

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

Б. Б. Илюшин

**ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА
В ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЯХ**

КУРС ЛЕКЦИЙ

Новосибирск
2009

Курс лекций подготовлен в рамках реализации Программы развития НИУ-
НГУ на 2009-2018 гг."

ОГЛАВЛЕНИЕ

§1. Что такое турбулентность	4
§ 2. Структура турбулентного потока	8
2.1. Уравнение Навье–Стокса	8
2.2. Диссипация энергии в вязкой жидкости	10
2.3. Качественная схема развития турбулентности	12
2.4. Масштабная инвариантность	14
2.5. Спектр турбулентных пульсаций	14
2.6. Оценка масштабов турбулентности	18
2.7. Механизм растяжения вихревых трубок	18
§ 3. Однородная изотропная турбулентность	23
3.1. Уравнение для корреляционных функций	31
3.2. Уравнение Кармана–Ховарта	33
3.3. Замыкание уравнения Кармана–Ховарта	41
3.4. Интеграл Лойцянского	43
3.5. Уравнение Колмогорова	44
3.6. Замыкание уравнения Колмогорова	47
§ 4. Методы моделирования турбулентных течений	49
4.1. Прямое численное моделирование	49
4.2. Метод моделирования с выделением крупных вихрей	51
4.3. Метод статистических моментов. Статистические моменты и кумулянты	55
4.4. Подход Рейнольдса. Уравнения для моментов	58
4.5. Обменный механизм	62
4.6. Тензор скорости диссипации	63
4.7. Турбулентная диффузия	66
4.8. Стратегия замыкания высших моментов	67
4.9. Алгебраические модели тройных корреляций	70
4.10. Модель турбулентности напряжений Рейнольдса	72
4.11. К– ε -модель турбулентности	72
4.12. К–L-модель турбулентности	74
4.13. Модель Прандтля	75
4.14. Условия реализуемости	77
4.15. Модели турбулентности третьего порядка замыкания	78
4.16. Уравнения для кумулянтов четвертого порядка	79
§5. Моделирование турбулентного переноса тепла и вещества	82
5.1. Стратифицированные течения	82
5.2. Связь между переносом тепла и переносом импульса	83
5.3. Влияние стратификации на спектр турбулентных пульсаций	85
5.4. Потенциальная температура	92

5.5. Математическое описание процессов тепломассопереноса.....	93
Библиографический список	102

§1. Что такое турбулентность

*...Где турбулентность воды возбуждается
...где турбулентность воды сохраняется надолго
...где турбулентность воды затухает...*

Леонардо да Винчи, 1500 г.

Из повседневного опыта нам известно, что наряду с плавным, «спокойным» характером движения жидкости существует режим течения, когда поток становится непредсказуемым и неупорядоченным. Первый тип течения называется ламинарным («слоистым» *лат.*), второй – турбулентным («беспорядочным», *лат.*). Подавляющее большинство реально встречающихся в природе и технике течений являются именно турбулентными. Исследовательский интерес к ним обусловлен не только тем, что турбулентные течения являются самой распространенной формой движения жидкостей и газов, но и с чисто теоретической точки зрения, поскольку турбулентные течения представляют собой пример нелинейной механической открытой системы с очень большим числом степеней свободы. В современной науке термин «турбулентность» применяется не только в механике жидкости, но и по отношению к другим системам, для которых характерен переход от регулярного движения к хаотическому, определяемый нелинейными процессами. Это понятие вошло практически во все области физики.

Первым научным задокументированным наблюдением турбулентности можно считать рукопись Леонардо да Винчи, фрагмент которой приведен на рис. 1.

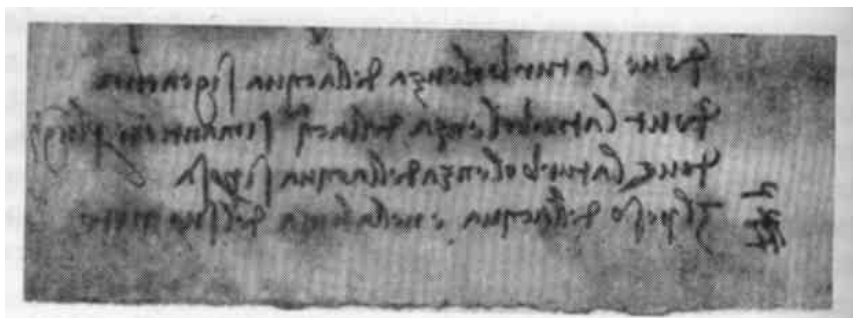


Рис. 1. Фотография фрагмента рукописи Леонардо да Винчи

Если посмотреть на него через зеркало, то можно прочесть строки

«...doue la turbolenza dellacqua sigenera
doue la turbolenza dellcq simantiene plugno
doue la turbolenza dellacqua siposa...»,

перевод которых и послужил эпиграфом к этому параграфу. Рукопись датируется концом XV – началом XVI века. Однако свое развитие теория турбулентности получила лишь в конце XIX века в замечательных работах Осборна Рейнольдса. И до сих пор проблема турбулентности остается открытой проблемой гидромеханики, несмотря на то, что в течение целого века привлекала внимание многих выдающихся исследователей. Столь необычно большой срок от первых наблюдений этого явления до его теоретического осмысления, несомненно, связан со сложностью рассматриваемой проблемы. До сих пор не выработан общий подход к описанию турбулентного движения жидкости. За более чем 150-летнюю историю были развиты различные подходы – статистический, структурный и динамический – для описания феномена турбулентности. Результаты, полученные в каждом из них, зачастую относились к разным задачам и отвечали на вопросы, возникающие в качественно различных экспериментальных ситуациях. В периоды своего возникновения и развития эти подходы казались их сторонникам единственно приемлемыми, поэтому развитие этих подходов шло параллельно и практически независимо. Лишь в последние 20 лет наметилась тенденция к их объединению в единую теорию турбулентности.

В настоящем курсе не рассматриваются подробно динамический и структурный подходы исследования турбулентности, не вводится формальное определение турбулентности, а используются лишь интуитивные представления об этой форме движения жидкости и газа. При обсуждении свойств турбулентного движения делается акцент на методы его описания.

Можно сказать, что турбулентное течение – это поток, движение которого беспорядочно во времени и пространстве. Данное определение, конечно же, нельзя рассматривать как точное математическое. Потоки, называемые «турбулентными», могут обладать различной динамикой, могут быть трехмерными или, иногда, квазидвумерными, могут проявлять свойства хорошо организованных структур. Общее свойство, характерное для всех турбулентных течений, заключается в том, что они способны переносить в потоке импульс, тепло и вещество намного быстрее, чем это происходит под воздействием только молекулярной диффузии. Это свойство, конечно, является наиболее важным для людей, занимающихся турбулентностью в практических приложениях, где определяющей является

информация о коэффициентах турбулентного переноса тепла, а также о величине турбулентного сопротивления (которое зависит от интенсивности рассеивания импульса в потоке). Определим свойства, которыми должно обладать течение, чтобы называться *турбулентным* (Lesier, 1997)»:

1) *течение должно быть непредсказуемым в том смысле, что малая неопределенность характеристик течения в начальный момент времени будет расти и поэтому точное детерминированное предсказание результата их эволюции будет невозможным;*

2) *течение должно удовлетворять свойствам интенсивного перемешивания;*

3) *течение должно характеризоваться широким диапазоном пространственных длин волн.*

Такое определение позволяет, в частности, использовать термин «турбулентность» по отношению к некоторым двумерным течениям. Оно также подразумевает, что определенные безразмерные параметры, характеризующие поток, должны быть намного больше единицы. В самом деле, обозначив характерный размер наибольших энергосодержащих турбулентных вихрей как ℓ , а турбулентные пульсации скорости как \hat{u} , получим, что достаточно грубая аналогия между процессами перемешивания под воздействием турбулентности и некогерентного случайного блуждания позволяет определить коэффициент турбулентной диффузии, который будет пропорционален $l\hat{u}$. Пусть ν и γ – молекулярные коэффициенты диффузии импульса (который в дальнейшем будем называть коэффициентом кинематической молекулярной вязкости) и теплоты (молекулярной теплопроводности) соответственно, тогда увеличение степени смешения для этих двух переносимых величин предполагает, что значения двух безразмерных параметров $l\hat{u}/\nu$ и $l\hat{u}/\gamma$ должны быть много больше единицы. Параметр $l\hat{u}/\nu$ называется турбулентным числом Рейнольдса (Re), а параметр $l\hat{u}/\gamma$ – турбулентным числом Пекле (Pe_t). Далее, в §2, будет показано, что при больших числах Рейнольдса отношение наибольших масштабов к наименьшим должно иметь порядок $Re_i^{3/4}$. В этом смысле второе из приведенных выше свойств турбулентного течения согласуется с третьим.

В заключение отметим еще одно важное свойство турбулентности. Существует много экспериментальных и расчетных данных, показывающих, что турбулентные течения являются вихревыми, т. е. их завихренность $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$ не равняется нулю, по крайней мере, в некоторых областях пространства. Поэтому возникает вопрос: каким образом турбулентность возникает в течении, которое изначально является безвихревым, например, в однородном потоке? Возникновение этого процесса, очевид-

но, обусловлено вязкостью, поскольку из теоремы Кельвина непосредственно следует, что нулевая завихренность сохраняется в процессе движения идеальной жидкости¹. Присутствие же границ или препятствий накладывает условие нулевой скорости на твердой поверхности, которое порождает завихренность. Затем под влиянием различных механизмов, например, растяжения вихревых нитей (описание будет приведено ниже), производство завихренности увеличивается и течение в этих областях становится, как правило, турбулентным.

Методы описания структуры турбулентных течений

Будем считать, что в области макроскопических масштабов, превышающих микроскопические молекулярные масштабы, течение жидкости удовлетворяет дифференциальным уравнениям в частных производных, называемым уравнениями Навье–Стокса. Вполне доказано, что эти уравнения правильно описывают турбулентные течения даже в случае гиперзвуковых течений до числа Маха $M = 15$. Наименьший макроскопический масштаб δl_d по порядку величины меньше колмогоровского диссипативного масштаба η (этот масштаб является наименьшим характерным масштабом турбулентности, подробнее см. ниже) и его значение намного больше среднего значения длины свободного пробега молекул. Фактически, уравнения Навье–Стокса включают в себя величины, такие как скорость, давление, температура, плотность, усредненные по пространству элементарного объема размера δl_d . Однако с математической точки зрения пространственные масштабы в этих уравнениях могут быть сколь угодно малы.

Начнем с постулата, что движение турбулентной жидкости удовлетворяет принципу Ньютоновского детерминизма: если в начальный момент времени t_0 (при заданных граничных условиях и определенных внешних возмущениях) исходные положения частиц жидкости и их скорости известны, то в любой момент времени $t > t_0$ для них существует только одно возможное состояние течения. С точки зрения математики, это не более чем предположение о существовании и единственности решений уравнений Навье–Стокса: такая теорема доказана для двумерного случая, а для трехмерного случая – только для конечных времен. Однако согласно законам физики, следует ожидать, что наличие молекулярной вязкости в урав-

¹ Идеальная жидкость – это жидкость, в которой эффекты молекулярной вязкости не учитываются.

нениях Навье–Стокса сгладит решения в достаточной степени для того, чтобы исключить появление сингулярностей и бифуркаций ².

Из этих рассуждений следует вывод, что турбулентность в жидкостях – явление детерминированное, хотя эффект нелинейности делает ее развитие очень сложным. На первый взгляд, кажется, что теоретически описать для произвольных времен детерминированное развитие турбулентного течения невозможно. Тем не менее, благодаря стремительному прогрессу в развитии возможностей компьютеров последнее время интенсивно развиваются и возможности численных расчетов, в результате чего решение уравнений Навье–Стокса для ряда турбулентных течений теперь стало доступным.

Для описания турбулентных течений также очень полезно использовать стохастические методы, а различные флуктуирующие величины рассматривать как случайные функции. Для полностью развитой турбулентности эти функции должны обладать следующими свойствами: быть статистически независимыми при трансляции (однородными) и вращении (изотропными). Ниже будет рассмотрена динамика однородной изотропной турбулентности, в частности, процесс переноса энергии между различными масштабами движения. Основное внимание акцентируется на одноточечные статистические модели турбулентности, совмещающие в себе вычислительную эффективность и достаточную для многих прикладных задач достоверность получаемых с их помощью результатов.

Подчеркнем, что, вероятно, ошибочно противопоставлять так называемые детерминистский и статистический подходы к описанию турбулентности. Детерминистский метод, если говорить о численном моделировании, может оказаться чрезвычайно дорогим, и тогда очень полезными могут быть статистическая теория и моделирование. Анализ развития методов моделирования турбулентных течений показывает, что в ближайшие 100 лет метод статистических моментов останется основным инструментом в прикладных расчетах реальных турбулентных течений.

§ 2. Структура турбулентного потока

2.1. Уравнение Навье–Стокса

В своих лекциях по физике, посвященных гидродинамике и турбулентности, Ричард Фейман пишет: «Часто люди в каком-то неоправданном страхе перед физикой говорят, что невозможно написать уравнение жизни.

² Здесь мы рассматриваем эволюцию системы с фиксированными внешними параметрами. Теория «бифуркаций» рассматривает смену одного устойчивого состояния системы на другое при изменении одного из внешних параметров.

А может быть, и можно. Очень возможно, что на самом деле мы уже располагаем достаточно хорошим приближением, когда пишем уравнение квантовой механики:

$$\mathbf{H}\psi = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} \gg.$$

Конечно, если бы мы располагали только этим уравнением и не могли наблюдать биологические явления сами, то не смогли бы теоретически воссоздать их. Фейман полагал, что сходная ситуация имеет место для турбулентного потока несжимаемой жидкости (здесь и далее рассматривается только несжимаемая жидкость). Уравнения, описывающие движение вязкой жидкости

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{u}_i &= \tilde{f}_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{p} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \tilde{u}_i \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{u}_i &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

и известные со времен пионерской работы Навье (1823 г.), называются *уравнениями Навье–Стокса* (второе уравнение системы (2.1) называется уравнением неразрывности). Здесь u_i , p , ρ , и ν – скорость, давление, плотность, и вязкость жидкости соответственно, а f_i – внешние массовые силы; знаком тильда отмечены мгновенные величины. Система уравнений (2.1) замкнута. Дополнив ее начальными и краевыми условиями, получим полную постановку математической задачи.

Сразу отметим важное свойство системы (2.1) – нелинейность уравнения Навье–Стокса. Нелинейность систем означает, что процессы, протекающие в них, не удовлетворяют принципу суперпозиции. Аналитическое описание процессов в нелинейных системах затруднено ввиду отсутствия общих методов решения нелинейных уравнений. Наиболее доступно изучение динамики слабонелинейных систем. Нелинейность в таких системах проявляется в возникновении малых поправок к решению линеаризованных уравнений³. При исследовании сильнонелинейных систем, за исключением ограниченного числа точно решаемых случаев, используется численное моделирование. Разделяют два класса нелинейных систем – консервативные системы, в которых энергия сохраняется, и диссипативные системы, в которых энергия диссипирует (поступает в систему) от внешних источников. В п. 2.2 будет показано, что движение вязкой жидкости является диссипативной системой.

³ Этот метод активно используется в гидродинамике, в частности, для исследования ламинарно-турбулентного перехода.

Вторым важным свойством уравнения Навье–Стокса является наличие параметра при старшей производной. Если уравнения системы (2.1) записать в безразмерном виде с использованием характерного линейного масштаба течения L и характерной скорости U , то при старшей производной в уравнении Навье–Стокса появится безразмерный параметр $\frac{\nu}{UL}$ – вели-

чина, обратная числу Рейнольдса $Re = \frac{UL}{\nu}$. Очевидно, что значение этой

величины определяет вклад в общий баланс уравнения эффектов вязкости жидкости на рассматриваемом масштабе течения L и, как следствие, определяет свойства решения системы (2.1). Выше отмечалось, что система (2.1) описывает диссипативные нелинейные системы. В п. 2.2 будет показано, что именно вязкие эффекты отвечают за диссипативные свойства рассматриваемых систем. С помощью числа Рейнольдса устанавливается фактическое отношение между масштабами всей системы и масштабами, на которых эти диссипативные свойства имеют место.

Для выяснения характера движения жидкости, сформировавшегося под воздействием роста возмущений, перепишем уравнение Навье–Стокса в виде

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\tilde{p}}{\rho} + \frac{1}{2} \tilde{u}_j \tilde{u}_j \right] + \tilde{f}_i + e_{ijk} \tilde{u}_j \tilde{\omega}_k - \nu e_{ijk} \frac{\partial \tilde{\omega}_k}{\partial x_j}, \quad (2.2)$$

где e_{ijk} – символ Леви–Чивита, $\tilde{\omega}_i = e_{ijk} (\partial \tilde{u}_k / \partial x_j)$ – вектор завихренности. Для получения уравнения (2.2) использовались следующие очевидные преобразования:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} &= \tilde{u}_j \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} = -e_{ijk} \tilde{u}_j \cdot \tilde{\omega}_k + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} \tilde{u}_j \tilde{u}_j \right), \\ \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} &= \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) = -\nu e_{ijk} \frac{\partial \tilde{\omega}_k}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Уравнение (2.2) в случае безвихревого течения ($\tilde{\omega}_i = 0$) и отсутствия внешних сил, когда вязкий член и часть инерционного члена исчезают, сводится к уравнению Бернулли. Таким образом, в безвихревом течении процесс вязкой диссипации отсутствует.

2.2. Диссипация энергии в вязкой жидкости

В потоке наличие вязкости приводит к диссипации энергии в тепло. Вычислим скорость перехода кинетической энергии потока несжимаемой жидкости в тепло. Полная кинетическая энергия жидкости составляет

$$E_t = \frac{\rho}{2} \int_V \tilde{u}^2 dV.$$

Производная по времени от этой энергии имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} E_t = \rho \int_V \tilde{u}_i \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} dV. \quad (2.3)$$

Подставив в (2.3) выражение (согласно уравнению Навье–Стокса)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} &= -\tilde{u}_k \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \\ \sigma_{ij} &= \mu \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right), \end{aligned}$$

получим

$$\rho \int_V \tilde{u}_i \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} dV = - \int_V \left[\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_k \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} + \tilde{u}_i \frac{\partial p}{\partial x_i} - \tilde{u}_i \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \right] dV = - \int_V \left[\rho \tilde{u}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\tilde{u}^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) - \tilde{u}_i \sigma_{ik} + \sigma_{ik} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \right] dV.$$

Учитывая уравнение неразрывности $\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0$, выделим в подынтеграль-

ном выражении дивергентный член и преобразуем интеграл по объему в интеграл по замкнутой поверхности, ограничивающей этот объем:

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} = - \int_S \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\rho \tilde{u}_k \left(\frac{\tilde{u}^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) - \tilde{u}_i \sigma_{ik} \right] dS - \int_V \sigma_{ik} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} dV.$$

В этом уравнении первый член справа описывает изменение кинетической энергии жидкости в объеме, обусловленной наличием потока энергии через поверхность этого объема, а второй член – уменьшение кинетической энергии в единицу времени, обусловленной диссипацией. Рассматривая движение жидкости в системе координат, в которой жидкость на бесконечности покоится, распространим интегрирование на весь объем жидкости. В этом случае интеграл по поверхности исчезает:

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} = - \int_V \sigma_{ik} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} dV. \quad (2.4)$$

Подставляя в (2.4) выражение (2.3) и учитывая, что

$$\sigma_{ik} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} = \mu \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_i} \right) = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_i} \right)^2,$$

получаем окончательную формулу для определения диссипации энергии:

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} = -\frac{\mu}{2} \int_V \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_i} \right)^2 dV. \quad (2.5)$$

Таким образом, диссипация приводит к уменьшению кинетической энергии жидкости, поскольку интеграл в (2.5) всегда положительный. Заметим, что полученный результат не зависит от формы движения жидкости – он справедлив и для ламинарного, и для турбулентного режимов течения.

2.3. Качественная схема развития турбулентности

Выше (см. п. 2.1) отмечались важные свойства уравнения Навье–Стокса, такие как нелинейность и наличие параметра $Re_L = \frac{UL}{\nu}$, определяющего диапазон масштабов течения, на котором проявляются диссипативные свойства системы. Определим масштабы диссипации η и \hat{u}_η из условия $Re_\eta = 1$ (т. е. когда $\eta \hat{u}_\eta = \nu$). Так, при $Re_L \ll 1$, когда масштабы диссипации больше масштабов рассматриваемой системы, любое возмущение в системе подвержено диссипации и будет затухать. При $Re_L \gg 1$, наоборот, движение жидкости с масштабами порядка $UL > \eta \hat{u}_\eta$ оказывается практически бездиссипативным, поскольку в данном случае отсутствует механизм вязкого затухания. Как следствие, это движение становится неустойчивым, так как растущие на этом масштабе возмущения в конечном счете разрушают его. Размеры системы не позволяют расти возмущениям масштаба больше L , поэтому возбуждаться будут моды размера $\ell_1 < L$, которые, в свою очередь, также будут неустойчивы при больших числах Рейнольдса. Таким образом, формируется целая иерархия неустойчивых возмущений, которые полностью изменяют характер движения жидкости. Процесс рождения движений все меньших и меньших масштабов прекратится лишь по достижении минимального масштаба η . Движения минимального масштаба устойчивы и практически далее не распадаются, поскольку они существенно диссипативны и их энергия расходуется в основном на преодоление вязких сил, рассеивается, переходя в теплоту. Пока неустойчивость основного течения масштаба L приводит к появлению все новых и новых возмущений первого порядка, процесс последовательного дробления всех бездиссипативных возмущений не прекращается и создает непрерывный поток энергии вниз по масштабам. Описанный выше сценарий развития возмущений дает представление о механизме развития и структуре турбулентного течения. Отметим, что в развитии такого сце-

нария определяющую роль играет нелинейность уравнений Навье–Стокса, поскольку взаимодействие возмущений разного масштаба возможно только в нелинейной системе (механизм такого нелинейного взаимодействия – «механизм растяжения вихревых трубок» – более подробно будет рассмотрен в п. 2.7).

Феноменологическую картину турбулентного течения (каскад Ричардсона) удобно представить в виде схемы, приведенной на рис. 2. Вихри, изображенные овалами, разнесены на разные строки согласно своим размерам. Энергия в такой каскад поступает через самый крупный масштаб, спускается по нему вниз до вихрей размера порядка η и рассеивается под воздействием вязкости. В рамках этого представления поступление энергии в каскад, перенос ее вниз по каскаду и рассеивание на диссипативных масштабах происходит с одинаковой скоростью – обозначим ее как скорость диссипации ε . Кроме того, такая картина течения предполагает локальность взаимодействия между вихрями: вихри масштаба l_n могут взаимодействовать только с вихрями масштабов l_{n+1} и l_{n-1} , т. е. предполагается, что взаимодействие вихрей, масштабы которых сильно отличаются, можно рассматривать как перенос мелких вихрей под воздействием поля скорости крупных вихрей без обмена энергией между ними.

Поскольку процесс передачи энергии от движений рассматриваемого масштаба к движению меньших масштабов носит хаотичный характер,

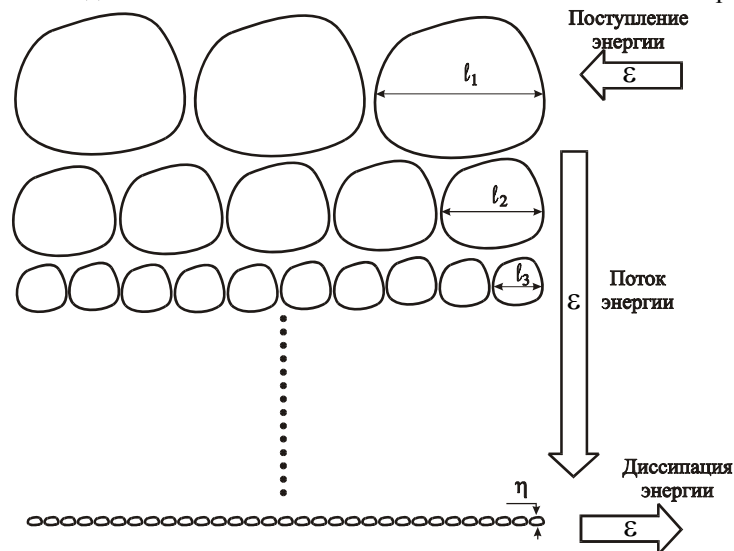


Рис. 2. Схема каскада турбулентных вихрей

анизотропность, неоднородность и нестационарность осредненного движения должны все меньше и меньше сказываться на статистическом режиме пульсаций все меньших и меньших масштабов. Поэтому можно утверждать, что влияние среднего течения практически перестает сказываться на структуре пульсаций (за исключением лишь наиболее крупномасштабных).

Более подробно механизм обмена энергией между вихрями будет рассмотрен в п. 2.7, а сейчас перейдем к важным следствиям описанного механизма трансформации энергии в турбулентных течениях.

2.4. Масштабная инвариантность

Помимо рассмотренных выше свойств уравнения Навье–Стокса, еще одним важным его свойством является масштабная инвариантность (скейлинг) в пределе $Re \rightarrow \infty$. Легко видеть, что при масштабных преобразованиях ⁴ $t \rightarrow \lambda^{1-h}t$, $\vec{r} \rightarrow \lambda\vec{r}$, $\vec{u} \rightarrow \lambda^h\vec{u}$ (λ и h – действительные числа) почти все слагаемые уравнения Навье–Стокса умножаются на λ^{2h-1} , а последнее, связанное с вязкостью, умножается на λ^{h-2} . Поэтому при $Re_L \ll 1$ допустимо только $h = -1$. В этом случае масштабная инвариантность эквивалентна хорошо известному в гидродинамике принципу подобия по числу Рейнольдса. Если же рассматривать предел бесконечно больших чисел Рейнольдса, то существует бесконечное число скейлинговых групп, параметризованных скейлинговым показателем h , который может быть любым действительным числом. Заметим, что масштабная инвариантность уравнений (2.1), в отличие от других видов симметрий (сдвиг по времени и в пространстве, вращение, четность и преобразование Галилея), не является макроскопическим следствием основных симметрий уравнений Ньютона, описывающих микроскопическое движение молекул. Она проявляется как результат использования приближения сплошной среды в модели (2.1).

2.5. Спектр турбулентных пульсаций

Одним из наиболее часто применяемых на практике методов анализа стационарной случайной функции является изучение энергетического спектра (будем рассматривать только одномерные спектры):

⁴ Преобразование для давления не приводится, поскольку последнее может быть исключено из уравнения Навье–Стокса в результате применения оператора дивергенции.

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_R R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad R(\tau) = \langle u(t) \cdot u(t+\tau) \rangle = \int_R E(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega,$$

где $R(\tau)$ – корреляция скорости u ; угловые скобки означают осреднение. Другой функцией, представляющей значительный интерес в теории турбулентности, является структурная функция второго порядка $D_n(\tau)$:

$$D(\tau) = \langle (u(t) - u(t+\tau))^2 \rangle.$$

Структурная функция второго порядка связана с функциями $R(\tau)$ и $E(\omega)$ соотношениями

$$D(\tau) = 2(R(0) - R(\tau)) = 2 \int_R E(\omega) (1 - e^{-i\omega\tau}) d\omega. \quad (2.6)$$

Для турбулентности особенно важным классом структурных функций является случай, когда $D(\tau)$ подчиняется степенному закону

$$D(\tau) = A\tau^\gamma, \quad (2.7)$$

где A – положительный численный коэффициент и $0 < \gamma < 2$. Нетрудно видеть, что функции (2.7) можно представить в виде (2.6), если за энергетический спектр принять степенные функции вида

$$E(\omega) = C\omega^{-(\gamma+1)}, \quad (2.8)$$

где C – численный коэффициент. Аналогичные соотношения справедливы и для пространственных структурных функций, и для спектра энергии, зависящего от волнового вектора k . Волновой вектор связан с масштабом вихрей соотношением $k = 2\pi/\ell$, а приблизительный размер вихря определяется доминирующей длиной волны его движения:

$$D(\rho) = \langle (u(r) - u(r+\rho))^2 \rangle = 2 \int_R E(k) (1 - e^{-ik\rho}) dk.$$

Рассматривая каскадный перенос энергии (см. рис. 2), заметим, что такой механизм трансформации энергии предполагает, что в области масштабов $L > \ell > \eta$ (или при соответствующих значениях волнового вектора) единственным размерным параметром, определяющим свойства турбулентности, является величина ε – скорость диссипации⁵. С учетом раз-

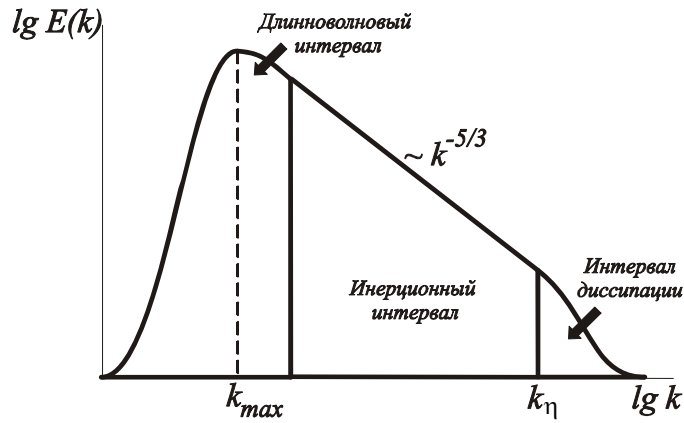
⁵ Предположение о том, что скорость диссипации ε является единственным размерным параметром, определяющим свойства турбулентности в указанном интервале масштабов, в действительности нарушается. Эксперименты свидетельствуют о флуктуационном поведении параметра ε , характеризующимся значительными коэффициентами эксцесса (отражающими перемежающийся характер

мерности этой величины спектр энергии для масштабов рассматриваемого интервала будет иметь вид, предсказанный впервые Колмогоровым в 1941 г.: $E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$, а с учетом функций (2.7), (2.8) для структурной функции получим $D(\rho) \sim \varepsilon^{2/3} \rho^{2/3}$. Применяя указанное в п. 2.4 масштабное преобразование и учитывая, что $D(\rho) \rightarrow \lambda^{2h} D(\rho)$ и $\rho \rightarrow \lambda \rho$, получаем $\varepsilon \rightarrow \lambda^{3h-1} \varepsilon$. Масштабная инвариантность ε налагает условие на скейлинговый показатель $h = 1/3$. Таким образом, спектр турбулентных пульсаций можно представить в виде схемы, приведенной на рис. 3.

Условно спектр можно разбить на три области. Коротковолновая область спектра соответствует масштабам диссипации кинетической энергии турбулентности в тепло под воздействием вязкости. Эта область содержит сравнительно малую часть энергии турбулентности. Соответствующие ей пульсации имеют сложную статистическую структуру – характеризуются значительными по величине коэффициентами эксцесса (с существенно негауссовым распределением). При моделировании турбулентных течений в рамках метода статистических моментов (будет рассмотрен ниже) предполагается, что их влияние на процессы турбулентного переноса пренебрежимо мало, и учитывается только основная роль пульсаций данного интервала – сток кинетической энергии турбулентности. В случае развитой турбулентности скорость вязкой диссипации с хорошей точностью равна спектральному потоку энергии турбулентности и для ее определения не требуется рассмотрение сложной статистической структуры мелкомасштабных пульсаций.

Область масштабов $L > \ell > \eta$ описывается колмогоровским законом и характеризуется локально изотропной структурой турбулентных пульсаций. Эта область называется инерционным интервалом спектра. Статистические свойства пульсаций инерционного интервала с хорошей точностью описываются равновесной (гауссовой) функцией плотности вероятности (ФПВ), а движение жидких частиц (или частиц примеси) в поле изотропной турбулентности – подобно броуновскому движению.

этой величины). Учет перемежаемости в рамках фрактальной модели турбулентности приводит к поправке скейлингового показателя и, как следствие, к отличному от Колмогоровского закону энергетического спектра. Однако здесь этот вопрос рассматриваться не будет, поскольку перемежаемость в основном сосредоточена в области малых (диссипативных) масштабов, соответствующие им пульсации содержат малую часть энергии турбулентности и не оказывают определяющего влияния на процессы турбулентного переноса.



$$k_{max} \sim 1/L$$

$$L/\eta \sim Re^{3/4}$$

$$k_\eta \sim 1/\eta$$

L - масштаб течения

η - диссипативный масштаб

<i>Интервал диссипации</i>	}	<ul style="list-style-type: none"> Содержит малую часть полной энергии Не гауссово распределение пульсаций Эффект перемежаемости
<i>Инерционный интервал</i>	}	<ul style="list-style-type: none"> Спектральный поток энергии $\sim \text{Const} \sim \epsilon$ Изотропия пульсаций Локальный характер турбулентного переноса
<i>Длинноволновый интервал</i>	}	<ul style="list-style-type: none"> Эффекты памяти Анизотропия пульсаций Не гауссово распределение пульсаций

Рис. 3. Спектр турбулентных пульсаций

Интервал энергии, соответствующий длинноволновым (крупномасштабным) пульсациям, наоборот, содержит основную часть энергии турбулентности и, в основном, определяет характер турбулентного переноса. Длинноволновые пульсации соответствуют крупномасштабным вихревым структурам (КВС), которые характеризуются сравнительно большим временем релаксации и содержат информацию о предыстории и структуре усредненного течения (эффект памяти). Поэтому, как правило, эта область

спектра анизотропна, а ФПВ (существенно негауссова) характеризуется значительными (по своему значению) коэффициентами асимметрии и эксцесса. Таким образом, пульсации интервала энергии и инерционного интервала спектра представляют основной объект исследования в задачах моделирования турбулентных течений ⁶.

2.6. Оценка масштабов турбулентности

Описанная выше схема механизма трансформации энергии турбулентности от среднего течения к вихрям диссипативного интервала предполагает, что поток энергии в области инерционного интервала не зависит от волнового числа. Из анализа размерности параметра ε (энергия на единицу массы в единицу времени) получаем $\varepsilon \sim \hat{u}_\ell^3 / \ell$, где \hat{u}_ℓ – характерная скорость вихрей масштаба ℓ . Тогда можно записать

$$\frac{\hat{u}_l^3}{l} = \frac{\hat{u}_l^3}{l} = \frac{\hat{u}_\eta^3}{\eta}, \quad \frac{\eta}{l} = \left(\frac{\eta}{l}\right)^3 \times \frac{\hat{u}_\eta^3}{\hat{u}_l^3} \times \left(\frac{l}{\eta}\right)^3 = \left(\frac{l}{\eta}\right)^3 \times \text{Re}_l^{-3}, \quad (2.9)$$

где l – размер наиболее крупных турбулентных вихрей (порядка масштаба течения L). Из (2.9) получаем следующую оценку масштабов:

$$\frac{\eta}{l} = \text{Re}_l^{-3/4}. \quad (2.10)$$

Значение этого отношения определяет число степеней свободы, необходимое для численного представления поля течения в любом из трех измерений. Оценка (2.10) позволяет определить полное число пространственных степеней свободы:

$$N = \left(\frac{l}{\eta}\right)^3 = \text{Re}_l^{9/4}. \quad (2.11)$$

Из (2.11) видно, что число степеней свободы быстро растет с увеличением числа Рейнольдса. Так, для течения с $\text{Re}_L \approx (100 \cdot \text{Re}_l) = 10^6$ число степеней свободы составляет $\approx 10^9$!

2.7. Механизм растяжения вихревых трубок

Для выяснения механизма дробления турбулентных вихрей и формирования описанного выше каскадного процесса трансформации энергии

⁶ Сложная статистическая структура крупномасштабных вихревых образований, с одной стороны, и их определяющая роль в динамике турбулентного течения – с другой, стимулируют развитие метода описания турбулентности, основанного на точном разрешении крупных вихрей с привлечением параметризаций для учета мелкомасштабных пульсаций (LES-метод).

турбулентности перепишем уравнение Навье–Стокса без учета внешних сил в терминах завихренности $\tilde{\omega}_i$, применив операцию «ротор» ($e_{pli} \frac{\partial}{\partial x_l}$):

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_p}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{\omega}_p}{\partial x_j} - \tilde{\omega}_j \frac{\partial \tilde{u}_p}{\partial x_j} = \nu \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_p}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (2.12)$$

Для получения уравнения (2.12) использовались очевидные равенства

$$\begin{aligned} e_{pli} \frac{\partial}{\partial x_l} \left[\tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial x_j} \right] &= e_{pli} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_l} \frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial}{\partial x_l} e_{pli} \frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial x_j} = e_{pli} \left[\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_l} \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{\omega}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_l} \frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial x_j} \right] + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial x_j}, \\ e_{pli} \left[\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_l} \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{\omega}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_l} \frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial x_j} \right] &= e_{pli} (-e_{ijk} \tilde{\omega}_k) \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_l} + 0 = (\delta_{lk} \delta_{ij} - \delta_{il} \delta_{jk}) \tilde{\omega}_k \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_l} = -\tilde{\omega}_i \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

а также уравнение неразрывности и условие равенства нулю произведения антисимметричного и симметричного тензоров (в равенстве (2.13) «немой» индекс l может быть заменен на j). Заметим, что равенство

$$\tilde{\omega}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \tilde{\omega}_j \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \tilde{\omega}_j \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) = \tilde{\omega}_j \tilde{s}_{ij} \quad \left(\tilde{s}_{ij} := \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.14)$$

(\tilde{s}_{ij} – тензор скоростей деформаций) справедливо, поскольку второе слагаемое в уравнение (2.14) равно самому себе (аналогично уравнению (2.13) «немой» индекс j может быть заменен на k) с обратным знаком, а это означает, что оно равно нулю. Следовательно,

$$\tilde{\omega}_j \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) = e_{kij} \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_k; \quad \tilde{\omega}_k \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_i} \right) = e_{jik} \tilde{\omega}_k \tilde{\omega}_j = -e_{kij} \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_k.$$

Тогда уравнение (2.12) можно записать в виде:

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial x_j} = \tilde{\omega}_j \tilde{s}_{ij} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_i}{\partial x_j \partial x_j}.$$

Рассмотрим эволюцию завихренности вихревых трубок масштаба ℓ , соответствующего инерционному интервалу (т. е. $\text{Re}_\ell \gg 1$).

Изменение завихренности во времени может быть описано уравнением

$$\frac{d\varpi_i}{dt} = \varpi_j s_{ij}. \quad (2.15)$$

Допустим, что поле деформаций двумерно, и предположим в целях упрощения, что $s_{11} = -s_{22} = s$, где s – постоянная, не зависящая от времени, а $s_{12} = 0$ (след тензора s_{ij} равен нулю в силу уравнения неразрывности). Тогда из уравнения (2.15) следует:

$$\varpi_1 = \varpi_0 e^{st}, \quad \varpi_2 = \varpi_0 e^{-st}, \quad \varpi_1^2 + \varpi_2^2 = 2\varpi_0^2 \cosh(2st).$$

Таким образом, суммарная завихренность увеличивается при всех положительных значениях st . Эти простые расчеты показывают, что вихревые трубки с уменьшением своего диаметра растягиваются быстрее, чем сжимаются. Следовательно, процесс эволюции двух взаимно-перпендикулярных вихревых трубок, находящихся в поле постоянного сдвига скорости, происходит таким образом, что в среднем вихревые трубки растягиваются, что, очевидно, приводит к уменьшению первоначального масштаба (рис. 4). Кроме того, процесс растяжения сопровождается вторичными эффектами, которые противодействуют медленному нарастанию ϖ_2 , как описывается ниже.

Пренебрегая по-прежнему вязкостью, из закона сохранения момента количества движения можно получить, что произведение завихренности на квадрат радиуса должно оставаться постоянным. Другими словами, в отсутствие сил вязкости циркуляция скорости вокруг вихревых элементов в процессе их растяжения должна оставаться постоянной. Таким образом, кинетическая энергия вращательного движения, вызывающего растяжение вихря, увеличивается за счет кинетической энергии движения со скоростью u_1 . При этом масштаб движения в плоскости (x_2, x_3) уменьшается. Следовательно, растяжение вихревых трубок в одном направлении приводит к уменьшению их размеров и увеличению составляющих скорости в двух других направлениях, вследствие чего растяжению подвергаются вихревые трубки, имеющие составляющие завихренности вдоль этих направлений. На рис. 5 показано, каким образом при растяжении двух параллельных вихревых трубок вдоль оси x_1 происходит увеличение составляющей скорости u_2 , которая имеет положительный знак в верхней полуплоскости (x_2, x_3) и отрицательный в нижней. При этом увеличивается скорость деформаций, которые, воздействуя на вихрь ϖ_2 , заставляют его растягиваться. Растяжение вихря ϖ_2 порождает новое поле деформаций вызывающих растяжение других вихрей и т. д. В течение этого про-

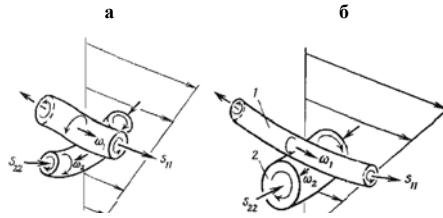


Рис. 4. Растяжение вихревых трубок в двумерном поле скоростей деформаций в начальный (а) и последующий (б) моменты времени: 1 – растяжение, 2 – сжатие

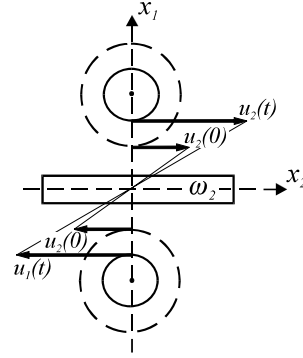


Рис. 5. Механизм увеличения скорости деформации $\partial u_2 / \partial x_3$ при растяжении вихревых трубок вдоль оси x_1

цесса масштаб длины уменьшается на каждой очередной его стадии до тех пор, пока эффекты вязкости пренебрежимо малы.

Брэдшоу была предложена графическая схема (см. рис. 6), показывающая, каким образом растяжение вдоль оси x_1 приводит к интенсификации движения вдоль осей x_2 и x_3 , которая вызывает растяжение меньших масштабах вдоль осей x_2 и x_3 и интенсификацию движения вдоль осей x_1 , x_2 и x_3 . Таким образом, исходное растяжение в одном направлении приводит к прогрессивно нарастающему растяжению во всех трех направлениях. Поэтому влияние направленности средней скорости деформации ослабляется при каждом новом растяжении. Следовательно, мелкомасштабные вихри в турбулентном течении должны иметь универсальную структуру, которая является однородной и изотропной.

Ранее указывалось, что энергией могут обмениваться только вихри сравнимых размеров. Поясним это утверждение. Рассмотрим энергетический спектр и вихрь на его фоне в виде энергетического возмущения, локализованного как в пространстве волновых чисел, так и в физическом пространстве. Представим вихрь в энергетическом спектре в виде вейвлета, т. е. представим, что отдельный вихрь размера ℓ_1 с характерным волновым числом $k_1 = 2\pi / \ell_1$ проявляется как энергетическое возмущение в интервале волновых чисел $[k_1 - k_1/2, k_1 + k_1/2]$ (см. рис. 7). Энергия, соответствующая этому вихрю, составляет $\sim k_1 E(k_1)$, и, следовательно, характерная скорость этого вихря равна $\sim [k_1 E(k_1)]^{1/2}$.

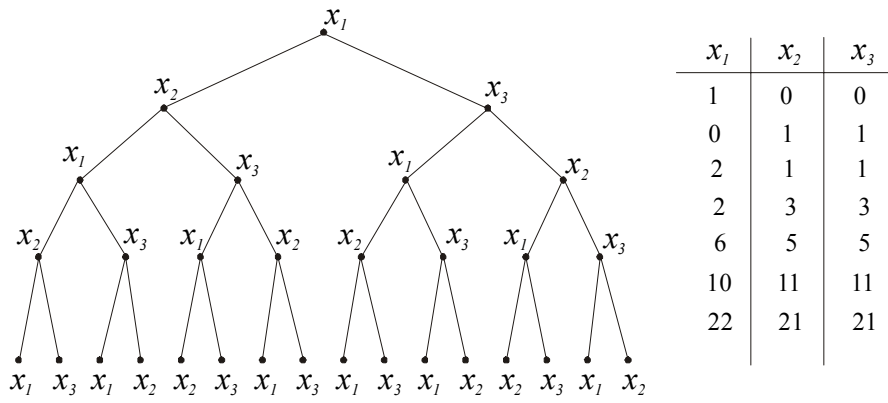


Рис. 6. Графическая схема Брэдшоу, иллюстрирующая, каким образом при растяжении вихревых трубок происходит дробление масштабов и уменьшается эффект анизотропии

Тогда характерная скорость деформации вихря вычисляется как:

$$s(k_1) \sim \frac{[k_1 E(k_1)]^{1/2}}{\ell} \sim \frac{1}{2\pi} [k_1^3 E(k_1)]^{1/2}.$$

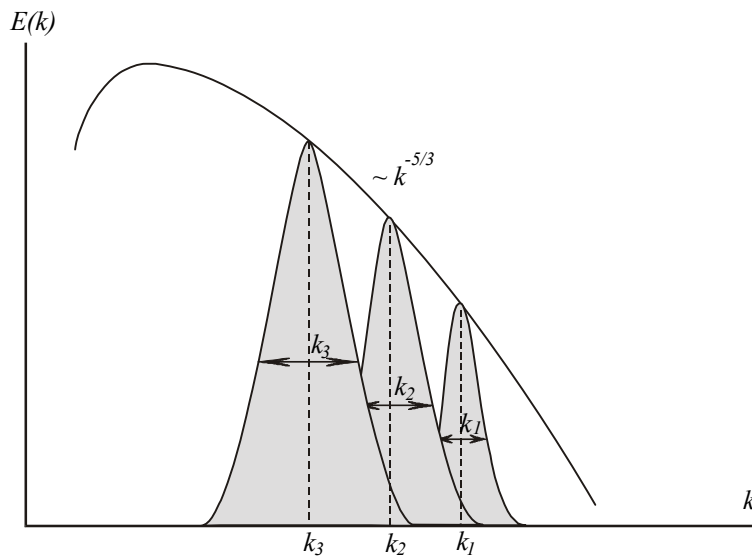


Рис. 7. Представление отдельных вихрей в виде вейвлетов

Для вихрей инерционного интервала энергетический спектр подчиняется закону Колмогорова $E(k) \sim k^{-5/3}$. Тогда скорость деформации оценивается как $s(k_1) \sim k_1^{2/3}$, а скорость деформации, создаваемая вихрями с волновым числом $k_2 = k_1/3$ (значение величины k_2 вычисляется из условия сопряжения двух вейвлетов: $k_2 + k_2/2 = k_1 - k_1/2$) будет равна $s(k_2) \sim k_1^{2/3}(1/3)^{2/3}$, а отношение этих скоростей составит $s(k_2)/s(k_1) \sim 0,5$. Скорость деформации, создаваемая вихрями третьего (по порядку), более крупного размера $k_3 = k_2/3 = k_1/9$, дает $s(k_3)/s(k_1) \sim 0,25$. Таким образом, в суммарную скорость деформаций, воздействующую на вихри размера $\ell = 2\pi/k_1$, 50 % отдают ближайшие по порядку более крупные вихри, 25 % – следующие более крупные вихри и т. д.

Отсюда следует, что энергией обмениваются в основном соседние по размерам вихри.

В заключение данного параграфа, заметим, что рассмотренные выше оценки, конечно, не могут претендовать на математическую строгость и являются качественными. Однако они дают представление о механизме развития и структуре турбулентности, достаточное для изучения методов моделирования турбулентных течений, процессов турбулентного переноса импульса, тепла и вещества.

§3. Однородная изотропная турбулентность

Турбулентность называется **Однородной** если величины полей скорости и давления (и др.) не меняются при произвольных параллельных переносах и **Изотропной** при вращениях и зеркальных отражениях. Очевидно, что в этом случае любая двухточечная функция будет зависеть только от расстояния r между этими двумя точками. В частности, пространственные (значения полей скорости относятся к одному и тому же моменту времени) моменты поля скорости: $B_{ij}(M_1, M_2) = \langle \tilde{u}_i(M_1) \cdot \tilde{u}_j(M_2) \rangle$ - двухточечный момент поля скорости второго порядка и $B_{ij,k}(M_1, M_2) = \langle \tilde{u}_i(M_1) \cdot \tilde{u}_j(M_1) \cdot \tilde{u}_k(M_2) \rangle$ - двухточечный момент поля скорости третьего порядка, а также пространственные двухточечные смешанные моменты полей давления и скорости:

$B_{ip}(M_1, M_2) = \langle \tilde{u}_i(M_1) \cdot \tilde{p}(M_2) \rangle$, будут функциями от r : $B_{ij}(r, t)$, $B_{ij,k}(r, t)$ и $B_{ip}(r, t)$, соответственно. Это справедливо и для структурных функций второго: $D_{ij}(M_1, M_2) = \langle [\tilde{u}_i(M_1) - \tilde{u}_i(M_2)] \cdot [\tilde{u}_j(M_1) - \tilde{u}_j(M_2)] \rangle = D_{ij}(r, t)$ и третьего порядков: $D_{ijk}(M_1, M_2) = D_{ijk}(r, t)$. Такая, относительно простая структура поля скорости позволяет получить аналитически ряд важных закономерностей.

Рассмотрим двухточечный момент второго порядка $B_{ij}(r, t)$ в системе координат, первая ось которой направлена вдоль вектора \vec{r} , а две другие перпендикулярны этому вектору. Условия изотропии и однородности накладывают условия на компоненты тензора $B_{ij}(r, t)$ в рассматриваемой системе координат, а следовательно и в любой другой:

$$\begin{aligned} B_{11}(r, t) &= B_{LL}(r, t), \\ B_{22}(r, t) &= B_{33}(r, t) = B_{NN}(r, t), \\ B_{12}(r, t) &= B_{21}(r, t) = B_{13}(r, t) = B_{31}(r, t) = 0, \\ B_{23}(r, t) &= B_{32}(r, t) = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где B_{LL} и B_{NN} - скалярные функции, - проекции вектора \vec{u} на направление \vec{r} и, соответственно, на какое-либо перпендикулярное направление \vec{r} :

Поскольку относительно вращений и перемещений инвариантными тензорами второго ранга являются лишь тензоры δ_{ij} и $\frac{r_i r_j}{r^2}$, то общая форма двухточечных корреляций второго порядка имеет вид:

$$B_{ij}(r, t) = B_1(r, t) \frac{r_i r_j}{r^2} + B_2(r, t) \cdot \delta_{ij}, \quad (3.2)$$

где $B_1(r, t)$ и $B_2(r, t)$ - произвольные скалярные функции. Из (3.2) с учетом (3.1) получим выражение для произвольного двухточечного момента второго порядка:

$$B_{ij}(r,t) = [B_{LL}(r,t) - B_{NN}(r,t)] \frac{r_i r_j}{r^2} + B_{NN}(r,t) \cdot \delta_{ij}. \quad (3.3)$$

Если поле скорости является соленоидальным (бездивергентным), тогда тензор $B_{ij}(r,t)$ должен удовлетворять условиям:

$$\frac{\partial B_{ij}(r,t)}{\partial r_i} = \frac{\partial B_{ij}(r,t)}{\partial r_j} = 0 \quad (3.4)$$

с учетом очевидных равенств:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial r_i} &= \frac{\partial (r_k r_k)^{1/2}}{\partial r_i} = \frac{1}{2} \frac{1}{(r_k r_k)^{1/2}} \frac{\partial r_k r_k}{\partial r_i} = \frac{1}{2} \frac{1}{(r_k r_k)^{1/2}} 2r_i = \frac{r_i}{r}; \\ \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{r_k}{r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial r_k}{\partial r_i} + r_k \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \delta_{ik} - \frac{r_k}{r^2} \frac{\partial r}{\partial r_i} = \frac{1}{r} \delta_{ik} - \frac{r_i r_k}{r^3}; \\ \frac{\partial r_i r_j}{\partial r_i} &= r_j \frac{\partial r_i}{\partial r_i} + r_i \frac{\partial r_j}{\partial r_i} = r_j \delta_{ii} + r_i \delta_{ij} = 4r_j; \\ \frac{\partial r_i r_j r_k}{\partial r_i} &= r_j r_k \frac{\partial r_i}{\partial r_i} + r_i r_k \frac{\partial r_j}{\partial r_i} + r_i r_j \frac{\partial r_k}{\partial r_i} = \\ &= r_j r_k \delta_{ii} + r_i r_k \delta_{ij} + r_i r_j \delta_{ik} = 5r_j r_k; \\ \frac{\partial F(r)}{\partial r_i} &= \frac{\partial F(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial r_i} = \frac{\partial F(r)}{\partial r} \frac{r_i}{r}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Подставив (3.3) в (3.4), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{ij}(r,t)}{\partial r_i} &= \frac{\partial}{\partial r_i} \left\{ [B_{LL}(r,t) - B_{NN}(r,t)] \frac{r_i r_j}{r^2} \right\} + \frac{\partial}{\partial r_i} B_{NN}(r,t) \cdot \delta_{ij} = \\ &= \left[\frac{\partial B_{LL}(r,t)}{\partial r} - \frac{\partial B_{NN}(r,t)}{\partial r} \right] \frac{r_i r_j}{r^2} \frac{\partial r}{\partial r_i} + [B_{LL}(r,t) - B_{NN}(r,t)] \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{r_i r_j}{r^2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial B_{NN}(r,t)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial r_i} \cdot \delta_{ij} = \left[\frac{\partial B_{LL}(r,t)}{\partial r} - \frac{\partial B_{NN}(r,t)}{\partial r} \right] \frac{r_i r_j}{r^2} + \\
& + [B_{LL}(r,t) - B_{NN}(r,t)] \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial r_i r_j}{\partial r_i} + r_i r_j \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{1}{r^2} \right] + \frac{\partial B_{NN}(r,t)}{\partial r} \frac{r_i}{r} \cdot \delta_{ij} = \\
& = \left[\frac{\partial B_{LL}(r,t)}{\partial r} - \frac{\partial B_{NN}(r,t)}{\partial r} \right] \frac{r_j}{r} + [B_{LL}(r,t) - B_{NN}(r,t)] \left[\frac{4r_j}{r^2} - \frac{2r_i r_j}{r^3} \frac{\partial r}{\partial r_i} \right] + \\
& + \frac{\partial B_{NN}(r,t)}{\partial r} \frac{r_j}{r} = \left[\frac{\partial B_{LL}(r,t)}{\partial r} - \frac{\partial B_{NN}(r,t)}{\partial r} \right] \frac{r_j}{r} + \\
& + [B_{LL}(r,t) - B_{NN}(r,t)] \left[\frac{4r_j}{r^2} - \frac{2r_i r_j}{r^3} \frac{r_i}{r} \right] + \frac{\partial B_{NN}(r,t)}{\partial r} \frac{r_j}{r} = \\
& = \left[\frac{\partial B_{LL}(r,t)}{\partial r} - \frac{\partial B_{NN}(r,t)}{\partial r} \right] \frac{r_j}{r} + [B_{LL}(r,t) - B_{NN}(r,t)] \frac{2r_j}{r^2} + \\
& + \frac{\partial B_{NN}(r,t)}{\partial r} \frac{r_j}{r} = \frac{\partial B_{LL}(r,t)}{\partial r} \frac{r_j}{r} + (B_{LL}(r,t) - B_{NN}(r,t)) \frac{2r_j}{r^2} = \quad (3.6) \\
& = \left(\frac{\partial B_{LL}(r,t)}{\partial r} + (B_{LL}(r,t) - B_{NN}(r,t)) \frac{2}{r} \right) \frac{r_j}{r} = 0
\end{aligned}$$

Уравнение (3.6) должно выполняться при любых r и следовательно:

$$\frac{\partial B_{LL}(r,t)}{\partial r} + (B_{LL}(r,t) - B_{NN}(r,t)) \frac{2}{r} = 0 \quad (3.7)$$

Откуда следует связь:

$$B_{NN}(r,t) = \frac{r}{2} \frac{\partial B_{LL}(r,t)}{\partial r} + B_{LL}(r,t) \quad (3.8)$$

Отметим, что для однородной изотропной турбулентности единственным инвариантным тензором первого ранга является нулевой вектор. Так, например смешанная двухточечная корреляция скорости и давления в этом случае равна нулю:

$$\langle u_i(x, t) \cdot p(x + r, t) \rangle = B_{pi}(r, t) = 0. \quad (3.9)$$

Это означает что поле давления и поле скорости в однородной изотропной турбулентности не коррелированы.

Используя аналогичные рассуждения, получим общий вид для двухточечного момента третьего порядка. Он может быть выражен через три скалярные функции:

$$B_{ij,k}(r, t) = B'_1(r, t) \frac{r_i r_j r_k}{r^3} + B'_2(r, t) \left[\frac{r_i}{r} \delta_{jk} + \frac{r_j}{r} \delta_{ik} \right] + B'_3(r, t) \frac{r_k}{r} \cdot \delta_{ij}. \quad (3.10)$$

Условия однородности и изотропности турбулентности накладывают условия на скалярные функции выражения (3.10):

$$\begin{aligned} B_{11,1}(r, t) &= B_{LL,L}(r, t) = \langle u_L^2(x) \cdot u_L(x + r) \rangle, \\ B_{22,1}(r, t) &= B_{33,1}(r, t) = B_{NN,L}(r, t) = \langle u_N^2(x) \cdot u_L(x + r) \rangle, \\ B_{12,2}(r, t) &= B_{13,3}(r, t) = B_{LN,N}(r, t) = \langle u_L(x) \cdot u_N(x) \cdot u_N(x + r) \rangle. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Все остальные компоненты тензора $B_{ij,k}(r, t)$ будут равны нулю. Выберем систему координат такую, что $r_1 = r$, $r_2 = r_3 = 0$. Тогда (3.10) с учетом (3.11) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} B_{ij,k}(r, t) &= \left[B_{LL,L}(r, t) - 2B_{LN,N}(r, t) - B_{NN,L}(r, t) \right] \frac{r_i r_j r_k}{r^3} + \\ &+ B_{NN,L}(r, t) \frac{r_k}{r} \cdot \delta_{ij} + B_{LN,N}(r, t) \left[\frac{r_i}{r} \delta_{jk} + \frac{r_j}{r} \delta_{ik} \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Для соленоидального поля скорости справедливо уравнение:

$$\frac{\partial B_{ij,k}(r, t)}{\partial r_k} = 0 \quad (3.13)$$

Подставив в (3.13) выражение (3.12), с учетом (3.5), получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r_k} B_{ij,k}(r,t) &= \frac{\partial(B_{LL,L} - 2B_{LN,N} - B_{NN,L})}{\partial r} \frac{r_i r_j r_k}{r^3} \frac{\partial r}{\partial r_k} + \\
&+ [B_{LL,L} - 2B_{LN,N} - B_{NN,L}] \frac{\partial}{\partial r_k} \frac{r_i r_j r_k}{r^3} + \frac{\partial B_{NN,L}}{\partial r} \frac{r_k}{r} \frac{\partial r}{\partial r_k} \cdot \delta_{ij} + \\
&+ B_{NN,L} \frac{\partial}{\partial r_k} \left(\frac{r_k}{r} \right) \cdot \delta_{ij} + \frac{\partial B_{LN,N}}{\partial r} \left[\frac{r_i}{r} \delta_{jk} + \frac{r_j}{r} \delta_{ik} \right] \frac{\partial r}{\partial r_k} + \\
&+ B_{LN,N} \frac{\partial}{\partial r_k} \left[\frac{r_i}{r} \delta_{jk} + \frac{r_j}{r} \delta_{ik} \right] = \\
&= \frac{\partial(B_{LL,L} - 2B_{LN,N} - B_{NN,L})}{\partial r} \frac{r_i r_j r_k}{r^3} \frac{r_k}{r} + \\
&+ [B_{LL,L} - 2B_{LN,N} - B_{NN,L}] \left[\frac{5r_i r_j}{r^3} + r_i r_j r_k \frac{\partial}{\partial r_k} \frac{1}{r^3} \right] + \\
&+ \frac{\partial B_{NN,L}}{\partial r} \cdot \delta_{ij} + B_{NN,L} \left(\frac{1}{r} \delta_{kk} - \frac{r_k r_k}{r^3} \right) \cdot \delta_{ij} + \frac{\partial B_{LN,N}}{\partial r} \left[\frac{r_i}{r} \delta_{jk} + \frac{r_j}{r} \delta_{ik} \right] \frac{r_k}{r} + \\
&+ B_{LN,N} \left[\frac{1}{r} \delta_{ik} \delta_{jk} - \frac{r_i r_k}{r^3} \delta_{jk} + \frac{1}{r} \delta_{ik} \delta_{jk} - \frac{r_j r_k}{r^3} \delta_{ik} \right] = \\
&= \frac{\partial(B_{LL,L} - 2B_{LN,N} - B_{NN,L})}{\partial r} \frac{r_i r_j}{r^2} + \\
&+ [B_{LL,L} - 2B_{LN,N} - B_{NN,L}] \left[\frac{5r_i r_j}{r^3} - 3 \frac{r_i r_j r_k}{r^4} \frac{\partial r}{\partial r_k} \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial B_{NN,L}}{\partial r} \cdot \delta_{ij} + \frac{2}{r} B_{NN,L}(r,t) \cdot \delta_{ij} + \frac{\partial B_{LN,N}}{\partial r} \frac{2r_i r_j}{r^2} + \\
& + B_{LN,N} \left[\frac{1}{r} \delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^3} + \frac{1}{r} \delta_{ij} - \frac{r_j r_i}{r^3} \right] = \\
& \frac{\partial (B_{LL,L} - 2B_{LN,N} - B_{NN,L})}{\partial r} \frac{r_i r_j}{r^2} + [B_{LL,L} - 2B_{LN,N} - B_{NN,L}] \left[\frac{5r_i r_j}{r^3} - 3 \frac{r_i r_j}{r^3} \right] + \\
& + \frac{\partial B_{NN,L}}{\partial r} \cdot \delta_{ij} + \frac{2}{r} B_{NN,L}(r,t) \cdot \delta_{ij} + \frac{\partial B_{LN,N}}{\partial r} \frac{2r_i r_j}{r^2} + 2B_{LN,N} \left[\frac{1}{r} \delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^3} \right] = \\
& \frac{\partial (B_{LL,L} - 2B_{LN,N} - B_{NN,L})}{\partial r} \frac{r_i r_j}{r^2} + [B_{LL,L} - 2B_{LN,N} - B_{NN,L}] \frac{2r_i r_j}{r^3} + \\
& + \frac{\partial B_{NN,L}}{\partial r} \cdot \delta_{ij} + \frac{2}{r} B_{NN,L}(r,t) \cdot \delta_{ij} + \frac{\partial B_{LN,N}}{\partial r} \frac{2r_i r_j}{r^2} + 2B_{LN,N} \left[\frac{1}{r} \delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^3} \right] = 0
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Или:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} - \frac{\partial B_{NN,L}}{\partial r} + \frac{2}{r} (B_{LL,L} - 3B_{LN,N} - B_{NN,L}) \right] \frac{r_i r_j}{r^2} + \\
& + \left[\frac{\partial B_{NN,L}}{\partial r} + \frac{2}{r} B_{LN,N} + \frac{2}{r} B_{NN,L} \right] \cdot \delta_{ij} = 0
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Приравнявая к нулю коэффициенты при $r_i r_j$ и δ_{ij} , получим:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} - \frac{\partial B_{NN,L}}{\partial r} + \frac{2}{r} (B_{LL,L} - 3B_{LN,N} - B_{NN,L}) = 0 \\
& \frac{\partial B_{NN,L}}{\partial r} + \frac{2}{r} B_{LN,N} + \frac{2}{r} B_{NN,L} = 0
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Заметим, что тензор $B_{ij,k}(r,t)$ при $i = j$ представляет собой соленоидальный изотропный тензор первого ранга и потому тождественно равен нулю, т.е.:

$$B_{ii,k}(r,t) = \left[B_{LL,L} - 2B_{LN,N} - B_{NN,L} \right] \frac{r_k}{r} + 3B_{NN,L} \frac{r_k}{r} + 2B_{LN,N} \frac{r_k}{r} = 0 \quad (3.17)$$

Из (3.17) получаем еще одно соотношение для $B_{LL,L}(r,t)$, $B_{LN,N}(r,t)$ и $B_{NN,L}(r,t)$:

$$B_{NN,L}(r,t) = -\frac{1}{2} B_{LL,L}(r,t). \quad (3.18)$$

Из (3.16), с учетом (3.18) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} + \frac{2}{r} \left(B_{LL,L} - 3B_{LN,N} + \frac{1}{2} B_{LL,L} \right) = \\ = \frac{3}{2} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} + \frac{6}{r} \left(\frac{1}{2} B_{LL,L} - B_{LN,N} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Откуда:

$$B_{LN,N} = \frac{1}{2} B_{LL,L} + \frac{r}{4} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} \quad (3.20)$$

Формулы (3.8), (3.18) и (3.20) показывают, что каждый из тензоров $B_{ij}(r,t)$ и $B_{ij,k}(r,t)$ полностью определяется одной скалярной функцией от двух аргументов $r = |\vec{r}|$ и t :

$$B_{ij}(r,t) = \left[\frac{r}{2} \frac{\partial B_{LL}(r,t)}{\partial r} + B_{LL}(r,t) \right] \cdot \delta_{ij} - \frac{r}{2} \frac{\partial B_{LL}(r,t)}{\partial r} \frac{r_i r_j}{r^2}. \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}
B_{ij,k}(r,t) &= \frac{1}{2} \left[B_{LL,L} - r \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} \right] \frac{r_i r_j r_k}{r^3} + \\
&+ \left(\frac{1}{2} B_{LL,L} + \frac{r}{4} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} \right) \left[\frac{r_i}{r} \delta_{jk} + \frac{r_j}{r} \delta_{ik} \right] - \frac{1}{2} B_{LL,L} \frac{r_k}{r} \delta_{ij}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

3.1. Уравнение для корреляционных функций

Получим уравнение для $B_{ij}(r,t) = \langle \tilde{u}_i(x,t) \cdot \tilde{u}_j(x',t) \rangle = \langle \tilde{u}_i \tilde{u}'_j \rangle$, где $x + r = x'$.
Поскольку:

$$\frac{\partial B_{ij}(r,t)}{\partial t} = \left\langle \tilde{u}_i \frac{\partial \tilde{u}'_j}{\partial t} + \tilde{u}'_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} \right\rangle \tag{3.23}$$

Из уравнения Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{u}_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{p} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \tilde{u}_i, \tag{3.24}$$

получим:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_i \frac{\partial \tilde{u}'_j}{\partial t} + \tilde{u}_i \tilde{u}'_k \frac{\partial}{\partial x'_k} \tilde{u}'_j &= -\tilde{u}_i \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x'_j} \tilde{p}' + \tilde{u}_i \nu \frac{\partial^2}{\partial x'_j \partial x'_j} \tilde{u}'_j \\
\tilde{u}'_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}'_j \tilde{u}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \tilde{u}_i &= -\tilde{u}'_j \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{p} + \tilde{u}'_j \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \tilde{u}_i
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Сложив эти два уравнения, получим:

$$\begin{aligned}
& \tilde{u}_i \frac{\partial \tilde{u}'_j}{\partial t} + \tilde{u}'_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_i \tilde{u}'_k \frac{\partial}{\partial x'_k} \tilde{u}'_j + \tilde{u}'_j \tilde{u}_k \frac{\partial}{\partial x'_k} \tilde{u}_i = \\
& = -\tilde{u}_i \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x'_j} \tilde{p}' - \tilde{u}'_j \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x'_i} \tilde{p}' + \tilde{u}_i \nu \frac{\partial^2}{\partial x'_j \partial x'_j} \tilde{u}'_j + \tilde{u}'_j \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \tilde{u}_i
\end{aligned} \tag{3.26}$$

После очевидных преобразований, с учетом того, что $\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x'_i} = \frac{\partial \tilde{u}'_i}{\partial x_i} = 0$

(поскольку скорости со штрихом и без штриха не зависят от координат без штриха и со штрихом, соответственно), уравнение для $B_{ij}(r, t)$ получится в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{u}_i \tilde{u}'_j}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}'_j \tilde{u}_i \tilde{u}'_k}{\partial x'_k} + \frac{\partial \tilde{u}_i \tilde{u}'_j \tilde{u}_k}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \tilde{p}' \tilde{u}_i}{\partial x'_i} + \frac{\partial \tilde{p}' \tilde{u}'_j}{\partial x_j} \right] + \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}'_j \tilde{u}_i}{\partial x'_j \partial x'_j} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_i \tilde{u}'_j}{\partial x_j \partial x_j}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Для однородной турбулентности все функции зависят лишь от вектора r : $r = x' - x$. Тогда $\frac{\partial}{\partial x_k} = -\frac{\partial}{\partial r_k}$, и $\frac{\partial}{\partial x'_k} = \frac{\partial}{\partial r_k}$. В этом случае после осреднения уравнение преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \langle \tilde{u}_i \tilde{u}'_j \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \tilde{u}'_j \tilde{u}_i \tilde{u}'_k \rangle}{\partial r_k} - \frac{\partial \langle \tilde{u}_i \tilde{u}'_j \tilde{u}_k \rangle}{\partial r_k} = \\
& = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \langle \tilde{p}' \tilde{u}_i \rangle}{\partial r_i} - \frac{\partial \langle \tilde{p}' \tilde{u}'_j \rangle}{\partial r_j} \right] + \nu \frac{\partial^2 \langle \tilde{u}'_j \tilde{u}_i \rangle}{\partial r_j \partial r_j} + \nu \frac{\partial^2 \langle \tilde{u}_i \tilde{u}'_j \rangle}{\partial r_j \partial r_j}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Или, записав в терминах двухточечных моментов, получим основное динамическое уравнение, связывающее вторые и третьи моменты поля скорости однородной турбулентности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{ij}(r,t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial r_k} [B_{ik,j}(r,t) - B_{i,jk}(r,t)] + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial B_{pj}(r,t)}{\partial r_i} - \frac{\partial B_{ip}(r,t)}{\partial r_j} \right] + \\ &+ 2\nu \frac{\partial^2 B_{ij}(r,t)}{\partial r_j \partial r_j} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Теперь рассмотрим случай турбулентности не только однородной, но и изотропной. В этом случае, как отмечалось выше, двухточечные смешанные моменты второго порядка скорости и давления будут тождественно равны нулю (3.4). Отметим также, что и средняя скорость будет равной нулю, а значит, моменты полей скорости будут тождественно равны центрированным соответствующим моментам.

3.2. Уравнение Кармана-Ховарта

Подставим в уравнение (3.29) выражения (3.21)-(3.22) для $B_{ij}(r,t)$ и $B_{i,jk}(r,t)$ и приравняем по отдельности коэффициенты при тензорах δ_{ij} и $r_i r_j$ в левой и правой частях полученного уравнения. Мы придем к двум скалярным уравнениям, которые, однако, оказываются эквивалентными друг другу. Поэтому достаточно рассмотреть лишь уравнение, которое получается при приравнивании друг другу коэффициентов при тензоре δ_{ij} . Вычислим каждое из слагаемых уравнения (3.29), оставляя только коэффициенты при δ_{ij} , а оставшиеся коэффициенты при $r_i r_j$ для краткости обозначим многоточием:

$$\frac{\partial B_{ij}(r,t)}{\partial t} = \left(1 + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\partial B_{LL}}{\partial t} \delta_{ij} + \dots; \quad (3.30)$$

Легко убедиться, что $B_{jk,i}(r,t) = -B_{jk,i}(-r,t) = -B_{i,jk}(r,t)$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial r_k} [B_{ik,j}(r,t) - B_{i,jk}(r,t)] = \frac{\partial}{\partial r_k} [B_{ik,j}(r,t) + B_{jk,i}(r,t)] \quad (3.31)$$

С учетом (3.22) выражение для тензора $B_{ik,j}(r,t)$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
B_{ik,j}(r,t) &= \frac{1}{2} \left[B_{LL,L} - r \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} \right] \frac{r_i r_j r_k}{r^3} + \\
&+ \frac{1}{2} \left[\frac{r}{2} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} + B_{LL,L} \right] \left[\frac{r_i}{r} \delta_{jk} + \frac{r_k}{r} \delta_{ij} \right] - \frac{1}{2} B_{LL,L} \frac{r_j}{r} \delta_{ik}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Вычислим его производную:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_{ik,j}(r,t)}{\partial r_k} &= \frac{1}{2} \frac{r_i r_j r_k}{r^3} \frac{\partial}{\partial r_k} \left[B_{LL,L} - r \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} \right] + \\
&+ \frac{1}{2} \left[B_{LL,L} - r \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} \right] \frac{\partial}{\partial r_k} \left[\frac{r_i r_j r_k}{r^3} \right] + \\
&+ \frac{1}{2} \left[\frac{r_i}{r} \delta_{jk} + \frac{r_k}{r} \delta_{ij} \right] \frac{\partial}{\partial r_k} \left[\frac{r}{2} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} + B_{LL,L} \right] + \\
&+ \frac{1}{2} \left[\frac{r}{2} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} + B_{LL,L} \right] \frac{\partial}{\partial r_k} \left[\frac{r_i}{r} \delta_{jk} + \frac{r_k}{r} \delta_{ij} \right] - \\
&- \frac{1}{2} \frac{r_j}{r} \frac{\partial}{\partial r_k} B_{LL,L} \delta_{ik} - \frac{1}{2} B_{LL,L} \frac{\partial}{\partial r_k} \left[\frac{r_j}{r} \right] \delta_{ik};
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Выполнив громоздкие, но несложные вычисления, получим, что первые два слагаемых включают в себя коэффициенты с тензором $r_i r_j$, а оставшиеся дадут:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \left[\frac{r_i}{r} \delta_{jk} + \frac{r_k}{r} \delta_{ji} \right] \frac{\partial}{\partial r_k} \left[\frac{r}{2} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} + B_{LL,L} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{r_i}{r} \delta_{jk} + \frac{r_k}{r} \delta_{ij} \right] \times \\
&\times \left[\frac{1}{2} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} \frac{r_k}{r} + \frac{r_k}{2} \frac{\partial^2 B_{LL,L}}{\partial r^2} + \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} \frac{r_k}{r} \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} + \frac{r}{2} \frac{\partial^2 B_{LL,L}}{\partial r^2} \right] \frac{r_k}{r} \left[\frac{r_i}{r} \delta_{jk} + \frac{r_k}{r} \delta_{ij} \right] = \\
&= \left[\frac{3}{4} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} + \frac{r}{4} \frac{\partial^2 B_{LL,L}}{\partial r^2} \right] \left[\frac{r_i r_j}{r^2} + \delta_{ij} \right] = \left[\frac{3}{4} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} + \frac{r}{4} \frac{\partial^2 B_{LL,L}}{\partial r^2} \right] \delta_{ij} + \dots; \\
&\frac{1}{2} \left[\frac{r}{2} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} + B_{LL,L} \right] \frac{\partial}{\partial r_k} \left[\frac{r_i}{r} \delta_{jk} + \frac{r_k}{r} \delta_{ij} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{r}{2} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} + B_{LL,L} \right] \times \\
&\times \left[\left(\frac{\delta_{ik}}{r} - \frac{r_k r_i}{r^3} \right) \delta_{jk} + \left(\frac{3}{r} - \frac{1}{r} \right) \delta_{ij} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[B_{LL,L} + \frac{r}{2} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} \right] \left[\frac{3}{r} \delta_{ij} - \frac{r_j r_i}{r^3} \right] = \left[\frac{3}{2r} B_{LL,L} + \frac{3}{4} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} \right] \delta_{ij} + \dots; \\
&-\frac{1}{2} \frac{r_j}{r} \frac{\partial}{\partial r_k} B_{LL,L} \delta_{ik} - \frac{1}{2} B_{LL,L} \frac{\partial}{\partial r_k} \left[\frac{r_j}{r} \right] \delta_{ik} = -\frac{1}{2} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} \frac{r_j r_j}{r^2} - \\
&-\frac{1}{2} B_{LL,L} \left[\frac{\delta_{jk}}{r} - \frac{r_j r_k}{r^3} \right] \delta_{ik} = -\frac{1}{2} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} \frac{r_j r_j}{r^2} - \frac{1}{2} B_{LL,L} \left[\frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{r_j r_i}{r^3} \right] = \\
&= -\frac{1}{2} B_{LL,L} \frac{\delta_{ij}}{r};
\end{aligned}$$

Выражение для $\partial B_{ik,j}(r,t)/\partial r_k$ примет вид:

$$\frac{\partial B_{ik,j}(r,t)}{\partial r_k} = \left[\frac{1}{r} B_{LL,L} + \frac{3}{2} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} + \frac{r}{4} \frac{\partial^2 B_{LL,L}}{\partial r^2} \right] \delta_{ij} + \dots; \quad (3.34)$$

Проделаем аналогичную процедуру для $\partial B_{jk,i}(r,t)/\partial r_k$. Из (3.22) легко получить выражение для $B_{jk,i}(r,t)$:

$$B_{jk,i}(r,t) = \left[\frac{1}{2} B_{LL,L} - \frac{r}{2} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} \right] \frac{r_i r_j r_k}{r^3} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[B_{LL,L} + \frac{r}{2} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} \right] \left[\frac{r_k}{r} \delta_{ji} + \frac{r_j}{r} \delta_{ik} \right] - \frac{1}{2} B_{LL,L} \frac{r_i}{r} \cdot \delta_{kj} \quad (3.35)$$

Вычислим производную $\frac{\partial}{\partial r_k}$ от каждого слагаемого (3.35). Первое слагаемое будет включать только коэффициенты с тензором $r_i r_j$, остальные дадут:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r_k} \left\{ \left[B_{LL,L} + \frac{r}{2} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} \right] \left[\frac{r_k}{r} \delta_{ji} + \frac{r_j}{r} \delta_{ik} \right] \right\} = \\ & = \frac{1}{2} \left[\frac{r_k}{r} \delta_{ji} + \frac{r_j}{r} \delta_{ik} \right] \frac{\partial}{\partial r_k} \left[B_{LL,L} + \frac{r}{2} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[B_{LL,L} + \frac{r}{2} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} \right] \frac{\partial}{\partial r_k} \left[\frac{r_k}{r} \delta_{ji} + \frac{r_j}{r} \delta_{ik} \right] = \\ & = \frac{1}{2} \left[\frac{r_k}{r} \delta_{ji} + \frac{r_j}{r} \delta_{ik} \right] \left[\frac{1}{2} \frac{r_k}{r} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} + \frac{r_r}{2} \frac{\partial^2 B_{LL,L}}{\partial r^2} + \frac{r_k}{r} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[B_{LL,L} + \frac{r}{2} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} \right] \left[\frac{3}{r} \delta_{ij} - \frac{1}{r} \delta_{ji} + \frac{1}{r} \delta_{jk} \delta_{ik} - \frac{r_j r_k}{r^3} \delta_{ik} \right] = \\ & = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} + \frac{r}{2} \frac{\partial^2 B_{LL,L}}{\partial r^2} \right] \left[\delta_{ji} + \frac{r_i r_j}{r^2} \delta_{ik} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} B_{LL,L} + \frac{1}{2} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} \right] \left[3 \delta_{ij} - \frac{r_j r_i}{r^2} \right] = \\ & = \left[\frac{3}{4} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} + \frac{r}{4} \frac{\partial^2 B_{LL,L}}{\partial r^2} + \frac{3}{2r} B_{LL,L} + \frac{3}{4} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} \right] \delta_{ji} + \\ & \left[\frac{3}{4} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} + \frac{r}{4} \frac{\partial^2 B_{LL,L}}{\partial r^2} + \frac{1}{2r} B_{LL,L} + \frac{1}{4} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} \right] \frac{r_i r_j}{r^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{3}{2r} B_{LL,L} + \frac{3}{2} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} + \frac{r}{4} \frac{\partial^2 B_{LL,L}}{\partial r^2} \right] \delta_{ji} + \dots; \\
&- \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r_k} \left\{ B_{LL,L} \frac{r_i}{r} \right\} \cdot \delta_{kj} = - \frac{1}{2} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} \frac{r_i r_j}{r^2} \cdot \delta_{kj} - \frac{1}{2} B_{LL,L} \frac{\partial}{\partial r_k} \left\{ \frac{r_i}{r} \right\} = \\
&= - \frac{1}{2} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} \frac{r_i r_j}{r^2} - \frac{1}{2} B_{LL,L} \left\{ \frac{\delta_{ik}}{r} - \frac{r_i r_k}{r^3} \right\} \cdot \delta_{kj} = - \frac{1}{2} \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} \frac{r_i r_j}{r^2} - \\
&- \frac{1}{2} B_{LL,L} \left\{ \frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{r_i r_j}{r^3} \right\} = - \frac{1}{2r} B_{LL,L} \delta_{ij} + \dots
\end{aligned}$$

В результате получим:

$$\frac{\partial B_{jk,i}(r,t)}{\partial r_k} = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{r} B_{LL,L} + 3 \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} + \frac{r}{2} \frac{\partial^2 B_{LL,L}}{\partial r^2} \right] \delta_{ij} + \dots \quad (3.36)$$

Из (3.35) и (3.36) следует:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial r_k} [B_{ik,j}(r,t) - B_{i,jk}(r,t)] = \frac{\partial}{\partial r_k} [B_{ik,j}(r,t) + B_{jk,i}(r,t)] = \\
&= \left[\frac{2}{r} B_{LL,L} + 3 \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} + \frac{r}{2} \frac{\partial^2 B_{LL,L}}{\partial r^2} \right] \delta_{ij} + \dots \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Заметим, что:

$$\left(1 + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r} \right) B_{LL,L} = \frac{r}{2} \frac{\partial^2 B_{LL,L}}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} + \frac{2}{r} B_{LL,L}.$$

Тогда (3.37) можно записать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial r_k} [B_{ik,j}(r,t) - B_{i,jk}(r,t)] = \left(1 + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r} \right) B_{LL,L} \delta_{ij} + \dots \quad (3.38)$$

Вычислим слагаемое с вязкостью уравнения (3.29):

$$\begin{aligned}
2\nu \frac{\partial^2 B_{ij}(r,t)}{\partial r_k \partial r_k} &= 2\nu \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_k} \left(\frac{r}{2} \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} + B_{LL} \right) \delta_{ij} - 2\nu \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_k} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \frac{r_i r_j}{r} \right) = \\
&= 2\nu \frac{\partial}{\partial r_k} \left(\frac{r}{2} \frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial r_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial r}{\partial r_k} \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} + \frac{\partial r}{\partial r_k} \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \right) \delta_{ij} - \\
&- \nu \frac{\partial}{\partial r_k} \left(\frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} \frac{r_i r_j}{r} \frac{\partial r}{\partial r_k} + \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r_k} \left(\frac{r_i r_j}{r} \right) \right) = \\
&= 2\nu \frac{\partial}{\partial r_k} \left(\frac{\partial r}{\partial r_k} \left\{ \frac{r}{2} \frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} + \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \right\} \right) \delta_{ij} - \\
&- \nu \frac{\partial}{\partial r_k} \left(\frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} \frac{r_i r_j}{r} \frac{r_k}{r} + \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r_k} r_i r_j - \frac{r_i r_j}{r^2} \frac{\partial r}{\partial r_k} \right) \right) = \\
&= 2\nu \frac{\partial}{\partial r_k} \left(\frac{r_k}{r} \left\{ \frac{r}{2} \frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} + \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \right\} \right) \delta_{ij} - \\
&- \nu \frac{\partial}{\partial r_k} \left(\frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} \frac{r_i r_j}{r} \frac{r_k}{r} + \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r_k} r_i r_j - \frac{r_i r_j}{r^2} \frac{r_k}{r} \right) \right) = \\
&= \nu \frac{\partial}{\partial r_k} \left(\frac{r_k}{r} \left(3 \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} \right) \right) \delta_{ij} - \\
&- \nu \frac{\partial}{\partial r_k} \left(\frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial r_i r_j}{\partial r_k} + \left\{ \frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \right\} \frac{r_i r_j r_k}{r^2} \right) = \\
&= \nu \frac{r_k}{r} \frac{\partial}{\partial r_k} \left(3 \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} \right) \delta_{ij} + \nu \left(3 \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} \right) \frac{\partial}{\partial r_k} \left(\frac{r_k}{r} \right) \delta_{ij} \\
&- \nu \frac{\partial}{\partial r_k} \left(\frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \frac{1}{r} \left(r_i \delta_{kj} + r_j \delta_{ki} \right) \right) - \nu \frac{r_i r_j r_k}{r^2} \frac{\partial}{\partial r_k} \left\{ \frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \right\} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\nu \left\{ \frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \right\} \frac{\partial}{\partial r_k} \left(\frac{r_i r_j r_k}{r^2} \right) = \\
& = \nu \frac{r_k}{r} \left(3 \frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} \frac{r_k}{r} + \frac{r_k}{r} \frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} + r_k \frac{\partial^3 B_{LL}}{\partial r^3} \right) \delta_{ij} + \\
& + \nu \left(3 \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} \right) \left(\frac{3}{r} - \frac{r_k}{r^2} \frac{\partial r}{\partial r_k} \right) \delta_{ij} - \nu \left(\frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} \frac{r_k}{r} \frac{1}{r} (r_i \delta_{kj} + r_j \delta_{ki}) - \right. \\
& \left. - \frac{r_k}{r^3} \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} (r_i \delta_{kj} + r_j \delta_{ki}) + \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \frac{1}{r} (\delta_{ki} \delta_{kj} + \delta_{kj} \delta_{ki}) \right) - \\
& - \nu \frac{r_i r_j r_k}{r^2} \left\{ \frac{r_k}{r} \frac{\partial^3 B_{LL}}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{r_k}{r} \frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{r_k}{r} \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \right\} - \\
& - \nu \left\{ \frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \right\} \left(\frac{5r_i r_j}{r^2} - 2 \frac{r_i r_j r_k}{r^3} \frac{r_k}{r} \right) = \\
& = \nu \left(4 \frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} + r \frac{\partial^3 B_{LL}}{\partial r^3} \right) \delta_{ij} + \nu \frac{2}{r} \left(3 \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} \right) \delta_{ij} + \\
& - \nu \left(\frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} \frac{2r_i r_j}{r^2} - \frac{2r_i r_j}{r^3} \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \delta_{ij} \right) + \\
& - \nu \left\{ \frac{r_i r_j}{r} \frac{\partial^3 B_{LL}}{\partial r^3} + \frac{r_i r_j}{r^2} \frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} - \frac{r_i r_j}{r^3} \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \right\} - \nu \left\{ \frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \right\} \frac{3r_i r_j}{r^2} = \\
& = \nu \left(6 \frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} + r \frac{\partial^3 B_{LL}}{\partial r^3} + \frac{6}{r} \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \right) \delta_{ij} - \\
& - \nu \left(\left\{ \frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \right\} \frac{2r_i r_j}{r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \delta_{ij} \right) + \\
& - \nu \left\{ r \frac{\partial^3 B_{LL}}{\partial r^3} + \frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \right\} \frac{r_i r_j}{r^2} - \nu \left\{ \frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \right\} \frac{3r_i r_j}{r^2} =
\end{aligned}$$

(3.39)

$$= 2\nu \left(\frac{r}{2} \frac{\partial^3 B_{LL}}{\partial r^3} + 3 \frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \right) \delta_{ij} + \dots$$

Заметим, что:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) B_{LL} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) B_{LL} + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) B_{LL} = \\ &= \frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} + \frac{r}{2} \frac{\partial^3 B_{LL}}{\partial r^3} + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{4}{r} \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} = \\ &= \frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} + \frac{r}{2} \frac{\partial^3 B_{LL}}{\partial r^3} + 2 \frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} = \\ &= \frac{r}{2} \frac{\partial^3 B_{LL}}{\partial r^3} + 3 \frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \end{aligned}$$

Тогда (3.39) можно записать в виде:

$$2\nu \frac{\partial^2 B_{ij}(r, t)}{\partial r_k \partial r_k} = 2\nu \left(1 + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) B_{LL} \delta_{ij} + \dots \quad (3.40)$$

В результате получим уравнение:

$$\left(1 + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\partial B_{LL}}{\partial t} = \left(1 + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r} \right) B_{LL,L} + 2\nu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) B_{LL} \right] \quad (3.41)$$

Заметим, что уравнение (3.41), переписанное в виде:

$$\left(1 + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left[\frac{\partial B_{LL}}{\partial t} - \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r} \right) B_{LL,L} - 2\nu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) B_{LL} \right] = 0 \quad (3.42)$$

имеет форму уравнения: $f(r) + r/2 \cdot f'(r) = 0$. Единственным решением, не имеющим особенностей при $r = 0$, является функция, тождественно равная нулю. Поэтому уравнение (3.41) равносильно следующему:

$$\frac{\partial B_{LL}}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r} \right) \left[B_{LL,L} + 2\nu \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \right]. \quad (3.43)$$

Уравнение (3.43) было впервые выведено Карманом и Ховартом в 1938 г. и явилось основой всех последующих исследований по теории изотропной турбулентности.

3.3. Замыкание уравнения Кармана-Ховарта

Уравнение (3.43) представляет собой соотношение, связывающее две неизвестные функции, оно не может быть решено, т.е. не позволяет определить вид функций B_{LL} и $B_{LL,L}$. Это обстоятельство представляет собой частный случай общей проблемы замыкания уравнений для моментов. Тем не менее, для однородной изотропной турбулентности мы можем попытаться замкнуть уравнение (3.43), например, предполагая, что в этом случае тройные корреляции $B_{LL,L}$ будут пренебрежимо малы. Тогда уравнение (3.43) примет вид:

$$\frac{\partial B_{LL}}{\partial t} = 2\nu \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r} \right) \frac{\partial B_{LL}}{\partial r}. \quad (3.44)$$

Правая часть уравнения (3.44) совпадает с радиальной частью пятимерного оператора Лапласа. Поэтому общее решение уравнения (3.44) можно представить в виде:

$$B_{LL}(r,t) = \frac{1}{[8\pi\nu(t-t_0)]^{\frac{5}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{LL}(\xi, t_0) \cdot \exp \left[\frac{-\sum_{i=1}^5 (r_i - \xi_i)^2}{8\nu(t-t_0)} \right] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 d\xi_5, \quad (3.45)$$

где ξ_i - переменные интегрирования, $\xi = \sum_{i=1}^5 \xi_i^2$, а r_i - произвольные

числа, такие, что $r = \sum_{i=1}^5 r_i^2$. Перейдя в (3.45) к сферическим координатам

в пятимерном пространстве и выполнив интегрирование по угловым координатам, получим:

$$B_{LL}(r,t) = \frac{\exp\left[-\frac{r^2}{8\nu(t-t_0)}\right]}{4\nu(t-t_0)r^{3/2}} \int_0^{+\infty} \left\{ B_{LL}(\xi, t_0) \cdot \xi^{5/2} \times \right. \\ \left. \times I_{3/2}\left[\frac{r\xi}{4\nu(t-t_0)r^{3/2}}\right] \cdot \exp\left[\frac{-\xi^2}{8\nu(t-t_0)}\right] \right\} d\xi, \quad (3.46)$$

где $I_{3/2}[x]$ - функция Бесселя от мнимого аргумента порядка $3/2$. Полученное решение уравнения (3.44) в виде интеграла позволяет исследовать поведение $B_{LL}(r,t)$ в заключительный период вырождения турбулентности: при $(t-t_0) \rightarrow \infty$. В этом случае экспоненты под интегралом в (3.46) будут стремиться к единице, а функцию Бесселя можно представить первым членом разложения в степенной ряд:

$$I_{3/2}\left[\frac{r\xi}{4\nu(t-t_0)r^{3/2}}\right] \approx \frac{(r\xi)^{3/2}}{12\sqrt{2\pi}[\nu(t-t_0)]^{3/2}}. \quad (3.47)$$

Тогда:

$$B_{LL}(r,t) \approx \frac{\Lambda}{48\sqrt{2\pi}[\nu(t-t_0)]^{5/2}} \exp\left[\frac{-r^2}{8\nu(t-t_0)}\right], \quad (3.48)$$

где Λ - размерный коэффициент (интеграл Лойцянского, см. ниже). Из (3.48) следует, что если в момент времени $t = t_0$ этот коэффициент конечен и отличен от нуля, то интенсивности турбулентных пульсаций скорости, а значит и энергия турбулентности, затухают по закону:

$$\langle u^2(t) \rangle = B_{LL}(0, t) \approx \frac{\Lambda}{48\sqrt{2\pi}[\nu(t-t_0)]^{5/2}}. \quad (3.49)$$

3.4. Интеграл Лойцянского

Умножив все слагаемые уравнения (3.43) на r^4 и проинтегрируем его по r от $r = 0$ до $r = R$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R B_{LL}(r) r^4 dr &= \int_0^R \frac{\partial B_{LL}(r)}{\partial r} r^4 dr + 2\nu \int_0^r \frac{\partial^2 B_{LL}(r)}{\partial r^2} r^4 dr + \\ &+ 4 \int_0^R B_{LL,L}(r) r^3 dr + 8\nu \int_0^R \frac{\partial B_{LL}(r)}{\partial r} r^3 dr \end{aligned} \quad (3.50)$$

Проинтегрировав два первых интеграла правой части равенства по частям, получим:

$$\begin{aligned} &\int_0^R \frac{\partial B_{LL}(r)}{\partial r} r^4 dr + 2\nu \int_0^r \frac{\partial^2 B_{LL}(r)}{\partial r^2} r^4 dr + 4 \int_0^R B_{LL,L}(r) r^3 dr + 8\nu \int_0^R \frac{\partial B_{LL}(r)}{\partial r} r^3 dr = \\ &= B_{LL,L}(R) \cdot R^4 - 4 \int_0^R B_{LL}(r) r^3 dr + 2\nu R^4 \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \Big|_{r=R} - 8\nu \int_0^r \frac{\partial B_{LL}(r)}{\partial r} r^4 dr + \\ &+ 4 \int_0^R B_{LL,L}(r) r^3 dr + 8\nu \int_0^R \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} r^3 dr = B_{LL,L}(R) \cdot R^4 + 2\nu R^4 \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \Big|_{r=R} \end{aligned} \quad (3.51)$$

В результате мы приходим к соотношению:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^R B_{LL}(r) r^4 dr = B_{LL,L}(R) \cdot R^4 + 2\nu R^4 \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \Big|_{r=R}. \quad (3.52)$$

Если интеграл в (3.52) сходится, т.е. функция $B_{LL}(r)$ стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$ быстрее, чем r^{-5} , то:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} B_{LL}(r) r^4 dr = \lim_{R \rightarrow \infty} [B_{LL,L}(R) \cdot R^4] = \Lambda. \quad (3.53)$$

Величина Λ называется интегралом Лойцянского. Если функция $B_{LL,L}(r)$ убывает быстрее, чем r^{-4} при $r \rightarrow \infty$, то $\Lambda = 0$:

$$\int_0^{\infty} B_{LL}(r) r^4 dr = Const \quad (3.54)$$

Отметим, что справедливость (3.54) определяется характером поведения корреляционных функций $B_{LL}(r)$ и $B_{LL,L}(r)$ при $r \rightarrow \infty$.

3.5. Уравнение Колмогорова

В однородной изотропной турбулентности для структурных функций второго порядка справедливы выражения:

$$\begin{aligned} D_{ij}(r) &= \langle (u_i(r') - u_i(r' - r))(u_j(r') - u_j(r' - r)) \rangle = \langle u_i(r')u_j(r') \rangle + \\ &+ \langle u_i(r' - r)u_i(r' - r) \rangle - \langle u_i(r')u_j(r' - r) \rangle - \langle u_i(r' - r)u_j(r') \rangle = \\ &= 2B_{ij}(0) - 2B_{ij}(r), \end{aligned} \quad (3.55)$$

а значит и выражения для продольных и поперечных функций:

$$D_{LL}(r) = 2B_{LL}(0) - 2B_{LL}(r), \quad D_{NN}(r) = 2B_{NN}(0) - 2B_{NN}(r). \quad (3.56)$$

Аналогичные рассуждения позволяют выписать выражения для структурных функций третьего порядка. В частности для продольной структурной функции оно имеет вид:

$$D_{LL}(r) = 6B_{LL,L}(r). \quad (3.57)$$

Подставим (3.56) и (3.57) в (3.43):

$$-\frac{\partial[1/2 D_{LL}(r) - B_{LL}(0)]}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r} \right) \left[\frac{1}{6} D_{LL,L} - v \frac{\partial[D_{LL}(r) - 2B_{LL}(0)]}{\partial r} \right] \quad (3.58)$$

Из (3.21) при $i = j = 1$, с учетом $B_{11}(0) = \langle u_L^2 \rangle$ следует, что $B_{LL}(0) = \langle u_L^2 \rangle / 3$. Полученное выше, в §2, выражение для пространственной структурной функции второго порядка (2.8), справедливое для масштабов $\eta \ll r \ll L$, соответствующих инерционному интервалу, предполагает, что D_{ij} не зависит явно от времени. Тогда, с учетом $\partial/\partial t [\langle u_L^2 \rangle / 2] = -\varepsilon$, (3.58) примет вид:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3}\varepsilon &= \frac{1}{6} \frac{\partial D_{LL,L}}{\partial r} + \frac{2}{3} \frac{D_{LL,L}}{r} - v \frac{\partial^2 [D_{LL}(r) - B_{LL}(0)]}{\partial r^2} - \\ &-\frac{4v}{r} \frac{\partial [D_{LL}(r) - B_{LL}(0)]}{\partial r} = \\ &= \frac{1}{6} \left[\frac{\partial D_{LL,L}}{\partial r} + \frac{4}{r} D_{LL,L} \right] - v \left[\frac{\partial^2 D_{LL}(r)}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial D_{LL}(r)}{\partial r} \right] \end{aligned} \quad (3.59)$$

Проинтегрировав все члены уравнения (3.59) умноженного на r^4 , по r , получим:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3} \int \varepsilon \cdot r^4 dr &= -\frac{2}{15} \varepsilon \cdot r^5 = \frac{1}{6} \left[\int \frac{\partial D_{LL,L}}{\partial r} r^4 dr + 4 \int r^3 D_{LL,L} dr \right] - \\ &- v \left[\int \frac{\partial^2 D_{LL}(r)}{\partial r^2} r^4 dr + 4 \int \frac{\partial D_{LL}(r)}{\partial r} r^3 dr \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6} \left[D_{LL,L} r^4 - 4 \int D_{LL,L} r^3 dr + 4 \int r^3 D_{LL,L} dr \right] - \\
&- v \left[\frac{\partial D_{LL}(r)}{\partial r} r^4 - 4 \int \frac{\partial D_{LL}(r)}{\partial r} r^3 dr + 4 \int \frac{\partial D_{LL}(r)}{\partial r} r^3 dr \right] = \quad (3.60) \\
&\frac{1}{6} D_{LL,L} r^4 - v \frac{\partial D_{LL}(r)}{\partial r} r^4
\end{aligned}$$

Или:

$$-\frac{4}{5} \varepsilon \cdot r = D_{LL,L}(r) - 6v \frac{\partial D_{LL}(r)}{\partial r}. \quad (3.61)$$

Соотношение (3.61) впервые было найдено Колмогоровым в 1941 г. Из него следует ряд важных следствий. Так, например, поскольку функция $D_{LL,L}(r)$ в окрестности точки $r = 0$ имеет третий порядок малости по r , при очень малых r (в частности при $r \ll \eta$) она будет пренебрежимо малой по сравнению с двумя остальными членами уравнения (3.61).

Следовательно:

$$\frac{4}{5} \varepsilon \cdot r = 6v \frac{\partial D_{LL}(r)}{\partial r}. \quad (3.62)$$

Или:

$$D_{LL}(r) = \frac{1}{15} \frac{\varepsilon}{v} \cdot r^2. \quad (3.63)$$

В другом предельном случае, при $r \gg \eta$, вязкое трение не должно играть заметной роли, т.е. пренебрежимо малым в уравнении (3.61) должно быть слагаемое с вязкостью:

$$D_{LL,L}(r) = -\frac{4}{5} \varepsilon \cdot r. \quad (3.64)$$

Согласно формуле (3.64) в инерционном интервале распределение вероятностей для производной скорости должно иметь отрицательную асимметрию:

$$S_{\vartheta} = \frac{D_{LL,L}(r)}{[D_{LL}(r)]^{3/2}} \Big|_{r \rightarrow 0} < 0. \quad (3.65)$$

Это свойство тесно связано с механизмом спектрального потока энергии турбулентности. Поскольку приращение скорости по r : $\Delta_r u_L = u_L(x+r) - u_L(x)$, в рамках гипотезы о “замороженной турбулентности” связано с ускорением: $a_L(r) = \Delta_r u_L / \Delta t = -U \cdot \Delta_r u_L / \Delta r$, отрицательность асимметрии (3.65) означает, что, согласно виду ФПВ пульсаций приращения скорости или ускорения, наряду с очень частыми, но небольшими по амплитуде отрицательными ускорениями (т.е. передача энергии более мелким вихрям), происходят более редкие, но большие по величине положительные ускорения (прием энергии от более крупных вихрей). Такой механизм каскадной передачи энергии от более крупных к более мелким вихрям обсуждался выше в §2.

3.6. Замыкание уравнения Колмогорова

Уравнение (3.61), как и уравнение (3.43) незамкнуто. Для его замыкания можно предложить целый ряд специальных гипотез, позволяющих выразить одну из неизвестных функций через вторую. Одна из таких гипотез – постоянство асимметрии приращения скорости S_{ϑ} . Эта гипотеза была предложена Обуховым в 1949 году. Поскольку имеющиеся эмпирические данные не противоречат тому, что значения $S_{\vartheta}(r)$ при $r \ll \eta$ и при $r \gg \eta$ совпадают между собой, Обухов принял в качестве рабочей гипотезы, что $S_{\vartheta}(r) = Const < 0$ при всех $r \ll L$. В этом случае уравнение (3.61) принимает вид:

$$6\nu \frac{\partial D_{LL}(r)}{\partial r} + |S_{\vartheta}| [D_{LL}]^{3/2} = \frac{4}{5} \varepsilon \cdot r. \quad (3.66)$$

От постоянной $|S_\sigma|$ здесь можно избавиться, наряду с исключением величин ν и ε , если определить безразмерную универсальную функцию $\beta_{LL}(r)$ и нормировку как:

$$D_{LL}(r) = \gamma_2(\nu\varepsilon)^{1/2} \cdot \beta_{LL}(r/\gamma_1\eta), \quad \gamma_1 = \left(\frac{5}{2}\right)^{1/4} \frac{4}{|S_\sigma|^{1/2}}, \quad \gamma_2 = \left(\frac{2}{45}\right)^{1/2} \frac{16}{|S_\sigma|}. \quad (3.67)$$

Тогда для функции $\beta_{LL}(r)$ получится уравнение:

$$\frac{\partial \beta_{LL}(x)}{\partial x} + \left[\frac{4}{3}\beta_{LL}(x)\right]^{3/2} = x. \quad (3.68)$$

Из этого уравнения следует, что:

$$\begin{aligned} \beta_{LL}(x) &\approx \frac{1}{2}x^2, & \text{при } x \ll 1, \\ \beta_{LL}(x) &\approx \frac{3}{4}x^{2/3}, & \text{при } x \gg 1 \end{aligned} \quad (3.69)$$

Из (3.69) с учетом (3.67) следует, что характер поведения структурной функции $D_{LL}(r)$ будет также иметь вид (3.69). Отметим, что такой характер поведения структурной функции был получен выше в §2, п.2.5 с использованием метода размерностей и подобия.

В заключение данного параграфа отметим, что хотя и полученные здесь закономерности справедливы для однородной изотропной турбулентности, диапазон их применимости существенно расширяется на все виды турбулентных течений с большим числом Рейнольдса, поскольку такой характер пульсаций (однородность и изотропность) соответствует инерционному интервалу любого турбулентного течения, а его протяженность тем больше, чем больше число Рейнольдса см. §2.

§ 4. Методы моделирования турбулентных течений

При анализе в § 2 уравнений Навье–Стокса (2.1) были отмечены некоторые их свойства, отражающие характер динамических процессов в несжимаемой жидкости. Однако уравнения Навье–Стокса, как и любая математическая модель, описывают реальную физическую систему в рамках принятых приближений или допущений. Поэтому, применяя уравнения (2.1), в том числе и в компьютерном моделировании, важно знать их ограничения или «дефекты» как для анализа и интерпретации полученных результатов, так и для физически корректной постановки задачи.

Для численного моделирования турбулентных течений обычно используется вытекающее из (2.1) уравнение Пуассона для давления:

$$\Delta \bar{p}(\vec{r}, t) = -\rho \cdot \nabla \cdot [\bar{v}(\vec{r}, t) \cdot \nabla] \cdot \bar{v}(\vec{r}, t). \quad (4.1)$$

Из этого уравнения видно, что давление подчиняется диагностическому, а не эволюционному уравнению (как, например, в случае сжимаемого течения с конечной скоростью звука). Здесь поле давления интегральным образом зависит от поля скорости. Поэтому любое локальное изменение поля скорости мгновенно сказывается на значениях давления во всем пространстве; изменение же давления сразу влияет на поле ускорения, определяющее значение скорости во все последующие моменты времени. В частности, характеристики течения на границе расчетной области зависят от поля скорости и давления внутри этой области. Это свойство течения является следствием принятого в модели (2.1) приближения. (Модель несжимаемой жидкости представляет собой идеализированную модель реальных сплошных сред, в которой возмущения могут распространяться с бесконечной скоростью. Поэтому уравнения (2.1) фактически включают в себя некоторые силы дальнего действия.) В практике моделирования эта проблема преодолевается за счет дополнительного предположения: в случае турбулентного течения, устанавливаемые на границах «втекания» и «вытекания» условия на расчеты влияют незначительно. При моделировании турбулентных течений были получены некоторые факты, свидетельствующие в пользу этого предположения (хотя доказательство его справедливости в общем случае отсутствует).

4.1. Прямое численное моделирование

Прямые методы численного моделирования используются для нахождения максимально полного решения задач турбулентных течений на основании исходных законов движения. Рассматривая уравнения Навье–Стокса (2.1) как основу теории турбулентности и используя некоторые подходящие начальные данные (например, данные, полученные с помо-

щью генератора случайных чисел), можно проследить динамику течения. Вычисленные поля характеристик течения, которые даже в случае простейшей геометрии и статистически стационарных начальных и граничных условий остаются трехмерными и нестационарными, позволяют затем определить любые интересующие нас средние величины.

Основным фактором, определяющим стоимость прямого численного моделирования, является количество требуемых вычислительных операций. Необходимость разрешения масштабов течения, на которых энергия турбулентности диссипирует в тепло под воздействием эффектов вязкости, требует применения расчетной сетки с шагом порядка размера колмогоровского микромасштаба. В § 2 было показано, что отношение максимальных турбулентных масштабов течения к минимальным составляет $Re_\ell^{3/4}$. Для моделирования турбулентности оценим количество узлов разностной сетки и шагов по времени, учитывая трехмерный нестационарный характер турбулентных движений:

$$N \sim Re_\ell^{9/4} T / \tau \sim Re_\ell^{9/4} \frac{L}{U} \frac{\eta}{U} \sim Re_\ell^3. \quad (4.2)$$

Оценим время расчета структуры турбулентности для течения с числом Рейнольдса $Re_\ell \sim 10^6$. Для типичного численного метода на каждом временном шаге требуется примерно 100 операций на один узел разностной сетки. Следовательно, полное число операций составит $\approx (10^6)^3 \cdot 10^2 \approx 10^{20}$.

Компьютеру с быстродействием 10^{10} операций в секунду (10 Gflops) для расчета потребуется 10^{10} секунд, что примерно составляет 300 лет!

Полученная выше оценка требуемых ресурсов для применения прямого численного моделирования при использовании конечно-разностного метода выглядит весьма удручающе. Однако на практике при моделировании конкретных течений могут применяться процедуры, значительно сокращающие затраты компьютерных ресурсов. Одна из таких процедур – использование псевдоспектрального метода. Например, для расчета однородной турбулентности можно использовать периодические граничные условия, а решение уравнений (2.1) искать в виде усеченного ряда Фурье. Развитие методов быстрого преобразования Фурье позволяет создать эффективные численные алгоритмы для моделирования такого течения. Псевдоспектральный метод, примененный в 1970-е годы Рождественским и Орзагом, положил начало использованию прямого численного моделирования уравнений Навье–Стокса. В общем случае спектральные методы основываются на том, что в качестве базисных в них могут применяться и другие ортогональные функции (полиномы Чебышева, Лежандра, Лагерра, Эрмита), что позволяет использовать эти методы и для других течений.

Однако, даже в этом случае, требуемые компьютерные ресурсы столь значительны, что до сих пор применение этих методов ограничивается течениями с малыми числами Рейнольдса ($Re \leq 300$). Практика применения методов прямого численного моделирования уравнений Навье–Стокса показала, что многие свойства турбулентных течений можно изучать при довольно малых числах Рейнольдса, в частности, такой подход применим к задачам о затухании турбулентности. Кроме того, важные свойства турбулентных течений, обусловленные крупномасштабным движением, остаются почти неизменными, если для мелкомасштабного движения используются довольно грубые сетки.

4.2. Метод моделирования с выделением крупных вихрей

Как отмечалось выше, моделирование мелкомасштабной турбулентности становится необходимо в том случае, если схема прямого численного моделирования не может разрешить все важные масштабы турбулентного течения. Иначе говоря, модель мелкомасштабной турбулентности позволяет учесть диссипацию кинетической энергии турбулентности, происходящую на масштабах, которые меньше шага разностной сетки, и обеспечивающую сток энергии. Метод, в котором детализируются (разрешаются) только крупные вихри, а влияние мелкомасштабной турбулентности учитывается с помощью параметрических моделей, называют методом моделирования с выделением крупных вихрей (LES-метод). Поскольку для параметризации мелкомасштабной турбулентности важно учесть только интегральные эффекты (процесс рассеивания энергии турбулентности), требования к подсеточному моделированию намного слабее по сравнению с требованиями к статистическим моделям, которые предназначены для описания всех масштабов турбулентного движения (статистические модели турбулентности будут рассмотрены далее).

Модели подсеточной турбулентности впервые были введены Смогоринским в 1963 г. Заметим, что в отличие от турбулентности в инерционном интервале спектра, турбулентность на диссипативных масштабах имеет сложную статистическую структуру, обусловленную сильной перемежаемостью. Поэтому стремление достичь достаточную точность параметризаций подсеточного моделирования привело к тому, что в настоящее время эти модели все более усложняются и в ряде работ для этой цели используется статистическая модель турбулентности второго порядка замыкания (см. ниже).

Разделение вихрей на крупные и мелкие осуществляется математической операцией фильтрации:

$$\bar{u}_i(\bar{r}, t) = \int_R G(\bar{r} - \bar{r}') \cdot \tilde{u}_i(\bar{r}', t) d\bar{r}', \quad (4.3)$$

где G – весовая функция (фильтр), включающая в себя такой параметр, как характерный масштаб длины (шаг разностной сетки Δ). Эта функция позволяет исключить мелкомасштабные, но сохранить крупномасштабные пульсации. Этим целям отвечает, например, фильтр Гаусса:

$$G(\bar{r}) = \left[\left(\frac{\gamma}{\pi} \right)^{1/2} \frac{I}{\Delta} \right]^3 \exp \left\{ -\frac{\gamma \bar{r}^2}{\Delta^2} \right\}. \quad (4.4)$$

Мгновенная скорость представляется в виде суммы двух компонент – компоненты, сохраняющей индивидуальность после осреднения, и компоненты подсеточного масштаба: $\tilde{u}_i = \bar{U}_i + u_i$ (черта означает осреднение по пространству с помощью фильтра (4.3)). Операция фильтрации (4.3) с весовой функцией (4.4), примененная к уравнениям Навье–Стокса (2.1), дает отфильтрованное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{U}_i \bar{U}_j}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_j}, \\ \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь $R_{ij} = \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} - \bar{U}_i \bar{U}_j$ – напряжения трения. Физический смысл этого параметра заключается в том, что появляется дополнительный сток энергии турбулентности от крупных вихрей в подсеточную турбулентность. Некоторые исследователи используют уравнения движения для крупных вихрей в несколько иной форме. Так, Леонард для определения R_{ij} , представленного выше в виде разности двух слагаемых, использовал соотношение $\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} = \overline{\bar{U}_i \bar{U}_j} + \overline{u_i \bar{U}_j} + \overline{\bar{U}_i u_j} + \overline{u_i u_j}$, позволяющее определить этот параметр следующим образом: $R'_{ij} = \overline{\bar{U}_i u_j} + \overline{u_i \bar{U}_j} + \overline{u_i u_j}$. Тогда отфильтрованное уравнение Навье–Стокса приобретает вид:

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\bar{U}_i \bar{U}_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial R'_{ij}}{\partial x_j}. \quad (4.5')$$

Решение уравнения (4.5'), содержащего выражение $\overline{\bar{U}_i \bar{U}_j}$, дает только отфильтрованные значения скорости, т. е. позволяет определить только

величины \bar{U}_i и \bar{U}_j . В более ранних работах величина $\overline{\bar{U}_i \bar{U}_j}$ находилась приближенно (осреднением произведения $\bar{U}_i \cdot \bar{U}_j$), но в настоящее время эта величина вычисляется точно – с помощью быстрого преобразования Фурье (если функция фильтра задана в явном аналитическом виде). Можно показать, что в общем случае $\overline{\bar{U}_i \bar{U}_j} \neq \bar{U}_i \bar{U}_j$. Уравнения (4.5) и (4.5') не замкнуты. Напряжения трения R_{ij} (R'_{ij}), возникающие в них за счет появления возмущений подсеточного масштаба, играют существенную роль в динамике крупных вихрей, поскольку они обуславливают перенос кинетической энергии от крупных вихрей к мелким. Поэтому удачная параметризация этих напряжений является основой успешного построения моделей динамики крупных вихрей. Ранее уже отмечалось, что напряжения трения допускают два различных представления. В первом изменении кинетической энергии полностью определяются напряжениями трения подсеточного масштаба. Во втором представлении часть потерь энергии определяется самими крупномасштабными вихрями. Некоторые исследователи полагают, что поскольку при использовании второго представления часть потерь энергии крупных вихрей описывается точно, оно имеет преимущество перед первым. Однако такое утверждение является спорным, так как в любом случае приходится параметризовывать напряжения трения, которые порождаются вихрями подсеточного масштаба и всегда остаются ответственными за большую часть потерь энергии крупных вихрей. Для параметризации указанного процесса можно воспользоваться приближенным выражением для R_{ij} :

$$R_{ij} = -\nu_t \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ij} R_{kk}, \quad (4.6)$$

где ν_t – коэффициент турбулентной вязкости подсеточной турбулентности. Тогда уравнение (4.5) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{U}_i \bar{U}_j &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{P} + (\nu + \nu_t) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right), \quad \hat{P} = \bar{P} + \frac{1}{3} \delta_{ij} R_{kk}, \\ \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Это уравнение включает эффективную вязкость ν_t , значение которой оценивается как $\nu_t \sim \hat{u} \Delta$ (\hat{u} – характерный масштаб скорости подсеточной турбулентности). Поскольку генерация мелких вихрей (с характерной скоростью \hat{u}) обусловлена механизмом растяжения вихревых трубок в поле

скорости деформаций более крупных вихрей, можно выписать оценку, учитывающую положительную определенность v_i :

$$v_i \sim \hat{u}\Delta \sim \Delta^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i}\right)^2}. \quad (4.8)$$

Коэффициент пропорциональности здесь определяется эмпирически, его типичное значение составляет $\approx 0,1$. Полученная модель (4.7), (4.8) представляет собой замкнутую систему уравнений и является одним из примеров применения рассматриваемого в данном параграфе подхода.

Несмотря на то, что в настоящем пособии методы решения уравнения движения для крупных вихрей подробно обсуждаться не будут, все же два замечания по этому поводу сделать следует. Во-первых, как уже говорилось ранее, значения давления связаны с полем скорости уравнением Пуассона. Поэтому в ходе решения уравнения (4.7) на каждом шаге можно точно рассчитать значение слагаемого, содержащего давление \hat{P} (уравнения для определения \hat{P} было получено в результате применения к уравнениям (4.7) операции дивергенции). Во-вторых, несмотря на то, что уравнения движения (4.5) кажутся похожими на уравнения Навье–Стокса, осредненные по ансамблю (см. ниже уравнения Рейнольдса (4.12)), на самом деле между ними существует большое различие. В осредненных по ансамблю уравнениях движения аналогом члена, характеризующего влияние подсеточных процессов, является дивергенция напряжений Рейнольдса, представляющая собой также некоторое среднее по ансамблю и поэтому плавно изменяющаяся в пространстве и во времени. В противоположность этому в уравнениях движения крупных вихрей слагаемое, описывающее подсеточные процессы (которое также записывается в виде дивергенции напряжений трения), представляет собой случайную величину, беспорядочно изменяющуюся в пространстве и во времени. Большинство используемых в теории турбулентности параметризаций относится к уравнениям, осредненным по ансамблю (см. п. 4.3). Выводы из теории и результаты обработки данных измерений также, в основном, относятся к величинам, осредненным по ансамблю. Однако в рассматриваемом случае нас интересует параметризация мгновенных беспорядочно флуктуирующих величин.

Несмотря на указанные трудности, у параметризации подсеточных процессов есть важное достоинство, облегчающее ее реализацию, – параметризуются только мелкомасштабные процессы. Имеются веские основания предполагать, что последние во всех турбулентных течениях подобны друг другу. Поэтому можно ожидать, что параметризация подсеточных

процессов будет иметь универсальный характер, и не будет зависеть от различий в структуре крупных вихрей.

В заключение п. 4.2 отметим, что при моделировании турбулентных течений LES-метод является более экономичным, чем метод прямого численного моделирования. Тем не менее, его применение для расчета реальных турбулентных течений остается достаточно трудоемким. К недостаткам LES-метода относятся необходимость использования полуэмпирических модельных представлений, а также трудности в описании пристенной области течений, обусловленные нарушением коммутативности операции фильтрации (3.3) и операции дифференцирования вблизи твердой поверхности.

4.3. Метод статистических моментов. Статистические моменты и кумулянты

Для полного статистического описания полей гидродинамических характеристик турбулентного потока требуется задать все многомерные совместные распределения вероятности для значений этих характеристик на всевозможных множествах точек пространства–времени. Однако определение таких многомерных распределений является весьма сложной задачей, кроме того, сами эти распределения часто оказываются малоудобными для приложений в силу своей громоздкости. Поэтому на практике чаще всего ограничиваются рассмотрением лишь некоторых более простых статистических параметров, описывающих те или иные частные свойства потока. Наиболее важными из таких параметров распределений вероятности являются моменты и некоторые их комбинации (в целях простоты изложения здесь будут рассматриваться центральные моменты одноточечных распределений $P(u_i)$):

$$\langle u_1^\alpha u_2^\beta u_3^\gamma \rangle = \int_R u_1^\alpha u_2^\beta u_3^\gamma P(\vec{u}) \overline{d\vec{u}} \text{ - моменты;}$$

$$\sigma_i = \langle u_i^2 \rangle^{1/2} \text{ - дисперсии;}$$

$$S_i = \langle u_i^3 \rangle / \sigma_i^3 \text{ - коэффициент асимметрии;}$$

$$\delta_i = \langle u_i^4 \rangle / \sigma_i^4 \text{ - коэффициенты эксцесса.}$$

Здесь u_i – вектор турбулентных пульсаций скорости ($i, j, k = 1, 2, 3$). Последние два коэффициента (зависящие от величины высших моментов) характеризуют отклонение ФПВ от нормальной (гауссовой) (рис. 8). Распределение ФПВ с ненулевой асимметрией ($S > 0$) соответствует течению, в котором интенсивные, но редкие потоки в положительном направлении чередуются с медленными, но более вероятными потоками в отрицательном направлении (при $S < 0$ – наоборот). Положительное значение эксцесса показывает, что распределение является «менее плоским», чем нормальное, – величина концентрируется в областях или очень больших, или очень малых значений. Течения с таким распределением пульсаций характеризуются чередованием длительных периодов относительного покоя (периодов, в течение которых пульсации малы) с периодами повышенной активности (с турбулентными пульсациями). Такую статистическую структуру течения называют «пятнистой»⁷. Важный физический смысл имеет коэффициент асимметрии производных пульсационной скорости по координате S_δ . Поскольку основной вклад в этот параметр вносят мелкомасштабные пульсации, его значение отражает статистическую структуру мелкомасштабной турбулентности. Для масштабов инерционного интервала спектра турбулентных пульсаций данный параметр однозначно определяет направление переноса энергии по спектру: отрицательное значение энергии соответствует тому, что пульсации

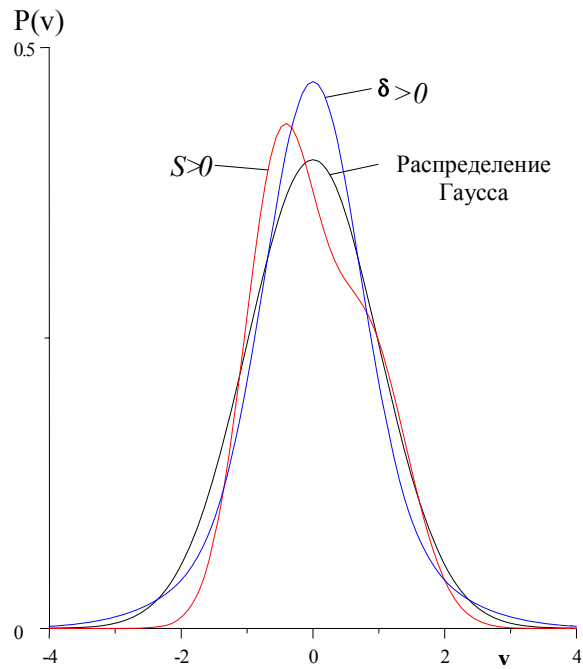


Рис. 8. Распределения ФПВ при значительных коэффициентах асимметрии и эксцесса в сравнении с равновесным (гауссовым) распределением

⁷ «Пятнистая» статистическая структура течений характерна для мелкомасштабной турбулентности (Монин, Яглом, 1967), а также для устойчиво стратифицированных турбулентных течений (см. ниже).

данного масштаба в среднем передают энергию пульсациям меньших масштабов и заимствуют энергию у пульсаций больших масштабов ⁸.

Вблизи нуля логарифм характеристической функции (фурье-образа ФПВ) может быть представлен в виде ряда Тейлора:

$$\ln \chi(\bar{q}) = \sum_{n,m,k=0}^r C^{n+m+k} \frac{(iq_1)^n}{n!} \frac{(iq_2)^m}{m!} \frac{(iq_3)^k}{k!} + o(\bar{q}^r), \quad (4.10)$$

$$\chi(\bar{q}) = \int_{\mathbb{R}} P(\bar{u}) e^{i\bar{q}\bar{u}} d\bar{u}.$$

Коэффициенты разложения (4.10), называемые кумулянтами (семиинвариантами), значительно удобнее использовать в качестве статистических характеристик распределений, чем моменты, в силу того, что кумулянты порядка выше второго описывают степень негауссовости (неравновесности) распределения пульсаций, а также в силу их инвариантных свойств. Первые четыре кумулянта имеют вид:

$$C_i^1 = \langle u_i \rangle,$$

$$C_{ij}^2 = \langle u_i u_j \rangle,$$

$$C_{ijk}^3 = \langle u_i u_j u_k \rangle,$$

$$C_{ijkl}^4 = \langle u_i u_j u_k u_l \rangle - \langle u_i u_j \rangle \langle u_k u_l \rangle - \langle u_i u_k \rangle \langle u_j u_l \rangle - \langle u_i u_l \rangle \langle u_j u_k \rangle.$$

Из уравнения (4.10) следует, что для описания турбулентного режима течения достаточно определить кумулянты указанного разложения. Однако в силу теоремы Марсинкевича (1939), разложение (4.10) может быть либо полиномом степени 2 (нормальное распределение) ⁹, либо бесконечным рядом. Представляется совершенно безнадежным определение полного (бесконечного) набора коэффициентов (4.10). Бесконечная цепочка уравнений переноса для кумулянтов (моментов) должна быть оборвана и

⁸ Отметим, что в областях сильной перемежаемости (например, на границе струи) такая однозначная связь знака асимметрии производной скорости и направления спектрального потока энергии не выполняется, поскольку в указанной области приближение однородной изотропной турбулентности не выполняется.

⁹ Нормальное распределение турбулентных пульсаций предполагает их изотропность и однородность. По-видимому, единственным течением, в котором с хорошей точностью выполняются указанные условия, является турбулентный поток за решеткой. В подавляющем большинстве прикладных задач внешние воздействия на турбулентный поток анизотропны (стратификация, твердая граница). В таких течениях эксперимент фиксирует значительные по величине коэффициенты асимметрии и эксцесса (характеристики, отражающие отклонение ФПВ от нормальной). Для описания статистической структуры анизотропной турбулентности приближение гауссовой ФПВ оказывается недостаточным.

замкнута с привлечением каких-либо моделей. Прежде чем перейти к рассмотрению таких моделей, заметим, что такое обрывание может привести к физически некорректным результатам (получению отрицательных значений положительно определенных величин: ФПВ, дисперсий, энергии, диссипации). Последнее обстоятельство является следствием того, что при задании конечного числа кумулянтов (моментов) распределение вероятности может и не существовать. Оно тесно связано с недопустимостью произвольного обрывания ряда Тейлора характеристической функции (этот вопрос связан с реализуемостью моделей турбулентности (см. ниже)).

4.4. Подход Рейнольдса. Уравнения для моментов

Представим исследуемые мгновенные величины (скорость и давление) в виде суммы средней и пульсационной составляющих, следуя процедуре, введенной Рейнольдсом в 1895 г.:

$$\tilde{u}_i = U_i + u_i, \quad \tilde{p} = P + p. \quad (4.11)$$

Здесь U_i и P – средние, а u_i и p – пульсационные составляющие скорости и давления. Символом тильда отмечены мгновенные значения соответствующих величин. В большинстве турбулентных течений, встречающихся на практике, основной массовой силой, действующей на жидкость и производящей работу, является сила тяжести. Поэтому вместо массовой силы \tilde{f}_i возьмем g_i и будем рассматривать несжимаемую жидкость (учитывая изменения плотности) только в слабом, которое описывает в уравнении (2.1) влияние внешних сил. Обозначив через ρ' изменения плотности жидкости (далее для случая термической стратификации будет показано, что эти изменения могут быть вычислены по формуле $\rho' = -\beta\rho\theta$, где θ – коэффициент пульсации температуры, β – коэффициент теплового расширения среды, который для идеального газа составляет $\beta = 1/\Theta$), подставим представление (4.11) в уравнение (2.1) и, выполнив процедуру осреднения, получим *уравнение Рейнольдса* (с уравнением неразрывности) для средней скорости:

$$\frac{\partial}{\partial t} U_i + U_j \frac{\partial}{\partial x_j} U_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_i u_j \rangle = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} P + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} U_i, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} U_i = 0.$$

Полученное уравнение включает в себя неизвестные слагаемые с корреляцией пульсаций скорости. Появление этих новых неизвестных является

следствием нелинейности уравнений гидродинамики. Для выяснения физического смысла дополнительных слагаемых в уравнениях (3.12) рассмотрим среднее значение плотности потока импульса:

$$\langle \rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \tilde{p} \delta_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij} \rangle = \rho U_i U_j + P \delta_{ij} - (\sigma_{ij} - \rho \langle u_i u_j \rangle). \quad (4.13)$$

Здесь $\tilde{\sigma}_{ij}$ – вязкий тензор напряжений, который для несжимаемой жидкости имеет вид:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.14)$$

Выражение (4.13) показывает, что по отношению к осредненному движению роль вязкого тензора напряжений играет тензор:

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} - \rho \langle u_i u_j \rangle. \quad (4.15)$$

Таким образом, в турбулентном течении, кроме обмена импульсом между жидкими частицами, обусловленного силами молекулярной вязкости (описываемого тензором вязких напряжений), также имеет место передача импульса, вызываемая перемешиванием турбулентными вихрями. Иначе говоря, влияние турбулентного перемешивания на осредненное движение оказывается подобным влиянию вязкости. Эти дополнительные напряжения $-\rho \langle u_i u_j \rangle$ называются напряжениями Рейнольдса.

Для замыкания системы (4.12) получим уравнение переноса для тензора напряжений Рейнольдса следующим образом. Вычитая уравнения (4.12) из уравнений (2.1), получим уравнение переноса для пульсационной составляющей скорости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} U_i + U_j \frac{\partial}{\partial x_j} U_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_i u_j \rangle &= g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} P + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} U_i, \\ \frac{\partial}{\partial x_i} U_i &= 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Далее воспользуемся процедурой, позволяющей получить уравнения для моментов скорости любого порядка. Умножив первое уравнение системы (4.16) на величину u_k :

$$u_k \frac{\partial}{\partial t} u_i = -u_k \frac{\partial}{\partial x_j} [U_j u_i + U_j u_i + u_j u_i - \langle u_i u_j \rangle] + u_k \frac{\rho'}{\rho} g_i - u_k \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} p + \nu u_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} u_i \quad (4.17)$$

и поменяв индексы i и k местами, получим уравнение:

$$u_i \frac{\partial}{\partial t} u_k = -u_i \frac{\partial}{\partial x_j} [U_k u_j + U_j u_k + u_k u_j - \langle u_k u_j \rangle] + u_i \frac{\rho'}{\rho} g_k - u_i \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} p + \nu u_i \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} u_k. \quad (4.18)$$

С учетом равенства $\frac{\partial}{\partial t} (u_i u_k) = u_i \frac{\partial}{\partial t} u_k + u_k \frac{\partial}{\partial t} u_i$ получим сумму уравнений (4.17) и (4.18):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u_i u_k + U_i \frac{\partial}{\partial x_i} u_i u_k = & -u_k u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - u_i u_j \frac{\partial U_k}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[u_i u_j u_k + \frac{1}{\rho} (p u_k \delta_{ij} + p u_i \delta_{jk}) - \frac{1}{\rho} (u_i \sigma_{jk} + u_k \sigma_{ij}) \right] \\ & - u_k \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_i u_j \rangle - u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_j u_k \rangle + u_k \frac{\rho'}{\rho} g_i + u_i \frac{\rho'}{\rho} g_k - \frac{1}{\rho} p \left[\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] - \frac{1}{\rho} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \sigma_{kj} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Используемая в (4.19) величина

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.20)$$

следует из выражения (4.14) после его осреднения, а соотношение

$$\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (4.21)$$

следует из уравнения неразрывности. Применив к (4.19) процедуру осреднения, получим уравнение переноса для напряжений Рейнольдса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle u_i u_k \rangle + U_i \frac{\partial}{\partial x_i} \langle u_i u_k \rangle = & \underbrace{\frac{D}{Dt} \langle u_i u_k \rangle}_{\frac{D}{Dt} \langle u_i u_k \rangle} = \\ = & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\underbrace{\langle u_i u_j u_k \rangle + \frac{1}{\rho} \left(\langle p u_k \rangle \delta_{ij} + \langle p u_i \rangle \delta_{jk} \right) - \frac{1}{\rho} \left(\langle u_i \sigma_{kj} \rangle + \langle u_k \sigma_{ij} \rangle \right) u_k}_{D_{ik}} \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \underbrace{\langle u_k u_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \langle u_i u_j \rangle \frac{\partial U_k}{\partial x_j}}_{P_{ik}} + \underbrace{\langle u_k \frac{\rho'}{\rho} g_i \rangle + \langle u_i \frac{\rho'}{\rho} g_k \rangle}_{G_{ik}} - \\
& - \frac{1}{\rho} \left\langle p \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \right\rangle - \frac{1}{\rho} \left\langle \sigma_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \sigma_{kj} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle. \quad (4.22)
\end{aligned}$$

Слагаемые в правой части данного уравнения описывают диффузию D_{ik} , генерацию турбулентности градиентом среднего течения P_{ik} , генерацию турбулентности плавучестью G_{ik} , обменный механизм Π_{ik} и вязкую диссипацию ε_{ik} . Уравнение для кинетической энергии турбулентности получается из (4.22) при $i=k$:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + U_i \frac{\partial E}{\partial x_i} = \underbrace{- \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\langle E' u_k \rangle + \frac{1}{\rho} (\langle p u_j \rangle - \langle u_i \sigma_{ij} \rangle) \right]}_D - \underbrace{\langle u_i u_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j}}_P + \underbrace{\langle u_i \frac{\rho'}{\rho} g_i \rangle}_G - \underbrace{\frac{1}{\rho} \left\langle \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle}_\varepsilon. \quad (4.23)$$

Скорость диссипации кинетической энергии турбулентности может быть записана в следующем виде:

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho} \left\langle \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{1}{\rho} \langle \sigma_{ij}^2 \rangle. \quad (4.24)$$

Заметим, что выражение (4.24) можно получить из (2.5), применив представление (4.11).

В уравнениях (4.22) и (4.23) слагаемые, описывающие диффузию, обменный механизм и вязкую диссипацию, являются неизвестными функциями¹⁰. Для этих величин также можно выписать уравнения переноса, но тогда число неизвестных функций увеличится. Методы замыкания уравнений (4.22) и (4.23) будут рассмотрены в пп. 4.5–4.13.

¹⁰ В случае стратифицированных течений неизвестными функциями также являются члены генерации плавучестью (о моделировании стратифицированных течений см. в § 5).

4.5. Обменный механизм

Из сравнения уравнений (4.22) и (4.23) видно, что в уравнение для кинетической энергии турбулентности (4.23) корреляция с пульсациями давления Π_{ik} не входит. Из этого можно сделать вывод, что она отвечает за описание механизма обмена энергией между компонентами тензора напряжений Рейнольдса. Учитывая уравнение Пуассона (4.1) и представление (4.11), получим уравнения:

$$\frac{1}{\rho} \Delta \cdot (P + p) = - \frac{\partial(U_j + u_j)}{\partial x_i} \frac{\partial(U_i + u_i)}{\partial x_j}, \quad (4.25)$$

$$\frac{1}{\rho} \Delta \cdot P = - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (4.26)$$

$$\frac{1}{\rho} \Delta \cdot p = -2 \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_i \partial x_j} \quad (4.27)$$

(рассматривается случай, когда внешние силы отсутствуют). Уравнение (4.26) (для среднего давления) получено в результате осреднения уравнения (4.25), а уравнение (4.27) – в результате вычитания из (4.25) уравнения (4.26). Записав решение уравнения Пуассона (4.27) в виде интеграла по объему и умножив его на величину $\partial u_\alpha / \partial x_\gamma$, получим выражение для корреляции Π_{ik} :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right) \right\rangle &= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left[\left\langle \left(\frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) \cdot \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right) \right\rangle \right] \frac{d\vec{r}}{|\vec{r}_o - \vec{r}|} + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left[\left\langle \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \cdot \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right) \right\rangle \right] \frac{d\vec{r}}{|\vec{r}_o - \vec{r}|} + S_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Здесь $S_{\alpha\beta}$ – поверхностный интеграл, отличный от нуля только тогда, когда берется по поверхности вблизи твердой стенки (этот интеграл будет рассмотрен ниже). Согласно выражению (4.28), в корреляцию Π_{ik} вносят вклад три отдельных слагаемых: первое описывает процессы, обусловленные только пульсациями скорости, второе – пульсациями скорости и тензором средних деформаций, третье учитывает воздействие стенки. Видно, что выражение (4.28) включает в себя двухточечные корреляции. Любые попытки вывода уравнений для двухточечных корреляций приводят к появлению новых неизвестных. Поэтому для замыкания уравнений (4.22)

используются модельные представления тензора Π_{ik} , описывающие основные механизмы его влияния на процесс эволюции напряжений Рейнольдса. Первое модельное представление для Π_{ik} , предложенное Ротта (Rotta, 1951 г.), имеет вид:

$$\Pi_{ij} = -c_1 \frac{\langle u_k u_k \rangle}{\tau} b_{ij}, \quad b_{ij} = \frac{\langle u_i u_j \rangle}{\langle u_\alpha u_\alpha \rangle} - \frac{1}{3} \delta_{ij}, \quad (4.29)$$

где b_{ij} – тензор анизотропии турбулентных пульсаций, $\tau = E/\varepsilon$ – характерный временной масштаб турбулентности, c_1 – численный коэффициент (его значение определяется эмпирически и составляет $\approx 1,5 \div 1,8$). Модельное выражение (4.29) обладает свойством тензорной инвариантности, имеет простую структуру и отражает физический механизм действия поля пульсаций давления. За последние 20 лет было предложено несколько уточнений модельного представления (4.29), учитывающих влияние поля средних деформаций, плавучести, твердой стенки (см., например, Launder, 1975). Все эти уточнения носят эмпирический характер и включают в себя дополнительные коэффициенты. Наиболее часто используемая параметризация имеет вид:

$$\Pi_{ij} = -\frac{c_1}{\tau} \left[\langle u_i u_j \rangle - \frac{2}{3} E \delta_{ij} \right] - c_2 \left[P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right] - c_3 \left[G_{ij} - \frac{2}{3} G \delta_{ij} \right], \quad (4.30)$$

где $c_2 \approx 0,6$ – эмпирический коэффициент.

4.6. Тензор скорости диссипации

Для тензора скорости диссипации ε_{ij} , описывающего в уравнении (4.22) процесс затухания турбулентности, могут быть приняты релаксационная аппроксимация:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\langle u_i u_j \rangle}{\tau} \quad (4.31)$$

или изотропное выражение:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \cdot \delta_{ij}, \quad (4.32)$$

где ε – скорость диссипации кинетической энергии турбулентности (см. уравнение (4.23)). Уравнение для ε также может быть получено из

уравнений Навье–Стокса. Для этого необходимо продифференцировать уравнения (2.1) по x_β и умножить полученное уравнение на $\partial u_i / \partial x_\beta$. Осреднив результат, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{x_j} = & -2\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \left(\left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k} \right\rangle \right) - 2\nu \left\langle u_k \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \right\rangle \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_i \partial x_k} \\ & - 2\nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} \right\rangle - 2\nu \left\langle \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_\alpha} \right)^2 \right\rangle - \frac{\partial \langle u_j \varepsilon' \rangle}{\partial x_j} - \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.33)$$

где $\varepsilon' = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. Полученное уравнение включает в себя неизвестные корреляции, а все слагаемые в его правой части требуют моделирования. Уравнение (4.33) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{x_j} + \frac{\partial \langle u_j \varepsilon' \rangle}{\partial x_j} = -\frac{\varepsilon}{\tau} \Psi, \quad (4.34)$$

где Ψ – неизвестная безразмерная функция, требующая моделирования и зависящая от напряжений Рейнольдса, градиентов средней скорости и числа Рейнольдса. Следуя Ламли, введем следующее упрощающее предположение: градиенты средней скорости не должны появляться в функции Ψ при отсутствии анизотропии, так как, по-видимому, невозможно изменить величину диссипации посредством изменения градиента средней скорости, если турбулентность является изотропной (предполагается, что такой механизм действует лишь при возникновении анизотропии и изменения градиента). Так как функция Ψ является инвариантным скаляром, она должна зависеть лишь от инвариантов ее тензорных аргументов. Существует большое количество инвариантов, составленных из градиентов средней скорости и компонент тензора анизотропии. Приведем лишь некоторые из них:

$$\Psi = \Psi \left(\text{Inv}_1, \text{Inv}_2, \frac{\langle u_\alpha u_\alpha \rangle}{\varepsilon} b_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, \frac{\langle u_\alpha u_\alpha \rangle}{\varepsilon} b_{ij}^2 \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, \dots, \text{Re} \right). \quad (4.35)$$

Здесь $\text{Inv}_1 := b_{ij} b_{ij} / 2$, $\text{Inv}_2 := b_{ij} b_{ik} b_{ki} / 3$ – инварианты, построенные с помощью тензора анизотропии. При упрощении выражения (4.35) обычно предполагается, что градиент средней скорости (представленный в безразмерной форме) настолько мал, что правую часть (4.35) можно разложить в ряд Тейлора и ограничиться только линейными членами:

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 \cdot \frac{\langle u_\alpha u_\alpha \rangle}{\varepsilon} b_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} . \quad (4.36)$$

Коэффициенты в правой части (4.36) зависят от инвариантов тензора анизотропии и определяются экспериментально. С учетом (4.36) уравнение (4.34) принимает вид:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = - \frac{\partial \langle u_j \varepsilon' \rangle}{\partial x_j} + c_{\varepsilon 1} \frac{P}{\tau} - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon}{\tau}, \quad (4.37)$$

где P – генерация турбулентности¹¹ (см. уравнение (4.23)), $c_{\varepsilon 1}$, $c_{\varepsilon 2}$ – переобозначенные коэффициенты модели, значения которых подобраны в результате сопоставления данных численного моделирования различных типов течений с экспериментальными данными ($c_{\varepsilon 1} \cong 1,44$, $c_{\varepsilon 2} \cong 1,92$). Для параметризации процессов турбулентной диффузии диссипации (описываемых первым слагаемым в правой части уравнения (4.37)) обычно используется модельное представление градиентного типа¹²:

$$\langle u_j \varepsilon' \rangle = -c_\varepsilon \tau \langle u_j u_p \rangle \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_p} \quad (4.38)$$

($c_\varepsilon \cong 0,15$ – эмпирический коэффициент) или его упрощенная версия с изотропным коэффициентом диффузии:

$$\langle u_j \varepsilon' \rangle = - \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_p}, \quad (4.39)$$

где $\nu_t = c_\mu \tau E$ – турбулентная вязкость жидкости (более подробно см. ниже п. 4.11), $c_\mu \approx 0,09$ и $\sigma_\varepsilon \approx 1,3$ – коэффициенты модели.

Заметим, что для замыкания модели не обязательно использовать уравнение для диссипации. С этой целью могут применяться уравнения либо для масштаба длины $L \sim E^{3/2}/\varepsilon$, либо для масштаба времени $\tau = \frac{E}{\varepsilon}$, либо для любой комбинации вида $E^n \varepsilon^m$ с различными значениями пока-

¹¹ В случае стратифицированных течений в качестве генерации турбулентности используется сумма $P + G$ генерации турбулентности средним сдвигом и плавучестью.

¹² Это модельное представление корреляции третьего порядка $\langle u_j \varepsilon' \rangle$ записано по аналогии с параметризацией диффузии в уравнении для кинетической энергии турбулентности, полученной в п. 4.11.

зателей степеней, поскольку энергия турбулентности известна из решения уравнения (4.23). Однако наиболее широкое применение получил подход, основанный на использовании уравнения для диссипации.

4.7. Турбулентная диффузия

Для замыкания уравнений (4.22) и (4.23) необходимо параметризовать диффузионные члены, включающее в себя тройные корреляции скорости, а также слагаемые, описывающие диффузию давления и диффузию под воздействием вязкости. Последняя в турбулентных течениях пренебрежимо мала по сравнению с другими диффузионными слагаемыми, поскольку вязкие эффекты проявляются в основном на масштабах диссипативного интервала турбулентных пульсаций (коэффициент диффузии в этом случае составляет $\eta \cdot u_\eta \sim \nu$), в то время как перенос под воздействием крупномасштабных турбулентных вихрей является более эффективным: $(u_i \cdot \ell)/(u_\eta \cdot \eta) \sim \text{Re}$. Поэтому в уравнении (4.22) последнее диффузионное слагаемое, включающее пульсации давления и описывающее процесс «изотропизации» диффузии импульса (корреляция давления с вектором скорости), можно не учитывать. Для параметризации этого процесса Ламли предложил использовать модельное представление:

$$\frac{1}{\rho} \langle p u_i \rangle \cong -\frac{2}{5} \langle E' u_i \rangle. \quad (4.40)$$

К настоящему времени выполнено лишь незначительное число расчетов с использованием представления (4.40), так как в случае отсутствия внешнего анизотропного воздействия на турбулентные пульсации диффузионное слагаемое совместно с корреляцией (4.28) описывает процесс стремления турбулентности к изотропному состоянию, который параметризуется модельным выражением (4.29) или (4.30). Однако если под влиянием внешних воздействий в турбулентности поддерживается анизотропия пульсаций (например, в пристеночных или стратифицированных течениях), то оказывается, что моделей (4.29) и (4.30) для корреляции (4.28) недостаточно¹³, поэтому применяются более сложные модельные выражения. Этому вопросу посвящено много работ, тем не менее, проблема моделирования двухточечной корреляции (4.28) в рамках односточечных моментов первого и второго порядка остается открытой. Анализируя диффузионные слагаемые в уравнениях переноса, ограничимся, как это сдела-

¹³ Как отмечалось выше, вблизи твердой стенки необходимо учитывать в выражении (4.28) вклад поверхностного интеграла $S_{\alpha\beta}$. В случае стратифицированных течений представление (4.29) также требует модификации (см. Launder, Hanjalic, 1972).

но во многих работах, рассмотрением только высших моментов (применительно к уравнению (4.22) – тройными корреляциями).

4.8. Стратегия замыкания высших моментов

Как уже отмечалось, используя операции осреднения, из уравнений Навье–Стокса можно получить уравнения переноса для моментов произвольного порядка. В силу нелинейности уравнений гидромеханики любое из полученных уравнений будет включать в себя неизвестные функции, для которых, конечно, также могут быть получены соответствующие уравнения переноса. Однако система будет оставаться незамкнутой – получение новых уравнений приведет к тому, что число неизвестных функций при этом будет расти быстрее числа уравнений. Таким образом, точная модель турбулентности включает в себя бесконечное число уравнений переноса. В настоящее время не существует каких-либо общих методов решения бесконечных систем уравнений в частных производных, поэтому нахождение точных решений системы уравнений для моментов всевозможных порядков пока представляется довольно безнадежным делом. Замкнуть рассматриваемую систему уравнений в строгом математическом смысле невозможно.

На практике активно используются модели турбулентности, полученные в результате использования методов замыкания первого и второго порядков (рядом замыкания модели турбулентности будем определять по порядку высшего момента, величина которого находится из дифференциального уравнения переноса модели). Во многих случаях такие модели дают всю необходимую информацию о статистической структуре исследуемого течения, и вряд ли целесообразно использовать модели более высокого порядка замыкания для описания течений, к которым применимы модели второго порядка. Однако в ряде случаев оказывается, что применения моделей второго порядка недостаточно. Предполагается, что такие задачи (которые не описываются моделями порядка n), могут быть решены с помощью моделей порядка $n + 1$, поскольку в них используются уравнения для моментов $n + 1$, а механизмы, ответственные за генерацию этих моментов, вычисляются точно. Это предположение подтверждается практикой.

Общий подход к стратегии замыкания может быть сформулирован в следующем виде (рис. 10): кумулянты порядка $1, \dots, n$ вычисляются из дифференциальных уравнений переноса, кумулянты порядка $n + 1$, описывающие процессы турбулентной диффузии в уравнениях для кумулянт порядка n , вычисляются из приближенных алгебраических выражений, полученных из соответствующих дифференциальных уравнений переноса в стационарном случае (см. ниже), а кумулянты порядка $n + 2$ полагаются равными нулю.

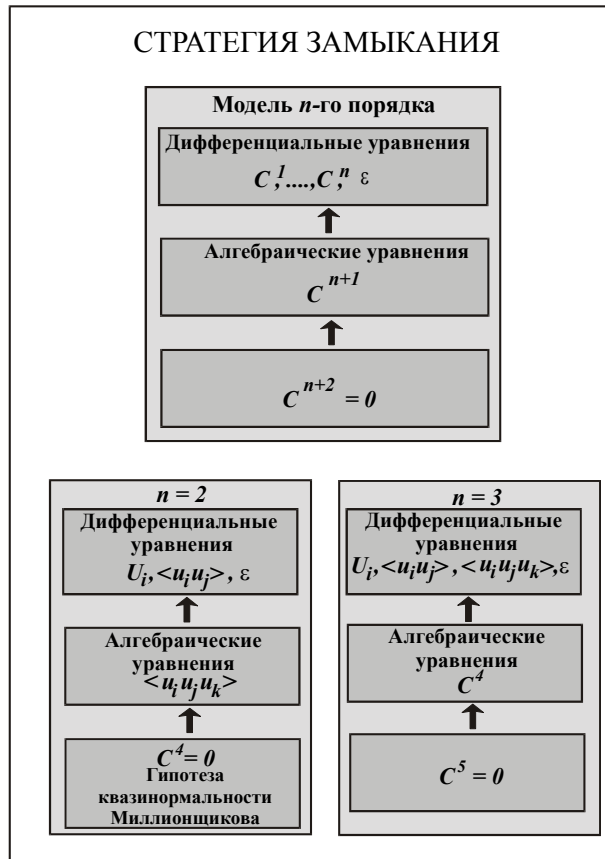


Рис. 10. Стратегия замыкания моделей турбулентности

Для используемых методов замыкания данный подход является достаточно общим. Принципиальным в нем является то, что в качестве искомых величин используются кумулянты, а не моменты. О преимуществе такого подхода свидетельствуют результаты анализа прогностической способности моделей турбулентности, основанных на обрывании цепочек уравнений для моментов и кумулянтов, а также вероятность того, что в силу разложения ФПВ в виде сходящегося ряда ¹⁴ (4.10) влияние кумулянтов $n + 2$

¹⁴ Очевидно, что ряд (4.10) сходится при условии $|q_i| < 1$, которое выполняется всегда в рамках используемого приближения о несильном отклонении ФПВ от

порядка на механизмы, определяющие поведение кумулянтов порядка n , пренебрежимо мало и может не учитываться.

Получение алгебраических моделей для вычисления кумулянтов порядка $n + 1$ основано на предположении более быстрой релаксации последних по сравнению с кумулянтами порядка n . В этом случае значение кумулянтов порядка $n + 1$ будет полностью зависеть от значений кумулянтов более низкого порядка. Дифференциальное уравнение переноса для кумулянта порядка $n + 1$ имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{C}^{n+1}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \mathbf{C}^{n+1}}{\partial x_j} = F(\vec{r}, t, \mathbf{C}^1, \dots, \mathbf{C}^{n+1}) - \frac{\mathbf{C}^{n+1}}{\tau_{n+1}}, \quad (4.41)$$

где F – функция, зависящая от координат, времени и кумулянтов порядка не выше $n + 1$ (кумулянты более высокого порядка полагаются равными нулю, см. рис. 10), τ_{n+1} – характерный временной масштаб релаксации кумулянта порядка $n + 1$ (полагается, что он пропорционален характерному временному масштабу турбулентности $\tau = E/\varepsilon$, где $E = 1/2 \langle u_i u_i \rangle$ – плотность (на ед. массы) кинетической энергии турбулентности, ε – ее спектральный поток (ее скорость диссипации), имеет вид $\tau_{n+1} = \tau / \tilde{C}_{n+1}$ (\tilde{C}_{n+1} – коэффициент пропорциональности). Представляя кумулянт \mathbf{C}^{n+1} в виде ряда Тейлора для момента времени $t + \tau_{n+1}$ в точке $\vec{r} + \vec{U}\tau_{n+1}$ в предположении малости характерного временного масштаба релаксации кумулянта \mathbf{C}^{n+1} ($t \gg \tau_{n+1}$) и удерживая члены первого порядка малости, уравнение (3.41) можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{n+1}(t + \tau_{n+1}, \vec{r} + \vec{U}\tau_{n+1}) &= \mathbf{C}^{n+1}(t, \vec{r}) + \frac{\partial \mathbf{C}^{n+1}}{\partial t} \Big|_t \tau_{n+1} + \frac{\partial \mathbf{C}^{n+1}}{\partial x_j} \Big|_{\vec{r}} U_j \tau_{n+1} = \\ &= \frac{\tau}{\tilde{C}_{n+1}} F(\vec{r}, t, \mathbf{C}^1, \dots, \mathbf{C}^{n+1}). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Заметим, что правая часть уравнения (4.42) относится к моменту времени t и координате \vec{r} , в то время как, кумулянт вычисляется в момент времени $t + \tau_{n+1}$ в координате $\vec{r} + \vec{U}\tau_{n+1}$. При вычислении кумулянта $\mathbf{C}^{n+1}(t, \vec{r})$ предполагается, что изменение его значения за время τ_{n+1} в ок-

равновесной. В этом случае основной вклад в разложение Фурье вносят длинноволновые гармоники с $\lambda \sim 1/|q_n| \gg l$.

рестности области размера $\bar{r} + \bar{U}\tau_{n+1}$ носит линейный характер и может быть учтено изменением значения релаксационного коэффициента:

$$C^{n+1}(t) = \frac{\tau}{C_{n+1}} F(\bar{r}, t, C^1, \dots, C^{n+1}). \quad (4.43)$$

Очевидно, что предположения, привлекаемые для получения алгебраической модели (4.43), ограничивают ее использование. Исходя из того что характерный масштаб времени релаксации турбулентных пульсаций находится в обратной зависимости от соответствующего ему волнового вектора, можно сделать вывод, что погрешность алгебраических параметризаций для кумулянтов (4.43) будет прямо пропорциональна вкладу длинноволновых пульсаций (крупномасштабных вихревых структур) в механизм турбулентного переноса. Этот вывод подтверждается практикой.

Использование вышеизложенного подхода для построения моделей порядка n позволяет получить при $n = 2$ (см. рис. 10) «стандартную» модель турбулентности второго порядка замыкания.

4.9. Алгебраические модели тройных корреляций

Получение модельных представлений для вычисления тройных корреляций осуществляется с помощью описанного выше подхода для случая $n = 2$ (см. рис. 10). Уравнения переноса для третьих моментов в стратифицированных течениях имеет вид:

$$\frac{D \langle u_i u_j u_k \rangle}{Dt} = -\frac{\partial C_{ijkl}}{\partial x_l} + \sum_{ijk} \left[-\langle u_i u_j u_l \rangle \frac{\partial U_k}{\partial x_l} - \langle u_i u_l \rangle \frac{\partial \langle u_j u_k \rangle}{\partial x_l} \right] - c_3 \frac{\langle u_i u_j u_k \rangle}{\tau}. \quad (4.44)$$

Здесь и далее функции, стоящие под знаком \sum , отличаются циклической перестановкой индексов i, j, k, l : $\sum_{ijk} F(u_i, u_j, u_k, u_l) = F(u_i, u_j, u_k, u_l) + F(u_i, u_j, u_l, u_k) + F(u_i, u_l, u_j, u_k) + F(u_l, u_j, u_i, u_k)$. Здесь, как и в уравнениях для вторых моментов, корреляции с пульсациями давления и диссипативные слагаемые параметризуются с помощью релаксационной модели. Из уравнения (4.44), учитывая уравнения (4.41)–(4.43), получаем алгебраические модели тройных корреляций:

$$\langle u_i u_j u_k \rangle = \frac{\tau}{c_3} \sum_{ijk} \left[-\langle u_i u_j u_l \rangle \frac{\partial U_k}{\partial x_l} - \langle u_i u_l \rangle \frac{\partial \langle u_j u_k \rangle}{\partial x_l} \right]. \quad (4.45)$$

Полная система алгебраических уравнений (4.45) применялась, например, в работе (Canuto et al., 1994) для описания структуры турбулентности в случае неустойчивой стратификации. Очевидно, что использование уравнения (4.45) в модели второго порядка (для параметризации диффузионных слагаемых) требует выполнения трудоемкой процедуры обращения системы двадцати алгебраических уравнений. В работе (Canuto et al., 1994) при обращении матрицы использовалась система символьных вычислений. Однако для моделирования многих течений алгебраические модели тройных корреляций можно значительно упростить. Так, в работе Ханьялича–Лондера (Hanjalic, Launder, 1972) показано, что вклад членов с градиентом средней скорости в общий баланс уравнений (4.45) мал и может не учитываться. Тогда модель (4.45) примет вид:

$$\langle u_i u_j u_k \rangle = -c_s \cdot \tau \left[\langle u_i u_l \rangle \frac{\partial \langle u_j u_k \rangle}{\partial x_l} + \langle u_j u_l \rangle \frac{\partial \langle u_i u_k \rangle}{\partial x_l} + \langle u_k u_l \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_l} \right]. \quad (4.46)$$

Видно, что градиентная модель Ханьялича–Лондера (4.46) обладает свойством тензорной инвариантности ($c_s \approx 0,11 \div 0,25$). Ее работоспособность проверена на разных типах турбулентных течений. Однако в силу громоздкости модели (4.46) в ряде работ применяется ее упрощенные версии: модель Дейли–Харлоу (Daly, Harlow, 1970):

$$\langle u_i u_j u_k \rangle = -\hat{c}_s \cdot \tau \langle u_i u_l \rangle \frac{\partial \langle u_j u_k \rangle}{\partial x_l}, \quad (4.47)$$

($\hat{c}_s \gg 0,25$) и модель диффузии энергии в уравнении (4.23) с турбулентной вязкостью:

$$\langle E' u_j \rangle = -c_\mu \cdot \tau E \frac{\partial E}{\partial x_j} = -v_t \frac{\partial E}{\partial x_j}. \quad (4.48)$$

В заключение данного параграфа заметим, что модель (4.22) может быть дополнена дифференциальными уравнениями переноса для тройных корреляций (4.44), в которой процедура замыкания выполняется при использовании аналогичного подхода при $n = 3$ (модели турбулентности третьего порядка будут рассмотрены ниже). Полученная таким образом модель третьего порядка замыкания будет, конечно, более сложной. Ее применение оправдано только в том случае, когда оказывается, что применение модели второго порядка недостаточно.

4.10. Модель турбулентности напряжений Рейнольдса

Полученные выше уравнения для тензора напряжений Рейнольдса (4.22) с модельными выражениями для тензора диссипации (4.32), корреляций с пульсациями давления (4.31) и тройных корреляций (4.46) представляют собой наиболее полную версию модели второго порядка.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle u_i u_k \rangle + U_i \frac{\partial}{\partial x_i} \langle u_i u_k \rangle = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left[c_s \tau \left(\langle u_i u_l \rangle \frac{\partial \langle u_j u_k \rangle}{\partial x_l} + \langle u_j u_l \rangle \frac{\partial \langle u_i u_k \rangle}{\partial x_l} - \langle u_k u_l \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_l} \right) \right] \\ & - \langle u_k u_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \langle u_i u_j \rangle \frac{\partial U_k}{\partial x_j} - \frac{c_1}{\tau} \left[\langle u_i u_k \rangle - \frac{2}{3} E \delta_{ik} \right] - c_2 \left[P_{ik} - \frac{2}{3} P \delta_{ik} \right] - \frac{2}{3} \delta_{ik} \varepsilon. \end{aligned} \quad (4.49)$$

В уравнениях (4.22) могут использоваться и другие модельные представления, например (4.32), (4.47). Модель турбулентности второго порядка (4.37), (4.49), включающая в себя семь дифференциальных уравнений переноса, представляется достаточно сложной для численного моделирования турбулентных течений в инженерной практике.

4.11. К-ε-модель турбулентности

Наиболее широкое применение в приложениях получила так называемая К-ε-модель турбулентности, включающая только два дифференциальных уравнения переноса (для энергии и скорости ее диссипации), а также уравнения для кинетической энергии турбулентности (4.23) и скорости ее диссипации (4.36) совместно с модельными выражениями (4.32), (4.39), и (4.48):

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + U_i \frac{\partial E}{\partial x_i} = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left[c_\mu \frac{E^2}{\varepsilon} \frac{\partial E}{\partial x_j} \right] - \langle u_i u_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \varepsilon, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{c_\mu}{\sigma_\varepsilon} \frac{E^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] - c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{E} \langle u_i u_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{E}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Для замыкания системы (4.50) и уравнений для средней скорости (4.12) привлекаются алгебраические выражения для компонент тензора напряжений Рейнольдса, полученные путем применения процедуры, описанной в п. 4.8, к соответствующим уравнениям переноса. Уравнения переноса для тензора напряжений Рейнольдса (4.22) после применения (4.29) и (4.31) имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial t} + U_k \frac{\langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k} = - \frac{\partial \langle u_i u_j u_k \rangle}{\partial x_k} - \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \\ - \langle u_j u_k \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{c_1}{\tau} \left[\langle u_i u_j \rangle - \frac{2}{3} E \delta_{ij} \right] - \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Полагая кумулянт третьего порядка (третий момент) равным нулю и переписывая (4.51) в виде (4.43), получим:

$$\langle u_i u_j \rangle \approx \frac{2}{3} E \delta_{ij} + \frac{\tau}{c_1} \left[P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right]. \quad (4.52)$$

Применив аналогичную процедуру к уравнению для энергии, получим $\varepsilon \approx P$. Тогда (4.52) примет вид:

$$\langle u_i u_j \rangle \approx \frac{2}{3} E \delta_{ij} + \frac{\tau}{c_1} \left[P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right]. \quad (4.53)$$

Модель (4.53) представляет собой систему неявных алгебраических уравнений для напряжений Рейнольдса. После применения приближения однородной изотропной турбулентности $\langle u_\alpha u_\beta \rangle \sim \frac{2}{3} E \delta_{\alpha\beta}$ в P_{ij} - и P -модель (4.53) принимает вид:

$$\langle u_i u_j \rangle \approx \frac{2}{3} E \delta_{ij} - \nu_t \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right], \quad (4.54)$$

где $\nu_t = c_\mu \tau E$ – турбулентная вязкость ($c_\mu \approx 0,09$). Таким образом, используя, например, параметризацию (4.54) в (4.50), получим замкнутую $K - \varepsilon$ -модель турбулентности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + U_i \frac{\partial E}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[c_\mu \frac{E^2}{\varepsilon} \frac{\partial E}{\partial x_j} \right] - c_\mu \frac{E^2}{\varepsilon} \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \varepsilon, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{c_\mu}{\sigma_\varepsilon} \frac{E^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] - c_{\varepsilon 1} c_\mu E \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{E} \end{aligned} \quad (4.55)$$

($c_\mu = 0,09$; $\sigma_\varepsilon = 1,3$; $c_{\varepsilon 1} = 1,44$; $c_{\varepsilon 2} = 1,92$). Заметим, что в модели (4.50) могут применяться и другие параметризации (например, вместо (4.39) и (4.48) можно использовать (4.38) и (4.47)), которые в ряде случаев дают более качественный результат. Однако в силу своей простоты модель турбулентности (4.55) совместно с уравнениями для средней скорости (4.12) и

моделью для тензора напряжений Рейнольдса (4.54) получила наиболее широкое практическое применение в инженерных задачах при моделировании турбулентных течений.

4.12. К–L-модель турбулентности

Для решения уравнений Рейнольдса (4.12) необходимо определить тензор $\langle u_i u_j \rangle$. Рассмотренная выше К–ε-модель позволяет замкнуть систему (4.12) путем решения двух дополнительных уравнений переноса. Как уже отмечалось, для замыкания моделей турбулентности вместо скорости диссипации ε может быть использован, например, масштаб L. Этот подход оказывается особенно удобным в тех случаях, когда распределение L известно заранее, например из эксперимента. В этом случае можно ограничиться одним уравнением переноса для кинетической энергии турбулентности системы (4.55) и параметризацией (4.54), а скорость диссипации определить как:

$$\varepsilon = \tilde{c}_d \frac{E^{3/2}}{L}. \quad (4.56)$$

Турбулентная вязкость в этом случае определяется формулой Колмогорова–Прандтля:

$$\nu_t = \hat{c}_\mu L \sqrt{E}. \quad (4.57)$$

Применение уравнения (4.56) вместо уравнения для ε в выражении (4.55), конечно, ограничивает прогностическую способность модели турбулентности, поскольку в этом случае скорость диссипации ε фактически заранее задается в виде распределения масштаба L. Тем не менее, в ряде случаев такой подход оказывается вполне достаточным. Так, например, в слоях со сдвигом масштаб L можно определить с хорошей точностью при помощи простых эмпирических соотношений (например, для пограничного слоя атмосферы: $L = \kappa z / (1 + \kappa z / L_0)$ ($L_0 \approx 40$ м, $\kappa \approx 0,41$ – постоянная Кармана)); в свободном сдвиговом слое масштаб L равен константе, пропорциональной толщине слоя. Кроме этого, масштаб L можно вычислить с помощью модифицированной формулы Кармана:

$$L \approx \kappa \left| \frac{\partial U}{\partial y} / \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right|. \quad (4.58)$$

Однако получить распределения масштабов турбулентности в случае течения более сложного характера, чем сдвиговые слои, не удастся из-за недостатка опытных данных.

4.13. Модель Прандтля

Модель для описания распределения турбулентной вязкости впервые была предложена в 1925 г. Прандтлем. Эта модель известна как гипотеза о пути смещения. Рассматривая осредненные течения с единственным ненулевым градиентом скорости $\partial U/\partial y$, Прандтль постулировал, что характерный масштаб пульсаций скорости \hat{u} равен градиенту скорости осредненного движения, умноженному на характерный масштаб длины ℓ_m , который он назвал *путем смещения*. Этот постулат позволяет определить величину энергии турбулентности по формуле $E \sim \hat{u}^2 \sim \left(\ell_m \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2$ и приводит к следующему выражению для определения коэффициента турбулентной вязкости ($L \sim \ell_m$):

$$v_t = \ell_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|. \quad (4.59)$$

Как и в K - L -модели, величина ℓ_m определяется эмпирически. Модель (4.59) представляет собой более простую параметризацию турбулентности в уравнении для средней скорости, чем подход, основанный на использовании K - L -модели. Модель (4.59) не включает в себя дифференциальные

Метод замыкания	Используемая модель	Наличие уравнения переноса	Определение турбулентной вязкости	Применение
Первого порядка	Модель с постоянным коэффициентом турбулентной вязкости	—	$v_t = \text{const}$	Допустима только тогда, когда члены турбулентного переноса в уравнении сохранения количества движения не играют определяющей роли; иногда применяется для обеспечения устойчивости численных расчетов.
	Модель пути смещения Прандтля	—	$v_t = \ell_m^2 \left \frac{\partial U}{\partial y} \right $	Неприменима в тех случаях, когда существенную роль играют конвективный и диффузионный переносы турбулентности или предыстория процесса. Требуется задание распределения пути смещения ℓ_m .

	$K-L$ - модель	для энергии	$v_t = \hat{c}_\mu L \sqrt{E}$	Позволяет учесть конвективный и диффузионный перенос и предысторию процесса. Требует задания распределения характерных линейных масштабов L . Применение ограничено относительно простыми сдвиговыми слоями.
Второго порядка	$K-\varepsilon$ - модель	для энергии и диссипации	$v_t = c_\mu \frac{E^2}{\varepsilon}$	Является наиболее проверенной и широко применяющейся моделью. Неприменима для описания течений, характеризующихся сильной анизотропией турбулентных пульсаций; дополнительным недостатком является изотропность коэффициентов турбулентной диффузии.
	Полная модель второго порядка замыкания	для тензора Рейнольдсовых напряжений	—	Неприменима для описания нелокальных свойств процесса переноса крупномасштабными вихревыми структурами.

уравнения для турбулентных величин – вся информация о структуре турбулентности задается эмпирической формулой для ℓ_m (либо для v_t). Модели турбулентности, основанные на таком подходе, называются *моделями турбулентности первого порядка замыкания*. В литературе можно найти большое количество вариантов задания величины v_t . Так, например, в монографии (Wippermann, 1973) таких вариантов приводится несколько десятков. Обилие моделей свидетельствует, с одной стороны, о сложности представления v_t в аналитическом виде, а с другой – о скудности данных наблюдений, необходимых для получения профиля v_t чисто эмпирическим путем. Следующее упрощение параметризации турбулентности – задание величины v_t в виде постоянного коэффициента. Такой подход используется при расчетах течений больших водных или воздушных масс (например, в метеорологии). Столь грубое описание распределения v_t допустимо только тогда, когда члены турбулентного переноса в уравнении сохранения количества движения не играют определяющей роли; иногда коэффициент турбулентной вязкости вводится для обеспечения устойчивости численных расчетов.

Заметим, что указанные модели появились в теории турбулентности и применялись в вычислениях в обратном хронологическом порядке. Принятый здесь стиль изложения позволяет представить их в виде иерархической последовательности приближений модели турбулентности второго порядка замыкания, отличающихся сложностью и полнотой описания (см. табл.).

Модели турбулентности, представленные в таблице, условно разбиты на пять основных групп. Известные многочисленные их модификации здесь не приводятся. В частности, широкое применение получила так называемая $K - \epsilon - \langle w^2 \rangle$ -модель, включающая в себя дифференциальные уравнения переноса для энергии, диссипации и вертикальной составляющей энергии турбулентности $\langle w^2 \rangle$. Такая модификация $K - \epsilon$ -модели позволяет улучшить ее прогностическую способность в случае, когда турбулентный перенос осуществляется, в основном, в вертикальном направлении.

4.14. Условия реализуемости

Шуман (1977), вероятно, первым обратил внимание на то, что при использовании полуэмпирических моделей необходимо учитывать специальные неравенства, делающие рассчитанные поля характеристик турбулентности «реализуемыми», т. е. физически возможными (например, дисперсии, диссипация и другие, положительно определенные величины, не должны принимать отрицательные значения, коэффициенты корреляции не должны превышать единицу и т. д.). Он показал, что обычно используемые параметризации (например, для корреляций с пульсациями давления) этого не гарантируют. Шуман ввел некоторые простые критерии реализуемости и разработал схему вычислений, обеспечивающую на каждом расчетном шаге выполнение этих критериев. Наиболее серьезные и глубокие исследования в этой области были выполнены Ламли, показавшим, однако, что реализуемые формы модельных представлений крайне сложны и не допускают простой интерпретации. Это модель реализуема, если она гарантирует, что положительно определенные величины будут оставаться неотрицательными всегда. Если A – величина, которая всегда должна оставаться неотрицательной, то необходимо обеспечить, чтобы при обращении A в нуль ее производная по времени также была равна нулю. Это условие является необходимым, так как в противном случае величина A стала бы отрицательной в следующий момент времени (рис. 11), но не является достаточным. В принципе, следует также потребовать, чтобы и вторая производная A была положительной, исключив тем самым возможность появления точки перегиба при пересечении A оси $A = 0$. Тем не менее, на практике сформу-

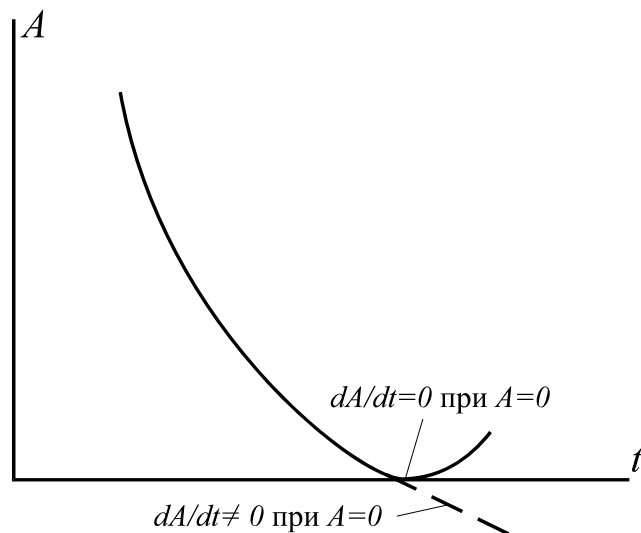


Рис. 11. Иллюстрация условия реализуемости

лированное выше условие оказывается необходимым и достаточным для того, чтобы исключилась возможность возникновения существенно нефизических явлений.

В общем случае под A подразумеваются не только положительно определенные характеристики турбулентности (дисперсии, диссипация и т. д.), но и величины:

$$\langle (u_i^n)^2 \rangle \langle (u_j^m)^2 \rangle - \langle u_i^n u_j^m \rangle^2 \quad (4.60)$$

(n и m – натуральные числа). Положительность величины (4.60) следует из условия выполнения неравенств Шварца (в частности, из его положительности следует условие для коэффициента корреляции, который не должен превышать единицу). Как будет показано ниже, условие положительности (4.60), примененное для высших моментов скорости, позволяет, в частности, получить соотношения для коэффициентов модельных представлений.

4.15. Модели турбулентности третьего порядка замыкания

В литературе имеется значительное количество работ, связанных с использованием моделей турбулентности третьего порядка. Однако, как правило, в этих моделях для параметризации диффузионных процессов в

уравнениях для тройных корреляций (4.44) привлекается гипотеза квазинормальности Миллиншикова, т. е. при $n = 3$ полагаются равными нулю все кумулянты, начиная с четвертого, а не с пятого (как предложено в приведенном выше подходе). Как следствие, уравнения для третьих моментов оказываются первого порядка без необходимого механизма демпфирования тройных корреляций. Вместо этого Андрэ (Andre et al., 1978) предложил в процессе численной реализации использовать процедуру искусственного урезания величины третьих моментов в соответствии с обобщенными неравенствами Шварца. В ряде других работ уравнения для тройных корреляций дополняются диффузионными слагаемыми, которые обеспечивают демпфирование величины третьих моментов. Очевидно, что обе указанные процедуры физически некорректны. Предложенный выше подход замыкания, согласно которому модель третьего порядка должна дополняться алгебраическими выражениями для кумулянтов четвертого порядка, а кумулянты пятого порядка полагаются равными нулю, позволяет преодолеть эту трудность.

4.16. Уравнения для кумулянтов четвертого порядка

Уравнения для моментов скорости второго и четвертого порядка, полученные из уравнения (4.19), имеют вид:

$$\frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial t} + U_k \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k} = - \frac{\partial \langle u_i u_j u_k \rangle}{\partial x_k} - \sum_{ij} \left\{ \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \left\langle u_i \frac{\partial p}{\partial x_j} \right\rangle - \nu \left\langle u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} \right\rangle \right\}, \quad (4.61)$$

$$\frac{\partial \langle u_i u_j u_k u_l \rangle}{\partial t} + U_m \frac{\partial \langle u_i u_j u_k u_l \rangle}{\partial x_m} = - \frac{\partial \langle u_i u_j u_k u_l u_m \rangle}{\partial x_m} - \sum_{ijkl} \left\{ \langle u_i u_j u_k u_m \rangle \frac{\partial U_l}{\partial x_k} + \langle u_i u_j u_k \rangle \frac{\partial \langle u_l u_m \rangle}{\partial x_m} + \frac{1}{\rho} \left\langle u_i u_j u_k \frac{\partial p}{\partial x_l} \right\rangle - \nu \left\langle u_i u_j u_k \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_m \partial x_m} \right\rangle \right\}. \quad (4.62)$$

Для выражения моментов пятого порядка предполагается, что в уравнении (4.62) кумулянты пятого порядка равны нулю:

$$\begin{aligned} C_{ijklm} = & \langle u_i u_j u_k u_l u_m \rangle - \langle u_i u_j \rangle \langle u_k u_l u_m \rangle - \langle u_i u_k \rangle \langle u_j u_l u_m \rangle - \langle u_i u_l \rangle \langle u_k u_j u_m \rangle - \\ & - \langle u_i u_m \rangle \langle u_k u_l u_j \rangle - \langle u_j u_k \rangle \langle u_i u_l u_m \rangle - \langle u_j u_l \rangle \langle u_i u_k u_m \rangle - \\ & - \langle u_j u_m \rangle \langle u_i u_k u_l \rangle - \langle u_k u_l \rangle \langle u_i u_j u_m \rangle - \langle u_k u_m \rangle \langle u_i u_j u_l \rangle - \\ & - \langle u_l u_m \rangle \langle u_i u_j u_k \rangle = 0. \end{aligned} \quad (4.63)$$

С учетом выражений (4.61)–(4.63) уравнение для кумулянтов четвертого порядка (C_{ijkl}) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{ijkl}}{\partial t} = & \sum_{ijkl} \left[-C_{ijkm} \frac{\partial U_l}{\partial x_m} - \frac{1}{\rho} \left\{ \left\langle u_i u_j u_k \frac{\partial p}{\partial x_l} \right\rangle - \langle u_i u_j \rangle \left\langle u_k \frac{\partial p}{\partial x_l} \right\rangle - \langle u_i u_k \rangle \left\langle u_j \frac{\partial p}{\partial x_l} \right\rangle - \langle u_i u_l \rangle \left\langle u_j \frac{\partial p}{\partial x_k} \right\rangle \right\} \right. \\ & + \nu \left\{ \left\langle u_i u_j u_k \frac{\partial u_l}{\partial x_m \partial x_m} \right\rangle - \langle u_i u_j \rangle \left\langle u_k \frac{\partial u_l}{\partial x_m \partial x_m} \right\rangle - \langle u_i u_k \rangle \left\langle u_j \frac{\partial u_l}{\partial x_m \partial x_m} \right\rangle - \langle u_i u_l \rangle \left\langle u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_m \partial x_m} \right\rangle \right\} \\ & - \langle u_i u_j u_m \rangle \frac{\partial \langle u_k u_l \rangle}{\partial x_m} - \langle u_i u_m \rangle \frac{\partial \langle u_j u_k u_l \rangle}{\partial x_m} \Big] \\ & - \langle u_i u_k u_m \rangle \frac{\partial \langle u_j u_l \rangle}{\partial x_m} - \langle u_j u_l u_m \rangle \frac{\partial \langle u_i u_k \rangle}{\partial x_m}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Это уравнение, в котором слагаемые в фигурных скобках стремятся к нулю при приближении турбулентности к равновесному состоянию (гаусовой турбулентности с нулевыми кумулянтами порядка выше второго), включает в себя неизвестные кумулянты (второе и третье слагаемые в правой части уравнения). Для параметризации используемых предположение о релаксационном характере стремления турбулентности к равновесному состоянию. Тогда сумма этих слагаемых может быть представлена в релаксационном виде C_{ijkl} / τ_4 ($\tau_4 = \tau / \tilde{C}_4$, где \tilde{C}_4 – коэффициент пропорциональности между характерным временным масштабом турбулентности и характерным временем релаксации кумулянтов четвертого порядка), а уравнение (4.64) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{ijkl}}{\partial t} = & \sum_{ijkl} \left[-C_{ijkm} \frac{\partial U_l}{\partial x_m} - \langle u_i u_j u_m \rangle \frac{\partial \langle u_k u_l \rangle}{\partial x_m} - \langle u_i u_m \rangle \frac{\partial \langle u_j u_k u_l \rangle}{\partial x_m} \right] - \\ & - \langle u_i u_k u_m \rangle \frac{\partial \langle u_j u_l \rangle}{\partial x_m} - \langle u_j u_l u_m \rangle \frac{\partial \langle u_i u_k \rangle}{\partial x_m} - \tilde{C}_4 \frac{C_{ijkl}}{\tau}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Из этого уравнения, используя (4.41)–(4.43), получаем алгебраическую модель для кумулянта:

$$\begin{aligned} C_{ijkl} = & -\frac{\tau}{C_4} \left\{ \sum_{ijkl} \left[C_{ijkm} \frac{\partial U_l}{\partial x_m} + \langle u_i u_j u_m \rangle \frac{\partial \langle u_k u_l \rangle}{\partial x_m} + \langle u_i u_m \rangle \frac{\partial \langle u_j u_k u_l \rangle}{\partial x_m} \right] + \right. \\ & \left. + \langle u_i u_k u_m \rangle \frac{\partial \langle u_j u_l \rangle}{\partial x_m} + \langle u_j u_l u_m \rangle \frac{\partial \langle u_i u_k \rangle}{\partial x_m} \right\}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Использование данной модели при вычисления эволюции моментов третьего порядка из дифференциальных уравнения переноса (4.44) подразумевает более быструю релаксацию последнего по сравнению с третьими моментами. Это условие накладывает на значение коэффициента C_4 сле-

дующее ограничение: $C_4 > C_3$, где C_3 – коэффициент пропорциональности между характерным временным масштабом турбулентности и характерным временем релаксации тройных корреляций (коэффициент модели корреляции с пульсациями давления в уравнениях для третьих моментов). Для определения коэффициента C_4 рассмотрим неравенство Шварца для тройной корреляции $\langle u_i^3 \rangle$:

$$\langle u_i^2 \rangle \langle u_i^4 \rangle - \langle u_i^3 \rangle^2 \geq 0. \quad (4.67)$$

Из условия выполнения неравенства (4.67) определяется верхняя граница численного значения коэффициента C_4 . Для этого выписывается более сильное неравенство:

$$C_{iii} \geq \frac{\langle u_i^3 \rangle^2}{\langle u_i^2 \rangle}. \quad (4.68)$$

Затем рассматривается процесс релаксационного затухания однородной турбулентности по законам:

$$\begin{cases} \langle w^2 \rangle = \langle w^2 \rangle_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\ \langle w^3 \rangle = \langle w^3 \rangle_0 \exp\left(-C_3 \frac{t}{\tau}\right) \\ C_{iii} = C_{iii0} \exp\left(-C_4 \frac{t}{\tau}\right) \end{cases} \quad (4.69)$$

Из неравенства (4.68) с учетом закона (4.69) следует условие для верхней границы значения коэффициента C_4 : $C_4 \leq 2C_3 - 1$. Для корректного использования выражения для кумулянта C_{ijkl} (4.66) полагается, что в уравнении переноса для тройных корреляций численное значение коэффициента C_4 ($C_3 < C_4 < 2C_3 - 1$) равно его верхней границе:

$$C_4 = 2C_3 - 1. \quad (4.70)$$

Модель (4.66) при условии (4.70) позволяет замкнуть уравнения переноса для тройных корреляций (4.44), которые совместно с уравнениями для тензора напряжений Рейнольдса (4.49) и для средней скорости (4.12) представляют собой полную модель турбулентности третьего порядка замыкания.

Итак, в данном параграфе были рассмотрены основные методы расчета турбулентных течений. Система уравнений Навье–Стокса, описывающих во времени все детали эволюции поля скорости, в практических задачах не

может быть решена с помощью современных компьютеров. Решение уравнений крупномасштабного движения только в рамках надсеточной турбулентности для большинства задач слишком громоздко. Кроме того, не ясно, приемлем ли такой подход для любых граничных условий. В настоящее время существует единственный экономически оправданный выход: решать уравнения осредненного движения, которыми определяется распределение осредненных величин. Следует добавить, что обычно только осредненные величины и имеют практический смысл. Выше были описаны модели турбулентности, предназначенные для вычисления напряжений Рейнольдса в уравнениях для средней скорости. Возникает вопрос: какой должна быть сложность модели турбулентности для того, чтобы получить результаты с достаточной для практических целей точностью? В идеальном случае модель турбулентности должна быть настолько общей, чтобы для всех практически важных задач ее можно было применять без изменений. Конечно, сложные модели, построенные по схемам замыкания третьего порядка, к упомянутой выше идеальной модели ближе, чем более простые, поскольку с их помощью можно учитывать большое количество протекающих одновременно физических процессов. Однако они слишком громоздки и пока недостаточно оттестированы. Их применение оправдано только в том случае, когда более простые модели не позволяют получить требуемую точность. Поэтому ответ на поставленный выше вопрос, конечно, зависит от условий конкретной задачи, т. е. от рассматриваемых физических явлений. Некоторые задачи могут быть удовлетворительно решены при помощи простой гипотезы Прандтля о пути смешения, которая не требует никаких дополнительных уравнений в частных производных. Другие задачи могут быть решены только с привлечением довольно сложных схем замыкания второго порядка, использующих дифференциальные уравнения переноса для напряжений Рейнольдса и потоков (тройных корреляций). Наиболее содержательные исследования методов замыканий были выполнены Ламли и его сотрудниками. Разработка замыканий моделей турбулентности была названа им инженерным подходом, поскольку, как и другие инженерные задачи, требует хорошего понимания законов физики, большого практического опыта работы, наличия необходимых данных для тестирования моделей, понимания запросов потребителей и творческой одаренности.

§5. Моделирование турбулентного переноса тепла и вещества

5.1. Стратифицированные течения

В настоящей главе рассматривается решение задач, связанных с тепло- и массопереносом в турбулентных течениях. Важность этих процессов

очевидна для многих практических задач. Почти все способы производства энергии включают процессы гидродинамики и теплообмена. Эти же процессы являются определяющими при обогреве и кондиционировании зданий. В основных установках энергетической, металлургической и химической промышленности, таких как топки, теплообменники, конденсаторы и реакторы, имеют место течения жидкостей и газов, а также теплообмен. В основе функционирования самолетов и ракет лежат процессы, обусловленные течением газа, теплообменом и химическими реакциями. Теплообмен является лимитирующим фактором при конструировании электрооборудования и электронных схем. Загрязнение окружающей среды связано с процессами тепломассопереноса. Даже организм человека при изменении, например, погодных условий управляет температурой своего тела с помощью процессов тепломассопереноса.

В связи с тем, что рассматриваемые процессы имеют большое влияние на жизнь человека, необходимо иметь возможность эффективно ими управлять. Этого можно будет добиться в результате понимания существа процессов и разработки методов получения их количественного описания. Вооруженный такими знаниями ученый или инженер может выбрать из нескольких возможных технологий или конструкций оптимальную. Руководствуясь расчетом, можно выбирать более безопасные и эффективные режимы работы. Расчеты, относящиеся к существованию указанных процессов, помогают прогнозировать и контролировать потенциальные опасности как технологического, так и экологического характера.

5.2. Связь между переносом тепла и переносом импульса

Уравнение переноса тепла имеет следующий вид (получение уравнения переноса тепла из законов сохранения энергии можно найти во многих учебниках):

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tilde{U}_j \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} = \gamma \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (5.1)$$

Здесь \tilde{T} – мгновенная температура, γ – молекулярная температуропроводность ($\gamma = \hat{\gamma} / c_p \rho$, $\hat{\gamma}$ – молекулярная теплопроводность). Перепишав уравнение (5.1) в безразмерном виде, получаем, как и в уравнениях Навье–Стокса, при старшей производной безразмерный параметр – число Пекле $Pe = LU/\gamma$.

Согласно упрощенной кинетической теории газов, механизмы переноса тепла и импульса одинаковы – за счет соударения молекул. В уравнении (5.1) параметр γ аналогичен параметру ν (вязкости) в уравнениях Навье–Стокса. Оба этих параметра имеют одинаковую размерность, поэтому ве-

личина $Pr = \nu/\gamma$ (число Прандтля) безразмерна и ее значение в соответствии с упрощенной теорией газов равно единице. Действительное значение Pr для двухатомных газов равно примерно 0,7 и практически не зависит от температуры. То, что это значение меньше единицы, обусловлено важной ролью колебательных и вращательных степеней свободы молекулярного движения, которая не учитывается в упрощенной кинетической теории.

Несмотря на то, что аналогия между процессами переноса тепла и импульса обычно не является полной, она всегда достаточна для того, чтобы ее использовать для качественных оценок даже в турбулентных течениях, поскольку, и в этом случае, процессы переноса импульса и тепла (а также вещества) обусловлены одним и тем же механизмом – перемещением элементов жидкости турбулентными вихрями. В ряде случаев эта аналогия оказывается настолько полной, что безразмерный параметр температуры можно приравнять соответствующему безразмерному параметру скорости, умноженному на *коэффициент аналогии*, определяемому на основании экспериментальных данных. Наиболее известным примером является *коэффициент аналогии Рейнольдса* (см., Себиси, Брэдшоу, 1987). Как будет показано далее, такая аналогия применяется и в моделях турбулентного переноса массы и тепла.

В следующем разделе будут рассмотрены особенности статистической структуры турбулентных пульсаций в стратифицированных течениях. Большинство экспериментальных данных и примеров получено из рассмотрения атмосферной турбулентности и в какой-то мере связано с тем, что автор значительно лучше знаком с атмосферной турбулентностью, чем с другими турбулентными течениями. Хотя кроме этой имеются и другие веские причины, оправдывающие специальное внимание к атмосферной турбулентности. Дело в том, что атмосфера, которую Карман назвал гигантской природной лабораторией для изучения турбулентности, обладает очень ценными свойствами, делающими ее особенно подходящей для проверки выводов современной статистической теории. Во-первых, атмосферная турбулентность характеризуется гораздо большими числами Рейнольдса, чем течения, моделируемые в лаборатории, и, следовательно, гораздо более удобна для исследования специфических закономерностей, относящихся к случаю очень больших Re . Во-вторых, геометрические условия атмосферной турбулентности оказываются наиболее простыми, чем в большинстве лабораторных экспериментов (течение в приземном слое отвечает условиям плоскопараллельного течения в полупространстве, ограниченном твердой стенкой, которую в ряде случаев можно считать плоской и однородной, или условиям течения в свободной атмосфере, отвечающим течению в безграничном пространстве). Важным свойством атмосферной турбулентности является ее термическая стратификация с

изменяющимся типом устойчивости в течение суток, позволяющим исследовать основные механизмы турбулентного переноса тепла.

5.3. Влияние стратификации на спектр турбулентных пульсаций

Основной особенностью стратифицированных течений является анизотропное влияние внешней силы (в вертикальном направлении) на структуру потока¹⁵. Эта сила при наличии пульсаций плотности равна $-\rho'g_i$, следовательно, средняя работа архимедовой силы (на единицу массы) при турбулентных перемещениях элементов жидкости составляет $G = -\langle u_i \rho' / \rho \rangle g_i$ (см. слагаемые генерации турбулентности плавучестью в уравнениях (4.22) и (4.23)). При устойчивой стратификации вертикальные перемещения элементов жидкости сопровождаются затратой энергии на работу против архимедовых сил, поэтому $G < 0$ (заметим, что при устойчивой стратификации плотность жидкости убывает при увеличении высоты, а пульсации плотности и вертикальной скорости, очевидно, будут иметь положительную корреляцию). В случае неустойчивой стратификации, наоборот, при вертикальных перемещениях работа архимедовых сил совершается за счет потенциальной энергии стратификации и приводит к росту вертикальной составляющей энергии турбулентности. В этом случае $G > 0$. Тип устойчивости стратификации определяется знаком этой величины. Для этого на практике часто используется введенный в 1920 г. Ричардсоном безразмерный параметр (число Ричардсона) – отношение двух членов уравнения (4.23), описывающих различные механизмы генерации турбулентных пульсаций:

$$Ri = G/P = g_k \langle u_k \rho' / \rho \rangle / \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k}.$$

При $Ri > 0$ стратификация носит устойчивый характер, при $Ri < 0$ – неустойчивый.

Рассмотрим, как влияет стратификация на структуру спектра турбулентных пульсаций. В стратифицированной жидкости поток энергии, передаваемой от возмущений заданного масштаба меньшим возмущениям, уже не будет постоянным на спектре масштабов (см. § 2). В самом деле, при устойчивой стратификации наряду с передачей энергии от одних возмущений к другим также будет происходить затрата кинетической энергии на преодоление архимедовых сил (приводящая к преобразованию части кинетической энергии в потенциальную энергию плотностного рассло-

¹⁵ Заметим, что влияние твердой поверхности также характеризуются анизотропным воздействием на структуру турбулентных пульсаций в пристенной области.

ния). При неустойчивой стратификации турбулентные движения различных масштабов будут, наоборот, черпать дополнительную кинетическую энергию из потенциальной энергии среды. Таким образом, энергетический баланс спектра в стратифицированных течениях отличается от рассмотренного в § 2. На рис. 12 показана статистическая структура спектра турбулентных пульсаций при устойчивой стратификации. В этом случае длинноволновые пульсации вертикальной скорости подавляются, а в случае неустойчивой стратификации, наоборот, растут (изменяется и область спектра в диссипативном интервале (см. ниже)).

Под воздействием механизма перераспределения энергии турбулентности, обусловленного пульсациями давления, такой сток энергии при устойчивой стратификации (или источник при неустойчивой стратификации) приводит к изотропии пульсаций на более мелких масштабах и к уменьшению (увеличению) полной энергии турбулентности (будет показано далее). Как показывают эксперименты, область спектра, находящаяся между энергетическим интервалом и интервалом диссипации, сохраняет свою универсальную изотропную статистическую структуру и описывается колмогоровским законом пяти третей ($k^{-5/3}$).

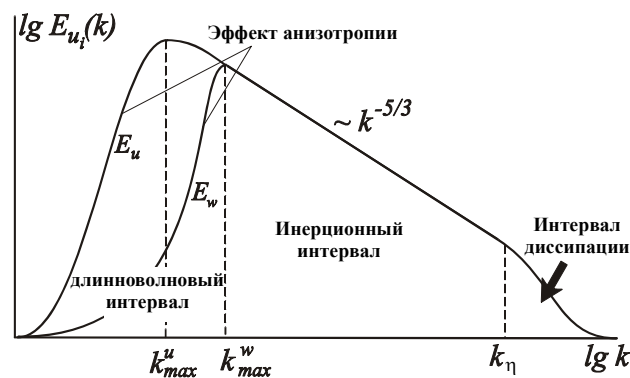


Рис. 12. Вид спектра турбулентных пульсаций в устойчиво-стратифицированном течении

Существование инерционного интервала в измеренных спектрах турбулентных пульсаций в стратифицированных течениях свидетельствует о равномерном стоке (или источнике) энергии на соответствующих ему масштабах, обусловленном действием архимедовых сил. Очевидно, что такая картина возможна только в том случае, когда на каждом масштабе инерционного интервала вихри заполняют все пространство (при «плотной упаковке» вихрей). В случае же, когда на каждом шаге масштабов по

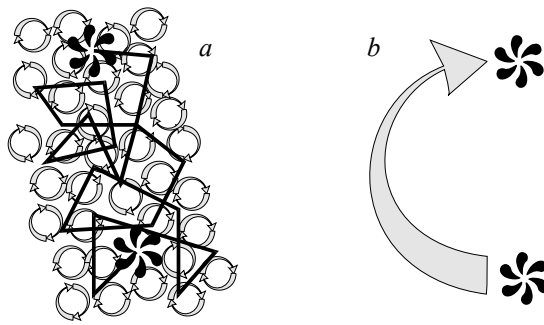


Рис. 13. Перенос частицы жидкости (примеси) в поле вихрей инерционного интервала спектра (а) и под воздействием КВС (б)

энергетическому каскаду вихри заполняют пространство все реже и реже (такая упаковка пространства турбулентными вихрями соответствует мультифрактальной модели турбулентности), затраты на преодоление архимедовых сил будут отличаться от масштаба к масштабу, что, очевидно, приведет к деформации спектра при наложении страти-

фикации. Как известно, характеристикой, отражающей такую структуру турбулентности, является коэффициент эксцесса. Выше указывалось, что этот коэффициент значителен в области диссипативных масштабов. Как показали эксперименты, инерционная область спектра действительно подвержена сильной деформации при наложении на течение стратификации.

Однако, определяющее влияние на процессы переноса оказывают наиболее крупные энергосодержащие турбулентные вихри, которые соответствуют длинноволновой области спектра. Содержание энергии вертикальных пульсаций этого интервала спектра, отражающее степень анизотропии турбулентности, является характеристикой, наиболее подверженной влиянию стратификации. Сильная анизотропия крупномасштабных пульсаций свидетельствует о формировании квазидвумерных крупномасштабных вихревых структур (КВС), что подтверждается экспериментальными и теоретическими исследованиями. В частности, в атмосфере при устойчивой стратификации формируются турбулентные пятна, эволюционирующие в горизонтальные КВС, а при неустойчивой стратификации – вертикальные когерентные структуры. Большие времена жизни КВС приводят к тому, что частицы жидкости (примеси), попадая в поле течения КВС, могут переноситься на большие расстояния практически без изменения направления движения (рис. 13). Это не согласуется с постулатами эйлеровой К-теории, согласно которой турбулентная диффузия рассматривается как аналог броуновского движения, т. е. процесса случайных блужданий. При этом частица может пройти большое расстояние только в результате многократных случайных по направлению перемещений. Поэтому часто оказывается, что применения моделей градиентной диффузии для описания турбулентного переноса в стратифицированных течениях недостаточно (мо-

дели турбулентности для стратифицированных течений будут рассмотрены ниже).

С ростом устойчивости (увеличением числа Ридчардсона Ri) интенсивность турбулентных пульсаций убывает за счет разрушения КВС. Характерное время жизни турбулентных вихрей размера порядка масштабов течения (L) становится малым. Максимум спектра ($k_{max} \sim 1/L_c$, где L_c – характерный размер крупномасштабных турбулентных вихрей) сдвигается в область меньших масштабов (см. рис. 14), а внешняя граница инерционного интервала ($k_\eta \sim 1/\eta$) сдвигается в область больших масштабов (для конвективного и устойчиво стратифицированного атмосферного пограничного слоя (АПС) величина η принимает значения $\sim 10^{-2}$ м и $\sim 10^{-1}$ м соответственно). Это приводит к уменьшению, а затем, в результате перекрывания интервала энергии и диссипации, к вырождению инерционного интервала спектра. Как следствие, влияние на динамику течения нелокального в пространстве турбулентного переноса (переноса на расстояния, соизмеримые с масштабами течения)¹⁶ уменьшается, в то время как влияние нелокальности во времени (эффектов памяти) распространяется до вихрей размера $L_c < L$. Это ослабляет прогностическую способность моделей градиентной диффузии, справедливых для описания турбулентного переноса на масштабах, соответствующих инерционному интервалу спектра турбулентных пульсаций (с гауссовым распределением ФПВ), поскольку эффекты памяти могут быть учтены только в эволюционных дифференциальных уравнениях турбулентного переноса.

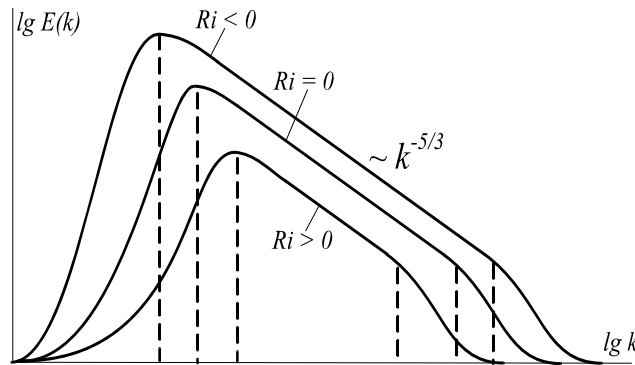


Рис. 14. Качественная зависимость спектра вертикальных пульсаций скорости от характера стратификации атмосферного пограничного слоя

¹⁶ Размер вихрей, соответствующих максимуму спектра в конвективном АПС, составляет $\sim 10^4$ см, в нейтрально стратифицированном и в устойчиво стратифицированном АПС он меньше в 1,5 и 4 раза соответственно.

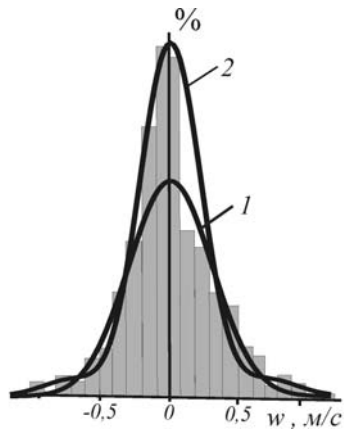


Рис. 15. Измеренная повторяемость вертикальной скорости в устойчиво стратифицированном течении: кривая 1 – функция Гаусса, кривая 2 – ФПВ, восстановленная по ряду Грамма–Шарлье ($S = 0$, $\delta = 2,1$)

ли больших значений (рис. 15). Такая «пятнистая» структура турбулентных пульсаций свидетельствует о том, что коэффициент эксцесса имеет больше значение ($\delta \approx 2,1$, $S \approx 0$, см. рис. 15). Асимметрия ФПВ при устойчивой стратификации оказывается сильно подавленной. Выше отмечалось, что значительное значение коэффициента эксцесса свидетельствует о том, что распределение энергии по спектру отличается от колмогоровского распределения. Как следствие, предположение о постоянстве спектрального потока энергии ($\varepsilon = Const$), используемое в моделях турбулентности, нарушается.

Заметим, что в конвективном АПС, наоборот, ФПВ вертикальных пульсаций скорости имеет ярко выраженную асимметричную форму (ФПВ вертикальных пульсаций скорости в конвективном АПС имеет вид, близкий к приведенному на рис. 9 для $S > 0$). Такой профиль ФПВ характеризуется более скоростными, но менее вероятными (занимающими меньшую горизонтальную область) восходящими потоками, чем нисходящими. Указанная структура конвективного АПС обусловлена вертикальной асимметрией механизма генерации турбулентных пульсаций: в приземной части АПС сдвиг средней скорости обеспечивает приток энергии турбулентности, в то время как в верхней (устойчиво стратифицированной) части АПС турбулентные пульсации сильно подавлены, поэтому дисперсия пульсаций

В случае устойчивой стратификации практически весь спектр турбулентных пульсаций характеризуется существенно негауссовым распределением. Это подтверждают измерения в устойчиво стратифицированном АПС. Так, в наблюдениях (Pinus, Cherbakova, 1966), как и во многих других, усиление или ослабление вертикальных движений имело вспышкообразный «пятнистый» характер: в течение длительных периодов времени пульсации вертикальной скорости были ниже чувствительности измерительной аппаратуры, но в некоторые моменты времени скорости нисходящих и восходящих движений достигали

вертикальной скорости в восходящих потоках оказывается больше, чем в нисходящих (будет показано далее, см. рис. 17).

В условиях, когда число Релея для нижней части АПС принимает значение больше критического, возникают крупномасштабные конвективные движения (см. рис. 16), подобные известным ячейкам Бинара, которые в основном осуществляют вертикальный перенос импульса, тепла и вещества. Циркуляция в таких ячейках в плоскости xz схематично показана на рис. 16, б. Вследствие несимметричности граничных условий (нагрев происходит снизу, устойчивая стратификация – на верхней границе) вертикальная скорость в АПС имеет асимметричное распределение амплитуд: резко выраженные восходящие движения и более плавные нисходящие (см. рис. 16, а). Такой характер движения подтверждают данные натурного эксперимента (Бызова и др., 1991). Кривая на рис. 16, в представляет собой типичную реализацию вертикальной компоненты скорости при неустойчивой стратификации, полученную на высоте 120 м и сглаженную с периодом около 1 мин. Эта кривая не является строго периодической, так как представляет собой сечение квазиупорядоченной системы ячеек. Однако, исходя из характера этой кривой, можно сделать вывод, что такая реализация соответствует сечению, близкому к проходящему через центры ячеек.

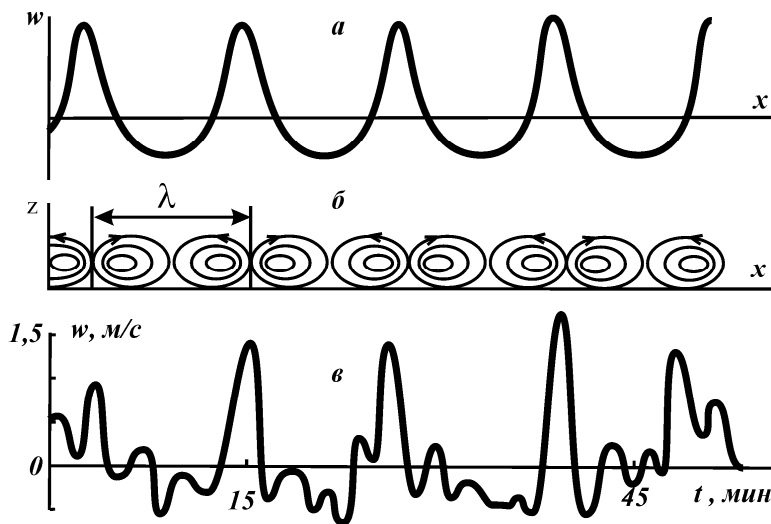


Рис. 16. Схема конвективного движения в АПС: а – распределение вертикальной скорости; б – циркуляция в конвективной ячейке; в – реальная сглаженная реализация вертикальной скорости

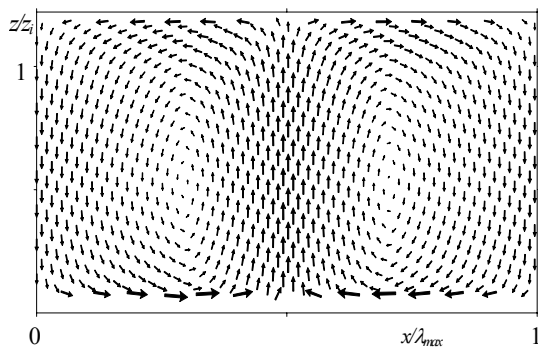


Рис. 17. Восстановленное поле скорости внутри конвективной ячейки в АПС

Горизонтальный размер ячеек λ составляет от 3 до 5 км. В вертикальном направлении ячейки занимают практически весь АПС. На рис. 17 показано поле скорости в таких ячейках с ярко выраженной асимметрией вертикальной скорости. Заметим важную особенность устойчиво стратифицированных течений (в

частности, АПС): интерпретация данных, полученных в результате измерений, затруднена из-за одновременного существования двух типов возмущений – турбулентных движений и внутренних волн. Измерения в атмосфере показали, что спектры вблизи поверхности земли имеют волновой интервал, расположенный вблизи частоты Брента–Вяйсяля N ($N^2 = \beta g \partial \Theta / \partial z$), который отделяется от более высокочастотной области турбулентных возмущений явно выраженным минимумом.

На более высоких уровнях область турбулентных возмущений сдвигается в сторону более низких частот, а волновой интервал – в сторону более высоких, в результате чего минимум сглаживается и спектр становится одновершинным. Эксперименты свидетельствуют о том, что в устойчиво стратифицированном АПС дополнительным источником турбулентных пульсаций могут быть внутренние волны, разрушающиеся при локальном падении числа Ричардсона ниже его критического значения в пределах волнового цикла¹⁷. Волновая восприимчивость устойчиво стратифицированных течений к внешним возмущениям ($N^2 > 0$) приводит к тому, что в процессе численного моделирования таких течений в ряде случаев генерируются «паразитные» волны. Их подавление достигается за счет привлечения дополнительных численных процедур («clipping approximation») или модификации исходных уравнений. Представленная выше стратегия замыкания позволяет получить более рациональным путем модели турбулентности, включающие диффузионные слагаемые в уравнениях переноса

¹⁷ Механизмы взаимодействия внутренних волн с турбулентностью рассматривались в ряде теоретических работ на простых моделях. Однако для выявления механизма этого взаимодействия необходимы более полные и тщательные измерения и исследования.

са для старших моментов, что обеспечивает правильное направление спектрального потока кинетической энергии турбулентности от крупных вихрей к диссипативным и необходимое демпфирование нефизических «паразитных» волн. Тем не менее, моделирование турбулентного переноса в устойчиво стратифицированных течениях остается наиболее трудной задачей, поскольку структура турбулентности в них характеризуется более сложным механизмом спектрального потока энергии ($\varepsilon \neq \text{Const}$) и проявлением свойства нелокальности во времени. Наиболее апробированными моделями турбулентности для описания процессов переноса импульса, тепла и вещества в стратифицированных течениях являются модели второго порядка замыкания и порядка полтора, которые будут рассмотрены в п. 5.4.

5.4. Потенциальная температура

В моделях турбулентного переноса тепла часто используется величина θ – *потенциальная температура*, которая позволяет учесть гидростатическое изменение плотности газа в зависимости от высоты. Действительно, даже при сильно развитой турбулентности уравнение гидростатики:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho \quad (5.2)$$

для многих задач (например, решаемых в метеорологии) служит хорошим приближением для описания изменения давления по высоте. С помощью уравнения $\partial \tilde{p} / \partial \tilde{T} = \tilde{\rho} c_p$ (первое начало термодинамики для адиабатических условий) и уравнения состояния $\tilde{p} = R\tilde{T}\tilde{\rho}$ можно получить значение адиабатического градиента температуры:

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{ad} = \frac{g}{c_p}. \quad (5.3)$$

При таком градиенте температуры частицы жидкости перемещаются по вертикали без обмена теплом. Эти условия соответствуют нейтральной стратификации. Изменения плотности при изменениях температуры (в приближении о малости пульсаций давления по сравнению с пульсациями температуры) с учетом уравнения состояния составляют $\rho'/\rho \approx -T'/T$.

Мгновенная потенциальная температура вычисляется следующим образом:

$$\tilde{\theta} := \tilde{T} \left(\frac{P_o}{\tilde{p}} \right)^{R/c_p}. \quad (5.4)$$

Здесь p_o – некоторое стандартное давление (обычно принимаемое равным нормальному давлению на уровне моря). Согласно (5.4), потенциальная температура определяется как температура частицы, приобретаемая последней при ее адиабатическом перемещении до уровня с давлением p_o . Тогда с учетом (5.2)–(5.4) получаем связь:

$$\left[\frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \right)_{ad} \right] = \frac{\tilde{T}}{\theta} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z}, \quad (5.5)$$

из которой видно, что, зная потенциальную температуру, мы можем учитывать изменения плотности, связанные как с пульсациями температуры, так и с изменением гидростатического давления. Из (5.4) следует:

$$\rho'/\rho \approx -T'/T \approx -\theta/\Theta.$$

Условие нейтральной стратификации в терминах потенциальной температуры имеет вид $\partial \tilde{\theta} / \partial z = 0$. Очевидно, что в случае, когда давление не зависит от высоты ($\tilde{p} = \text{Const} = p_o$) потенциальная температура равна обычной температуре.

5.5. Математическое описание процессов тепломассопереноса

В некоторых задачах теплопереноса перепады температуры относительно ее абсолютного значения малы. Следовательно, изменения плотности, вязкости и коэффициента теплопроводности, обусловленные такими температурными перепадами, настолько малы, что ими можно пренебречь в уравнениях движения и энергии. Этот случай представляет собой приближение *несопряженного течения*, математическое описание которого можно разделить на динамическую и тепловую задачи. В таком приближении температура является *пассивной* примесью (*скаляром*), не влияющей на динамику течения (турбулентный перенос пассивной примеси будет рассмотрен ниже).

Приближение Буссинеска

При решении задач естественной конвекции часто можно пренебречь изменениями плотности во всех уравнениях, кроме члена, описывающего влияние архимедовых сил. Такое приближение получило название по имени автора этой идеи – *приближение Буссинеска*. Уравнения переноса импульса (4.12), (4.22) и (4.23), полученные в § 4 в указанном приближении, включают корреляции $\langle u_i \frac{\rho'}{\rho} g \rangle$. Поскольку в принятом приближении турбулентные флуктуации плотности, обусловленные изменениями потен-

циальной температуры θ , определяются по формуле $\rho' = -\beta\rho\theta$ (β – коэффициент объемного расширения, который для идеального газа составляет $\beta = 1/\Theta_o$, где $\Theta_o \cong 273^\circ\text{C}$), динамическую модель турбулентности необходимо дополнить уравнениями для средней температуры, корреляции $\langle u_i\theta \rangle$ и дисперсии температурных флуктуаций $\langle \theta^2 \rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial t} + U_j \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} &= - \frac{\partial \langle u_i \theta \rangle}{\partial x_j}, \\ \frac{\partial \langle u_i \theta \rangle}{\partial t} + U_j \frac{\partial \langle u_i \theta \rangle}{\partial x_j} &= - \frac{\partial \langle u_i u_i \theta \rangle}{\partial x_j} - \langle u_i u_j \rangle \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} - \langle u_j \theta \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \left\langle p \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right\rangle - \\ &\quad - \beta g_i \langle \theta^2 \rangle + (v + \gamma) \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right\rangle, \\ \frac{\partial \langle \theta^2 \rangle}{\partial t} + U_j \frac{\partial \langle \theta^2 \rangle}{\partial x_j} &= - \frac{\partial \langle u_i \theta^2 \rangle}{\partial x_j} - 2 \langle u_j \theta \rangle \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} - \gamma \left\langle \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Здесь $\tilde{\Theta} = \Theta + \theta$ – мгновенная потенциальная температура, которая согласно уравнению (4.11) представляется в виде суммы средней и пульсационной составляющих. Уравнения (5.6) получены с помощью введенного ранее представления (4.11) для поля температуры в уравнении теплопроводности (5.1), в результате применения процедуры получения уравнений для корреляций, описанной выше в § 4. Как и в уравнениях турбулентного переноса импульса (см. § 4), здесь и ниже не учитываются слагаемые, описывающие эффекты молекулярной диффузии и диффузии давления, как пренебрежимо малые по сравнению с величиной третьих моментов, описывающих процесс турбулентной диффузии.

Можно использовать и модифицированные варианты подобных приближений. Например, в течениях капельной жидкости можно учесть зависимость вязкости от температуры, в то время как изменениями плотности и коэффициентом теплопроводности обычно пренебрегают.

Отметим, что если теплофизические свойства жидкости существенно зависят от температуры, то течение и теплообмен нельзя достаточно полно охарактеризовать числами Рейнольдса, Прандтля и другими величинами, рассчитанными при одной характерной температуре.

Модель турбулентного переноса пассивной примеси

Применив представление (4.11) для поля концентрации $\tilde{C} = C + c$ в уравнении диффузии аналогично тому, как это было сделано при получении уравнений (5.6), получим уравнения переноса пассивной примеси:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + U_j \frac{\partial C}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \langle u_j c \rangle}{\partial x_j}, \\ \frac{\partial \langle u_i c \rangle}{\partial t} + U_j \frac{\partial \langle u_i c \rangle}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \langle u_i u_j c \rangle}{\partial x_j} - \langle u_i u_j \rangle \frac{\partial C}{\partial x_j} - \langle u_j c \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \left\langle c \frac{\partial p}{\partial x_i} \right\rangle \\ &\quad - \beta g_i \langle c \theta \rangle + (v + D) \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial c}{\partial x_j} \right\rangle, \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle c \theta \rangle}{\partial t} + U_j \frac{\partial \langle c \theta \rangle}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \langle u_j c \theta \rangle}{\partial x_j} - \langle u_j \theta \rangle \frac{\partial C}{\partial x_j} - \langle u_j c \rangle \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} + (\gamma + D) \left\langle \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial c}{\partial x_j} \right\rangle, \\ \frac{\partial \langle c^2 \rangle}{\partial t} + U_j \frac{\partial \langle c^2 \rangle}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \langle u_j c^2 \rangle}{\partial x_j} - 2 \langle u_j c \rangle \frac{\partial C}{\partial x_j} - D \left\langle \frac{\partial c}{\partial x_j} \frac{\partial c}{\partial x_j} \right\rangle, \end{aligned}$$

(D – коэффициент молекулярной диффузии).

Модели замыкания

Уравнения (5.6) и (5.7) незамкнуты. Для их замыкания необходимо привлечение дополнительных гипотез и аппроксимаций. По своей структуре эти уравнения похожи на уравнения (4.12), (4.22) и (4.23). В частности, они включают тройные корреляции, описывающие процессы турбулентной диффузии, градиенты средних полей, описывающие процессы генерации средним сдвигом, слагаемые, описывающие генерацию плавучестью (под воздействием архимедовых сил). Применяя подход, описанный в § 4, можно получить замкнутую систему алгебраических уравнений для тройных корреляций, учитывающих влияние эффекта плавучести:

$$\begin{aligned} \langle u_i u_j u_k \rangle &= \frac{\tau}{c_3} \sum_{ijk} \left[-\langle u_i u_j u_l \rangle \frac{\partial U_k}{\partial x_l} - \langle u_i u_l \rangle \frac{\partial \langle u_j u_k \rangle}{\partial x_l} - \beta g_l \langle u_i u_j \theta \rangle \delta_{kl} \right], \\ \langle u_i u_j \theta \rangle &= \frac{\tau}{c_{3\theta}} \left\{ -\langle u_i u_j u_l \rangle \frac{\partial \Theta}{\partial x_l} - \langle u_l \theta \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_l} \right. \\ &\quad \left. + \sum_j \left[-\langle u_i u_l \theta \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_l} - \langle u_i u_l \rangle \frac{\partial \langle u_j \theta \rangle}{\partial x_l} - \beta g_m \langle u_l \theta^2 \rangle \delta_{jm} \right] \right\}, \quad (5.8) \\ \langle u_i u_j c \rangle &= \frac{\tau}{c_{3c}} \left\{ -\langle u_i u_j u_l \rangle \frac{\partial C}{\partial x_l} - \langle u_l c \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_l} + \sum_j \left[-\langle u_i u_l c \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_l} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \langle u_i u_l \rangle \frac{\partial \langle u_j c \rangle}{\partial x_l} - \beta g_k \langle u_l c \theta \rangle \delta_{jk} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle u_i c^2 \rangle &= \frac{\tau}{c_{3cc}} \left\{ -2 \langle u_i u_i c \rangle \frac{\partial C}{\partial x_i} - \langle u_i c^2 \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_i} - \langle u_i u_i \rangle \frac{\partial \langle c^2 \rangle}{\partial x_i} - 2 \langle u_i c \rangle \frac{\partial \langle u_i c \rangle}{\partial x_i} - \beta g_k \langle c^2 \theta \rangle \delta_{ik} \right\}, \\
\langle u_i c \theta \rangle &= \frac{\tau}{c_{3cc}} \left\{ - \langle u_i u_i \theta \rangle \frac{\partial C}{\partial x_i} - \langle u_i u_i c \rangle \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} - \langle u_i c \theta \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_i} - \langle u_i u_i \rangle \frac{\partial \langle c \theta \rangle}{\partial x_i} \right. \\
&\quad \left. - \langle u_i \theta \rangle \frac{\partial \langle u_i c \rangle}{\partial x_i} - \langle u_i c \rangle \frac{\partial \langle u_i \theta \rangle}{\partial x_i} - \beta g_k \langle c \theta^2 \rangle \delta_{ik} \right\}, \\
\langle c \theta^2 \rangle &= \frac{\tau}{c_{3cc}} \left\{ - \langle u_i \theta^2 \rangle \frac{\partial C}{\partial x_i} - 2 \langle u_i c \theta \rangle \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} - 2 \langle u_i \theta \rangle \frac{\partial \langle c \theta \rangle}{\partial x_i} - \langle u_i c \rangle \frac{\partial \langle \theta^2 \rangle}{\partial x_i} \right\}, \\
\langle c^2 \theta \rangle &= \frac{\tau}{c_{3cc}} \left\{ -2 \langle u_i \theta c \rangle \frac{\partial C}{\partial x_i} - \langle u_i c^2 \rangle \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} - 2 \langle u_i c \rangle \frac{\partial \langle c \theta \rangle}{\partial x_i} - \langle u_i \theta \rangle \frac{\partial \langle c^2 \rangle}{\partial x_i} \right\}, \\
\langle c^3 \rangle &= \frac{\tau}{c_{3ccc}} \left\{ - \langle u_i c^2 \rangle \frac{\partial C}{\partial x_i} - \langle u_i c \rangle \frac{\partial \langle c^2 \rangle}{\partial x_i} \right\}.
\end{aligned}$$

Данная система представляется довольно громоздкой для практического использования в вычислениях. Поэтому во многих работах используют ее упрощенные версии. Первое часто используемое упрощение системы (5.8) получается в результате пренебрежения в моделях тройных корреляций эффектом плавучести и влиянием на величину третьих моментов градиентов средних. Для корреляции $\langle u_i u_j u_k \rangle$ это приближение соответствует полученной ранее модели Ханьялича–Лондера (4.46). В случае стратифицированного течения полная модель третьих моментов имеет вид:

$$\begin{aligned}
\langle u_i u_j u_k \rangle &= - \frac{\tau}{c_3} \sum_{ijk} \langle u_i u_i \rangle \frac{\partial \langle u_j u_k \rangle}{\partial x_i}, \\
\langle u_i u_j \theta \rangle &= \frac{\tau}{c_{3\theta}} \left\{ - \langle u_i \theta \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_i} - \sum_{ij} \langle u_i u_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \theta \rangle}{\partial x_i} \right\}, \\
\langle u_i \theta^2 \rangle &= - \frac{\tau}{c_{3\theta\theta}} \left\{ \langle u_i u_i \rangle \frac{\partial \langle \theta^2 \rangle}{\partial x_i} + 2 \langle u_i \theta \rangle \frac{\partial \langle u_i \theta \rangle}{\partial x_i} \right\}, \\
\langle u_i u_j c \rangle &= - \left\{ \frac{\tau}{c_{3c}} \langle u_i c \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_i} + \sum_{ij} \langle u_i u_i \rangle \frac{\partial \langle u_j c \rangle}{\partial x_i} \right\}, \\
\langle u_i c^2 \rangle &= - \frac{\tau}{c_{3cc}} \left\{ \langle u_i u_i \rangle \frac{\partial \langle c^2 \rangle}{\partial x_i} + 2 \langle u_i c \rangle \frac{\partial \langle u_i c \rangle}{\partial x_i} \right\}, \\
\langle u_i c \theta \rangle &= - \left\{ \frac{\tau}{c_{3cc}} \langle u_i u_i \rangle \frac{\partial \langle c \theta \rangle}{\partial x_i} + \langle u_i \theta \rangle \frac{\partial \langle u_i c \rangle}{\partial x_i} + \langle u_i c \rangle \frac{\partial \langle u_i \theta \rangle}{\partial x_i} \right\}.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Как показывают расчеты, следующее упрощение, аналогичное модели Дейли–Харлоу (4.47), оказывается адекватным только для корреляций, описывающих процессы турбулентной диффузии в уравнениях для дисперсий:

$$\begin{aligned} \langle u_i \theta^2 \rangle &= -\frac{\tau}{c_{3cc}} \langle u_i u_l \rangle \frac{\partial \langle \theta^2 \rangle}{\partial x_l}, \\ \langle u_i c^2 \rangle &= -\frac{\tau}{c_{3cc}} \langle u_i u_l \rangle \frac{\partial \langle c^2 \rangle}{\partial x_l}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Заметим, однако, что в ряде случаев градиентные модели (5.8)–(5.10) дают качественно неверный результат. На рис. 18 представлены результаты расчета вертикального потока вертикальной составляющей энергии турбулентности (которая дает основной вклад в вертикальный поток энергии) в конвективном АПС при использовании моделей градиентного типа. Видно, что в приземном слое вычисленный профиль даже качественно не согласуется с измерениями (вычисления дают отрицательные значения величины $\langle w^3 \rangle$, в то время как эксперимент фиксирует положительный поток). Это несоответствие приводит в расчетах к завышенным значениям вертикальной составляющей энергии турбулентности $\langle w^2 \rangle$ и наземной концентрации. Последняя характеристика является наиболее важной в задачах экологического мониторинга, экспертных оценках и прогнозах последствий выбросов загрязнителей. В этом случае необходимо использовать модель турбулентности третьего порядка замыкания, в которой третьи моменты вычисляются из дифференциальных уравнений переноса¹⁸.

Уравнения (5.6) и (5.7) включают также корреляции, описывающие необратимый механизм разрушения пульсаций (температурного и скалярного поля) до молекулярных масштабов. По аналогии с уравнением для кинетической энергии турбулентности (4.23) вводятся величины, описывающие эти процессы в уравнениях для дисперсий:

$$\varepsilon_\theta = \gamma \left\langle \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right\rangle, \quad \varepsilon_c = D \left\langle \frac{\partial c}{\partial x_j} \frac{\partial c}{\partial x_j} \right\rangle. \quad (5.11)$$

В ряде работ для их вычисления используется дифференциальное уравнение переноса, аналогичное уравнению для ε . Однако наиболее часто применяется предположение о пропорциональности характерных временных масштабов турбулентных пульсаций полей импульса $\tau = \frac{E}{\varepsilon}$, темпера-

¹⁸ Такая модель апробирована для случая неустойчивой стратификации.

туры $\tau_\theta = \frac{\langle \theta^2 \rangle / 2}{\varepsilon_\theta}$ и концентрации $\tau_c = \frac{\langle c^2 \rangle / 2}{\varepsilon_c}$: $\tau = r_\theta \tau_\theta = r_c \tau_c$ (используются аналогия процессов переноса импульса, тепла и вещества). Значения коэффициентов пропорциональности определяются эмпирически: $r_\theta \cong r_c \cong 1,0 \div 1,25$.

В уравнениях для потоков $\langle u_i \theta \rangle$, $\langle u_i c \rangle$ и корреляции $\langle c \theta \rangle$ слагаемые с пульсациями давления, следуя Монину, параметризуются в результате использования аппроксимации релаксационного типа. В более поздних работах указанная аппроксимация, дополненная слагаемым, учитывающим влияние эффектов плавучести и генерации турбулентных пульсаций градиентами средней скорости, имеет вид:

$$\begin{aligned} \Pi_{i\theta} &= -\frac{1}{\rho} \left\langle p \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right\rangle \cong c_{1\theta} \frac{\langle u_i \theta \rangle}{\tau} + c_{2\theta} \langle u_j \theta \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - c_{3\theta} \beta g_i \langle \theta^2 \rangle, \\ \Pi_{ic} &= -\frac{1}{\rho} \left\langle p \frac{\partial c}{\partial x_i} \right\rangle \cong c_{1c} \frac{\langle u_i c \rangle}{\tau} + c_{2c} \langle u_j c \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - c_{3c} \beta g_i \langle c \theta \rangle. \end{aligned} \quad (5.12)$$

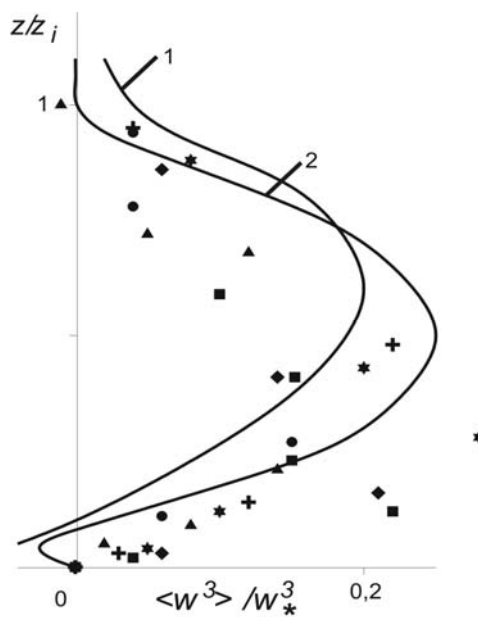


Рис. 18. Профили $\langle w^3 \rangle$ в конвективном пограничном слое атмосферы. Линии –

Члены, описывающие механизм разрушения пульсаций под воздействием процессов молекулярного переноса, в указанных уравнениях обычно полагаются пренебрежимо малыми и не учитываются. Уравнения (5.6) и (5.7) с учетом указанных параметризаций принимают вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Theta}{\partial t} + U_j \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \langle u_j \theta \rangle}{\partial x_j}, \\
 \frac{\partial \langle u_i \theta \rangle}{\partial t} + U_j \frac{\partial \langle u_i \theta \rangle}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \langle u_j u_i \theta \rangle}{\partial x_j} - \langle u_i u_j \rangle \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} - (1 - c_{2\theta}) \langle u_j \theta \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \\
 &\quad - (1 - c_{3\theta}) \beta g_i \langle \theta^2 \rangle - c_{1\theta} \frac{\langle u_i \theta \rangle}{\tau}, \\
 \frac{\partial \langle \theta^2 \rangle}{\partial t} + U_j \frac{\partial \langle \theta^2 \rangle}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \langle u_j \theta^2 \rangle}{\partial x_j} - 2 \langle u_j \theta \rangle \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} - r_\theta \frac{\langle \theta^2 \rangle}{\tau}; \tag{5.13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial C}{\partial t} + U_j \frac{\partial C}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \langle u_j c \rangle}{\partial x_j}, \\
 \frac{\partial \langle u_i c \rangle}{\partial t} + U_j \frac{\partial \langle u_i c \rangle}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \langle u_j u_i c \rangle}{\partial x_j} - \langle u_i u_j \rangle \frac{\partial C}{\partial x_j} - (1 - c_{2c}) \langle u_j c \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \\
 &\quad - (1 - c_{3c}) \beta g_i \langle c \theta \rangle - c_{1c} \frac{\langle u_i c \rangle}{\tau}, \\
 \frac{\partial \langle c \theta \rangle}{\partial t} + U_j \frac{\partial \langle c \theta \rangle}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \langle u_j c \theta \rangle}{\partial x_j} - \langle u_j \theta \rangle \frac{\partial C}{\partial x_j} - \langle u_j c \rangle \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} - c_{1c\theta} \frac{\langle c \theta \rangle}{\tau}, \\
 \frac{\partial \langle c^2 \rangle}{\partial t} + U_j \frac{\partial \langle c^2 \rangle}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \langle u_j c^2 \rangle}{\partial x_j} - 2 \langle u_j c \rangle \frac{\partial C}{\partial x_j} - r_c \frac{\langle c^2 \rangle}{\tau}, \tag{5.14}
 \end{aligned}$$

где $c_{1\theta} \cong c_{1c} \cong c_{1c\theta}$, $c_{2\theta} \cong c_{2c} \cong c_{3\theta} \cong c_{3c}$ – эмпирические коэффициенты модели (их значения, определенные на основе сопоставления результатов расчета с данными экспериментов для целого ряда типов течений, приблизительно равны 3,0 и 0,33 соответственно).

Системы (5.13), (5.14) совместно с динамической моделью (4.37), (4.49) и алгебраическими моделями тройных корреляций (например, (4.46), (5.9)) представляют собой полную модель турбулентного переноса импульса, тепла и вещества второго порядка замыкания. Однако она слишком гро-

моздка и поэтому на практике часто применяется упрощенная модель, включающая в себя дифференциальные уравнения переноса для кинетической энергии турбулентности, скорости ее диссипации и дисперсий турбулентных пульсаций полей температуры и концентрации:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial t} + U_i \frac{\partial E}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[c_\mu \frac{E^2}{\varepsilon} \frac{\partial E}{\partial x_j} \right] + P + G - \frac{E}{\tau}, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{c_\mu}{\sigma_\varepsilon} \frac{E^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{c_{\varepsilon 1}}{\tau} [P + G] - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon}{\tau},\end{aligned}\quad (5.15)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \langle \theta^2 \rangle}{\partial t} + U_j \frac{\partial \langle \theta^2 \rangle}{\partial x_j} &= - \frac{\partial \langle u_j \theta^2 \rangle}{\partial x_j} - 2 \langle u_j \theta \rangle \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} - r_\theta \frac{\langle \theta^2 \rangle}{\tau}, \\ \frac{\partial \langle c^2 \rangle}{\partial t} + U_j \frac{\partial \langle c^2 \rangle}{\partial x_j} &= - \frac{\partial \langle u_j c^2 \rangle}{\partial x_j} - 2 \langle u_j c \rangle \frac{\partial C}{\partial x_j} - r_c \frac{\langle c^2 \rangle}{\tau}.\end{aligned}$$

Тензор напряжений Рейнольдса $\langle u_i u_j \rangle$ и векторы потока тепла $\langle u_i \theta \rangle$ и массы $\langle u_i c \rangle$ вычисляются из приближенных алгебраических уравнений, полученных в результате применения процедуры, описанной в § 4, а также из уравнения для кинетической энергии турбулентности (при использовании приближенного баланса $P + G \cong \varepsilon$):

$$\begin{aligned}\langle u_i u_j \rangle &= \frac{2}{3} E \delta_{ij} + \frac{\tau}{c_1} \left[(1 - c_2) \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) + (1 - c_3) \left(G_{ij} - \frac{2}{3} G \delta_{ij} \right) \right], \\ \langle u_i \theta \rangle &= - \frac{\tau}{c_{1\theta}} \left[\langle u_i u_j \rangle \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} + (1 - c_{2\theta}) \langle u_j \theta \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + (1 - c_{3\theta}) \beta g_i \langle \theta^2 \rangle \right], \\ \langle u_i c \rangle &= - \frac{\tau}{c_{1c}} \left[\langle u_i u_j \rangle \frac{\partial C}{\partial x_j} + (1 - c_{2c}) \langle u_j c \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + (1 - c_{3c}) \beta g_i \langle c \theta \rangle \right], \\ \langle c \theta \rangle &= - \frac{\tau}{c_{1\alpha}} \left[\langle c u_j \rangle \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} + \langle u_j \theta \rangle \frac{\partial C}{\partial x_j} \right].\end{aligned}\quad (5.16)$$

Уравнения (5.15), (5.16), дополненные уравнениями:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_j} - \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j} + g_i, \\
\frac{\partial \Theta}{\partial t} + U_j \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \langle u_j \theta \rangle}{\partial x_j}, \\
\frac{\partial C}{\partial t} + U_j \frac{\partial C}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \langle u_j c \rangle}{\partial x_j}, \\
\frac{\partial U_i}{\partial x_i} &= 0
\end{aligned} \tag{5.17}$$

для средних полей скорости, температуры и концентрации, а также уравнением неразрывности, в литературе называют *моделью порядка полтора*. В ряде случаев, когда турбулентный перенос осуществляется в основном в вертикальном направлении, вместо уравнения для кинетической энергии турбулентности используются уравнения для ее вертикальной $\langle w^2 \rangle$ и горизонтальной $e_h = (\langle u^2 \rangle + \langle v^2 \rangle) / 2$ составляющих.

Во многих случаях результаты расчетов по таким более простым алгебраическим моделям не слишком сильно отличаются от получаемых при решении полной модели турбулентности второго порядка замыкания, тогда как сами расчеты много экономичнее. Мерони, использовавший, например, алгебраическую модель для расчета турбулентных течений в атмосфере, к которым Дональдсон и др. применяли свою модель с дифференциальными уравнениями переноса для напряжений Рейнольдса и потоков, не обнаружил фактически никакой разницы в результатах. Алгебраические модели для напряжений удобны в отношении учета направленных влияний массовых сил или стенок. Они успешно применяются также при расчетах вторичных течений, порожденных турбулентностью, в каналах. Как и в случае динамической модели турбулентности, модель турбулентного переноса тепла и вещества второго порядка замыкания не учитывает нелокальные свойства турбулентного переноса, обусловленные влиянием крупномасштабных вихревых структур. В этом случае необходимо использовать модель третьего порядка замыкания. Однако эти модели трудоемки с вычислительной точки зрения и до сих пор мало апробированы, так что они, по всей видимости, пока непригодны для практических вычислений.

Библиографический список

- Бызова Н. Л., Гаргер Е. К., Иванов В. Н.* Экспериментальные исследования атмосферной диффузии и расчеты рассеяния примеси. Л.: Гидрометеиздат, 1991.
- Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидродинамика: В 2 ч. М.: Наука, 1967.
- Себиси Т., Брэдшоу П.* Конвективный теплообмен. М.: Мир, 1987.
- Andre J. C., De Moor G., Lacarrere P., Therry G., du Vachat R.* Modeling the 24-hour evolution of the mean and temperature structures of the planetary boundary layer // *J. Atmos. Sci.* 1978. Vol. 35. № 10. P. 1861–1883.
- Canuto V. M., Minotti F., Ronchi C., Ypma R. M., Zeman O.* Second-order closure PBL model with new third-order moments: comparison with LES data // *J. Atmos. Sci.* 1994. Vol. 51. P. 1605–1618.
- Daly B. J., Harlow B. E.* Transport equations in turbulence // *Physics of Fluids.* 1970. Vol. 13. P. 2634–2649.
- Hanjalic K., Launder B. E.* A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows // *J. Fluid Mech.* 1972. Vol. 52. № 4. P. 609–638.
- Launder B. E.* On effects of gravitational field on the turbulent of heat and momentum // *J. Fluid Mech.* 1975. Vol. 67. № 3. P. 569–581.
- Lesieur M.* Turbulence in fluids // Kluwer Acad. Publ. 1997.
- Pinus N. Z., Cherbakova E. F.* About wind velocity field in stratified atmosphere // *Izv. Acad. Sci. SSSR, Phys. Atmosphere and Ocean.* 1966. Vol. 2. P. 1126–1134.
- Zeman O., Lumley J. L.* Modeling buoyancy driven mixed layer // *J. Atmos. Sci.* 1976. Vol. 33. P. 1974–1988.
- Rotta J. C.* Statische Theorie nichtgemogener turbulenz // *Z. Physik.* 1951. Vol. 129. № 6. P. 547–572; Vol. 131. № 1. P. 51–77.
- Wipperman F.* The planetary Boundary Layer of the Atmosphere. Deutsher Wetterdienst, 197