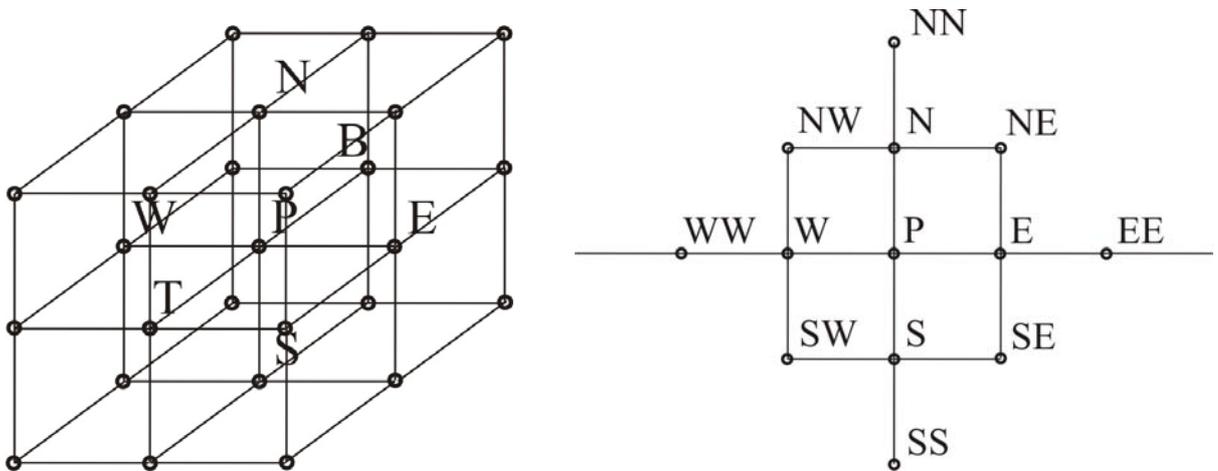
$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial(u_i \Phi)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( D_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) + \sigma_\Phi \quad (*)$$

**Форма записи уравнений.** Для конечно-разностной дискретизации можно использовать как дивергентную форму (\*), так и недивергентную форму

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( D_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) + \sigma_\Phi$$

однако опыт численных расчётов (например, для тестовой задачи течения в квадратной каверне) показал, что дивергентная форма записи (\*) приводит к более точным результатам.

### Расчётный шаблон (Computational molecule)



Вместо параметризации узлов сетки  $(i, j, k)$  используется одномерная свёртка трёхмерных координат с использованием обозначений, соответствующих сторонам света (см. рис.)

Узел сетки	Обозначение	Одномерный индекс
$i, j, k$	P	$l = (k - 1)N_j N_i + (i - 1)N_i + j$
$i-1, j, k$	W	$l - N_j$
$i, j-1, k$	S	$l - 1$

$i, j+1, k$	N	$l+1$
$i+1, j, k$	E	$l+N_j$
$i, j, k-1$	B	$l-N_iN_j$
$i, j, k+1$	T	$l+N_iN_j$

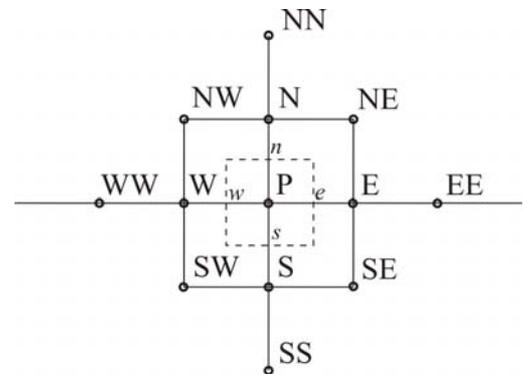
Система конечно-разностных уравнений (пятиточечный шаблон для двумерного уравнения) записывается в виде:

$$A_W\phi_W + A_S\phi_S + A_P\phi_P + A_N\phi_N + A_E\phi_E = Q_P, \text{ для } 1 < l < N_iN_jN_k$$

$$\text{или, сокращённо, } A_P\phi_P + \sum_{nb} A_{nb}\phi_{nb} = Q_P, \text{ (nb-}$$

neighbors, соседние узлы)

Проинтегрируем обобщённое уравнение переноса по элементарному объёму, грани которого проходят через середины отрезков, соединяющих данный узел с соседними (см.рис)



$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \Phi dV + \int_S u_i \Phi dS_i = \int_S D_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dS_i + \int_V \sigma_\Phi dV$$

Аппроксимации поверхностных интегралов:

$$\int_S f dS_i = \sum_k \int_{S_k} f dS_i - \text{сумма по всем граням объёма}$$

$$\text{Рассмотрим грань } e \text{ и интеграл } F_e = \int_{S_e} f dS_i$$

1) Формула прямоугольников:  $F_e = f_e S_e$  – 2-й порядок аппроксимации (наиболее простая)

$$2) \text{ Формула трапеций: } F_e = \frac{(f_{ne} + f_{se})}{2} S_e - \text{2-й порядок аппроксимации}$$

$$3) \text{ Формула Симпсона: } F_e = \frac{(f_{ne} + 4f_e + f_{se})}{6} S_e - \text{4-й порядок аппроксимации}$$

Аппроксимации объёмных интегралов:  $\int_V \Phi dV = \Phi_P V_p$  – 2-й порядок аппроксимации

Применив аппроксимации по методу прямоугольников получим:

$$V_p \frac{\Phi_P - \tilde{\Phi}_P}{\Delta t} + (u_e \Phi_e - u_w \Phi_w) S_e + (v_n \Phi_n - v_s \Phi_s) S_n = D \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_w^e S_e + D \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_s^n S_n + \sigma_p V_p$$

Диффузионные члены:  $D \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_e = D_e \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta x}$  – 2-й порядок аппроксимации

Аппроксимации конвективных членов:  $\Phi_e$  ?

**Интерполяция по потоку (Upwind Differencing Scheme):**  $\Phi_e = \begin{cases} \Phi_P, u_e > 0 \\ \Phi_E, u_e < 0 \end{cases}$

$$u_e \Phi_e = \frac{u_e + |u_e|}{2} \Phi_P + \frac{u_e - |u_e|}{2} \Phi_E$$

$$\Phi_P = \Phi_e - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_e + \dots, \quad u_e \Phi_e = u_e \Phi_P + \frac{u_e \Delta x}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_e + \dots \quad - \text{возникает дополнительная}$$

схемная диффузия

**Линейная интерполяция (Central Differencing Scheme):**  $\Phi_e = \frac{\Phi_E + \Phi_P}{2}$

2-й порядок аппроксимации, но при решении возникают осцилляции из-за нарушения условия монотонности и диагонального преобладания при больших значениях сеточного числа Рейнольдса  $R_\Delta = u_e \Delta x / \nu \geq 2$

**Квадратичная интерполяция по потоку (QUICK):**

$$\Phi_e = \begin{cases} \frac{6}{8} \Phi_P + \frac{3}{8} \Phi_E - \frac{1}{8} \Phi_W, u_e > 0 \\ \frac{6}{8} \Phi_E + \frac{3}{8} \Phi_P - \frac{1}{8} \Phi_{EE}, u_e < 0 \end{cases}$$

$$u_e \Phi_e = \frac{9u_e + 3|u_e|}{16} \Phi_P + \frac{9u_e - 3|u_e|}{16} \Phi_E - \frac{u_e + |u_e|}{16} \Phi_W - \frac{u_e - |u_e|}{16} \Phi_{EE}$$

3-й порядок аппроксимации, но условия монотонности и диагонального преобладания при больших  $R_\Delta$  также не выполняются. Из-за этого возникают проблемы при

итерационном решении соответствующей системы линейных уравнений (медленная сходимость), а также нефизические осцилляции.

Кроме того, одномерный расчётный шаблон перестаёт быть 3-точечным, что не позволяет использовать метод прогонки при решении.

Избежать этих трудностей помогает **метод отложенной коррекции (Deferred Correction)**. Конечно-разностная аппроксимация высокого порядка представляется в виде суммы противопоточной схемы и остатка, который выносится в источниковый член и вычисляется с предыдущей итерации:  $F_e = F_e^{low} + (F_e^{high} - F_e^{low})^{old}$

*Пример:* рассмотрим уравнение диффузии  $c \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)$

$$\frac{c\Delta x}{D}(\Phi_e - \Phi_w) = \Phi_E - 2\Phi_P + \Phi_W$$

Схема UDS 1-го порядка точности:

$$R(\Phi_P - \Phi_W) = \Phi_E - 2\Phi_P + \Phi_W, \quad \Phi_E - (2 + R)\Phi_P + (1 + R)\Phi_W = 0$$

Схема QUICK 1-го порядка точности:

$$R\left(\frac{3}{8}\Phi_P - \frac{7}{8}\Phi_W + \frac{3}{8}\Phi_E + \frac{1}{8}\Phi_{WW}\right) = \Phi_E - 2\Phi_P + \Phi_W,$$

$$\left(1 - \frac{3}{8}R\right)\Phi_E - \left(2 + \frac{3}{8}R\right)\Phi_P + \left(1 + \frac{7}{8}R\right)\Phi_W - \frac{R}{8}\Phi_{WW} = 0$$

последнее выражение можно записать в виде

$$\Phi_E - (2 + R)\Phi_P + (1 + R)\Phi_W = R\left(\frac{3}{8}\Phi_E - \frac{5}{8}\Phi_P + \frac{1}{8}\Phi_W + \frac{1}{8}\Phi_{WW}\right)$$

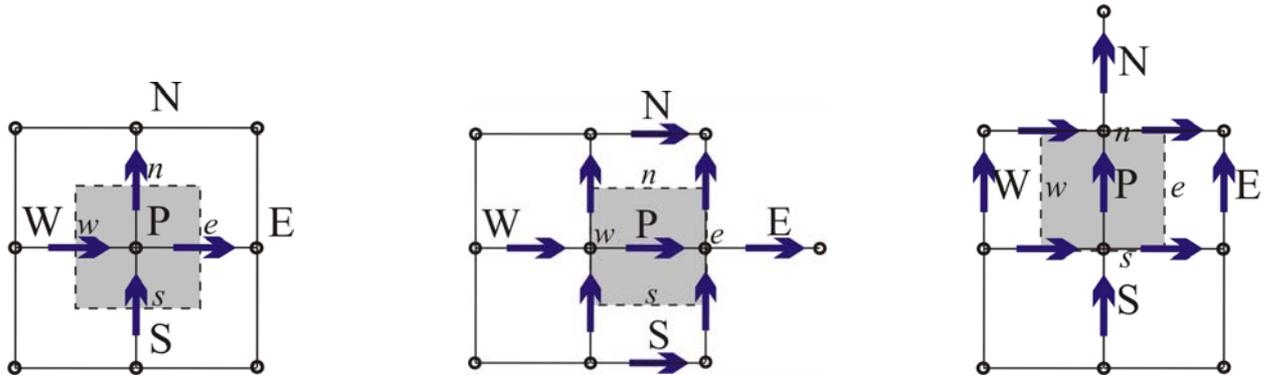
Метод отложенной коррекции реализуется в виде итерационного процесса

$$\Phi_E - (2 + R)\Phi_P + (1 + R)\Phi_W = R\left(\frac{3}{8}\Phi_E - \frac{5}{8}\Phi_P + \frac{1}{8}\Phi_W + \frac{1}{8}\Phi_{WW}\right)^{old}$$

на каждой итерации используется метод прогонки, счёт по которому устойчив.

## Выбор размещения переменных на сетке

1. Разнесённая сетка (Staggered Grid) – давление и компоненты скорости размещены в разных местах



Расположение давления и компонент скорости на разнесённой сетке и контрольные объёмы для уравнения неразрывности (справа),  $x$ -компоненты скорости (в центре) и  $y$ -компоненты скорости (справа).

2. Совмещённая сетка (Colocated Grid) – все величины хранятся в одних узлах.

На **разнесённой сетке** градиент давления и вязкие напряжения просто аппроксимируются центральными разностями без необходимости интерполяции. Также очевидно аппроксимируется уравнение неразрывности. Кроме того, на ней имеет место сильная связь между давлением и полем скорости, которая помогает избежать осцилляций поля давления, характерных для решения уравнений на **совмещённой сетке**.

**Важность согласованной аппроксимации градиента давления для консервативности конечно-разностных уравнений.** Поскольку дискретизации подвергается уравнение сохранения импульса, то для полученных конечно-разностных уравнений сохранение энергии не гарантировано, если к этому не приложены специальные меры. Рассмотрим вклад градиента давления в баланс энергии несжимаемой жидкости, который можно записать, как

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \frac{u^2}{2} dV = \dots - \int_V u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} dV = \dots + \int_V p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV - \oint_S u_i p dS_i = \dots - \oint_S u_i p dS_i$$

Конечно-разностный аналог вклада градиента давления в полную энергию можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^N u_i G_i p \Delta V_i = \sum_{S_b} p u_n \Delta S - \sum_{i=1}^N p D_i u_i \Delta V_i, \text{ или}$$

$$\sum_{i=1}^N (u_i G_i p + p D_i u_i) \Delta V_i = \text{surface terms } (*)$$

где  $G_i p$  – численная аппроксимация градиента давления,  $D_i u_i$  – численная аппроксимация дивергенции скорости, используемая в уравнении неразрывности.

Рассмотрим для примера одномерный случай, когда градиент давления аппроксимируется левой разностью, а дивергенция – правой на равномерной сетке. В этом случае (\*) имеет вид

$$\sum_{i=1}^N [u_i (p_i - p_{i-1}) + p_i (u_{i+1} - u_i)] = u_{N+1} p_N - u_1 p_0$$

В этом случае в конечно-разностных уравнениях аппроксимации дивергенции и градиента давления **согласованы**, т.к. сохраняют «поверхностный» характер влияния градиента давления на баланс энергии. В противном случае свойство сохранения энергии может нарушаться, что может привести к негативным последствиям, в особенности при расчёте нестационарных задач.

**Итерационные алгоритмы совместного решения уравнений переноса импульса и неразрывности: методы проекции**

$$\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial t} + \frac{\partial(u_j^n u_i^{n+1})}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}^{n+1}}{\partial x_i} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

$$u_i^n, p^n \rightarrow u_i^{n+1}, p^{n+1}?$$

В семействе методов коррекции давления проблема решается следующим образом.

Сначала находится промежуточное поле скорости  $\tilde{u}_i$  из уравнения импульсов со «старым» давлением:

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_j^n \tilde{u}_i)}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{\tau}_{ij}}{\partial x_i}$$

Поле скорости  $\tilde{u}_i$  не удовлетворяет уравнению неразрывности. Поэтому на следующем этапе ищутся поправки к полю скорости и давления для того, чтобы удовлетворить это уравнение:  $u_i^{n+1} = \tilde{u}_i + u'_i$ ,  $p^{n+1} = p^n + p'$ .

Подставляя в (1) и в уравнение неразрывности, получим уравнения для поправок скорости и давления

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_j^n u'_i)}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_i} \quad \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i}$$

Пренебрегая вязкими и конвективными членами, получим

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} \approx -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} \quad (2)$$

Интегрируя это уравнение на интервале  $[t^n, t^{n+1}]$ , получим\*

$$u'_i = -\Delta t \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} \quad (3)$$

откуда, с учётом выражения для дивергенции поправки скорости, получим уравнение Пуассона для давления

---

\* Так как на предыдущем шаге по времени, при  $t = t^n$  поле скорости удовлетворяло уравнению неразрывности, то при  $t = t^n$  поправка  $u'_i$  равна нулю.

$$\nabla^2 p' = \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i}$$

решая которое, найдём искомые поправки к скорости из (3).

Из (3) видно, что поправка к скорости является безвихревой, т.к. является градиентом некоторого потенциала, пропорционального давлению. Методы подобного типа, в которых на первом шаге вычисляется поле скорости, не удовлетворяющее уравнению неразрывности, а затем из него выделяется соленоидальная составляющая («соленоидальная проекция»), называются методами проекции.

Приближению (2) можно придать интересную физическую интерпретацию. Уравнения (2) совпадают с уравнениями теории импульсивного движения жидкости<sup>4</sup> (например, в результате удара). Такие уравнения получаются из полных уравнений Навье-Стокса в пределе очень малой временной длительности удара, т.е. когда

$$\frac{\partial p'}{\partial x_i} \sim \delta(t - t^{n+1}) \frac{\partial \Pi}{\partial x_i}$$

где величина  $\Pi = \int p' dt$  называется импульсом давления.

Таким образом, приближение (2) соответствует кратковременному гидравлическому удару, «возвращающему жидкость в несжимаемое состояние».

### Метод SIMPLE

Рассмотрим реализацию этой идеи в популярном методе **SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation)**

Конечно-разностное уравнение импульсов, которое необходимо решить на  $n+1$  шаге по времени, имеет вид

$$A_P^{u_i} u_{i,P} + \sum_{nb} A_{nb}^{u_i} u_{i,nb} = Q_{u_i}^{n+1} - \left( \frac{\delta p^{n+1}}{\delta x_i} \right)_P$$

Уравнение решается итерациями, которые будем называть *внешними* итерациями (в отличие от *внутренних* итераций при решении системы линейных уравнений)

На первом шаге  $m$ -й внешней итерации решается уравнение для промежуточного поля скорости

$$A_P^{u_i} \tilde{u}_{i,P}^m + \sum_{nb} A_{nb}^{u_i} \tilde{u}_{i,nb}^m = Q_{u_i}^{m-1} - \left( \frac{\delta p^{m-1}}{\delta x_i} \right)_P \quad (1)$$

<sup>4</sup> см., напр. Дж.Бэтчелор. Введение в динамику жидкости. М., Мир, 1973. с.580-584

затем ищется такая поправка к нему  $u'_i$ , которая удовлетворяла бы конечно-разностному уравнению неразрывности, т.е.

$$\left(\frac{\delta u'_i}{\delta x_i}\right)_P = -\left(\frac{\delta \tilde{u}_i^m}{\delta x_i}\right)_P \quad (2)$$

Уравнение для соответствующих поправок скорости и давления следует из (1)

$$A_P^{u_i} u'_{i,P} + \sum_{nb} A_{nb}^{u_i} u'_{i,nb} = -\left(\frac{\delta p'}{\delta x_i}\right)_P \quad (3)$$

В методе SIMPLE (Patankar, Spalding, 1972) суммой в левой части пренебрегается, после чего получается приближенное решение

$$u'_{i,P} \approx -\frac{1}{A_P^{u_i}} \left(\frac{\delta p'}{\delta x_i}\right)_P \quad (4)$$

подставляя которое в (2), получим уравнение Пуассона для поправки давления

$$\frac{\delta}{\delta x_i} \left[ \frac{1}{A_P^{u_i}} \left(\frac{\delta p'}{\delta x_i}\right)_P \right] = \left(\frac{\delta \tilde{u}_i^m}{\delta x_i}\right)_P \quad (5)$$

Как показали численные эксперименты, вычисленную отсюда поправку давления необходимо подвергнуть нижней релаксации, так что итоговые выражения для давления и скорости имеют вид

$$p^m = p^{m-1} + \alpha_p p', \quad u_{i,P}^m \approx \tilde{u}_{i,P}^m - \frac{\alpha_p}{A_P^{u_i}} \left(\frac{\delta p'}{\delta x_i}\right)_P, \quad \text{где } \alpha_p \leq 1 \quad (6)$$

Рекомендуемое значение  $\alpha_p$  составляет около 0.8 (Patankar, 1980). Уравнения для промежуточной скорости также рекомендуется решать с помощью оригинального варианта метода нижней релаксации, предложенного Патанкар, в котором вместо уравнения (1) решается

$$\frac{A_P^{u_i}}{\alpha_u} \tilde{u}_{i,P}^m + \sum_{nb} A_{nb}^{u_i} \tilde{u}_{i,nb}^m = Q_{u_i}^{m-1} - \left(\frac{\delta p^{m-1}}{\delta x_i}\right)_P + \frac{1 - \alpha_u}{\alpha_u} A_P^{u_i} \tilde{u}_{i,P}^{m-1} \quad (7)$$

где  $\alpha_u$  – коэффициент нижней релаксации, оптимальное значение которого составляет (Ferziger, Peric, 1996)

$$\alpha_u = 1 - \alpha_p \quad (8)$$

Фактически, уравнение (7) можно получить из (1) добавлением в левую часть производной по псевдовремени  $\tau$ , причём шаг по псевдовремени равен

$$\Delta \tau = \frac{\alpha_u}{(1 - \alpha_u) A_P^{u_i}}$$

Уравнение (7) при этом решается неявным методом до установления, что повышает устойчивость итерационного процесса.

### Метод SIMPLEC

«Слабым местом» приведённого выше вывода уравнения для поправки давления (5) является пренебрежение суммой в левой части (3). С точки зрения рассмотренной выше аналогии действия поправки давления с гидравлическим ударом такое пренебрежение означает, что скорость от действия импульса поправки давления меняется только в точке  $P$ , в то время как для соседних точек мы полагаем  $u'_{i,nb} \approx 0$ . Между тем гидравлический удар действует на весь объём жидкости сразу, поэтому скорость в соседних узлах должна меняться на величину такого же порядка. Исходя из этих соображений можно уточнить приближение (4), приняв в (3)  $u'_{i,nb} \approx u'_{i,P}$ . Тогда вместо (4) получим

$$u'_{i,P} \approx -\frac{1}{A_P^{u_i} + \sum_{nb} A_{nb}^{u_i}} \left( \frac{\delta p'}{\delta x_i} \right)_P \quad (8)$$

Уравнение Пуассона для поправки давления (5) принимает вид

$$\frac{\delta}{\delta x_i} \left[ \frac{1}{A_P^{u_i} + \sum_{nb} A_{nb}^{u_i}} \left( \frac{\delta p'}{\delta x_i} \right)_P \right] = \left( \frac{\delta \tilde{u}_i^m}{\delta x_i} \right)_P \quad (9)$$

Данный метод известен как SIMPLEC (SIMPLE Corrected) (Van Doormal, Raithby, 1984). Он обладает более быстрой сходимостью при решении стационарных задач. Из сравнения (8),(9) с соотношениями (4)–(6) метода SIMPLE видно, что метод SIMPLEC эквивалентен методу SIMPLE с коэффициентом релаксации давления, равным

$$\alpha_P = 1 + \frac{\sum_{nb} A_{nb}^{u_i}}{A_P^{u_i}} \quad (10)$$

Нетрудно проверить, что для всех консервативных схем должно выполняться соотношение на коэффициенты разностной схемы:

$$A_P^{u_i} = A_P^t - \sum_{nb} A_{nb}^{u_i} \quad (11)$$

где  $A_p^t$  – вклад от нестационарного члена. Для полностью неявной схемы, например,  $A_p^t = \rho/\Delta t$ , тогда уравнение для поправки давления в методе SIMPLEC принимает вид, совпадающий с уравнением (3) на стр.62

$$\frac{\delta}{\delta x_i} \left[ \left( \frac{\delta p'}{\delta x_i} \right)_p \right]_p = \frac{\rho}{\Delta t} \left( \frac{\delta \tilde{u}_i^m}{\delta x_i} \right)_p$$

Для стационарных задач  $A_p^t = 0$  и необходимо решать уравнение для скорости с нижней релаксацией (7). В этом случае

$$A_p^{u_i} = - \frac{\sum_{nb} A_{nb}^{u_i}}{\alpha_u}$$

и выражение (10) совпадает с приведённым выше соотношением (8), что можно рассматривать, как его обоснование.

## Литература

1. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. - М.: Мир, 1991.- Т.1,2.
2. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. - М.: Мир, 1990.- Т.1,2.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М., Наука, 1989.
4. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М., Наука, 1989.
5. Ильин В.П. Методы конечных разностей и конечных объёмов для эллиптических уравнений. – Новосибирск, Изд-во Ин-та математики, 2000. - 345 с.
6. Ferziger J.H., Peric M. Computational Methods for Fluid Dynamics. Berlin: Springer, 1996.
7. Самарский А. А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. М., Едиториал УРСС, 2004.
8. Белов И.А., Исаев С.А., Коробков В.А. Задачи и методы расчёта отрывных течений несжимаемой жидкости. Л., Судостроение, 1989.