

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра физики неравновесных процессов

**Д. Ф. Сиковский**

**МЕТОДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕПЛОФИЗИКИ**

Учебное пособие

Новосибирск  
2013

УДК 536.2+519.6  
ББК В253я73-1  
С355

**Сиковский Д. Ф.** Методы вычислительной теплофизики: Учеб. пособие / Новосибир. гос. ун-т. Новосибирск, 2013. 98 с.

ISBN 978-5-4437-0164-6

В учебном пособии изложены основы численных методов, используемых при моделировании процессов переноса импульса, тепла и массы в фундаментальных и прикладных задачах аэрогидродинамики и теплофизики. Рассматриваются методы дискретизации и описываются распространенные разностные схемы решения уравнений в частных производных. Исследуются вопросы устойчивости, согласованности и сходимости конечно-разностных схем. Рассматриваются распространенные прямые и итерационные методы решения сеточных уравнений. Уделяется внимание особенностям численного моделирования основных физических процессов: конвекции, диффузии и дисперсии (в волновых процессах). Отдельные главы посвящены методам решения задач в приближении пограничного слоя и популярным численным методам решения уравнений Навье-Стокса несжимаемой жидкости.

Предназначено для студентов, магистрантов и аспирантов, специализирующихся на кафедрах физического и механико-математического профиля.

Рецензент д-р физ.-мат. наук, проф. Г. И. Сухинин

Издание подготовлено в рамках реализации *Программы развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Новосибирский государственный университет»* на 2009–2018 годы.

ISBN 978-5-4437-0164-6

© Новосибирский государственный университет, 2013  
© Сиковский Д. Ф., 2013

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	5
Глава 1. Введение .....	7
1.1. Краткая история развития вычислительной гидродинамики .....	7
1.2. Математические модели процессов переноса в потоках жидкости и газа .....	10
Глава 2. Методы дискретизации краевых задач математической физики .....	13
2.1. Основные понятия метода конечных разностей .....	13
2.2. Конечно-разностные аппроксимации дифференциальных операторов .....	14
2.3. Конечно-разностные аппроксимации дифференциальных уравнений .....	18
2.4. Принцип максимума .....	20
2.5. Конечно-разностные аппроксимации граничных условий .....	23
2.6. Метод конечных объемов .....	25
Глава 3. Устойчивость, согласованность и сходимость конечно-разностных схем .....	28
3.1. Согласованность .....	28
3.2. Устойчивость конечно-разностных схем. Метод фон Неймана .....	30
3.3. Метод дифференциального приближения (модифицированного уравнения) .....	34
Глава 4. Методы решения сеточных уравнений .....	37
4.1. Прямые методы .....	37
4.2. Итерационные методы: классификация и общие свойства .....	40
4.3. Итерационные методы Якоби и Гаусса — Зейделя .....	42
4.4. Метод последовательной верхней релаксации .....	46
4.5. Метод переменных направлений .....	46
4.6. Методы неполной факторизации .....	47
Глава 5. Конечно-разностные схемы для решения модельных уравнений .....	50
5.1. Линейные уравнения гиперболического типа .....	50
5.1.1. Метод разностей против потока .....	52
5.1.2. Схема Лакса .....	53
5.1.3. Метод Лакса — Вендроффа .....	53
5.1.4. Двухшаговый метод Лакса — Вендроффа .....	55
5.1.5. Метод Мак-Кормака .....	55

5.1.6. Схема с перешагиванием .....	55
5.1.6. Схема «Кабаре» .....	56
5.1.7. Центрированная по времени неявная схема, или метод Кранка — Николсона .....	57
5.2. Нелинейные уравнения Римана и Бюргерса .....	58
5.2.1. Принципы дискретизации нелинейных гиперболических уравнений .....	60
5.2.2. Противопоточная схема Куранта — Изаксона — Риса .....	61
5.2.3. Схема Годунова .....	62
5.2.4. Схема Лакса — Вендроффа .....	63
5.2.5. Метод Мак-Кормака .....	63
5.2.6. TVD-схемы .....	64
5.2.7. Устойчивость разностных аппроксимаций .....	66
уравнения Бюргерса .....	66
5.2.8. Метод Аллена — Чена для уравнения Бюргерса .....	68
5.2.9. Метод Мак-Кормака для уравнения Бюргерса .....	68
5.2.10. Метод Кранка — Николсона с линеаризацией .....	69
5.3. Уравнение теплопроводности .....	69
5.3.1. Явная схема .....	70
5.3.2. Неявная схема .....	70
5.3.3. Метод Кранка — Николсона .....	71
5.3.4. Комбинированный метод .....	71
5.3.5. Метод Дюфорта — Франкела .....	72
5.3.6. Двумерное уравнение теплопроводности .....	72
5.3.7. Неявный метод переменных направлений .....	73
5.3.8. Методы расщепления .....	75
5.4. Численные модели нелинейных волновых процессов .....	77
 Глава 6. Методы решения уравнений пограничного слоя .....	79
 Глава 7. Численные методы решения уравнений Навье-Стокса несжимаемой жидкости .....	83
7.1. Особенности дискретизации уравнений Навье-Стокса .....	84
7.2. Итерационные алгоритмы совместного решения уравнений переноса импульса и неразрывности .....	90
7.2.1. Методы проекции .....	91
7.2.2. Метод SIMPLE .....	92
7.2.3. Метод SIMPLER .....	93
 Список литературы .....	95

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Современную науку трудно представить без методов численного моделирования, развитию которых способствовал бурный рост производительности компьютеров. В этом отношении не является исключением и механика жидкости и газа и тепломассоперенос. Поэтому с уверенностью можно говорить о появлении нового научного направления «вычислительная гидродинамика» (CFD — от англ. computational fluid dynamics), посвященного использованию численных методов и алгоритмов для моделирования процессов переноса в потоках жидкости и газа. Развитие вычислительной гидродинамики стимулировалось прежде всего прикладными задачами моделирования, актуальными для многих промышленных установок и устройств. Появление и развитие новых физико-математических моделей процессов, численных методов и алгоритмов решения соответствующих уравнений, оформление их в удобные для пользователя программные продукты постепенно привели к созданию индустрии коммерческих пакетов CFD-программ. Начиная с 80-х гг. XX в. вычислительная гидродинамика становится одной из составляющих процесса проектирования во множестве компаний, разрабатывающих современное высокотехнологичное оборудование. Компьютерное моделирование позволяет получить характеристики разрабатываемого устройства задолго до его изготовления и внедрения и экономить тем самым значительные финансовые и материальные ресурсы, требуемые для натурных испытаний. Крупнейшие компании во всем мире более 20 лет успешно используют в проектировании комплексы программных продуктов вычислительной гидродинамики. Наличие развитой индустрии программного обеспечения CFD приводит к потребности в обслуживающих ее специалистах — программистах, физиках и математиках, задача которых — разрабатывать новые математические модели и программные продукты и адаптировать их для использования инженерным персоналом коммерческих компаний, не имеющим специального образования в области вычислительной гидродинамики.

Однако область применения вычислительной гидродинамики не ограничивается только решением прикладных задач. С ее помощью проводятся исследования трудно поддающихся изучению физических объектов, таких как, например, турбулентные течения сплошных сред. Развивающееся с середины 80-х гг. XX в. прямое численное моделирование турбулентных течений (DNS — от англ. direct numerical simulation), по мнению многих исследователей, вполне способно заменить физический эксперимент. Во многих публикациях, по-

священных развитию моделей турбулентности, для верификации последних используется сравнение с данными DNS, которые часто рассматриваются как имеющие меньшую погрешность и большую достоверность, чем доступные экспериментальные данные. Несмотря на то, что подобная точка зрения встречает во многом справедливую критику части научного сообщества, роль и удельный вес численного эксперимента в современной механике жидкости и газа продолжают год от года возрастать.

В связи с этим для современного физика-исследователя в области механики жидкости и газа важно иметь представление об основах вычислительной гидродинамики и тепломассопереноса. Это позволит не только использовать методы вычислительной гидродинамики в своей научной работе, как при написании собственных программ, так и при использовании современных пакетов CFD-программ, но и осознать и критически оценить результаты численного моделирования, полученные другими исследователями.

## **ГЛАВА 1 ВВЕДЕНИЕ**

### **1.1. Краткая история развития вычислительной гидродинамики**

Хотя численные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных разрабатывались еще в начале XX в., интенсивное развитие методов вычислительной гидрогазодинамики началось с появлением компьютеров в начале 50-х гг. прошлого века. После того, как в первых компьютерных расчетах выяснилось, что аппроксимирующие дифференциальные уравнения и конечно-разностные схемы могут быть неустойчивыми, началось развитие теории устойчивости и сходимости разностных схем. В середине 50-х гг. ряд исследователей (В. С. Рябенский, Дж. фон Нейман, Р. Д. Рихтмайер, А. Ф. Филиппов, П. Лакс) независимо друг от друга и с разных позиций сформулировали необходимое и достаточное условие сходимости конечно-разностной аппроксимации линейных дифференциальных уравнений, которое во многих зарубежных публикациях упоминается как теорема Лакса об эквивалентности. Понятия аппроксимации, устойчивости и сходимости сформировали базу для поиска и создания эффективных разностных схем с целью решения задач математической физики. Следует отметить, что условие устойчивости разностных схем, используемых для решения уравнений гиперболического типа, было сформулировано еще в 1928 г. в известной работе Р. Куранта, К. Фридрихса, Г. Леви. В середине 50-х гг. XX в. Дж. Дугласом, Д. Писменом и Г. Рэчфордом был предложен метод переменных направлений для эффективного решения многомерных задач, оказавший большое влияние на развитие алгоритмов в различных областях прикладной математики. В это же время Н. И. Булеев начал разработку метода неполной факторизации, который в 1960-х гг. стал

известен и за рубежом. Этот метод положил начало новому направлению эффективных итерационных алгоритмов решения систем уравнений с разреженными матрицами.

В середине 50 — начале 60-х гг. С. К. Годуновым, П. Лаксом и Б. Вендроффом были предложены консервативные разностные схемы сквозного счета. Одновременно большой вклад в развитие современных методов вычислительной гидродинамики внесли сотрудники Лос-Аламосской лаборатории США, разработавшие многие из современных численных методов, таких как методы частиц в ячейках Ф. Х. Харлоу, методы маркеров и ячеек, эйлерово-лагранжевы методы и др. Советскими математиками Н. Н. Яненко, Г. И. Марчуком, А. А. Самарским и другими разработаны методы расщепления, сводящие многомерную задачу к совокупности одномерных. Н. Н. Яненко и Ю. И. Шокин сформулировали метод дифференциального приближения для анализа аппроксимации и устойчивости конечно-разностных схем. Р. П. Федоренко предложил метод, положивший начало развитию многосеточных методов (multigrid methods), в настоящее время являющихся одними из эффективнейших итерационных методов решения уравнений переноса. В конце 60 — начале 70-х гг. группа Д. Б. Сполдинга, исследующая процессы горения, разработала модель обрыва вихря (Eddy-Break-Up) турбулентного горения и на основе работ А. Н. Колмогорова развила  $k$ - $\epsilon$ -модель турбулентности, известную как стандартная  $k$ - $\epsilon$ -модель Лаундера — Сполдинга. С. В. Патанкарком был предложен метод SIMPLE численного решения уравнений Навье-Стокса, до сих пор используемый в большинстве современных CFD-программ, и создан предтеча современных пакетов CFD-программ — код TEACH. В дальнейшем участники указанной группы (Б. Лаундер, К. Ханьялич, В. Роди, С. Поуп и др.) внесли значительный вклад в развитие современных моделей турбулентности, таких как дифференциальные и алгебраические модели переноса напряжений Рейнольдса, PDF-метод моделирования турбулентности.

Параллельно развивались универсальные программные CFD-продукты, на основе которых в начале 80-х гг. XX в. были созданы пакеты программ PHOENICS, разработанные компанией CHAM Ltd. (созданной Д. Б. Сполдингом в 1974 г.) и STAR CD (Computational Dynamics Ltd). В 1983 г. была выпущена первая версия универсального пакета программ FLUENT, разработанного Ф. Бойсаном, Б. Пателом и М. Энгельманом и ставшего впоследствии одним из лидеров рынка коммерческих CFD-программ универсального назначения, который начал формироваться в 80-х гг. XX в. Промышленные компании отдавали предпочтение использованию коммерческих CFD-кодов вместо разработки собственных компьютерных программ.

Начиная с 90-х гг. XX в. значительный рост быстродействия и объема оперативной памяти компьютеров и достижения в вычислительных технологиях привели к широкому внедрению коммерческих пакетов CFD-программ в промышленных компаниях, в которых они, как правило, использовались инжене-



рами R&D отделов, имеющими квалификацию в области гидроаэродинамики. В то же время пакеты CFD-программ активно применялись не только промышленными и инновационными компаниями, но и академической наукой для верификации новых физических моделей процессов переноса, которые могли быть легко включены в CFD-код и апробированы в течениях со сложной геометрией, затрудняющей аналитическое исследование.

Вычислительная гидродинамика используется во многих отраслях промышленности и науки для решения задач, связанных с течением жидкости или газа и тепло- и массопереносом. Ниже приведен далеко не полный список областей применения вычислительной гидродинамики.

- **Аэрокосмическая промышленность:** аэродинамика, дизайн крыл и лопастей, реактивных снарядов и ракет, пассажирских кабин.

- **Автомобилестроение:** внутреннее сгорание, увеличение комфорта пассажиров.

- **Биология:** исследования полета птиц и насекомых, движения рыб.

- **Биомедицина:** сердечные клапаны, гидродинамика кровеносных сосудов, фильтры и респираторы.

- **Строительная индустрия:** проектирование мостов, надстроек зданий, крупных конструкций, очистка воздуха в помещениях, вентиляция, кондиционирование.

- **Химические технологии:** перемешивание, разделение, химическое реагирование.

- **Электроника:** охлаждение электронных устройств.

- **Экология и безопасность:** контроль промышленных отходов и загрязнений, противопожарная безопасность, защита речных и морских берегов.

- **Кораблестроение:** ветровая и волновая нагрузки, силовые установки.

- **Машиностроение:** насосы, вентиляторы, теплообменники.

- **Метеорология:** прогноз погоды.

- **Океанография:** течения в реках и океанах.

- **Энергетика:** бойлеры, котлы, топки, сосуды давления, гидравлические тракты ядерных реакторов.

- **Спортивная промышленность:** дизайн гоночных автомобилей, яхт и байдарок, велосипедных шлемов, плавательных очков, мячей для тенниса и гольфа и т. п.

- **Турбомашиностроение:** турбины, охлаждение лопаток, компрессоры Turbines, blade cooling, compressors, гидротрансформаторы.

В настоящее время в целях дальнейшего распространения применения пакетов CFD-программ в промышленности перед разработчиками стоят задачи упрощения и автоматизации процедуры их использования инженерным персоналом, не имеющим специального образования в области гидроаэродинамики и вычислительной математики, импорта геометрии расчетной области, генерации вычислительной сетки и контроля процесса решения.

Одним из основных направлений здесь является интеграция с конструкторскими программами семейства CAD, SolidWorks и др. [Boysan, 2005]. В научном плане важным направлением развития вычислительной гидродинамики является дальнейшее развитие моделей процессов переноса, в частности моделей сложных турбулентных течений и турбулентного теплопереноса. Именно адекватный набор современных физических моделей процессов делает конкурентоспособным современный пакет CFD-программ на рынке программного обеспечения.

## 1.2. Математические модели процессов переноса в потоках жидкости и газа

Большинство математических моделей механики жидкости и газа основано на системе уравнений Навье-Стокса [Ландау, Лифшиц, 1986]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = f_i + \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (1.2)$$

где  $\rho$  — плотность,  $u_i$  — скорость,  $p$  — давление,  $f_i$  — массовая сила,  $\Pi_{ij}$  — тензор напряжений, имеющий вид

$$\Pi_{ij} = \mu \left( S_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} S_{ll} \right) + \zeta \delta_{ij} S_{ll}, \quad (1.3)$$

в котором  $S_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$  — тензор деформаций,  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости,  $\zeta$  — коэффициент второй вязкости.

Соотношение (1.3), часто называемое реологическим, справедливо для ньютоновских сред. Для сред с более сложной внутренней структурой реологическое соотношение между тензорами напряжений и деформаций может иметь более сложный и даже нелокальный вид:

$$\Pi_{ij}(\vec{x}, t) = L_{ij} \left[ \mathbf{S}(\vec{x}', t'); \vec{x}, t \right], \quad t' < t$$

где  $L_{ij}$  — некоторый функционал, в общем случае зависящий от состояния тензорного поля деформаций в предшествующие моменты времени. К таким средам можно отнести, например, турбулентные течения, для моделирования которых используют осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса (1.1)–(1.3) — так называемый метод RANS (от англ. Reynolds averaged Navier-Stokes). Однако тензор напряжений  $\Pi_{ij}$  включает в себя напряжения Рейнольдса, созданные турбулентными пульсациями скорости. В дифференциальных моделях переноса напряжений Рейнольдса для них записываются отдельные

уравнения переноса, поэтому величина тензора  $\Pi_{ij}$  в данной точке потока зависит от состояния течения во всей области задачи.

Для течений с неоднородным температурным полем необходимо рассмотрение процессов переноса тепла. Для несжимаемой жидкости уравнение переноса тепла выглядит следующим образом:

$$\rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \Pi_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \sigma_T,$$

где  $T$  — температура,  $c$  — изобарная теплоемкость,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $\sigma_T$  — удельная мощность внутренних источников тепла, например, в результате протекания в потоке химических реакций. В последнем случае необходимо также моделировать массоперенос, распространенной моделью которого является уравнение конвективной диффузии:

$$\frac{\partial(\rho C)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i C)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho D \frac{\partial C}{\partial x_i} \right) + \sigma_C,$$

где  $C$  — массовая концентрация вещества,  $D$  — коэффициент диффузии,  $\sigma_C$  — удельные источники вещества.

Приведенные примеры показывают, что уравнения переноса различных субстанций часто имеют похожую структуру. Действительно, опыт математического моделирования различных физических и физико-химических процессов, таких как движение заряженных частиц в электромагнитном поле, течение и тепло-массоперенос в пористых средах, влагоперенос в почвах и т. д., показывает, что большинство этих процессов можно моделировать в рамках обобщенного уравнения переноса некоторой субстанции  $\Phi$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial u_i \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) + \sigma_\Phi, \tag{1.4}$$

выражающего баланс конвективного и диффузионного переноса субстанции  $\Phi$  с внутренними источниками (стоками) [Патанкар, 1984]. Единая форма возможных уравнений переноса облегчает программирование универсальных вычислительных алгоритмов решения уравнений, придавая им единообразный вид.

Встречающиеся на практике граничные условия для уравнений переноса на ограничивающих поток поверхностях в большинстве случаев также можно выразить в универсальной форме как связь между потоком субстанции через ограничивающую поверхность и ее величиной (граничное условие 3-го рода):

$$\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_s + \beta \Phi \Big|_s = \gamma,$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — некоторые коэффициенты, которые, вообще говоря, могут быть функциями  $\Phi$ .

При постановке задачи численного решения уравнений переноса согласно некоторой модели важно убедиться в корректности ее постановки, гарантирующей существование единственного решения, непрерывно зависящего от начальных и граничных условий. Если неустойчивы уравнения исходной континуальной модели процесса, то, скорее всего, будет неустойчива и дискретная численная модель, поэтому численное моделирование должно предваряться анализом корректности постановки задачи, ее устойчивости по отношению к малым возмущениям.

Обобщенное уравнение переноса (1.4) включает в себя описание двух наиболее важных процессов: конвекции и диффузии. Различный характер этих процессов приводит к различиям в методах дискретизации соответствующих членов уравнения (1.4). Поэтому в гл. 5 эти методы будут рассмотрены для простейших, так называемых модельных уравнений, в которых эти эффекты (конвекции и диффузии) преобладают. Такой подход позволяет на простых примерах подробно изучить основные свойства численных решений, присущие и более сложным системам уравнений, понять вытекающие из них принципы построения конечно-разностных схем и вычислительных алгоритмов.

## ГЛАВА 2

### МЕТОДЫ ДИСКРЕТИЗАЦИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Основой метода конечных разностей является дискретизация — замена непрерывной области совокупностью изолированных точек (вычислительная сетка), причем решение уравнений ищется только в этих точках (узлах сетки). Дифференциальные операторы аппроксимируются конечными разностями, и решение уравнения в частных производных сводится к решению системы алгебраических уравнений.

#### 2.1. Основные понятия метода конечных разностей

Первым шагом применения метода конечных разностей является переход от непрерывной области к вычислительной сетке. Наиболее просто это осуществляется для задач, сформулированных в декартовой системе координат в области, границы которой совпадают с координатными линиями. Рассмотрим для простоты двумерную область — прямоугольник  $0 \leq x \leq L_x$ ,  $0 \leq y \leq L_y$ . Введем декартову сетку, узлы которой являются точками пересечений линий декартовой системы координат с абсциссами  $\{x_i\}$  и ординатами  $\{y_j\}$ , где  $i = 1, \dots, N_x$ ,  $j = 1, \dots, N_y$  — индексы узлов,  $N_x$ ,  $N_y$  — количество узлов вдоль  $x$ - и  $y$ -направлений. Значение вычисляемой переменной в узле сетки с пространственными координатами  $x_i$  и  $y_j$  обозначается нижними индексами:  $u_{ij} = u(x_i, y_j)$ . Для трехмерных задач вводится дополнительный нижний индекс  $k$ . Для нестационарных задач, в которых имеется зависимость от времени, вводится временная сетка  $\{t_n\}$ , при этом номер узла во времени обозначается верхним индексом:

$$u_{ij}^n = u(x_i, y_j, t_n)$$

При решении задач маршевым методом номер узла сетки по маршевой координате также обозначается верхним индексом.

В случае, если в уравнениях присутствуют производные не только от физической величины, но и от ее градиентов (потоков), удобно вводить также значения функции в полудельных узлах сетки, например:

$$u_{i-1/2,j} = u\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, y_j\right).$$

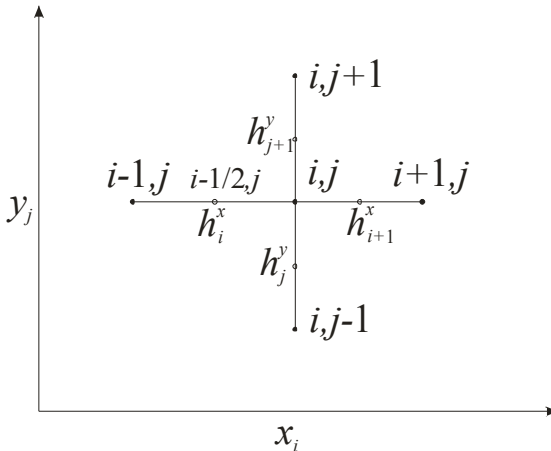


Рис. 1. Вычислительная молекула

Аппроксимация дифференциальных уравнений осуществляется в каждом узле вычислительной сетки, при этом используются соседние узлы сетки. Совокупность этих узлов называют *шаблоном*, или *вычислительной молекулой* (рис. 1).

В конечно-разностных выражениях используются величины *шагов сетки* по соответствующим пространственным координатам, которые обозначаются как

$$h_i^x = x_i - x_{i-1}.$$

Часто используются также расстояния между полудельными узлами, обозначаемые следующим образом:

$$\tilde{h}_i^x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2} = (x_{i+1} - x_{i-1})/2 = (h_i^x + h_{i+1}^x)/2.$$

Пример шаблона для двумерной задачи в декартовых координатах приведен на рис. 1. Этот пример сетки является простейшим примером наиболее часто применяемой в методе конечных разностей *структурированной сетки*. Структурированными называются сетки, в которых каждый узел однозначно идентифицируется индексами  $i, j, k$  и соответствующими декартовыми координатами  $x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}$ . *Неструктурированные сетки* не имеют такого порядка расположения узлов, например, в случае, когда узлы сетки расположены в вершинах треугольников или тетраэдров, и используются в таких методах дискретизации, как методы конечных объемов (см. п. 2.6) и конечных элементов.

## 2.2. Конечно-разностные аппроксимации дифференциальных операторов

Для получения конечно-разностной аппроксимации выражений, содержащих производные, используется аппроксимация искомой функции конечным

числом членов ее разложения ряда Тейлора в окрестности данного узла сетки. Для одномерного случая в окрестности узла  $x_i$  ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + h_{i+1} \frac{du(x_i)}{dx} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} h_{i+1}^n \frac{d^{(n)}u(x_i)}{dx^{(n)}} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} h_{i+1}^{n+1} \frac{d^{(n+1)}u(\xi_i)}{dx^{(n+1)}}, \tag{2.1}$$

где  $x_i < \xi_i < x_{i+1}$ .

Предположим, что функция  $u(x)$  не имеет особенностей в точке  $x_i$ , а характерный масштаб длины ее неоднородности<sup>1</sup> равен  $L$ . Тогда отношение порядка величины каждого последующего члена ряда Тейлора (2.1) к предыдущему имеет порядок  $h_i/L$ . Отсюда следует необходимое условие применимости ряда Тейлора для конечно-разностной аппроксимации непрерывной функции: шаг сетки должен быть существенно меньше масштаба длины неоднородности функции

$$h_i \ll L. \tag{2.2}$$

Конечно-разностная аппроксимация дифференциального оператора вносит погрешность, традиционное определение которой формулируется следующим образом [Ильин, 2000]: пусть  $Lu(x)$  — дифференциальное выражение (оператор), определенное в области изменения аргумента, а  $L_h u_i$  — его конечно-разностное выражение (оператор) в точке  $x_i$  из этой области. Если при достаточно малых шагах сетки  $h$  имеет место соотношение

$$Lu(x_i) - L_h u_i = \psi_i = O(h^\gamma), \quad \gamma > 0, \tag{2.3}$$

то  $\psi_i$  называется погрешностью аппроксимации (невязкой), а величина  $\gamma$  — порядком аппроксимации<sup>2</sup>.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся конечно-разностные аппроксимации первой производной. Правая и левая конечные разности первого порядка имеют следующий вид:

$$\nabla^+ u_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i + \psi_i^+ \tag{2.4}$$

$$\nabla^- u_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i + \psi_i^- \tag{2.5}$$

где  $\psi_i^\pm$  — погрешности аппроксимаций.

<sup>1</sup> Расстояние, на котором изменение величины функции имеет порядок ее самой, т. е.  $|u(x+L) - u(x)| \sim |u(x)|$ . Отсюда, если первая производная не обращается в нуль, масштаб  $L$  может быть оценен как  $L \sim |u(x)/u'(x)|$ .

<sup>2</sup> Символ  $O$  широко используется в асимптотических методах. Выражение  $f(x) = O(g(x))$  для всех  $x \in S$  означает, что существует такая константа  $K$ , не зависящая от  $x$ , что для всех  $x \in S$  имеет место  $|f(x)| \leq K |g(x)|$ .

Из формулы Тейлора следуют выражения для погрешностей аппроксимаций:

$$\Psi_i^+ = \frac{h_{i+1}}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i + \frac{h_{i+1}^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_i + O(h_{i+1}^3) \quad (2.6)$$

$$\Psi_i^- = -\frac{h_i}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i + \frac{h_i^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_i + O(h_i^3) \quad (2.7)$$

откуда следует, что правая и левая разности имеют погрешность аппроксимации первого порядка.

Если сложим правую разность (2.4), умноженную на  $h_i$ , и левую разность (2.5), умноженную на  $h_{i+1}$ , то главные члены погрешностей сократятся, что позволит нам повысить порядок аппроксимации производной до второго:

$$\nabla u_i = \frac{h_i \nabla^+ u_i + h_{i+1} \nabla^- u_i}{h_i + h_{i+1}} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i + \frac{h_i h_{i+1}}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_i + O(h_i^3) \quad (2.8)$$

На равномерной сетке с одинаковыми шагами  $h_i = h$  из (2.8) получаем центральную разность второго порядка аппроксимации:

$$\nabla u_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}. \quad (2.9)$$

Рассмотрим теперь аппроксимации производных более высокого порядка. Для получения аппроксимации второй производной применим два раза центрально-разностный оператор, после чего получим конечную разность второго порядка:

$$\nabla^2 u_i = \frac{\nabla u_{i+1/2} - \nabla u_{i-1/2}}{\tilde{h}_i} = \frac{1}{\tilde{h}_i} \left( \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right), \quad (2.10)$$

где  $\tilde{h}_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$  — шаг «полуцелой сетки».

Применяя формулу Тейлора, можно показать, что погрешность аппроксимации конечной разности (2.10) согласно определению (2.3) имеет первый порядок:

$$\nabla^2 u_i = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i + \frac{h_{i+1} - h_i}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_i + \frac{h_{i+1}^2 - h_i h_{i+1} + h_i^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_i + O(h_i^3) \quad (2.11)$$

Однако если сетка равномерная, то второй член в правой части (2.11) равен нулю, и погрешность аппроксимации становится второго порядка:

$$\nabla^2 u_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i + O(h^2). \quad (2.12)$$

Из сравнения аппроксимаций второго порядка первой производной для неравномерной (2.8) и равномерной (2.9) сеток видно, что выражения для



конечно-разностной аппроксимации на неравномерной сетке имеют более громоздкий вид, чем на равномерной сетке. Поэтому использование равномерной сетки проще с точки зрения программной реализации. С другой стороны, во многих случаях, когда решение имеет области резкого изменения, необходимо сгущение сетки в этих областях для выполнения условия (2.2). Компромисс может быть достигнут при использовании так называемых квазиравномерных сеток, для которых изменение соседних шагов сетки невелико:

$$h_{i+1} - h_i = O(h_i^2/L_i), \tag{2.13}$$

где  $L_i$  — оценка локального масштаба длины неоднородности решения в окрестности  $i$ -го узла.

Для таких сеток конечно-разностная аппроксимация (2.10) для второй производной будет согласно (2.11) и (2.13) иметь второй порядок погрешности. Простейшим примером квазиравномерной сетки является сетка со сгущением узлов в геометрической прогрессии:

$$h_{i+1} - h_i = \varepsilon h_i, \tag{2.14}$$

где  $\varepsilon = O(h_i/L_i)$  — малая положительная или отрицательная величина. Экспоненциальный рост (убывание) шага сетки с увеличением индекса узла позволяет добиться значительного сгущения (разрежения) квазиравномерной сетки в нужных местах.

В задачах вычислительной гидродинамики часто встречается оператор диффузионного переноса

$$Du \equiv \frac{d}{dx} \left[ \lambda(x) \frac{du}{dx} \right], \tag{2.15}$$

который моделирует процесс диффузии, описываемый законом Фика с переменным коэффициентом диффузии  $\lambda(x)$ . Для выражения (2.15) конечно-разностная аппроксимация имеет вид

$$\frac{d}{dx} \left[ \lambda(x) \frac{du}{dx} \right] \Big|_i = \frac{1}{h_i} \left( \lambda_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - \lambda_{i-1/2} \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right) + \psi_i, \tag{2.16}$$

с погрешностью аппроксимации

$$\psi_i = \frac{h_{i+1} - h_i}{12} \left[ \lambda u''' + 3(\lambda u')'' \right] + O(h^2), \tag{2.17}$$

имеющей второй порядок на квазиравномерных сетках.

Для получения аппроксимации высокого порядка точности приходится увеличивать количество используемых точек вычислительного шаблона. Имеется, однако, возможность, не используя дополнительных точек сетки, повысить порядок аппроксимации с помощью так называемых компактных аппроксима-

ций. Рассмотрим выражение для невязки конечно разностной аппроксимации второй производной на равномерной сетке:

$$\nabla^2 u_i = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_i + O(h^4). \quad (2.18)$$

Введем обозначение  $q = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  и перепишем выражение следующим образом:

$$\nabla^2 u_i = q_i + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \Big|_i + O(h^4). \quad (2.19)$$

Не теряя второго порядка точности, заменим вторую производную  $q$  ее конечно-разностной аппроксимацией (2.12):

$$\nabla^2 u_i = q_i + \frac{h^2}{12} \nabla^2 q_i + O(h^4),$$

или

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = \frac{q_{i+1} + 10q_i + q_{i-1}}{12} + O(h^4). \quad (2.20)$$

Выражение (2.20) является примером компактной аппроксимации второй производной четвертого порядка точности на трехточечном шаблоне. Для нахождения значений  $q_i$  в каждом узле сетки необходимо решить систему линейных уравнений (2.20), например, с помощью метода прогонки (см. п. 4.1).

### 2.3. Конечно-разностные аппроксимации дифференциальных уравнений

Определение погрешности аппроксимации конечно-разностного уравнения, аппроксимирующего дифференциальное уравнение, отличается от определения погрешности разностного выражения, приведенного в п. 2.2: *если при достаточно малых шагах сетки  $h$  после подстановки решения  $u(x)$  дифференциального уравнения  $Lu(x) = f(x)$  в его конечно-разностную аппроксимацию  $L_h U_i = P_h f_i$  в виде  $u_i = u(x_i)$  выполняется соотношение*

$$L_h u_i - P_h f_i = \psi_i = O(h^\gamma), \quad \gamma > 0 \quad (2.21)$$

*то  $\psi_i$  называется погрешностью аппроксимации (невязкой) разностного уравнения, а величина  $\gamma$  — порядком аппроксимации.*

Важно отметить, что если погрешность аппроксимации разностного выражения определяется на любой, достаточно гладкой функции, то для разностного уравнения — только на решении дифференциального уравнения.

Рассмотрим конечно-разностную аппроксимацию одномерного стационарного уравнения конвекции-диффузии

$$u(x) \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ \lambda(x) \frac{d\varphi}{dx} \right] + \sigma(x) \quad (2.22)$$

с помощью конечно-разностных выражений, полученных в п. 2.2.

Используя для аппроксимации диффузионного оператора выражение (2.16), а для конвективного оператора — суперпозицию правой (2.4) и левой (2.5) конечных разностей, получим конечно-разностную аппроксимацию

$$u_i \left[ \alpha \nabla^+ \varphi_i + (1 - \alpha) \nabla^- \varphi_i \right] = \frac{1}{\tilde{h}_i} \left( \lambda_{i+1/2} \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h_{i+1}} - \lambda_{i-1/2} \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h_i} \right) + \sigma_i \quad (2.23)$$

где  $\alpha$  — некоторое положительное число из интервала  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Погрешность аппроксимации уравнения (2.23) будет равна сумме погрешностей аппроксимации входящих в него разностных выражений, при этом члены с наибольшим порядком величины по шагу сетки имеют вид

$$\frac{u_i \left[ \alpha h_{i+1} - (1 - \alpha) h_i \right]}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_i + O(h^2),$$

т. е. порядок аппроксимации схемы (2.23) при произвольных  $\alpha$  — первый, за исключением случая  $\alpha = h_i / (h_i + h_{i+1})$ , когда порядок аппроксимации равен второму.

Результатом конечно-разностной аппроксимации является система алгебраических уравнений для значений функции в узлах сетки. Конечно-разностную схему (2.23) можно записать в виде трехточечного разностного уравнения

$$a_i \varphi_{i+1} + d_i \varphi_i + b_i \varphi_{i-1} = c_i, \quad (2.24)$$

где

$$\begin{aligned} a_i &= \alpha \frac{u_i}{h_{i+1}} - \frac{\lambda_{i+1/2}}{\tilde{h}_i h_{i+1}}, \\ b_i &= -(1 - \alpha) \frac{u_i}{h_i} - \frac{\lambda_{i-1/2}}{\tilde{h}_i h_i}, \\ d_i &= -a_i - b_i, \quad c_i = \sigma_i. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Систему уравнений (2.24) удобно записать в матричном виде

$$A\Phi = C. \quad (2.26)$$

В этом случае квадратная матрица коэффициентов  $A$  будет трехдиагональной. На главной диагонали матрицы  $A$  расположены коэффициенты  $A_{ii} = d_i$ , которые называют диагональными коэффициентами, на соседних диагоналях с главной располагаются коэффициенты  $A_{i+1,i} = a_i$ ,  $A_{i,i-1} = b_i$ , которые называют внедиагональными коэффициентами разностного уравнения.

Для существования решения системы (2.26) важно, чтобы матрица  $A$  была невырождена, т. е. существовала обратная матрица  $A^{-1}$ . Для трехдиагональной матрицы условия невырожденности согласно теореме Тауски имеют вид условий диагонального преобладания:

$$|d_i| \geq |a_i| + |b_i|, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.27)$$

причем хотя бы для одного  $i$  неравенство является строгим [Ильин, 2000].

Однако для того, чтобы решение задачи (2.24) сохраняло свойства, присущие непрерывной задаче, необходимо выполнение еще одного условия.

## 2.4. Принцип максимума

Уравнение (2.22) является одномерным вариантом многомерного стационарного уравнения конвекции-диффузии, которое имеет эллиптический тип. Решения краевых задач для эллиптических уравнений удовлетворяют так называемому *принципу максимума* [Самарский, Вабищевич, 2004], который для уравнения (2.22) может быть сформулирован в следующем виде: *пусть в уравнении (2.22)  $\sigma(x) \geq 0$  ( $\sigma(x) \leq 0$ ), тогда решение (2.22) удовлетворяет условию  $\varphi(x) \geq 0$  ( $\varphi(x) \leq 0$ ).*

Чтобы убедиться в этом, предположим, что при  $\sigma(x) \geq 0$  в некоторой точке  $x = x_0$  решение достигает отрицательного минимума, т. е.

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} > 0, \quad \text{при } x = x_0. \quad (2.28)$$

В точке  $x = x_0$  уравнение (2.22) записывается в виде

$$\lambda(x_0) \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \sigma(x_0) = 0. \quad (2.29)$$

В силу условий принципа максимума и (2.28) левая часть (2.29) должна быть больше нуля, тем самым приходим к противоречию.

Для уравнения конвекции-диффузии с неотрицательными источниками в правой части  $\sigma(x) \geq 0$  принцип максимума означает сохранение положительности решения для концентрации субстанции  $\varphi$ . Разностные схемы, удовлетворяющие принципу максимума, называются *монотонными*.

Для трехдиагональной системы уравнений (2.24) принцип максимума формулируется следующим образом [Самарский, Вабищевич, 2004]: *если в разностном уравнении (2.24) правая часть положительна (отрицательна),  $c_i \geq 0$  ( $c_i \leq 0$ ), то при выполнении условий  $d_i > 0$ ,  $a_i, b_i < 0$ , а также условия диагонального преобладания  $d_i \geq -a_i - b_i$  для всех  $i$  имеет место  $\varphi_i \geq 0$  ( $\varphi_i \leq 0$ )*

Доказательство проводится от противного. Предположим, что при положительной правой части  $c_i \geq 0$  решение  $\varphi_i$  не везде неотрицательно. Пусть  $\varphi_k$  — наименьшее отрицательное значение. Тогда можно записать:

$$a_k \varphi_{k+1} + d_k \varphi_k + b_k \varphi_{k-1} = c_k.$$

Правая часть неотрицательна, а левую часть с учетом условий принципа максимума можно представить в виде

$$a_k \varphi_{k+1} + d_k \varphi_k + b_k \varphi_{k-1} = a_k (\varphi_{k+1} - \varphi_k) + (d_k + a_k + b_k) \varphi_k + b_k (\varphi_{k-1} - \varphi_k) < 0.$$

На основе полученного противоречия устанавливается, что  $\varphi_i \geq 0$  для всех узлов  $i$ .

Рассмотрим условия монотонности для выписанной выше схемы (2.23). Из условия отрицательности внедиагональных коэффициентов следует:

$$\begin{aligned} \alpha \frac{u_i \bar{h}_i}{\lambda_{i+1/2}} &\leq 1, \text{ при } u_i > 0, \\ -(1 - \alpha) \frac{u_i \bar{h}_i}{\lambda_{i-1/2}} &\leq 1, \text{ при } u_i < 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Схема с центрально-разностной аппроксимацией конвективного члена  $\alpha = 1/2$ , которая имеет второй порядок аппроксимации, монотонна при выполнении следующего условия на сеточное число Пекле:

$$Pe_i = \frac{u_i \bar{h}_i}{\min \{ \lambda_{i+1/2}, \lambda_{i-1/2} \}} \leq 2. \quad (2.31)$$

Условие монотонности (2.31) необходимо для обеспечения отсутствия осцилляций в численном решении системы уравнений (2.24). Как показывает практика, такие осцилляции возникают при нарушении условия (2.31), которое накладывает ограничение на величину шага сетки. Поскольку при больших скоростях такое ограничение может оказаться трудновыполнимым, актуальной задачей является модификация конечно-разностной схемы с целью удовлетворения принципу максимума, или ее *монотонизация*.

Чтобы сделать схему монотонной при любых сеточных числах Пекле, используют аппроксимацию конвективного члена разностями против потока, т. е. конечной разностью первого порядка, направление которой зависит от знака скорости:

$$\begin{aligned} u(x) \frac{d\varphi}{dx} \Big|_i &= u_i^+ \nabla^- \varphi_i + u_i^- \nabla^+ \varphi_i, \\ u_i^+ &= \frac{u_i + |u_i|}{2}, \quad u_i^- = \frac{u_i - |u_i|}{2}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Для реализации (2.32) в схеме (2.23) необходимо выбрать:

$$\alpha = 0, \text{ при } u_i > 0 \text{ и } \alpha = 1, \text{ при } u_i < 0. \quad (2.33)$$

Однако схема с разностями против потока (2.23), (2.33) имеет первый порядок аппроксимации, что не всегда приемлемо. Рассмотрим один из способов

повышения точности аппроксимации противопоточной схемы при сохранении монотонности схемы.

Погрешность аппроксимации схемы с разностями против потока (2.23), (2.33) равна

$$\begin{aligned} \Psi_i &= \frac{(u_i^+ h_{i+1} - u_i^- h_i)}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_i + O(h^2) = \frac{[|u_i| \hbar_i + u_i (h_{i+1} - h_i)/2]}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_i + O(h^2) = \\ &= \frac{|u_i| \hbar_i}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_i + O(h^2). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Как видно из выражения (2.34), главный член погрешности имеет диффузионный характер, соответствующий увеличению физического коэффициента диффузии  $\lambda(x)$  на величину  $|u_i| \hbar_i / 2$ . Очевидно, что для достижения второго порядка аппроксимации необходимо вычесть эту величину из физического коэффициента диффузии, т. е. видоизменить коэффициенты диффузии в схеме (2.23), (2.33) следующим образом:

$$\lambda_{i\pm 1/2} \rightarrow \lambda_{i\pm 1/2} - \frac{|u_i| \hbar_i}{2}. \quad (2.35)$$

Порядок аппроксимации схемы не изменится, если вместо (2.35) принять

$$\lambda_{i\pm 1/2} \rightarrow \frac{\lambda_{i\pm 1/2}}{1 + \frac{|u_i| \hbar_i}{2\lambda_{i\pm 1/2}}}. \quad (2.36)$$

Полученная конечно-разностная схема

$$\begin{aligned} u_i^+ \nabla^- \varphi_i + u_i^- \nabla^+ \varphi_i &= \frac{1}{\hbar_i} \left( \frac{\lambda_{i+1/2}}{1 + 0.5|u_i| \hbar_i / \lambda_{i+1/2}} \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h_{i+1}} - \right. \\ &\left. - \frac{\lambda_{i-1/2}}{1 + 0.5|u_i| \hbar_i / \lambda_{i-1/2}} \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h_i} \right) + \sigma_i \end{aligned} \quad (2.37)$$

называется схемой Самарского [Самарский, Гулин, 1989].

Существуют и другие способы монотонизации конечно-разностных схем для уравнения конвекции-диффузии [Самарский, Вабищевич, 2004]. Как и рассмотренный пример, монотонизация разностных схем основана на том или ином подавлении конвективных слагаемых за счет изменения либо диффузионного коэффициента, либо за счет уменьшения самих конвективных слагаемых. Такие процедуры оправданы только для задач, в которых преобладание конвективных слагаемых имеет место лишь в небольшой части расчетной области, например в пограничном слое или внутри ударной волны. Для того, чтобы сохранить качество решения и его монотонность, приходится жертвовать точностью аппроксимации в этой локальной области. Поэтому важна точность схемы только вне этой области. Так, порядок аппроксимации схемы

Самарского будет вторым только в областях, где сеточное число Пекле  $|u_i| \hbar_i / \lambda_{i+1/2}$  мало.

## 2.5. Конечно-разностные аппроксимации граничных условий

Правильная аппроксимация граничных условий является важным этапом численного моделирования. Рассмотрим типичные ситуации постановки граничных условий на примере одномерной задачи в области  $a < x < b$ . Начнем с условия Дирихле:

$$u|_{x=a} = u_a, \quad u|_{x=b} = u_b. \quad (2.38)$$

Наиболее простым будет случай, когда граница области совпадает с узлами сетки, т. е.  $x_0 = a$ ,  $x_N = b$ . При этом конечно-разностные уравнения дополняются соотношениями

$$u_0 = u_a, \quad u_N = u_b, \quad (2.39)$$

являющимися точными.

Часто встречается случай, когда граница области не совпадает с узлом сетки. Тогда можно использовать разложение решения в ряд Тейлора вблизи ближайшего к границе узла сетки:

$$u_a = u_0 + u'_0(a - x_0) + O(h^2).$$

Для сохранения второго порядка аппроксимации достаточно аппроксимировать  $u'_0$  правой разностью с первым порядком, откуда следует

$$u'_0 = \frac{u_a h_1 - u_1(a - x_0)}{x_1 - a}. \quad (2.40)$$

Если при построении сетки нет возможности поместить первый узел на границе, то нужно стремиться к тому, чтобы граница области располагалась ровно посередине между крайними узлами сетки, так как в этом случае условие (2.40) выглядит наиболее просто:

$$u'_0 = \frac{u_a + u_1}{2} + O(h_1^2). \quad (2.41)$$

Поскольку условие Неймана является частным случаем условия третьего рода, то

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = \gamma, \quad \text{при } x = a \text{ или } x = b, \quad (2.42)$$

где  $n$  — внешняя нормаль к границе.

Располагая левую границу  $a$  между узлами  $x_0$  и  $x_1$ , аппроксимируя производную по нормали центральной разностью (2.9) с учетом  $\partial/\partial n = -\partial/\partial x$  и используя (2.41), получим:

$$\alpha \frac{u_0 + u_1}{2} - \beta \frac{u_1 - u_0}{h_1} = \gamma,$$

или

$$u_0 \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{h_1} \right) + u_1 \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{h_1} \right) = \gamma. \quad (2.43)$$

Граничное условие может существенно повлиять на устойчивость и монотонность конечно-разностной формулировки задачи. Так, применяя к (2.43) принцип максимума для трехточечных разностных схем из п. 2.4, получим, что соотношение (2.43) будет обладать свойством монотонности при соблюдении условий

$$\alpha\beta \geq 0, \quad |\alpha| h_1 \leq 2|\beta|. \quad (2.44)$$

Первое условие совпадает с условием корректности континуальной задачи [Владимиров, 1988], а второе выполняется только при достаточно малом шаге сетки. Например, конечно-разностное соотношение (2.43) при  $\alpha = 0$ , соответствующее граничному условию Неймана, согласно (2.44) не будет нарушать монотонность дискретной задачи, а то же самое соотношение, соответствующее условию Дирихле для  $\beta = 0$ , монотонным не является.

При численной дискретизации многомерных задач необходимо по возможности стремиться к тому, чтобы границы расчетной области были параллельны координатным линиям. В этом случае направление нормали совпадает с направлением одной из координатных линий, и методы аппроксимации граничных условий сводятся к рассмотренным выше одномерным. Если граница имеет нерегулярную форму, как, например, на рис. 2 для двумерной задачи, имеется несколько возможностей аппроксимации граничных условий.

Самая простая из них сводится к линейной интерполяции для определения значения функции в каждом узле вычислительной сетки, отстоящем от границы области на расстояние, меньшее шага сетки. Например, значение функции в точке  $P$  на рис. 2 можно определить по одной из формул:

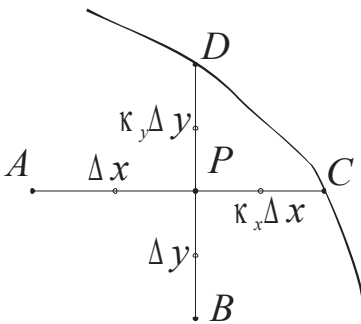


Рис. 2. Конечно-разностная сетка вблизи нерегулярной границы

$$u_P = u_A + \frac{\Delta x}{\Delta x + \kappa_x \Delta x} (u_C - u_A),$$

$$u_P = u_B + \frac{\Delta y}{\Delta y + \kappa_y \Delta y} (u_D - u_B),$$

либо использовать среднее арифметическое этих двух значений.

Другим, более точным, способом является построение конечно-разностной схемы для усеченного шаблона, содержащего граничные точки. Наиболее просто это сделать с помощью метода конечного объема построения разностных схем.



## 2.6. Метод конечных объемов

Дифференциальные уравнения переноса, как известно, эквивалентны соответствующим интегральным законам сохранения. Поэтому дискретизация уравнений переноса может быть проведена с помощью аппроксимации интегральных законов сохранения для каждой элементарной ячейки (объема) вычислительной сетки. Такой метод получил название метода конечных объемов (Finite Volume Method). С помощью него получают так называемые *консервативные разностные схемы*, т. е. схемы, для которых выполняются сеточные аналоги законов сохранения. Другое название метода — интегроинтерполяционный [Самарский, Вабищевич, 2004].

Рассмотрим применение метода конечных объемов на примере одномерного уравнения конвекции-диффузии субстанции  $\varphi$ :

$$u(x) \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ \lambda(x) \frac{d\varphi}{dx} \right] + \sigma(x). \quad (2.45)$$

Введем обозначение потока  $q$ :

$$q = -\lambda \frac{d\varphi}{dx},$$

и запишем уравнение (2.45) в виде

$$u(x) \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{dq}{dx} + \sigma(x). \quad (2.46)$$

Интегрируя его в интервале («контрольном объеме»)  $[x_{i-1/2}; x_{i+1/2}]$ , получим:

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x) \frac{d\varphi}{dx} dx = -q_{i+1/2} + q_{i-1/2} + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \sigma(x) dx. \quad (2.47)$$

Потоки в полужелых узлах сетки выразим, интегрируя соотношение  $d\varphi/dx = -q/\lambda$  в интервале  $[x_{i-1}; x_i]$ :

$$\varphi_i - \varphi_{i-1} = - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{q(x)}{\lambda(x)} dx = -q_{i-1/2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{\lambda(x)} + O(h^3). \quad (2.48)$$

При выводе (2.48) была использована формула прямоугольников для численного интегрирования и известная оценка ее погрешности аппроксимации [Самарский, Гулин, 1989].

Выражение (2.48) можно записать в следующем виде:

$$q_{i-1/2} = -\lambda_{i-1/2} \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h_i} + O(h^2), \quad (2.49)$$

где

$$\lambda_{i-1/2} = \left[ \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{\lambda(x)} \right]^{-1}. \quad (2.50)$$

Формулу прямоугольников можно также использовать для аппроксимации источникового члена в (2.45):

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \sigma(x) dx = \hbar_i \sigma_i + O(h^3). \quad (2.51)$$

Конвективное слагаемое в левой части (2.47) можно аппроксимировать, например, таким образом:

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x) \frac{d\varphi}{dx} dx &= \int_{\varphi_{i-1/2}}^{\varphi_{i+1/2}} u d\varphi = \\ &= u_i (\varphi_{i+1/2} - \varphi_{i-1/2}) + O(h^2) = u_i \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1})}{2} + O(h^2), \end{aligned} \quad (2.52)$$

причем на равномерной (или квазиравномерной) сетке последнее выражение совпадает с формулой прямоугольников и точность повышается до  $O(h^3)$ .

Подставляя полученные выражения в (2.47), получаем схему

$$u_i \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1})}{2\hbar_i} = \frac{1}{\hbar_i} \left( \lambda_{i+1/2} \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h_{i+1}} - \lambda_{i-1/2} \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h_i} \right) + \sigma_i, \quad (2.53)$$

эквивалентную схеме (2.23) с центрально-разностной аппроксимацией конвективных членов, полученной выше с помощью метода конечных разностей.

Еще одним возможным способом аппроксимации конвективного слагаемого является использование квадратурных формул правых или левых прямоугольников в зависимости от

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x) \frac{d\varphi}{dx} dx &= u^+(x_{i-1/2}) \frac{d\varphi}{dx} \Big|_{i-1/2}^{\hbar_i} + u^-(x_{i+1/2}) \frac{d\varphi}{dx} \Big|_{\hbar_i}^{i+1/2} + O(h^2) = \\ &= \left( u_{i-1/2}^+ \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h_i} \hbar_i + u_{i+1/2}^- \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h_{i+1}} \hbar_i \right) + O(h^2), \end{aligned} \quad (2.54)$$

где  $u_{i\pm 1/2}^\pm$  определены в (2.32).

Если в последнем выражении  $u_{i\pm 1/2}^\pm$  заменить без потери точности аппроксимации на  $u_i^\pm$ , то после подстановки (2.54) в (2.47) получится противопоточная схема (2.23), (2.33).

---

С помощью метода конечного объема можно также получить монотонные схемы высокого порядка точности для уравнения конвекции-диффузии [Ильин, 2000].

Главным преимуществом метода конечного объема перед методом конечных разностей является возможность работы с уравнениями с разрывными (т. е. кусочно-непрерывными) коэффициентами и в ряде случаев с коэффициентами, имеющими интегрируемые особенности. Такие задачи часто возникают при моделировании процессов теплопереноса в композитных средах, в некоторых задачах моделирования пристенных турбулентных течений и ряде других задач. В связи с этим метод конечных объемов, как правило, рассматривается в качестве основного метода дискретизации уравнений вычислительной гидродинамики и теплопередачи.

### ГЛАВА 3

## УСТОЙЧИВОСТЬ, СОГЛАСОВАННОСТЬ И СХОДИМОСТЬ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Важным вопросом для вычислительных методов является вопрос о том, существует ли гарантия близости численного решения к точному. Для вычислительной гидродинамики точный ответ на этот вопрос пока не получен, поскольку не доказана теорема существования и единственности решения трехмерных уравнений Навье-Стокса. В современной практике вычислений ограничиваются использованием результатов теории устойчивости и сходимости разностных схем, полученных для линейных уравнений, которые трактуются как необходимые, но недостаточные условия устойчивости и сходимости.

### 3.1. Согласованность

Система алгебраических уравнений, полученных в процессе дискретизации, согласуется с исходным дифференциальным уравнением в частных производных, если в пределе, когда размеры ячеек сетки стремятся к нулю, система алгебраических уравнений эквивалентна дифференциальному уравнению в частных производных в каждом узле сетки. Для проверки на согласованность точное решение нужно подставить в конечно-разностные уравнения с последующим разложением всех узловых значений в ряд Тейлора в окрестности единственной точки. Полученное выражение должно состоять из исходного дифференциального уравнения и некоторого остаточного члена. Для наличия согласованности остаточный член должен стремиться к нулю при измельчении сетки.

Проверим в качестве примера, согласуется ли с уравнением конвекции-диффузии с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (3.1)$$

его конечно-разностная аппроксимация на равномерной сетке

$$\frac{\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n}{\tau} + u_i \frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_{i-1}^n}{2h} = D \frac{\varphi_{i+1}^n - 2\varphi_i^n + \varphi_{i-1}^n}{h^2}. \quad (3.2)$$

Подставляя разложения в ряд Тейлора в окрестности точки  $(x_i, t^n)$

$$\begin{aligned} \varphi_{i\pm 1}^n &= \varphi_i^n \pm h \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_i + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_i \pm \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \Big|_i + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \Big|_i + O(h^5) \\ \varphi_i^{n+1} &= \varphi_i^n + \tau \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_i + \frac{\tau^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Big|_i + \frac{\tau^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} \Big|_i + O(\tau^4) \end{aligned}$$

в конечно-разностную схему (3.2), получим

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} - D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_i = \\ &= -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Big|_i - \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} \Big|_i - \frac{uh^2}{6} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \Big|_i + \frac{Dh^2}{12} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \Big|_i + O(h^4) + O(\tau^3). \end{aligned} \quad (3.3)$$

С помощью исходного уравнения (3.1) можно выразить все временные производные в последнем уравнении через пространственные с помощью соотношения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \left( D \frac{\partial^2}{\partial x^2} - u \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \varphi. \quad (3.4)$$

В результате (3.3) принимает вид

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} - D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_i = -\frac{\tau u^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_i + \\ &+ u \left( D\tau + \frac{u^2 \tau^2}{6} - \frac{h^2}{6} \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \Big|_i + \frac{D}{2} \left( \frac{h^2}{6} - D\tau \right) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \Big|_i + O(h^4) + O(\tau^3) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из (3.5) следует, что, помимо ожидаемого условия (2.2), т. е. достаточно пространственного разрешения сетки, для согласованности конечно-разностной схемы (3.2) с уравнением (3.1) необходимо выполнение условия на шаг по времени

$$\tau \ll \frac{D}{u^2},$$

при котором первый член в правой части (3.5), связанный с дополнительной схемной диффузией, много меньше диффузионного (последнего) члена в левой части (3.5).

Очевидно, что конечно-разностная схема, удовлетворяющая сформулированному выше условию аппроксимации (2.21) в п. 2.2, является согласованной. Но гарантирует ли малость невязки в правой части (2.21) близость самого численного решения к точному? Если условие (2.21) записать в виде

$$L_h u_i - P_h f_i = L_h (u_i - U_i) = \psi_i = O(h^\gamma), \quad (3.6)$$

то видно, что невязка численного решения  $(u_i - U_i)$  связана с невязкой аппроксимации  $\psi_i$  через оператор, обратный разностному оператору

$$u_i - U_i = L_h^{-1} \psi_i. \quad (3.7)$$

Если этот оператор существует и имеет конечную норму, то малость  $\psi_i$  влечет за собой малость невязки численного решения. В этом случае конечно-разностная схема будет устойчивой.

### 3.2. Устойчивость конечно-разностных схем. Метод фон Неймана

Можно сформулировать два эквивалентных между собой определения устойчивости конечно-разностной схемы

$$L_h U_i = f_i, \quad (3.8)$$

аппроксимирующей с порядком  $\gamma$  дифференциальное уравнение  $Lu(x) = f(x)$  [Рябенский, 2000].

**Определение 1.** Разностная схема устойчива, если существуют числа  $h_0 > 0$ ,  $\delta > 0$  такие, что при любом шаге сетки  $h < h_0$  и норме<sup>3</sup> вектора столбца возмущения  $\|\varepsilon\| < \delta$  разностная задача

$$L_h Z_i = f_i + \varepsilon_i \quad (3.9)$$

имеет единственное решение  $Z$ , удовлетворяющее оценке

$$\|Z - U\| \leq c \|\varepsilon\|, \quad (3.10)$$

где постоянная  $c$  не зависит от  $h$ .

Пусть сеточный оператор  $L_h$  линейный, тогда это определение эквивалентно следующему определению.

**Определение 2.** Разностная схема устойчива, если для любого  $f$  уравнение (3.8) имеет единственное решение, для которого справедлива оценка

$$\|U\| \leq c \|f\|, \quad (3.11)$$

где постоянная  $c$  не зависит от  $h$ .

В самом деле, пусть задача (3.8) имеет единственное решение, удовлетворяющее оценке (3.11). Вычитая из равенства (3.9) равенство (3.8), получим

<sup>3</sup> В качестве нормы сеточной функции можно использовать любое из подходящих определений нормы вектора, например, первую норму  $\|x\| = \max_i |x_i|$ .

$$L_h(Z_i - U_i) = \varepsilon_i, \quad (3.12)$$

откуда в силу (3.11) следует оценка (3.10), т. е. из устойчивости в смысле определения 2 следует устойчивость в смысле определения 1 [Рябенский, 2000].

Теперь можно показать, что из аппроксимации (согласованности) и устойчивости следует сходимость.

**Теорема.** Пусть разностная схема  $L_h U_i = P_h f_i$  аппроксимирует задачу  $Lu = f$  с порядком  $h^k$  и устойчива. Тогда решение  $U_i$  разностной задачи сходится к точному решению  $u_i$  как

$$\|U - u\| = O(h^k). \quad (3.13)$$

Действительно, возьмем в качестве «возмущенного» решения  $Z_i$  точное решение дифференциального уравнения  $u_i$ , тогда возмущение  $\varepsilon_i$  не что иное, как невязка конечно-разностной аппроксимации  $\psi_i$ . В этом случае из равенства (3.12) и условия (3.11) следует (3.13).

Доказанное утверждение известно в зарубежной литературе, как теорема Лакса об эквивалентности: *необходимым и достаточным условием сходимости разностной схемы для решения корректно поставленной задачи с начальными данными является выполнение условий согласованности и устойчивости.*

Отметим, что теорема Лакса справедлива только для линейных конечно-разностных схем. Для нелинейных конечно-разностных уравнений она обычно рассматривается как необходимое, но не всегда достаточное условие сходимости [Флетчер, 1991].

Таким образом, для выяснения вопроса об устойчивости конечно-разностной задачи необходимо найти норму обратного сеточного оператора  $L_h^{-1}$ . Такая задача связана с анализом спектральных свойств матрицы коэффициентов конечно-разностного уравнения, что в общем случае представляет собой достаточно сложную проблему. Поэтому на практике пользуются более простыми методами исследования устойчивости, такими, как метод фон Неймана.

Рассмотрим применение метода фон Неймана к анализу устойчивости явной схемы для уравнения теплопроводности и схемы с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространству (ВВЦП) для уравнения конвекции.

Явная схема для уравнения теплопроводности имеет вид

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = a \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h^2}. \quad (3.14)$$

Представим решение этого уравнения в виде суммы точного решения разностного уравнения и погрешности округления:  $T_i^n = \tilde{T}_i^n + \varepsilon_i^n$ . Тогда, подставляя это выражение в (3.14), получим уравнение для погрешности:

$$\frac{\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n}{\tau} = a \frac{\varepsilon_{i+1}^n - 2\varepsilon_i^n + \varepsilon_{i-1}^n}{h^2}, \text{ или}$$

$$\varepsilon_i^{n+1} = r\varepsilon_{i+1}^n + (1 - 2r)\varepsilon_i^n + r\varepsilon_{i-1}^n, \text{ где } r = \frac{a\tau}{h^2}. \quad (3.15)$$

Представим погрешность  $\varepsilon(x)$  в виде суммы ряда Фурье<sup>4</sup>:

$$\varepsilon(x, t) = \sum_m \varepsilon_m(t) e^{ik_m x}$$

где  $k_m = \frac{2\pi m}{L}$ ,  $\varepsilon_m = \frac{1}{L} \int_0^L \varepsilon(x) e^{-ik_m x} dx$ .

Линейность уравнения (3.15) позволяет рассматривать каждую гармонику по отдельности. Ищем решение (3.15) в виде отдельной гармоники

$$\varepsilon_i^n = G^n e^{ik_m x_i}. \quad (3.16)$$

Подставляя это выражение в (3.15), получим:

$$G = r e^{ikh} + 1 - 2r + r e^{-ikh} = 1 - 4r \sin^2 \frac{kh}{2}. \quad (3.17)$$

Величина  $G$  называется коэффициентом перехода (amplification factor), поскольку представляет собой отношение амплитуды гармоники в текущий момент времени к амплитуде в предыдущий момент. Очевидно, что для того, чтобы амплитуда гармоники не росла во времени, необходимо, чтобы модуль коэффициента перехода был меньше единицы:

$$|G| \leq 1. \quad (3.18)$$

Условие (3.18) для коэффициента перехода, задаваемого выражением (3.17), выполняется при условии

$$r = \frac{a\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (3.19)$$

которое накладывает ограничение на шаг по времени  $\tau$ .

Отметим, что в силу линейности задачи конечно-разностное уравнение для погрешности округления совпадает с исходным конечно-разностным уравнением, поэтому при применении метода фон Неймана можно искать решение в виде (3.16) и анализировать величину коэффициента перехода для самого конечно-разностного уравнения.

<sup>4</sup> Представление Фурье для функции  $g(x)$  на интервале  $0 \leq x \leq L$  имеет вид

$$g(x) = \sum_m g_m e^{ik_m x}, \quad k_m = \frac{2\pi m}{L}, \quad g_m = \frac{1}{L} \int_0^L g(x) e^{-ik_m x} dx.$$

Для сеточной функции Фурье-амплитуда записывается как аппроксимация

$$g_m = \frac{1}{L} \int_0^L g(x) e^{-ik_m x} dx \approx \frac{h}{L} \sum_{j=0}^N g_j \exp\left(-i \frac{2\pi h}{L} mj\right).$$



Проанализируем устойчивость схемы ВВЦП для решения одномерного уравнения конвекции

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.20)$$

где  $c \geq 0$  — скорость распространения возмущений.

Схема ВВЦП имеет вид

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} = 0. \quad (3.21)$$

Ищем решение (3.21) в виде (3.16) и находим для коэффициента перехода:

$$G = 1 - i \frac{c\tau}{h} \sin kh = 1 - iC \sin kh, \quad (3.22)$$

где

$$C = \frac{c\tau}{h} \quad (3.23)$$

— так называемое число Куранта.

Из (3.22) следует, что схема ВВЦП безусловно неустойчива.

Заменим центральную разность левой разностью, которая для положительной скорости конвекции является разностью против потока:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} = 0. \quad (3.24)$$

В этом случае коэффициент перехода имеет вид

$$G = 1 - C(1 - e^{-ikh}) = 1 - C + Ce^{-ikh}. \quad (3.25)$$

Модуль  $G$  меньше единицы, и схема (3.24) устойчива (рис. 3) в том случае, когда выполняется так называемое условие Куранта — Фридрихса — Леви (КФЛ)

$$0 \leq C \leq 1, \quad (3.26)$$

справедливое для многих явных схем для уравнений гиперболического типа. Физический смысл условия КФЛ состоит в том, что частица среды за один шаг по времени не должна продвигаться более чем на один пространственный шаг сетки.

Интересно сравнить (3.25) с точным выражением коэффициента перехода, которое нетрудно получить из исходного уравнения (3.20):

$$G_{\text{exact}} = e^{-ikc\tau} = e^{-iCkh}. \quad (3.27)$$

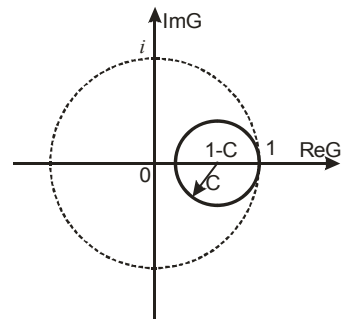


Рис. 3. Коэффициент перехода (3.25) в комплексной плоскости для противоположной схемы (3.24)

Видно, что точный коэффициент перехода всегда лежит на единичном круге в комплексной плоскости, а коэффициент перехода противоположной схемы — внутри единичного круга. При числе Куранта, равном единице, выражения (3.27) и (3.25) совпадают, поскольку при  $C = 1$  схема (3.24) является точной (см. гл. 5).

В силу использования метода Фурье метод фон Неймана применим к анализу устойчивости линейных конечно-разностных уравнений с постоянными коэффициентами. В задачах с переменными коэффициентами при условии достаточно мелкой сетки и малого изменения коэффициентов в окрестности вычислительного шаблона можно использовать эвристический принцип замороженных коэффициентов: для устойчивости конечно-разностной схемы с переменными коэффициентами необходимо, чтобы в каждом узле вычислительной сетки конечно-разностная схема с постоянными коэффициентами, равными значениям коэффициентов в данном узле, удовлетворяла спектральному признаку устойчивости фон Неймана [Рябенский, 2000].

Принцип замороженных коэффициентов позволяет оценивать устойчивость на эвристическом уровне строгости и для нелинейных задач. При этом полученный критерий устойчивости будет только необходимым, но не достаточным условием устойчивости.

### 3.3. Метод дифференциального приближения (модифицированного уравнения)

При анализе сходимости конечно-разностной схемы можно использовать еще один весьма полезный подход. Предположим, что  $Lu(x) = 0$  — дифференциальное уравнение, а  $L_h U = 0$  — алгебраическое уравнение, соответствующее его конечно-разностной аппроксимации. Учитывая определение погрешности аппроксимации (2.21), можно записать следующее соотношение:

$$Lu = L_h u - \psi(u) = 0,$$

откуда следует

$$LU + \psi(U) = L_h U = 0. \quad (3.28)$$

Выражение в левой части (3.28) представляет собой дифференциальное уравнение с бесконечным числом членов для непрерывной функции  $U$ , совпадающей с сеточной функцией  $U_i$  в узлах вычислительной сетки. Это уравнение называется *дифференциальным приближением* конечно-разностной схемы [Яненко, Шокин, 1968]. В зарубежной литературе его часто называют *модифицированным уравнением* [Warming, Hyett, 1974]. Уравнение дифференциального приближения (3.28) есть то дифференциальное уравнение, которое на самом деле решается конечно-разностной схемой. Поэтому для анализа аппрок-

симации и устойчивости можно анализировать не только саму конечно-разностную схему, но и ее дифференциальное приближение, для чего удобно выразить все производные по времени в выражении невязки  $\psi(U)$  через пространственные производные.

Выведем уравнение дифференциального приближения для противоточной схемы (3.24). Для этого подставим в конечно-разностную схему разложения ряд Тейлора в окрестности точки  $(x_i, t^n)$  для функции  $u(x, t)$ , совпадающей с численным решением в узлах сетки:

$$\frac{1}{\tau} \left\{ u_i^n + \tau u_t + \frac{\tau^2}{2} u_{tt} + \frac{\tau^3}{6} u_{ttt} + O(\tau^4) - u_i^n \right\} + \frac{c}{h} \left\{ u_i^n - \left[ u_i^n - hu_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} - \frac{h^3}{6} u_{xxx} + O(h^4) \right] \right\} = 0. \quad (3.29)$$

После несложных преобразований уравнение (3.29) приводится к виду

$$u_t + cu_x = -\frac{\tau}{2} u_{tt} + \frac{ch}{2} u_{xx} - \frac{\tau^2}{6} u_{ttt} - c \frac{h^2}{6} u_{xxx} + \dots \quad (3.30)$$

Исключим из правой части (3.30) все производные по времени. Для этой цели продифференцируем (3.30) сначала по  $t$ , затем по  $x$  и исключим из обоих уравнений смешанную производную  $u_{xt}$ . В результате получим:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \tau \left[ -\frac{u_{ttt}}{2} + \frac{c}{2} u_{txx} + O(\tau) \right] + h \left[ \frac{cu_{xxt}}{2} + \frac{c^2}{2} u_{xxx} + O(h) \right]. \quad (3.31)$$

Входящие сюда и в (3.30) члены с производными третьего порядка, включающими производную по времени, выразим с помощью следующего из (3.30) соотношения:  $\partial/\partial t = -c\partial/\partial x + O(h, \tau)$ . Подставляя затем (3.31) в (3.30), получим уравнение дифференциального приближения для схемы (3.24):

$$u_t + cu_x = \frac{ch}{2}(1-C)u_{xx} - \frac{ch^2}{6}(1-C)(1-2C)u_{xxx} + O(h^3), \quad (3.32)$$

где  $C$  — число Куранта, определенное согласно (3.23).

Анализ аппроксимации с помощью дифференциального приближения (3.32) очевиден — невязка конечно разностной схемы соответствует правой части (3.32) и имеет порядок  $O(h, \tau)$ . Анализ устойчивости может быть проведен с помощью анализа дисперсионного соотношения для уравнения (3.32). Представляя решение (3.32) в виде гармонической волны  $u \sim \exp[i(kx - \omega t)]$ , находим дисперсионное соотношение, или соотношение между частотой и волновым вектором:

$$\omega = ck - \frac{ch^2}{6}(1-C)(1-2C)k^3 - i\frac{ch}{2}(1-C)k^2. \quad (3.33)$$

Условие устойчивости  $\text{Im}\omega(k) \leq 0$  для дисперсионного соотношения (3.33) выполняется при условии (3.26), полученном выше с помощью метода фон Неймана.

Достоинством метода дифференциального приближения является то, что с его помощью можно анализировать природу эффектов, вносимых в численное решение дискретизацией. Так, по сравнению с исходным уравнением переноса (3.20) в его дифференциальном приближении (3.32) появился член со второй производной по  $x$ , который можно интерпретировать как наличие ненулевой вязкости. Таким образом, противопоточная схема вводит в уравнение дополнительную, схемную вязкость (см. п. 2.4), определяемую коэффициентом при первом члене в правой части (3.32).

Другое, близкое к физическому, свойство разностных схем называют *схемной дисперсией*. Оно состоит в искажении соотношения фаз различных волн. Например, если согласно исходному уравнению (3.20) все волны распространяются с одинаковой фазовой скоростью  $c$ , то согласно (3.33) волны, описываемые уравнением дифференциального приближения, будут отставать от точного решения по фазе при  $0 < C < 0,5$  и опережать при  $0,5 < C < 1$ .

Схемная вязкость и дисперсия в (3.32) исчезают при  $C = 1$ , когда, как уже говорилось, противопоточная схема (3.24) является точной.

Еще одним достоинством анализа разностных схем с помощью метода дифференциального приближения является то, что он распространяется и на нелинейные уравнения, в то время как метод фон Неймана применим только к линейным уравнениям.

## ГЛАВА 4

### МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для нахождения численного решения задачи необходимо решить систему алгебраических уравнений, полученных после ее дискретизации. Ниже будут рассмотрены наиболее распространенные прямые и итерационные методы решения сеточных уравнений.

#### 4.1. Прямые методы

При дискретизации конечно-разностных задач часто встречаются системы линейных уравнений с трехдиагональными матрицами (см., например, (2.24)). Для таких систем существует эффективный алгоритм решения — *метод прогонки*, или *алгоритм Томаса* обращения трехдиагональной матрицы (TDMA). Метод прогонки применяется к решению системы уравнений

$$(Au)_i = -a_i u_{i-1} + b_i u_i - c_i u_{i+1} = f_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.1)$$

где  $a_1 = c_N = 0$ .

В развернутом виде система уравнений (4.1) имеет вид

$$\begin{aligned} b_1 u_1 - c_1 u_2 &= f_1 \\ -a_2 u_1 + b_2 u_2 - c_2 u_3 &= f_2 \\ &\dots \\ -a_N u_{N-1} + b_N u_N &= f_N \end{aligned}$$

Первая и последняя строчки обычно соответствуют граничным условиям, для аппроксимации которых использованы двухточечные соотношения (см. п. 2.5). Ищем решение системы уравнений (4.1) в виде

$$u_i = \beta_i u_{i+1} + z_i, \quad i = N, \dots, 1, \quad (4.2)$$

где  $\beta_i, z_i$  — пока неизвестные величины.

Исключим из (4.1)  $u_{i-1}$  с помощью следующего из (4.2) соотношения  $u_{i-1} = \beta_{i-1}u_i + z_{i-1}$ . Подставляя последнее в (4.1), получим:

$$u_i = \frac{c_i}{b_i - a_i\beta_{i-1}}u_{i+1} + \frac{f_i + a_i z_{i-1}}{b_i - a_i\beta_{i-1}}. \quad (4.3)$$

Сопоставляя (4.3) с (4.1), находим:

$$\beta_i = \frac{c_i}{b_i - a_i\beta_{i-1}}, z_i = \frac{f_i + a_i z_{i-1}}{b_i - a_i\beta_{i-1}}, i = 1, \dots, N. \quad (4.4)$$

Для трехдиагональных систем уравнений общего вида метод прогонки является самым экономичным алгоритмом и требует выполнения  $8N$  арифметических действий.

Нетрудно убедиться, что если система уравнений (4.1) обладает свойством диагонального преобладания ( $|b_i| \geq |a_i| + |c_i|$ , причем хотя бы для одного  $i$  неравенство строгое), то метод прогонки корректен. Действительно, в этом случае  $|\beta_i| \leq 1$ . Предположим, что  $|\beta_{i-1}| \leq 1$ . Тогда из неравенств

$$|b_i - a_i\beta_{i-1}| \geq ||b_i| - |a_i||\beta_{i-1}|| \geq ||b_i| - |a_i|| \geq |c_i|$$

и (4.4.) следует, что  $|\beta_i| \leq 1$ . Это гарантирует устойчивость вычислений по рекурсивной формуле (4.2). Нужно отметить, что сделанное утверждение справедливо только при абсолютно точной арифметике. При реализации программы на компьютере и выполнении арифметических операций имеют место погрешности округления, которые могут накапливаться в ходе рекурсивных вычислений (4.2), (4.4). В работе [Ильин, 2004] показано, что погрешность вычисления рекурсий (4.2), (4.4) растет с увеличением количества узлов вычислительной сетки  $N$  следующим образом:

$$\delta\beta_N \sim \varepsilon N, \delta z_N \sim \varepsilon N^2, \delta u_1 \sim \varepsilon N^3, \quad (4.5)$$

где ошибка округления  $\varepsilon \sim 10^{-7}$  для чисел с простой точностью и  $\varepsilon \sim 10^{-16}$  для чисел с двойной точностью.

Оценки (4.5) накладывают ограничение на предельно допустимое количество узлов вычислительной сетки  $N$  и свидетельствуют о необходимости использования формата чисел двойной точности при наличии рекурсивных вычислений.

В рассмотренных формулах прогонки (4.2), (4.4) можно изменить порядок направлений рекурсий, в результате чего получится альтернативный вариант метода прогонки:

$$\hat{\beta}_i = \frac{a_i}{b_i - c_i\hat{\beta}_{i+1}}, \hat{z}_i = \frac{f_i + c_i\hat{z}_{i+1}}{b_i - c_i\hat{\beta}_{i+1}}, i = N, \dots, 1 \quad (4.6)$$

$$u_i = \hat{\beta}_i u_{i-1} + \hat{z}_i, i = 1, \dots, N. \quad (4.7)$$

На основе двух вариантов прогонок можно построить метод встречных прогонок.

Пусть дан некоторый промежуточный узел сетки  $i_0$ ,  $1 < i_0 < N$ . Выполним прямой ход для  $1 \leq i \leq i_0 - 1$  по формулам (4.4) и обратный ход для  $i_0 + 1 \leq i \leq N$  по формулам (4.6). Значение решения в узле  $i_0$  находится из выражения

$$u_{i_0} = \frac{f_{i_0} + a_{i_0} z_{i_0-1} + c_{i_0} \hat{z}_{i_0+1}}{b_{i_0} - a_{i_0} \beta_{i_0-1} - c_{i_0} \hat{\beta}_{i_0+1}}, \quad (4.8)$$

вытекающего из уравнения (4.1) для  $i_0$ -го узла, в котором  $u_{i_0 \pm 1}$  исключены с помощью (4.2), (4.6). После этого  $u_i$  находится из выражений

$$u_i = \beta_i u_{i+1} + z_i, \text{ для } 1 \leq i < i_0$$

$$u_i = \hat{\beta}_i u_{i-1} + \hat{z}_i, \text{ } i_0 < i \leq N.$$

Метод встречных прогонок практически не уступает по числу операций обычному алгоритму: требуется на 6 арифметических действий больше для вычисления  $u_{i_0}$ . Метод встречных прогонок может применяться для повышения численной устойчивости за счет снижения длины рекурсии, а также для распараллеливания вычислений, которые при наличии двух процессоров могут выполняться одновременно в областях слева и справа от узла  $i_0$ .

Поскольку большинство одномерных задач вычислительной гидродинамики после дискретизации со вторым порядком точности сводится к трехточечным разностным уравнениям (см. п. 2.3), метод прогонки является самым эффективным методом решения систем разностных уравнений для одномерных задач. К сожалению, для задач большей размерности, в которых матрица коэффициентов системы разностных уравнений имеет большее количество диагоналей (обычно по две на каждую дополнительную размерность), не существует столь же экономичных прямых методов решения. Например, метод матричных прогонок, обобщающий метод прогонки на системы уравнений (4.1) с коэффициентами в виде матриц и векторов [Ильин, 2000], для задачи в пространстве с размерностью  $n$  и числом узлов вдоль одного направления  $N$  требует  $O(N^{3n-2})$  арифметических операций. Для трехмерных сеток с  $N = 100$  количество операций для метода матричной прогонки составит  $O(10^{14})$ , что представляет серьезную проблему даже для современных суперкомпьютеров. О прямых методах решения систем разностных уравнений, таких как методы матричных прогонок, циклической редукции, быстрого преобразования Фурье и других методах можно прочесть в монографиях [Самарский, Николаев, 1978; Ильин, 2000]. Для двух- и особенно трехмерных задач эффективность прямых методов решения систем разностных уравнений уступает итерационным методам.

## 4.2. Итерационные методы: классификация и общие свойства

Итерационные методы предполагают наличие некоторого итерационного процесса получения последовательного приближения  $x_{n+1} = \Phi(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-r})$ . Итерационный процесс называется *сходящимся*, если приближения решения  $x_n$  сходятся при  $n \rightarrow \infty$  к точному решению. Для этого необходима сходимость  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n\| = 0$  любой из возможных норм ошибки решения  $\|z_n\| = \|x_n - x\|$ .

Ниже будет рассматриваться система линейных уравнений, записанная в матричной форме:

$$Ax = f. \quad (4.9)$$

Каноническая форма одношаговых ( $r = 1$ ) итерационных методов для системы линейных уравнений (4.9) имеет вид

$$B_{n+1} \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau_{n+1}} + Ax_n = f, \quad (4.10)$$

где  $B_{n+1}$  — матрица, задающая тот или иной итерационный метод, которую также называют предобуславливателем (preconditioner),  $\tau_{n+1}$  — итерационный параметр.

Приближение решения на  $(n + 1)$ -м шаге находится из уравнения

$$x_{n+1} = (E - \tau_{n+1} B_{n+1}^{-1} A) x_n + \tau_{n+1} B_{n+1}^{-1} f \equiv R_{n+1} x_n + C_{n+1}, \quad (4.11)$$

где матрица  $R_{n+1}$  называется *матрицей перехода*.

Метод называется *явным*, если  $B_{n+1} = E$  — единичная матрица, и *неявным* — в противном случае. Метод является *стационарным*, если  $R_{n+1} = R$  и  $C_{n+1} = C$  не зависят от номера итерации. Для анализа сходимости итерационного метода используется вектор невязки  $r_n = f - Ax_n$ , связанный с вектором ошибки очевидным соотношением  $r_n = -Az_n$ .

Вектора ошибок на соседних итерациях связаны между собой очевидным соотношением

$$z_{n+1} = R_{n+1} z_n.$$

При этом норма ошибки связана с нормой<sup>5</sup> матрицы перехода следующим образом:

$$\|z_{n+1}\| \leq \|R_{n+1}\| \|z_n\|.$$

Отсюда следует, что итерационный метод сходится, если  $\|R_{n+1}\| \leq \rho < 1$ , при этом величина  $\rho$  называется *коэффициентом подавления ошибки* итерационного процесса. Очевидно, что, чем меньше коэффициент подавления ошибки,

<sup>5</sup> Здесь норма матрицы определена как  $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ .



тем выше эффективность итерационного процесса. Характеристикой эффективности итерационного процесса является количество итераций, требуемое для подавления ошибки в  $\varepsilon^{-1}$  раз:

$$n(\varepsilon) = \min \left\{ n : \frac{\|z_n\|}{\|z_0\|} \leq \varepsilon \right\}. \quad (4.12)$$

Для итерационного процесса с постоянным коэффициентом подавления ошибки  $\rho$  величина  $n(\varepsilon)$ , как нетрудно проверить, определяется соотношением

$$n(\varepsilon) \approx \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\rho)}. \quad (4.13)$$

Величину  $\varepsilon$  в критериях (4.12), (4.13) не имеет смысла выбирать меньше, чем погрешность аппроксимации  $O(h^\gamma)$ . Поэтому при оценке необходимого числа итераций величину  $\ln(1/\varepsilon)$  в (4.13) можно заменить на  $\gamma \ln(1/h)$ .

Для сходимости стационарного итерационного метода доказана общая теорема: *итерационный метод сходится, когда максимальное по модулю собственное значение матрицы перехода  $R$  удовлетворяет соотношению  $|\lambda_{\max}| < 1$ .*

При проведении итерационного процесса важным является вопрос о критерии окончания итераций, обеспечивающем необходимую точность. В силу связи между вектором ошибки и вектором невязки  $r_n = -Az_n$  на каждой итерации выполняется неравенство

$$\|z_n\| \leq \|A^{-1}\| \|r_n\|.$$

Поэтому если известна оценка нормы обратной матрицы  $A^{-1}$ , то контроль за величиной невязки позволяет гарантировать необходимую точность решения. Если, однако, информация о величине  $\|A^{-1}\|$  отсутствует, это заставляет проводить итерации с запасом.

Другим распространенным критерием остановки итерационного процесса является критерий близости соседних приближений. Рассмотрим стационарный итерационный процесс (4.11) с коэффициентом подавления ошибки, меньшим единицы. В силу соотношения  $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \rho \|x_n - x_{n-1}\|$  из цепочки неравенств

$$\begin{aligned} \|x - x_n\| &= \|x_{n+1} - x_n + x_{n+2} - x_{n+1} + \dots\| \leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_{n+2} - x_{n+1}\| + \dots \leq \\ &\leq \|x_{n+1} - x_n\| (1 + \rho + \rho^2 + \dots) = \frac{\|x_{n+1} - x_n\|}{1 - \rho} \end{aligned}$$

следует, что при выполнении условия остановки итерационного процесса

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \varepsilon$$

для ошибки итерационного процесса справедлива оценка

$$\|x - x_n\| \leq \frac{\varepsilon}{1 - \rho}.$$

Отсюда следует, что для использования критерия близости соседних итераций итерационный метод не должен быть медленно сходящимся, т. е. коэффициент подавления ошибки не должен быть слишком близок к единице.

### 4.3. Итерационные методы Якоби и Гаусса — Зейделя

Перепишем уравнение (4.9) для матрицы общего вида  $A$  с ненулевыми диагональными элементами в виде

$$x_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j - \sum_{j=i+1}^N \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{f_i}{a_{ii}}. \quad (4.14)$$

Представим матрицу  $A$  в виде разложения  $A = L + U + D$ , где  $D$  — диагональная матрица с той же диагональю, что у  $A$ ,  $L$  — нижняя,  $U$  — верхняя треугольные части матрицы  $A$  с нулевыми диагоналями. Тогда (4.14) можно записать в компактной матричной форме:

$$x = -D^{-1}Lx - D^{-1}Ux + D^{-1}f.$$

*Методом Якоби* называется следующий итерационный процесс:

$$x_{n+1} = -D^{-1}Lx_n - D^{-1}Ux_n + D^{-1}f, \quad (4.15)$$

или

$$x_{n+1,i} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_{n,j} - \sum_{j=i+1}^N \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_{n,j} + \frac{f_i}{a_{ii}}. \quad (4.16)$$

Отличие *метода Гаусса — Зейделя* от метода Якоби состоит в том, что первый при вычислении каждого значения использует частично уже ранее вычисленные в соответствии с выражением

$$x_{n+1} = -D^{-1}Lx_{n+1} - D^{-1}Ux_n + D^{-1}f, \quad (4.17)$$

или

$$x_{n+1,i} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_{n+1,j} - \sum_{j=i+1}^N \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_{n,j} + \frac{f_i}{a_{ii}}. \quad (4.18)$$

Каноническая форма для методов Якоби и Гаусса — Зейделя соответственно имеет вид

$$D(x_{n+1} - x_n) + Ax_n = f \quad (\text{Якоби})$$

$$(D + L)(x_{n+1} - x_n) + Ax_n = f \quad (\text{Гаусс-Зейдель})$$

Реализация метода Якоби тривиальна и определяется выражением (4.16). Реализация метода Гаусса — Зейделя отличается от реализации метода Якоби тем, что имеются различные возможности нумерации узлов вычислительной сетки при расчете (4.18). В частности, например, для наиболее распространенных при решении двумерных задач пятиточечных систем уравнений

$$-a_{ij}x_{i-1,j} - c_{ij}x_{i+1,j} - b_{ij}x_{ij-1} - d_{ij}x_{ij+1} + p_{ij}x_{ij} = f_{ij} \quad (4.19)$$

метод Гаусса — Зейделя может быть записан как в форме явного метода

$$x_{ij}^{n+1} = p_{ij}^{-1} \left( f_{ij} + a_{ij}x_{i-1,j}^{n+1} + c_{ij}x_{i+1,j}^n + b_{ij}x_{ij-1}^{n+1} + d_{ij}x_{ij+1}^n \right), \quad (4.20)$$

так и в форме неявного, блочного (или полинейного) метода в двух вариантах:

$$-a_{ij}x_{i-1,j}^{n+1} + p_{ij}x_{ij}^{n+1} - c_{ij}x_{i+1,j}^{n+1} = f_{ij} + b_{ij}x_{ij-1}^{n+1} + d_{ij}x_{ij+1}^n, \quad (4.21)$$

$$-a_{ij}x_{ij-1}^{n+1} + p_{ij}x_{ij}^{n+1} - c_{ij}x_{ij+1}^{n+1} = f_{ij} + b_{ij}x_{i-1,j}^{n+1} + d_{ij}x_{i+1,j}^n. \quad (4.22)$$

Реализация каждой итерации такого алгоритма требует выполнения прогонок по горизонтальным (4.21) или вертикальным (4.22) линиям сетки.

Оценки скорости сходимости для методов Якоби и Гаусса — Зейделя и других стационарных одношаговых методов в форме (4.10) удастся получить лишь для симметричных матриц  $A$ ,  $B$ . Ниже будем использовать матричные неравенства. Например, неравенство  $A \geq B$  означает, что для всех векторов  $x$  имеет место  $(Ax, x) \geq (Bx, x)$ , где  $(f, g)$  — скалярное произведение векторов  $f$  и  $g$ . Матрицу  $A > 0$  будем называть *положительно определенной*. Имеет место следующая теорема [Самарский, Вабищевич, 2004]: для *стационарного итерационного метода*

$$B \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} + Ax_n = f \quad (4.23)$$

с симметричными положительно определенными матрицами  $A$  и  $B$ , для которых справедливы неравенства  $\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B$  ( $\gamma_2 > \gamma_1 > 0$ ), итерационный метод сходится при условии  $0 < \tau < \frac{2}{\gamma_2}$ , причем при оптимальном значении

$$\tau_{opt} = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2} \text{ коэффициент подавления ошибки равен } \rho = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \text{ где } \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

Для доказательства условия сходимости для итерационного параметра  $\tau$  рассмотрим уравнение для ошибки решения

$$B \frac{z_{n+1} - z_n}{\tau} + Az_n = 0,$$

которое перегруппируем в виде

$$\left(B - \frac{\tau}{2}A\right) \frac{z_{n+1} - z_n}{\tau} + \frac{A}{2}(z_{n+1} + z_n) = 0.$$

Домножив скалярно последнее уравнение на  $2(z_{n+1} - z_n)$  и учитывая симметричность матрицы  $A$ , после преобразований получим

$$2\tau \left( \left(B - \frac{\tau}{2}A\right) \frac{z_{n+1} - z_n}{\tau}, \frac{z_{n+1} - z_n}{\tau} \right) + (Az_{n+1}, z_{n+1}) = (Az_n, z_n),$$

откуда видно, что для уменьшения ошибки достаточно потребовать выполнения неравенства

$$B - \frac{\tau}{2}A > 0.$$

Учитывая условие теоремы  $\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B$ , последнее неравенство будет выполнено при  $0 < \tau < 2/\gamma_2$ . Вывод величины оптимального итерационного параметра приводится, например, в [Самарский, Гулин, 1989; Самарский, Вабишевич, 2004].

Можно показать, что параметры  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  следующим образом связаны с минимальным и максимальным собственными числами матрицы  $B^{-1}A$ :

$$\gamma_1 = \lambda_{\min}(B^{-1}A), \quad \gamma_2 = \lambda_{\max}(B^{-1}A).$$

С помощью рассмотренной теоремы для сходимости методов Якоби и Гаусса — Зейделя доказана следующая теорема [Ильин, 2000]: *если матрица  $A$  обладает свойством диагонального преобладания и неразложима, то методы Якоби и Гаусса — Зейделя сходятся.*

Матрица  $A$  разложима, если перестановками строк и столбцов ее можно свести к блочно-треугольному виду  $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$  с квадратными матрицами.

Смысл неразложимости состоит в том, что система уравнений не может быть преобразована так, чтобы часть неизвестных определялась из решения системы с меньшим, чем  $N$ , числом уравнений. Матрица  $A$  обладает свойствами диагонального преобладания, если  $|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N |a_{ij}|$ , для всех  $i = 1, \dots, N$ , причем хотя бы для одного  $i$  — неравенство строгое.

Для оценки эффективности различных итерационных методов рассмотрим в качестве модельной задачи матрицу  $A$  конечно-разностной системы уравнений — пятиточечной аппроксимации уравнения Пуассона на равномерной сетке  $h_x = h_y = h$  в квадратной области  $1 \times 1$

$$-x_{i-1,j} - x_{i+1,j} - x_{i,j-1} - x_{i,j+1} + 4x_{ij} = h^2 f_{ij} \quad (4.24)$$

с граничными условиями Дирихле ( $x = 0$  на границах).

Собственные числа матрицы, соответствующей задаче (4.24), определяются следующим выражением [Самарский, Гулин, 1989]:

$$\lambda_{pq} = \frac{4}{h^2} \left( \sin^2 \frac{\pi p h}{2} + \sin^2 \frac{\pi q h}{2} \right),$$

$$\lambda_{\min} = \frac{8}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}, \quad \lambda_{\max} = \frac{8}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2}. \quad (4.25)$$

Отношение минимального и максимального собственных чисел матрицы  $A$  (обратное число обусловленности) при малом шаге сетки в соответствии с (4.25) пропорционально квадрату шага:

$$\xi = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi h}{2} \approx \frac{\pi^2 h^2}{4}, \quad \text{при } h \ll 1. \quad (4.26)$$

Из (4.26) видно, что, чем подробнее сетка, тем меньше обратное число обусловленности матрицы  $A$ . Это означает, что для явного метода простой итерации ( $B = E$ ) скорость сходимости будет медленной:  $\rho = \frac{1 - \xi}{1 + \xi} \approx 1 - 2\xi$ . В соответствии с (4.13) количество итераций для явного метода с оптимальным параметром будет равно

$$n(\varepsilon) \approx \frac{2 \ln(1/\varepsilon)}{\pi^2 h^2}. \quad (4.27)$$

Использование неявных методов объясняется тем, что при соответствующем выборе матрицы  $B$  отношение  $\xi(B^{-1}A) = \frac{\lambda_{\min}(B^{-1}A)}{\lambda_{\max}(B^{-1}A)}$  становится больше,

чем  $\xi(A) = \frac{\lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(A)}$ . Это приводит к увеличению скорости сходимости.

Для модельной задачи (4.24) оптимальный параметр метода простой итерации с учетом (4.25) равен  $\tau_{\text{opt}} \approx 2/\lambda_{\max} \approx h^2/4$ . Можно показать, что метод простой итерации (4.23) для модельной задачи с таким оптимальным параметром совпадает с явным методом Якоби. Поэтому число необходимых итераций для достижения заданной точности для явного метода Якоби также определяется выражением (4.27) и растет обратно пропорционально квадрату шага сетки. Число необходимых итераций для достижения заданной точности для явного метода Гаусса — Зейделя вдвое меньше [Ильин, 2000]:

$$n(\varepsilon) \approx \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\pi^2 h^2}. \quad (4.28)$$

Для полинейного метода Гаусса — Зейделя величина  $n(\varepsilon)$  в два раза меньше, чем для явного.

#### 4.4. Метод последовательной верхней релаксации

Существенно увеличить скорость сходимости метода Гаусса — Зейделя позволяет метод последовательной верхней релаксации (SOR — от англ. Successive Over Relaxation). Схема метода имеет следующий вид:

$$\hat{x}_{n+1} = -D^{-1}L\hat{x}_{n+1} - D^{-1}Ux_n + D^{-1}f, \quad (4.29)$$

$$x_{n+1} = \omega\hat{x}_{n+1} + (1 - \omega)x_n. \quad (4.30)$$

Величина  $\omega$  называется параметром релаксации. Если  $1 < \omega < 2$ , то алгоритм называется *методом последовательной верхней релаксации*, а при  $\omega < 1$  — *нижней релаксации*. При  $\omega = 1$  имеем обычный метод Гаусса — Зейделя (4.17).

Можно показать, что для симметричных, положительно определенных и блочно-трехдиагональных матриц оптимальный параметр релаксации равен

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \lambda^2}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho_s}}, \quad (4.31)$$

где  $\lambda$  — максимальное собственное число матрицы перехода  $(E - D^{-1}A)$  в методе Якоби, а  $\rho_s = \lambda^2$  — коэффициент подавления ошибки в методе Гаусса — Зейделя.

Для такого оптимального параметра (4.31) количество итераций для достижения заданной точности существенно уменьшается по сравнению с методом Гаусса — Зейделя:

$$n(\varepsilon) \approx \frac{2 \ln(1/\varepsilon)}{\pi h}. \quad (4.32)$$

Численную реализацию метода последовательной верхней релаксации удобно организовать следующим образом. Сначала проводятся итерации с  $\omega = 1$ , и на каждой из них определяется величина

$$\rho_s^n = \frac{\|x_n - x_{n-1}\|}{\|x_{n-1} - x_{n-2}\|}. \quad (4.33)$$

Когда величина  $\rho_s^n$  становится мало меняющейся, она принимается за приближенное значение  $\rho_s$ . Затем вычисляется оптимальный параметр релаксации (4.31), и далее итерации продолжают при  $\omega = \omega_{opt}$ .

Метод последовательной верхней релаксации может быть реализован также в неявном, полинейном варианте, аналогичном (4.21), (4.22), при этом согласно теоретическим оценкам для симметричной матрицы  $A$  скорость сходимости увеличится примерно в  $\sqrt{2}$  раза.

#### 4.5. Метод переменных направлений

Во многих, преимущественно двумерных, задачах вычислительной гидродинамики матрицу уравнения (4.9) можно представить в виде суперпозиции

двух трехдиагональных матриц, обычно соответствующих дифференциальным операторам по одной из координат. Примером могут служить задачи (4.19), (4.24). Для случая  $A = A_1 + A_2$ , где  $A_{1,2}$  — трехдиагональные матрицы, алгоритм *неявного метода переменных направлений* (ADI — от англ. Alternating Direction Implicit) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1/2} - x_n}{\tau} + A_1 x_{n+1/2} + A_2 x_n &= f, \\ \frac{x_{n+1} - x_{n+1/2}}{\tau} + A_1 x_{n+1/2} + A_2 x_{n+1} &= f. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Алгоритм метода переменных направлений достаточно прост в реализации: на каждом шаге метода (4.34) требуется решить трехдиагональную систему уравнений.

Если привести метод (4.34) к канонической форме, то предобуславливатель будет иметь вид  $B = (E + \tau A_1)(E + \tau A_2)/2$ . Метод сходится для положительно определенных матриц  $A_{1,2}$ . Для модельной задачи (4.24) количество итераций для достижения заданной точности в методе переменных направлений

$$n(\varepsilon) \approx \frac{\ln(1/\varepsilon)}{2\pi h} \quad (4.35)$$

примерно в 4 раза меньше, чем в методе последовательной верхней релаксации. Оптимальный итерационный параметр при этом равен  $\tau_o = (mM)^{-1/2}$ , где  $m$  и  $M$  — нижняя и верхняя грани собственных чисел матриц  $A_{1,2}$ .

## 4.6. Методы неполной факторизации

В методе прогонки (4.2) трехдиагональная матрица  $A$  представляется (факторизуется) в виде произведения двух треугольных матриц:

$$\begin{aligned} A &= LU, \\ L &= \begin{pmatrix} g_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & g_2 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & -a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & g_{N-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -a_N & g_N \end{pmatrix}, \\ U &= \begin{pmatrix} 1 & -\beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\beta_2 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\beta_{N-2} & 0 \\ \dots & \dots & 0 & 1 & -\beta_{N-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

где

$$g_i = (b_i - a_i \beta_{i-1})^{-1},$$

затем производится последовательное обращение треугольных матриц  $L$  и  $U$ , соответствующее рекуррентным формулам метода прогонки:

$$Lz = f, \text{ или } g_i z_i - a_i z_{i-1} = f_i,$$

$$Ux = z, \text{ или } u_i - \beta_i u_{i+1} = z_i.$$

Метод неполной факторизации представляет собой многомерное обобщение метода прогонки. В этом методе к матрице  $A$  в (4.9) добавляется некоторая матрица  $H$ :

$$(A + H)x = f + Hx, \quad (4.37)$$

такая, что матрица  $(A + H)$  может быть представлена в виде произведения двух треугольных матриц  $R$  и  $S$  и одной диагональной матрицы  $\Gamma^{-1}$ :

$$A + H = \Gamma^{-1}RS. \quad (4.38)$$

Матрицы  $R$  и  $S$  в простейшей явной схеме метода неполной факторизации Н. И. Булеева [Булеев, 1989] имеют вид

$$R = E + \Gamma L, \quad S = E + \Gamma U,$$

где  $L, U$  — нижняя и верхняя треугольные части матрицы  $A$  с нулевыми главными диагоналями,  $\Gamma$  — некоторая диагональная матрица.

Алгоритм решения методом неполной факторизации имеет следующий вид:

$$RSx_{n+1} = \Gamma(f + Hx_n),$$

и может быть записан в виде двух этапов, аналогичных прямой (4.4) и обратной (4.2) прогонкам в методе прогонки:

$$Rz_{n+1} = \Gamma f + \Gamma Hx_n, \quad (4.39)$$

$$Sx_{n+1} = z_{n+1}. \quad (4.40)$$

Треугольная структура матриц  $R, S$  позволяет просто проводить их обращение. Так, для двумерной конечно-разностной задачи на пятиточечном шаблоне (4.19) уравнения (4.39), (4.40) принимают вид рекуррентных соотношений, похожих на соответствующие формулы метода прогонки (итерационный индекс опущен):

$$z_{ij} = \gamma_{ij} (a_{ij} z_{i-1,j} + b_{ij} z_{i,j-1} + f_{ij}) + (Hx)_{ij},$$



$$x_{ij} = \gamma_{ij} (c_{ij}x_{i+1,j} + d_{ij}x_{ij+1}) + z_{ij},$$

с помощью которых массивы  $z$  и  $x$  вычисляются явно.

В отличие от метода прогонки, в данном методе факторизацию матрицы  $A$  удается выполнить лишь приближенно — с точностью до матрицы  $H$ . В этой матрице присутствуют дополнительные элементы, помимо элементов конечно-разностного шаблона, входящие в матрицу  $A$  (например, для матрицы уравнения (4.19) — элементы  $x_{i-1,j+1}$  и  $x_{i+1,j-1}$ ). «Лишние» коэффициенты  $(Hx)_{ij}$  для явного метода неполной факторизации (МНФ) Булеева имеют вид

$$(Hx)_{ij} = \mu_{ij}x_{i-1,j+1} + \nu_{ij}x_{i+1,j-1} + \theta_{ij}(\mu_{ij} + \nu_{ij})x_{ij},$$

$$\mu_{ij} = \gamma_{ij}a_{ij}\gamma_{i-1,j}d_{i-1,j}, \quad \nu_{ij} = \gamma_{ij}b_{ij}\gamma_{ij-1}c_{ij-1},$$

где параметр  $\theta_{ij}$  фиксирован и принимает значения в интервале  $0 \leq \theta_{ij} \leq 1$ .

Для элементов диагональной матрицы  $\Gamma$  в явном методе Булеева получены рекуррентные соотношения:

$$\gamma_{ij} = \left[ p_{ij} - a_{ij}(c_{i-1,j} + \theta_{ij}d_{i-1,j})\gamma_{i-1,j} - b_{ij}(d_{ij-1} + \theta_{ij}c_{ij-1})\gamma_{ij-1} \right]^{-1}.$$

Предобуславливателем этого метода является матрица  $\tau\Gamma^{-1}RS$ . Учитывая близость матрицы  $RS$  к матрице  $A$ , наиболее существенное отличие МНФ от рассмотренного выше метода переменных направлений состоит в наличии специальным образом выбранной нормирующей матрицы  $\Gamma$  в предобуславливателе. По-видимому, именно с этим связана наблюдающаяся в численных экспериментах меньшая чувствительность МНФ к числу обусловленности матрицы  $A$ , что является преимуществом методов неполной факторизации перед методом переменных направлений. Численные расчеты решения модельной задачи с граничными условиями Дирихле показали, что метод неполной факторизации показывает лучшие результаты, чем метод переменных направлений с оптимальным параметром [Булеев, 1989]. В зарубежной литературе часто упоминается так называемый сильно неявный метод Стоуна (SIP), являющийся одной из разновидностей метода неполной факторизации [Андерсон и др., 1990]. Для количества итераций с целью достижения заданной точности в модельной задаче (4.24), решаемой явным методом неполной факторизации, получена оценка [Ильин, 2000]:

$$n(\varepsilon) \approx \frac{\ln(1/\varepsilon)}{2\sqrt{h}}. \quad (4.41)$$

О различных вариантах схем метода неполной факторизации для решения двух- и трехмерных задач можно прочесть в монографии [Булеев, 1989].

## ГЛАВА 5 КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этой главе будут рассмотрены конечно-разностные схемы, с помощью которых можно решать уравнения конвекции (3.20), теплопроводности и уравнение Бюргера. Эти уравнения называются модельными, так как с помощью них можно изучить свойства решений более сложных уравнений в частных производных. Для каждой конечно-разностной схемы анализируются порядок аппроксимации, устойчивость и дифференциальное приближение.

### 5.1. Линейные уравнения гиперболического типа

Рассмотрим систему квазилинейных уравнений 1-го порядка:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + A_{ij}(x, t, \vec{u}) \frac{\partial u_j}{\partial x} = b_i(x, t, \vec{u}), \quad (5.1)$$

где  $i = 1, \dots, M$ ,  $M$  — количество переменных.

Для определения типа уравнения необходимо найти собственные числа  $\lambda^{(n)}$  и собственные векторы  $l_i^{(n)}$  матрицы  $A_{ij}$  из уравнения

$$A_{ij} l_i = \lambda l_j. \quad (5.2)$$

Система (5.1) будет гиперболической, если все  $M$  собственных значений в рассматриваемой области пространства  $(x, t, \vec{u})$  вещественны и различны.

Умножая уравнения на  $k$ -й собственный вектор и учитывая (5.2), получим:

$$l_i^{(k)} \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + A_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) = l_i^{(k)} \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda^{(k)} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) = l_i^{(k)} b_i. \quad (5.3)$$

Оператор  $\frac{\partial}{\partial t} + \lambda^{(k)} \frac{\partial}{\partial x} = \left( \frac{d}{dt} \right)_k$  является производной вдоль линии, задаваемой уравнением характеристики:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda^{(k)}(x, t, \bar{u}). \quad (5.4)$$

Уравнения можно записать в удобной для решения характеристической форме:

$$l_i^{(k)} \left( \frac{du_i}{dt} \right)_k = l_i^{(k)} b_i. \quad (5.5)$$

Начальные условия для гиперболической системы уравнений корректно поставлены, если они заданы на любой кривой в пространстве  $(x, t)$ , направление которой не совпадает с направлением характеристик [Владимиров, 1988].

В соответствии с (5.5) простейшим гиперболическим уравнением будет случай  $M = 1$  и  $b_1 = 0$ , которому соответствует одномерное линейное уравнение конвекции

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (5.6)$$

семейство характеристик которого описывается уравнением с решением

$$\frac{dx}{dt} = c, \quad x = x_0 + ct. \quad (5.7)$$

Общее решение уравнения (5.6) имеет вид

$$u(x, t) = u_0(x_0) = u_0(x - ct),$$

где  $u_0(x_0)$  — начальные данные для решения.

В гл. 3 уже были рассмотрены конечно-разностные схемы ВВЦП и противопоточных разностей. Первая из них оказалась абсолютно неустойчивой. Это свидетельствует о том, что метод конечных разностей не всегда учитывает физические особенности задачи.

Ниже для получения конечно-разностных схем для уравнения переноса будет использован так называемый *интерполяционно-характеристический метод* построения разностных схем для гиперболических уравнений. В этом подходе используется свойство переноса решения уравнения (5.6) вдоль характеристик. Так, решение в точке  $x_i$  на  $(n+1)$ -м временном слое  $u_i^{n+1} = u(x_i, t^{n+1})$  будет равно значению функции из предыдущего временного слоя:

$$u_i^{n+1} = u(a, t^n), \quad (5.8)$$

где положение точки  $a$  определяется соотношением (рис. 4):

$$a = x_i - c\Delta t = x_i - C\Delta x, \quad (5.9)$$

здесь  $C$  — число Куранта (3.23).

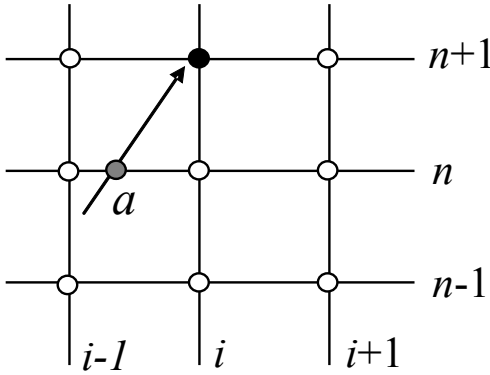


Рис. 4. Вычислительный шаблон для уравнения переноса и характеристика, проходящая через точку  $(x_i, t^n)$

Соотношение (5.8) является точным. Чтобы построить конечно-разностную схему, нужно теперь выразить величину  $u(a, t^n)$  через значения функции в соседних узлах с помощью интерполяции. Эта интерполяция может быть осуществлена с различной степенью точности и различными способами, каждый из которых соответствует какой-либо конечно-разностной схеме.

### 5.1.1. Метод разностей против потока

В методе разностей против потока используется линейная интерполяция по ближайшим к точке  $a$  соседним узлам по очевидному соотношению (рис. 5):

$$u(a, t^n) = u_i^n - (u_i^n - u_{i-1}^n) \frac{a - x_i}{x_i - x_{i-1}}. \quad (5.10)$$

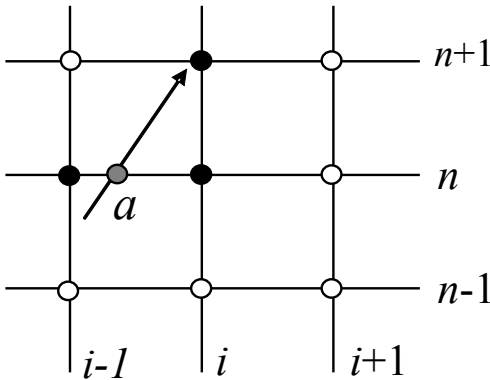


Рис. 5. Вычислительный шаблон и используемые для интерполяции точки (закрашены черным) для противопоточной схемы

При подстановке (5.9) в выражение (5.10) последнее приводится с учетом (5.8) к противопоточной схеме (3.24):

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0. \quad (5.11)$$

Поскольку погрешность аппроксимации линейной интерполяции квадратична по шагу сетки, то погрешность аппроксимации (5.11) будет иметь первый порядок  $O(\Delta t, \Delta x)$ . Тем не менее, как уже отмечалось в п. 3.2, схема (5.11) является точной при  $C = 1$ , когда  $a = x_{i-1}$  и решение удовлетворяет условию сдвига:

$$u_i^{n+1} = u_{i-1}^n, \text{ при } C = 1. \quad (5.12)$$

Условие устойчивости и дифференциальное приближение для противопоточной схемы было получено в пп. 3.2, 3.3. Для отрицательной скорости  $c < 0$

ближайшими соседями точки  $a$  будут узлы  $x_i$  и  $x_{i+1}$ , что приведет к смене направления конечной разности по пространству в (5.11). Для случая произвольного знака скорости конвекции противопоточную схему можно записать в виде

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c^+ \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + c^- \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0, \quad (5.13)$$

где  $c^+ = \frac{c + |c|}{2}$ ,  $c^- = \frac{c - |c|}{2}$ .

Устойчивость и дифференциальное приближение для противопоточной схемы были приведены в пп. 3.2, 3.3.

### 5.1.2. Схема Лакса

Схема Лакса использует линейную интерполяцию по узлам  $i - 1$  и  $i + 1$ , выражающуюся следующей формулой (рис. 6):

$$u(a, t^n) = u_{i-1}^n + (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \frac{a - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}.$$

Подстановка (5.9) в это выражение с учетом (5.8) приводит к разностной схеме

$$\frac{u_i^{n+1} - (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)/2}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0. \quad (5.14)$$

Анализ устойчивости по фон Нейману дает критерий устойчивости  $C \leq 1$ . Дифференциальное приближение для схемы Лакса имеет вид

$$u_t + cu_x = \frac{c\Delta x}{2} \left( \frac{1}{C} - C \right) u_{xx} + \frac{c\Delta x^2}{3} (1 - C)^2 u_{xxx} + O(\Delta x^3), \quad (5.15)$$

откуда следует, что погрешность аппроксимации имеет несколько необычный вид  $O(\Delta t, \Delta x^2/\Delta t)$ . При числах Куранта порядка единицы погрешность имеет первый порядок. Схема Лакса удовлетворяет условию сдвига (5.12) и является точной при  $C = 1$ .

### 5.1.3. Метод Лакса — Вендроффа

Рассмотренные в пп. 5.1.1, 5.1.2 схемы были схемами перво-

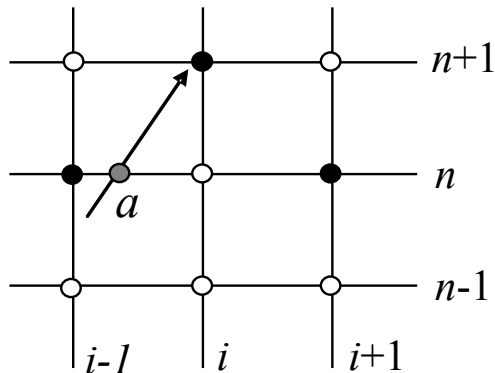


Рис. 6. Вычислительный шаблон и используемые для интерполяции точки (закрашены черным) для схемы Лакса

го порядка точности. Для повышения порядка аппроксимации до второго необходимо использовать квадратичную интерполяцию по трем узлам с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа [Самарский, Гулин, 1989]:

$$L_{2,i}(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)}u_1 - \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_3-x_2)}u_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}u_3 \quad (5.16),$$

где  $u_i$  — заданные значения функции в соответствующих точках  $x_i$ .

Естественно для этой цели использовать узлы  $i-1$ ,  $i$  и  $i+1$  из предыдущего временного слоя (рис. 7). Применение (5.16) для вычисления  $u(a, t^n)$  дает

$$u(a, t^n) = \frac{C(1+C)}{2}u_{i-1}^n + (1-C^2)u_i^n - \frac{C(1-C)}{2}u_{i+1}^n.$$

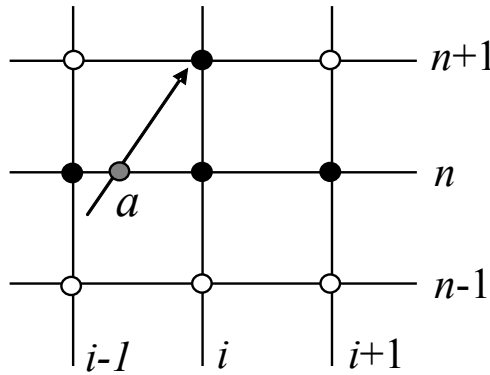


Рис. 7. Вычислительный шаблон и используемые для интерполяции точки (закрашены черным) для схемы Лакса — Вендроффа

С учетом (5.8) это выражение преобразуется в схему Лакса — Вендроффа:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = \frac{c^2 \Delta t}{2} \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}, \quad (5.17)$$

которая имеет второй порядок аппроксимации  $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$ .

Анализ устойчивости по фон Нейману дает критерий устойчивости  $C \leq 1$ .

Дифференциальное приближение схемы Лакса — Вендроффа имеет вид

$$u_t + cu_x = -\frac{c\Delta x^2}{6}(1-C^2)u_{xxx} - \frac{c\Delta x^3}{8}C(1-C^2)u_{xxxx} - O(\Delta x^4).$$

Для схем второго порядка точности характерно отсутствие схемной вязкости и наличие схемной дисперсии. Схема удовлетворяет условию сдвига (5.12) и является точной при  $C = 1$ .

### 5.1.4. Двухшаговый метод Лакса — Вендроффа

В некоторых случаях более удобно применять метод Лакса — Вендроффа в двухшаговом варианте:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - (u_{i+1}^n + u_i^n)/2}{\Delta t/2} + c \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} &= 0, \\ \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} &= 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Данный метод эквивалентен методу Лакса — Вендроффа.

### 5.1.5. Метод Мак-Кормака

Еще один двухшаговый вариант метода Лакса — Вендроффа, в отличие от предыдущего, не требующий вычисления значений функции в полуцелых узлах, получил название метода Мак-Кормака. Алгоритм метода Мак-Кормака является методом типа «предиктор-корректор» и имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\hat{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} &= 0 \quad (\text{предиктор}) \\ \frac{\tilde{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{\hat{u}_i^{n+1} - \hat{u}_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} &= 0, \quad u_i^{n+1} = \frac{\tilde{u}_i^{n+1} + \hat{u}_i^{n+1}}{2} \quad (\text{корректор}) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Направления аппроксимирующих производную  $\partial/\partial x$  разностей в предикторе и корректоре могут быть изменены на противоположные. При расчете разрывных решений наилучшие результаты в использовании схемы (5.19) получаются, если на шаге предиктор берутся разности в направлении движения разрыва.

Аппроксимация и устойчивость данного метода эквиваленты аналогичным характеристикам метода Лакса — Вендроффа.

### 5.1.6. Схема с перешагиванием

В схеме с перешагиванием («чехарда», Midpoint Leapfrog Method) вместо  $i$ -го узла используется точка  $b$ , в которую приходит характеристика из точки  $(x_i, t^{n-1})$  (рис. 8). Точка  $b$  имеет местоположение  $b = x_i + C\Delta x$ . Используются следующие интерполяционные соотношения:

$$\begin{aligned} u(a, t^n) &= Cu_{i-1}^n + u(b, t^n) - Cu_{i+1}^n, \\ u(b, t^n) &= u_i^{n-1}, \end{aligned}$$

из которых с учетом (5.8) можно получить разностную схему

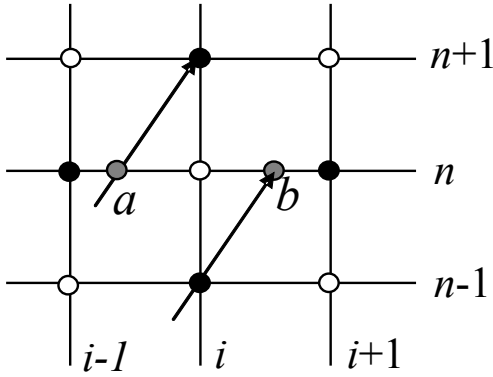


Рис. 8. Вычислительный шаблон и используемые для интерполяции точки (закрашены черным) для схемы с перешагиванием

$$u_i + cu_x = -\frac{c\Delta x^2}{6}(1-C^2)u_{xxx} - \frac{c\Delta x^4}{120}(9C^2 - 10C + 1)u_{xxxx} - O(\Delta x^6).$$

Схему с перешагиванием отличает то, что в дифференциальном приближении вообще отсутствуют производные четных порядков. Это означает отсутствие схемной диссипации (модуль коэффициента перехода в области устойчивости  $C \leq 1$  всегда равен единице). Тем не менее, схема имеет недостаток, связанный с «перешагиванием» (т. е. с тем, что  $u_i^{n+1}$  не зависит от  $u_i^n$ ), который приводит к появлению при расчете независимых решений на двух подмножествах узлов вычислительной сетки (белые и черные узлы на рис. 8).

### 5.1.6. Схема «Кабаре»

В. М. Головизниным и А. А. Самарским была предложена разностная схема «Кабаре» для решения уравнения конвекции [Головизнин, Самарский, 1998]. В этой схеме используются интерполяционные узлы  $i-1$ ,  $i$  и точка  $b$  из предыдущего временного слоя, причем в точку  $b$  приходит характеристика из точки  $(x_{i-1}, t^{n-1})$  (рис. 9). Используются следующие интерполяционные соотношения:

$$u(a, t^n) = -(1-2C)u_{i-1}^n + (1-2C)u_i^n + u(b, t^n),$$

$$u(b, t^n) = u_{i-1}^{n-1},$$

из которых с учетом (5.8) можно получить разностную схему

$$\frac{1}{2} \left( \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{u_{i-1}^n - u_{i-1}^{n-1}}{\Delta t} \right) + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0, \quad (5.21)$$

имеющую второй порядок аппроксимации  $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$ .

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0, \quad (5.20)$$

имеющую второй порядок аппроксимации  $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$ .

Анализ устойчивости по фон Нейману приводит к критерию устойчивости  $C \leq 1$ . Схема удовлетворяет условию сдвига (5.12) и является точной при  $C = 1$ .

Дифференциальное приближение схемы с перешагиванием имеет вид



К достоинствам схемы «Кабаре» по сравнению с рассмотренными выше схемами следует отнести то, что она не только является точной при  $C = 1$ , удовлетворяя условию сдвига (5.12), но также является точной при  $C = 0,5$ , удовлетворяя еще одному очевидному условию сдвига:

$$u_i^{n+1} = u_{i-1}^n, \text{ при } C = 0,5.$$

Анализ устойчивости по фон Нейману приводит к условию  $C \leq 1$  и показывает, что в области устойчивости у схемы «Кабаре» отсутствуют диссипативные свойства (модуль коэффициента перехода равен единице). Сравнивая дифференциальное приближение схемы «Кабаре»

$$u_t + cu_x = \frac{c\Delta x^2}{12}(1-C)(1-2C)u_{xxx} - O(\Delta x^4)$$

с дифференциальными приближениями рассмотренных выше схем методов Лакса — Вендроффа и перешагиванием, можно убедиться в том, что схемная дисперсия метода «Кабаре» наименьшая. Как показали численные расчеты, схема является наилучшей для расчета линейного уравнения переноса (5.6), имея наименьшую диссипацию и дисперсию.

Схема может быть записана в двухшаговой формулировке с использованием полуцелых узлов:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i-1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^n}{\Delta t/2} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} &= 0, \\ u_i^{n+1} &= 2u_{i-1/2}^{n+1/2} - u_{i-1}^n, \\ \frac{u_{i-1/2}^{n+1} - u_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta t/2} + c \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} &= 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

### 5.1.7. Центрированная по времени неявная схема, или метод Кранка — Николсона

Для решения уравнения конвекции используются и неявные схемы. Одну из таких схем можно получить, аппроксимируя уравнение (5.6) в точке  $(x_i, t^{n+1/2})$  с помощью соотношений

$$\frac{\partial u(x_i, t^{n+1/2})}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t^2),$$

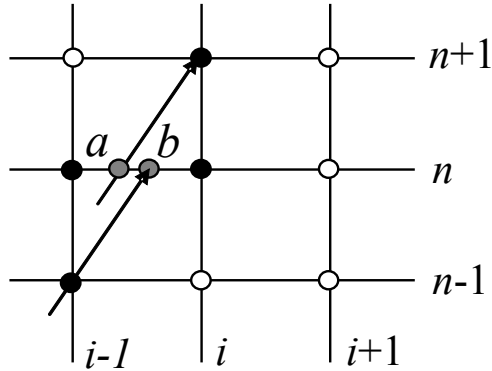


Рис. 9. Вычислительный шаблон и используемые для интерполяции точки (черного цвета) для схемы «Кабаре»

$$\frac{\partial u(x_i, t^{n+1/2})}{\partial x} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u(x_i, t^n)}{\partial x} + \frac{\partial u(x_i, t^{n+1})}{\partial x} \right) + O(\Delta x^2),$$

из которых, применяя центрально-разностную аппроксимацию производной  $\partial/\partial x$ , составляется неявная схема Кранка — Николсона

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{c}{2} \left( \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) = 0 \quad (5.23)$$

второго порядка аппроксимации  $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$ .

Анализ устойчивости по фон Нейману приводит к выражению для коэффициента перехода

$$G = \frac{1 - (iC/2)\sin k\Delta x}{1 + (iC/2)\sin k\Delta x},$$

из которого следует два важных достоинства схемы Кранка — Николсона: абсолютная устойчивость и бездиссипативность.

Последнее свойство также видно из дифференциального приближения схемы Кранка — Николсона:

$$u_t + cu_x = -\frac{c\Delta x^2}{6} \left( 1 + \frac{C^2}{2} \right) u_{xxx} - \frac{c\Delta x^4}{120} \left( 1 + 5C^2 + \frac{3C^4}{2} \right) u_{xxxx} - O(\Delta x^4), \quad (5.24)$$

в котором отсутствуют производные четных порядков.

Недостатком схемы является нарушение условия сдвига (5.12) и необходимость обращения трехдиагональной системы уравнений.

## 5.2. Нелинейные уравнения Римана и Бюргерса

В п. 5.1 было рассмотрено простейшее линейное уравнение, описывающее процесс конвекции. Между тем в реальных гидрогазодинамических течениях процесс конвекции является нелинейным, так как его скорость определяется скоростью жидкости или газа. Простейшей нелинейной моделью конвекции является уравнение Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (5.25)$$

Начальные условия:  $u(x, 0) = u_0(x)$

Решение задачи (5.25) с начальными условиями  $u(x, 0) = u_0(x)$  получается с помощью метода характеристик и может быть записано в следующем неявном виде:

$$u(x, t) = u_0(x - ut). \quad (5.26)$$

Из этого выражения следует, что пространственная производная решения

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{u'_0(x-ut)}{1+tu'_0(x-ut)}$$

при наличии в начальном распределении участков с отрицательным наклоном обращается в бесконечность в момент времени  $t_b = -\frac{1}{\min u'_0(x)}$  («градиентная катастрофа»).

Формально при  $t > t_b$  решение уравнения Римана становится многозначным.

Избежать многозначности позволяет учет эффектов вязкости в (5.25), который приводит к уравнению Бюргера:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (5.27)$$

Уравнение Бюргера с помощью преобразования Коула — Хопфа  $u = -2\nu \frac{\partial \ln \phi}{\partial x}$  приводится к линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},$$

имеющему следующее решение для заданного начального распределения:

$$\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y,0) \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}\right] dy.$$

Уравнение Бюргера имеет, таким образом, аналитическое решение

$$u(x,t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-y}{t} \exp\left[-\frac{\Phi(x,y,t)}{2\nu}\right] dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\Phi(x,y,t)}{2\nu}\right] dy}, \quad (5.28)$$

где

$$\Phi(x,y,t) = \int_{x_0}^y u_0(x') dx' + \frac{(x-y)^2}{2t}.$$

При малых значениях вязкости ( $\nu \rightarrow 0$ ) основной вклад в интегралы дают окрестности точек  $y = \xi$  минимума  $\Phi$ , которые можно определить из соотношений

$$u_0(\xi) - \frac{x-\xi}{t} = 0, \quad u'_0(\xi) + \frac{1}{t} > 0.$$

При  $t < t_b$  такая точка, очевидно, одна. В этом случае решение выражается в виде

$$u(x, t) = \frac{x - \xi}{t} = u_0(\xi) = u_0(x - ut),$$

совпадающем с решением уравнения Римана (5.26), полученного выше с помощью метода характеристик.

При  $t > t_b$  возникает ударная волна, в окрестности которой существенна вязкость. Ширину области ударной волны  $\delta$  можно определить из оценок величин членов уравнения (5.27):

$$\delta \sim \nu / \max u.$$

При  $\nu \rightarrow 0$  толщина ударной волны стремится к нулю, и ударную волну можно рассматривать как контактный разрыв.

Контактный разрыв движется со скоростью, которую можно вычислить, проинтегрировав уравнение Бюргера в малой окрестности разрыва:

$$\int_{x_s-0}^{x_s+0} \frac{\partial u}{\partial t} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_s-0}^{x_s+0} u dx - (u_+ - u_-) \frac{dx_s}{dt} = -\frac{1}{2} \int_{x_s-0}^{x_s+0} \frac{\partial u^2}{\partial x} dx + O(\nu) = -\frac{u_+^2 - u_-^2}{2} + O(\nu),$$

где  $x_s$  — координата разрыва,  $u_{\pm} = u(x_s \pm 0, t)$  — скорости с обеих сторон разрыва.

Из последнего выражения следует, что скорость движения разрыва равна полусумме скоростей среды с обеих сторон разрыва:

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{u_+ + u_-}{2}.$$

Наличие разрывных решений затрудняет использование метода конечных разностей, поэтому основным методом дискретизации для анализа нелинейных уравнений переноса является метод конечных объемов.

### 5.2.1. Принципы дискретизации нелинейных гиперболических уравнений

Уравнения Римана и Бюргера могут быть записаны в дивергентной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad (5.29)$$

где  $f(u) = u^2/2 - \nu \partial u / \partial x$  — поток величины  $u$ .

Для простоты рассмотрим пространственную равномерную сетку. Введем среднее по контрольному объему вблизи  $i$ -го узла:

$$\bar{u}_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t) dx. \quad (5.30)$$

Применяя операцию осреднения (5.30) к (5.29), получим точное балансное соотношение:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{h_{i+1/2} - h_{i-1/2}}{\Delta x} = 0, \quad (5.31)$$

где величинами  $h_{i\pm 1/2} = f(u(x_{i\pm 1/2}, t))$  обозначены так называемые *функции численного потока* (numerical flux functions).

Для аппроксимации среднего по объему (5.30) может быть использована подходящая формула численного интегрирования. Ниже будет применена наиболее простая и распространенная формула прямоугольников  $u_i = u_i + O(h^2)$ , обеспечивающая второй порядок аппроксимации:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{h_{i+1/2} - h_{i-1/2}}{\Delta x} = 0. \quad (5.32)$$

Основная цель методов аппроксимации уравнения (5.29) и его дискретного аналога (5.32) — правильная аппроксимация численных потоков  $h_{i\pm 1/2}$ . Такие аппроксимации могут быть записаны в общем виде как

$$h_{i+1/2} = h(u_{i-m+1}, \dots, u_{i+m}) \quad (5.33)$$

Аппроксимации (5.33) должны удовлетворять условиям согласованности [Peuret et al., 2000]:

$$h(u, \dots, u) = f(u),$$

$$\sum_{j=-m+1}^m \frac{\partial h}{\partial u_j} \Big|_u = \frac{\partial f(u)}{\partial u} = c(u), \quad \forall u.$$

Существуют различные варианты аппроксимации функций численного потока. Их можно определить как: 1) взвешенное среднее от узловых потоков  $f(u_{i-m+1}) \dots f(u_{i+m})$ ; 2) поток в некоторой промежуточной точке шаблона  $u^*$ ; 3) гибрид первых двух случаев.

Например, для  $m = 1$  в (5.33) функции численного потока можно определить как:

$$1) h_{i+1/2}^{(f)} = \frac{f(u_i) + f(u_{i+1})}{2},$$

2)  $h_{i+1/2}^{(u)} = f(u^*)$ , где  $u^* = I(u_i, u_{i+1})$  — промежуточная величина между  $u_i, u_{i+1}$ , а  $I$  — интерполирующий оператор;

$$3) h_{i+1/2} = H(h_{i+1/2}^{(f)}, h_{i+1/2}^{(u)}).$$

### 5.2.2. Противопоточная схема Куранта — Изаксона — Риса

Одной из первых разностных схем для решения уравнения (5.29) была схема Куранта — Изаксона — Риса

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{h_{i+1/2}^n - h_{i-1/2}^n}{\Delta x} = 0 \quad (5.34)$$

с аппроксимацией численного потока в виде (верхний индекс  $n$  здесь и далее опускаем):

$$h_{i+1/2} = \frac{f(u_i) + f(u_{i+1})}{2} - \frac{1}{2} d_{i+1/2}, \quad (5.35)$$

где  $d_{i+1/2}$  имеет вид

$$d_{i+1/2} = |c_{i+1/2}| (u_{i+1} - u_i) \quad (5.36)$$

и называется диссипативным потоком, поскольку пропорционально «дискретному градиенту»  $(u_{i+1} - u_i)$ . Наличие диссипативного потока играет стабилизирующую роль, так как при его отсутствии ( $d_{i\pm 1/2} = 0$ ) схемы (5.34)–(5.36) для линейной задачи  $f(u) = cu$  совпадают с рассмотренной выше абсолютно неустойчивой схемой ВВЦП (3.21).

Входящая в (5.36) величина  $c_{i+1/2} = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u^*}$  может быть определена по одной

из формул:

$$c_{i+1/2} = \begin{cases} \frac{f_{i+1} - f_i}{u_{i+1} - u_i}, \\ \text{или} \\ \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u^*}, \quad u^* \in [u_i, u_{i+1}] \end{cases} \quad (5.37)$$

или их суперпозиции.

Легко убедиться в том, что для случая линейного уравнения конвекции  $f(u) = cu$  схема Куранта — Изаксона — Риса совпадает с противопоточной схемой (5.13), поэтому имеет те же точность аппроксимации и критерий устойчивости (в эвристическом варианте метода замороженных коэффициентов, см. п. 3.2) — первый порядок и число Куранта меньше единицы.

### 5.2.3. Схема Годунова

Схема, впервые предложенная С. К. Годуновым, основана на точном решении уравнения Римана, полученного для начальных данных в виде кусочно-постоянной аппроксимации функции решения, в каждом контрольном объеме равной среднеобъемной величине (5.30). Схема имеет вид (5.34) с численными потоками:

$$h_{i+1/2} = \begin{cases} \min_{(u_i, u_{i+1})} f(u), & u_i < u_{i+1} \\ \max_{(u_i, u_{i+1})} f(u), & u_i > u_{i+1} \end{cases} \quad (5.38)$$

или

$$h_{i+1/2} = \frac{1}{2} \left[ \min_{(u_i, u_{i+1})} f(u) + \max_{(u_i, u_{i+1})} f(u) \right] - \frac{\operatorname{sgn}(u_{i+1} - u_i)}{2} \left[ \max_{(u_i, u_{i+1})} f(u) - \min_{(u_i, u_{i+1})} f(u) \right].$$

Если  $f(u)$  — монотонная функция на интервале  $[u_i, u_{i+1}]$ , то схема Годунова аналогична схеме Куранта — Изаксона — Риса (\*) с диссипативным потоком:

$$d_{i+1/2} = \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right) (f_{i+1} - f_i).$$

Схема также имеет первый порядок аппроксимации по пространству и времени и устойчива при числе Куранта меньше единицы.

#### 5.2.4. Схема Лакса — Вендроффа

Нелинейный аналог схемы Лакса — Вендроффа (5.17) имеет вид (5.34), (5.35) с диссипативным потоком

$$d_{i+1/2} = \frac{\Delta t}{\Delta x} c_{i+1/2}^2 (u_{i+1} - u_i), \quad (5.39)$$

который, как нетрудно убедиться, равен потоку (5.36), умноженному на локальное число Куранта:  $C_{i+1/2} = c_{i+1/2} \Delta t / \Delta x$ . Поскольку последнее должно быть меньше единицы в области устойчивости, диссипативные свойства схемы (5.39) слабее, чем у противопоточной схемы в полном соответствии с анализом, проведенным в п. 5.1.

#### 5.2.5. Метод Мак-Кормака

Нелинейное обобщение схемы Мак-Кормака типа «предиктор-корректор» из п. 5.1.5 имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x} &= 0, \\ \frac{\hat{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{\tilde{f}_i^{n+1} - \tilde{f}_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} &= 0, \\ u_i^{n+1} &= \frac{\tilde{u}_i^{n+1} + \hat{u}_i^{n+1}}{2}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Метод Мак-Кормака проще в реализации, чем метод Лакса — Вендроффа, особенно для систем гиперболических уравнений, так как не требует вычисления матрицы  $c = \partial f / \partial u$ . Схема Мак-Кормака хорошо описывает разрывные решения типа ударных волн, причем лучше всего разрывы описываются, когда на шаге предиктор используются разности по потоку. Однако численные решения в окрестности разрывов имеют хотя и небольшие, но осцилляции, присутствие которых не всегда желательно. Такое поведение, как уже было сказано

в п. 2.4, связано с нарушением разностной схемой свойства монотонности, присущего исходной непрерывной задаче. В связи с этим возникает вопрос: возможны ли конечно-разностные схемы высокого порядка точности для уравнения (5.29), сохраняющие свойство монотонности?

### 5.2.6. TVD-схемы

Условие монотонности для решения задачи (5.29) заключается в том, что для двух заданных начальных данных, таких, что одно везде больше другого:  $u(x, 0) \geq w(x, 0)$ , в последующие моменты времени это свойство сохраняется:  $u(x, t) \geq w(x, t)$  [Рябенский, 2000].

Можно показать, что для конечно-разностной схемы

$$u_i^{n+1} = H(u_{i-m}^n, \dots, u_i^n, \dots, u_{i+m}^n) \quad (5.41)$$

условие монотонности имеет вид

$$\frac{\partial H}{\partial u_{i+j}^n} \geq 0, \quad j \in [-m, m]. \quad (5.42)$$

Для линейных схем общего вида

$$u_i^{n+1} = \sum_j a_{ij} u_j^n \quad (5.43)$$

из этого условия вытекает неотрицательность коэффициентов:

$$a_{ij} \geq 0. \quad (5.44)$$

Согласно теореме С. К. Годунова (1959), не существует линейных монотонных схем с порядком аппроксимации выше первого. Таким образом, на поставленный в п. 5.2.5 вопрос дается отрицательный ответ.

Однако дальнейшие исследования показали, что можно построить нелинейные схемы высокого порядка точности, обладающие более слабым свойством сохранения монотонности начального распределения. В частности, это достигается в классе схем, характеризующихся так называемым свойством уменьшения полной вариации (Total Variation Diminishing property), или TVD-схем.

TVD-свойство, которым, как несложно показать, обладает исходное непрерывное уравнение (5.29), формулируется в виде

$$TV(u(x, t_2)) \leq TV(u(x, t_1)), \quad \forall t_2 \geq t_1,$$

где полная вариация определена как

$$TV(u(x, t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right| dx.$$

Для конечно-разностных схем TVD-свойство записывается в виде



$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n),$$

$$TV(u) = \sum_i |u_{i+1} - u_i| = \sum_i |V_i|. \quad (5.45)$$

Одним из распространенных способов построения TVD-схем является *метод ограничителей потока* (Flux limiter method) [Harten, 1984]. В этом методе численный поток  $h_{i+1/2}$  представляется в виде суперпозиции монотонной аппроксимации низкого порядка точности  $h_{i+1/2}^l$  (соответствующей, как правило, противопоточной схеме) и аппроксимации высокого порядка точности  $h_{i+1/2}^h$  (например, схеме с центральными разностями):

$$h_{i+1/2} = h_{i+1/2}^l + \psi_{i+1/2} (h_{i+1/2}^h - h_{i+1/2}^l). \quad (5.46)$$

Функция  $\psi_{i+1/2}$  называется ограничителем потока и подбирается таким образом, чтобы быть близкой к единице в областях с гладким изменением решения и близкой к нулю в областях с сильными градиентами. Таким образом, в областях крутых фронтов численного решения включается диссипативная противопоточная схема, сглаживающая нефизические осцилляции, а в области плавного изменения решения имеет место аппроксимация высокого порядка точности.

Обычно ограничитель потока выбирается в виде функции от отношения приращений решения в соседних узлах:

$$\psi_{i+1/2} = \psi(r_i), \quad r_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_i}.$$

Величина  $r_i$  является индикатором различных типов поведения решения:

- 1)  $r_i \leq 0$  — область осцилляций;
- 2)  $0 \leq r_i < 1$  — область экспоненциального роста, характерного при приближении к разрыву;
- 3)  $r_i \sim 1$  и  $r_i > 1$  — области плавных изменений.

Исходя из этого ограничитель потока должен иметь следующее асимптотическое поведение:

$$\psi(r) = O(r), \quad \text{при } r < 1$$

$$\psi(r) = 0, \quad \text{при } r < 0$$

$$\psi(r) = O(1), \quad \text{при } r \geq 1$$

Дальнейшие ограничения на вид функции  $\psi(r)$  накладывают условие выполнения TVD-свойства (5.45). Так, для линейного уравнения переноса и суперпозиции (5.46) противопоточной схемы для  $h_{i+1/2}^l$  и схемы Лакса — Вендроффа для  $h_{i+1/2}^h$  для выполнения TVD-свойства ограничитель потока должен удовлетворять неравенству [Peuret, 1996]:

$$0 \leq \psi(r) \leq 2 \min(r, 1), \quad (5.47)$$

при условии устойчивости КФЛ  $c_{i+1/2} \Delta t / \Delta x < 1$ .

Удовлетворяющие условию (5.47) наиболее часто встречающиеся в литературе ограничители потока приведены в табл. 1.

Таблица 1

Ограничители потока

Minmod	$\psi(r) = \max[0, \min(r, 1)]$
Superbee	$\psi(r) = \max[0, \min(2r, 1), \min(r, 2)]$
VanLeer	$\psi(r) = (r +  r ) / (1 + r)$
VanAlbada	$\psi(r) = (r^2 + r) / (1 + r^2)$

TVD-схемы широко применяются и при решении стационарных задач вычислительной гидродинамики с преобладающим влиянием конвекции в случае, когда нежелательно появление нефизических осцилляций в численном решении.

### 5.2.7. Устойчивость разностных аппроксимаций уравнения Бюргерса

Наличие в уравнении Бюргерса члена, ответственного за действие вязкости, приводит к тому, что, в отличие от гиперболического уравнения Римана, уравнение Бюргерса становится параболическим уравнением. Смена типа уравнения отражается и на характеристиках устойчивости конечно-разностных схем для расчета уравнения Бюргерса. Как было отмечено в п. 5.1, для расчета гиперболических систем уравнений используются, как правило, явные схемы. В то же время на примере рассмотрения в п. 3.2 критерия устойчивости явной схемы для уравнения теплопроводности можно убедиться в том, что наличие в разностной схеме явной аппроксимации диффузионного члена приводит к дополнительным ограничениям на устойчивость. В данном пункте будет рассмотрено влияние на устойчивость одновременного наличия в уравнениях конвективных и диффузионных членов.

Анализ будет проводиться для линеаризованного уравнения Бюргерса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (5.48)$$

Рассмотрим устойчивость явной разностной схемы ВВЦП:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = \nu \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}. \quad (5.49)$$

Анализ устойчивости для методом фон Неймана приводит к выражению для коэффициента перехода:

$$G = 1 - 2r(1 - \cos \beta) + iC \sin \beta, \quad (5.50)$$

где  $\beta = k\Delta x$ .

Согласно (5.50) величина  $G$  описывает в комплексной плоскости эллипс с полуосями  $2r$  и  $C$  (рис. 10). При наличии устойчивости этот эллипс должен находиться внутри единичного круга, что имеет место, если левый край эллипса не выходит за точку  $G = -1$  и если радиус кривизны эллипса в точке  $G = 1$  меньше единицы. Эти два условия, как нетрудно показать, эквивалентны условиям

$$\frac{C^2}{2} \leq r \leq \frac{1}{2}. \quad (5.51)$$

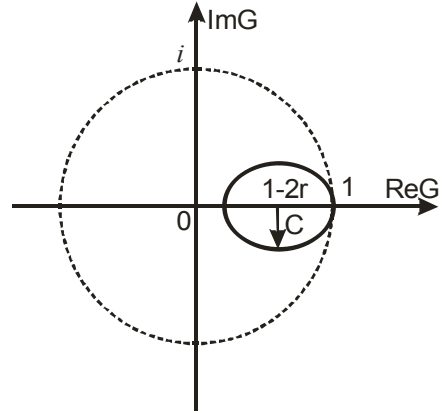


Рис. 10. Условие устойчивости схемы ВВЦП

Правое неравенство в (5.51), как и следовало ожидать, совпадает с полученным выше условием устойчивости (3.19) явной схемы для уравнения теплопроводности. Левое неравенство эквивалентно ограничению на шаг по времени:

$$\Delta t \leq \frac{2\nu}{c^2}. \quad (5.52)$$

Если записать схему (5.49) в виде (5.43):

$$u_i^{n+1} = \left(r - \frac{C}{2}\right)u_{i+1}^n + (1 - 2r)u_i^n + \left(r + \frac{C}{2}\right)u_{i-1}^n,$$

то можно заметить, что условие монотонности (5.44) — неотрицательность коэффициентов — для схемы ВВЦП нарушается при более сильном, чем (5.51), ограничении:

$$\frac{C}{2} \leq r, \text{ или } \text{Re}_\Delta = \frac{c\Delta x}{\nu} \leq 2, \quad (5.53)$$

где  $\text{Re}_\Delta$  — сеточное число Рейнольдса.

Отметим, что условие (5.53) совпадает с условием (2.31) монотонности схемы с центральными разностями для уравнения конвекции-диффузии.

Условие (5.53) сужает «рабочий» диапазон схемы ВВЦП:

$$\frac{C}{2} \leq r \leq \frac{1}{2}.$$

Избавиться от одного из ограничений на шаг по времени позволяет неявная по диффузионным членам разностная схема

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = v \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}, \quad (5.54)$$

для которой остается только одно условие устойчивости (5.52).

Для малых величин вязкости и больших скоростей конвекции условие (5.52) сильно ограничивает шаг по времени. Избавиться от этого ограничения можно при использовании противопоточной схемы аппроксимации (5.13) конвективного члена

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c^+ \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + c^- \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = v \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}, \quad (5.55)$$

однако анализ дифференциального приближения этой схемы

$$u_i + cu_x = v \left[ 1 + \frac{\text{Re}_\Delta}{2}(1-C) \right] u_{xx} + \dots$$

показывает, что при больших сеточных числах Рейнольдса  $\text{Re}_\Delta$  схемная вязкость существенно превышает физическую.

Для уменьшения схемной вязкости можно использовать противопоточные аппроксимации более высокого порядка точности, например схему QUICK Леонарда (см. гл. 7).

### 5.2.8. Метод Аллена — Чена для уравнения Бюргера

Аллен и Чен предложили явную двухшаговую схему типа предиктор-корректор для расчета уравнения Бюргера:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+1}^n - F_{i-1}^n}{2\Delta x} &= v \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2\tilde{u}_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (\text{предиктор}) \\ \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{\tilde{F}_{i+1}^{n+1} - \tilde{F}_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} &= v \frac{\tilde{u}_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + \tilde{u}_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (\text{корректор}) \end{aligned} \quad (5.56)$$

здесь и далее  $F = u^2/2$ .

Необычная аппроксимация вязкого члена позволяет избежать ограничения на шаг по времени  $\Delta t \leq \Delta x^2/(2v)$ . Схема Аллена — Чена устойчива при числе Куранта, меньшем единицы, и имеет порядок аппроксимации  $O(\Delta t, \Delta x^2)$ .

### 5.2.9. Метод Мак-Кормака для уравнения Бюргера

Модификация метода Мак-Кормака (пп. 5.1.5, 5.2.5) для уравнения Бюргера имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+1}^n - F_i^n}{\Delta x} &= v \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}, \\ \frac{\hat{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{\tilde{F}_i^{n+1} - \tilde{F}_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} &= v \frac{\tilde{u}_{i+1}^{n+1} - 2\hat{u}_i^{n+1} + \tilde{u}_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}, \end{aligned}$$

$$u_i^{n+1} = \frac{\tilde{u}_i^{n+1} + \hat{u}_i^{n+1}}{2}. \quad (5.57)$$

Метод Мак-Кормака имеет второй порядок точности:  $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$ . Эмпирический критерий устойчивости схемы (5.57) имеет следующий вид [Андерсон и др., 1990]:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{u_{\max} \Delta x + 2\nu}.$$

### 5.2.10. Метод Кранка — Николсона с линеаризацией

Следуя методу Кранка — Николсона (п. 5.1.7), можно предложить аппроксимацию уравнения Бюргерса:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} (\nabla_x F_i^n + \nabla_x F_i^{n+1}) = \frac{\nu}{2} (\nabla_x^2 u_i^n + \nabla_x^2 u_i^{n+1}). \quad (5.58)$$

Разностное уравнение (5.58) является нелинейным, для его линеаризации можно использовать метод Ньютона:

$$F_i^{n+1} \approx F_i^n + \left( \frac{\partial F_i}{\partial u_i} \right)^n (u_i^{n+1} - u_i^n). \quad (5.59)$$

В частности, для  $F = u^2/2$  из (5.59) следует

$$\frac{(u_i^{n+1})^2 + (u_i^n)^2}{2} \approx u_i^n u_i^{n+1}. \quad (5.60)$$

С помощью (5.60) из (5.58) получается следующая схема Кранка — Николсона:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{u_{i+1}^n u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^n u_{i-1}^{n+1}}{4\Delta x} = \frac{\nu}{2} \left( \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right). \quad (5.61)$$

Схема (5.61) является абсолютно устойчивой по фон Нейману и имеет второй порядок точности:  $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$ .

## 5.3. Уравнение теплопроводности

В этом пункте будут рассмотрены схемы для одномерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (5.62)$$

являющегося простейшей моделью диффузионного процесса.

Для уравнения (5.62) могут быть поставлены три типа граничных условий:

1) условие Дирихле:  $T(0, t) = b(t)$ ;

2) условие фон Неймана:  $\frac{\partial T(0, t)}{\partial n} = c(t)$ ;

3) условие теплообмена с окружающей средой:  $\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial n} = h_w [T(0, t) - T_a]$ ,

где  $n$  — внутренняя нормаль к границе области.

### 5.3.1. Явная схема

Явная схема с погрешностью аппроксимации  $O(\Delta t, \Delta x^2)$  для уравнения (5.62) имеет вид (3.14). Условие ее устойчивости  $0 \leq r \leq 0,5$  было получено в п. 3.2. Дифференциальное приближение для явной схемы имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{a \Delta x^2}{12} (1 - 6r) \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \left[ \frac{a^3 \Delta t^2}{3} - \frac{a^2 \Delta t \Delta x^2}{12} + \frac{a \Delta x^4}{360} \right] \frac{\partial^6 T}{\partial x^6} + \dots \quad (5.63)$$

Из (5.63) следует, что при  $r = \frac{1}{6}$  точность аппроксимации явной схемы по-

вышается до  $O(\Delta t^2, \Delta x^4)$ . Численная дисперсия в схеме (5.63) отсутствует, так как нет производных нечетных порядков. К числу недостатков явной схемы относится то, что решение в конкретном узле  $(n+1)$ -го временного слоя не зависит от значений  $T$  этого слоя в остальных узлах, что противоречит свойствам уравнения (5.62), для которого характеристиками являются линии  $t = \text{const}$ . Представляется, что для решения уравнений параболического типа лучше использовать неявные методы, поскольку они учитывают всю информацию о решении на текущем временном слое.

### 5.3.2. Неявная схема

Неявная схема имеет вид

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = a \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}. \quad (5.64)$$

Погрешность аппроксимации обладает первым порядком точности по времени и вторым по пространству:  $O(\Delta t, \Delta x^2)$ . Анализ устойчивости методом фон Неймана показывает абсолютную устойчивость неявной схемы. Дифференциальное приближение схемы (5.64) имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{a \Delta x^2}{12} (1 + 6r) \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \left[ \frac{a^3 \Delta t^2}{3} + \frac{a^2 \Delta t \Delta x^2}{12} + \frac{a \Delta x^4}{360} \right] \frac{\partial^6 T}{\partial x^6} + \dots$$

### 5.3.3. Метод Кранка — Николсона

Схема Кранка — Николсона для уравнения теплопроводности имеет вид

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{a}{2} \left( \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right). \quad (5.65)$$

Ее достоинством перед явной и неявной схемами является второй порядок аппроксимации  $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$  и абсолютная устойчивость. Дифференциальное приближение для схемы (5.65) имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{a\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \left[ \frac{a^3\Delta t^2}{12} + \frac{a\Delta x^4}{360} \right] \frac{\partial^6 T}{\partial x^6} + \dots$$

К небольшому недостатку схемы Кранка — Николсона по сравнению с неявной схемой (5.64) следует отнести ее немонотонность при  $\Delta t > \Delta x^2/a$  [Самарский, Гулин, 1989] и, по-видимому, связанную с этим несколько меньшую устойчивость схемы при расчете нелинейных задач по сравнению с неявной схемой.

### 5.3.4. Комбинированный метод

Рассмотренные в предыдущих пунктах схемы можно объединить в рамках комбинированного метода:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = a \left[ \theta \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + (1-\theta) \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right], \quad (5.66)$$

где  $0 \leq \theta \leq 1$ .

При  $\theta = 0$  (5.66) переходит в явную схему, при  $\theta = 1$  — в неявную схему, при  $\theta = 1/2$  — в схему Кранка — Николсона. Кроме этого, имеются два случая, в которых погрешность аппроксимации может быть снижена. При выборе  $\theta = 1/2 - 1/(12r)$  погрешность снижается до  $O(\Delta t^2, \Delta x^4)$ . Если при этом выбрать  $r = 1/\sqrt{20} = 0,224$ , то погрешность аппроксимации по пространству повышается до 6-го порядка:  $O(\Delta t^2, \Delta x^6)$ . Эти результаты можно получить при анализе дифференциального приближения схемы (5.66), которое приведено в [Андерсон и др., 1990].

Схема (5.66) абсолютно устойчива при  $1/2 \leq \theta \leq 1$ . При  $0 \leq \theta \leq 1/2$  — схема устойчива при условии  $0 \leq r \leq 1/(2 - 4\theta)$ . Можно также показать, что комбинированная схема (5.66) будет монотонной при  $r \leq 1/(2 - 2\theta)$  [Самарский, Гулин, 1989].

### 5.3.5. Метод Дюфорты — Франкела

В некоторых случаях для расчета уравнения теплопроводности могут быть использованы трехслойные схемы, такие как, например, схема Дюфорты — Франкела:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n-1}}{2\Delta t} = a \frac{T_{i+1}^n - T_i^{n+1} - T_i^{n-1} + T_{i-1}^n}{\Delta x^2}. \quad (5.67)$$

Замечательным свойством этой схемы является тот факт, что она абсолютно устойчива. Дифференциальное приближение схемы (5.67) имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{a\Delta x^2}{12} [1 - 12r^2] \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \dots = \left[ \frac{a\Delta x^2}{12} - a^3 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \right] \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \dots$$

откуда видно, что порядок аппроксимации схемы —  $O(\Delta t^2, \Delta x^2, (\Delta t/\Delta x)^2)$ . Поэтому схема Дюфорты — Франкела является согласованной при  $\Delta t/\Delta x \rightarrow 0$ . Если при уменьшении шагов сетки  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$ , их отношение остается постоянным  $\Delta t/\Delta x \rightarrow \gamma$ , то можно показать, что схема Дюфорты — Франкела аппроксимирует не уравнение (5.62), а так называемое гиперболическое уравнение теплопроводности (телеграфное уравнение):

$$\frac{\partial T}{\partial t} + a\gamma^2 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0.$$

### 5.3.6. Двумерное уравнение теплопроводности

Для решения многомерных задач диффузии применяются методы, похожие на рассмотренные выше методы с целью решения одномерного уравнения. Однако алгоритмы решения многомерных задач имеют некоторые особенности, о которых будет сказано ниже.

Рассмотрим двумерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (5.68)$$

и его конечно-разностную аппроксимацию на равномерной сетке с помощью явного метода:

$$\frac{T_{ij}^{n+1} - T_{ij}^n}{\Delta t} = a \frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{ij}^n + T_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + a \frac{T_{ij+1}^n - 2T_{ij}^n + T_{ij-1}^n}{\Delta y^2}. \quad (5.69)$$

Температура в каждом узле сетки находится по следующему из (5.69) выражению:

$$T_{ij}^{n+1} = (1 - 2r_x - 2r_y) T_{ij}^n + r_x T_{i+1,j}^n + r_x T_{i-1,j}^n + r_y T_{ij+1}^n + r_y T_{ij-1}^n. \quad (5.70)$$

Устойчивость алгоритма (5.70) можно проанализировать с помощью двумерного обобщения метода фон Неймана, который приводит к выражению для коэффициента перехода:



$$G = 1 - 4r_x \sin^2 \frac{k_x \Delta x}{2} - 4r_y \sin^2 \frac{k_y \Delta y}{2}, \quad (5.71)$$

где  $r_x = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}$ ,  $r_y = \frac{a\Delta t}{\Delta y^2}$  — сеточные числа Фурье по обоим пространственным направлениям.

Из (5.71) следует, что схема (5.69) устойчива, если  $r_x + r_y \leq \frac{1}{2}$ . В частности,

для квадратной сетки  $\Delta x = \Delta y$  получим условие устойчивости  $r_x = r_y = r \leq \frac{1}{4}$ ,

приводящее к более жесткому ограничению на шаг по времени, чем условие (3.19) для одномерного уравнения. Такое ограничение делает применение явных схем для решения многомерных диффузионных задач еще менее целесообразным.

Для снятия этого ограничения можно использовать неявную схему:

$$\frac{T_{ij}^{n+1} - T_{ij}^n}{\Delta t} = a \frac{T_{i+1,j}^{n+1} - 2T_{ij}^{n+1} + T_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + a \frac{T_{ij+1}^{n+1} - 2T_{ij}^{n+1} + T_{ij-1}^{n+1}}{\Delta y^2}, \quad (5.72)$$

однако система разностных уравнений (5.72) имеет пятидиагональную матрицу, для обращения которой требуется значительно больше времени, чем для обращения трехдиагональной матрицы (см. гл. 4).

### 5.3.7. Неявный метод переменных направлений

Обозначенные в п. 5.3.6 проблемы стимулировали создание неявных методов переменных направлений, принципы которых уже были описаны в п. 4.5. Неявный метод переменных направлений в применении к уравнению (5.68) имеет следующий вид:

$$\text{Шаг 1:} \quad \frac{T_{ij}^{n+1/2} - T_{ij}^n}{\Delta t/2} = a \frac{T_{i+1,j}^{n+1/2} - 2T_{ij}^{n+1/2} + T_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + a \frac{T_{ij+1}^n - 2T_{ij}^n + T_{ij-1}^n}{\Delta y^2},$$

$$\text{Шаг 2:} \quad \frac{T_{ij}^{n+1} - T_{ij}^{n+1/2}}{\Delta t/2} = a \frac{T_{i+1,j}^{n+1/2} - 2T_{ij}^{n+1/2} + T_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + a \frac{T_{ij+1}^{n+1} - 2T_{ij}^{n+1} + T_{ij-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \quad (5.73)$$

На каждом шаге алгоритма (5.73) происходит обращение трехдиагональной системы уравнений вдоль каждой из линий вычислительной сетки:

$$(1 + r_x)T_{ij}^{n+1/2} - \frac{r_x}{2}T_{i+1,j}^{n+1/2} - \frac{r_x}{2}T_{i-1,j}^{n+1/2} = (1 - r_y)T_{ij}^n + \frac{r_y}{2}T_{ij+1}^n + \frac{r_y}{2}T_{ij-1}^n,$$

$$(1+r_y)T_{ij}^{n+1} - \frac{r_y}{2}T_{i,j+1}^{n+1} - \frac{r_y}{2}T_{ij-1}^{n+1} = (1-r_x)T_{ij}^{n+1/2} + \frac{r_x}{2}T_{i+1,j}^{n+1/2} + \frac{r_x}{2}T_{i-1,j}^{n+1/2}. \quad (5.74)$$

В методе переменных направлений появляется вспомогательная величина  $T_{ij}^{n+1/2}$ . Чтобы понять, как ставить граничные условия для  $T_{ij}^{n+1/2}$ , рассмотрим погрешность аппроксимации  $z_{ij}^n = T_{ij}^n - T_e(x_i, y_j, t^n)$ , где  $T_e$  — точное решение, а также погрешность  $z_{ij}^{n+1/2} = T_{ij}^{n+1/2} - T_e^{n+1/2}$ , где  $T_e^{n+1/2}$  — точное решение для  $T_{ij}^{n+1/2}$ , которое будет определено ниже. Уравнения для погрешностей имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{z^{n+1/2} - z^n}{\Delta t/2} - aD_{xx}z^{n+1/2} - aD_{yy}z^n &= -\frac{T_e^{n+1/2} - T_e^n}{\Delta t/2} + aD_{xx}T_e^{n+1/2} + aD_{yy}T_e^n = \psi_1 \\ \frac{z^{n+1} - z^{n+1/2}}{\Delta t/2} - aD_{xx}z^{n+1/2} - aD_{yy}z^{n+1} &= -\frac{T_e^{n+1} - T_e^{n+1/2}}{\Delta t/2} + aD_{xx}T_e^{n+1/2} + aD_{yy}T_e^{n+1} = \psi_2 \end{aligned}$$

где  $D_{xx} = \Delta x^{-2}\Delta_{xx}$ ,  $D_{yy} = \Delta y^{-2}\Delta_{yy}$ ,  $\Delta_{xx}T = T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}$ ,  $\Delta_{yy}T = T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}$ .

Подставляя в первое уравнение представление  $T_e^{n+1/2} = \frac{T_e^n + T_e^{n+1}}{2} - \varphi$ , для

функции  $\varphi$  получим соотношение

$$\psi_1 = -\frac{T_e^{n+1} - T_e^n}{\Delta t} + \frac{2\varphi}{\Delta t} + aD_{xx}\frac{T_e^n + T_e^{n+1}}{2} - aD_{xx}\varphi + aD_{yy}T_e^n. \quad (5.75)$$

В силу соотношений

$$\begin{aligned} &-\frac{T_e^{n+1} - T_e^n}{\Delta t} + aD_{xx}\frac{T_e^n + T_e^{n+1}}{2} + aD_{yy}T_e^n = \\ &= -\frac{T_e^{n+1} - T_e^n}{\Delta t} + a(D_{xx} + D_{yy})\frac{T_e^n + T_e^{n+1}}{2} + aD_{yy}\frac{T_e^n - T_e^{n+1}}{2} = \\ &= O(\Delta t^2) + aD_{yy}\frac{T_e^n - T_e^{n+1}}{2} \end{aligned}$$

из (5.75) следует

$$\psi_1 = \frac{2\varphi}{\Delta t} - aD_{xx}\varphi - \frac{a}{2}D_{yy}(T_e^{n+1} - T_e^n) + O(\Delta t^2).$$

Из последнего соотношения видно, что при выборе  $\varphi = \frac{\Delta t}{4}aD_{yy}(T_e^{n+1} - T_e^n)$

погрешность аппроксимации имеет второй порядок по времени:  $\psi_1 = O(\Delta t^2)$ . Легко также проверить, что в этом случае  $\psi_1 = \psi_2$  [Самарский, Вабищевич, 2004].

Таким образом, в методе переменных направлений граничные условия на шаге 1 должны ставиться для величины

$$T_{ij}^{n+1/2} = \frac{T_{ij}^n + T_{ij}^{n+1}}{2} - \frac{\Delta t}{4} a \left( \frac{T_{ij+1}^{n+1} - 2T_{ij}^{n+1} + T_{ij-1}^{n+1}}{\Delta y^2} - \frac{T_{ij+1}^n - 2T_{ij}^n + T_{ij-1}^n}{\Delta y^2} \right). \quad (5.76)$$

Устойчивость метода переменных направлений определяется произведением двух коэффициентов перехода для каждого полушага:

$$G = G_1 G_2 = \frac{1 - 2r_y \sin^2 \frac{k_y \Delta y}{2}}{1 + 2r_x \sin^2 \frac{k_x \Delta x}{2}} \cdot \frac{1 - 2r_x \sin^2 \frac{k_x \Delta x}{2}}{1 + 2r_y \sin^2 \frac{k_y \Delta y}{2}}. \quad (5.77)$$

Отметим, что при любых значениях сеточных чисел Фурье  $r_x$ ,  $r_y$ , модуль коэффициента перехода всегда меньше единицы  $|G| \leq 1$ , однако модули коэффициентов перехода на каждом из шагов  $|G_1|, |G_2|$  могут быть больше единицы. Метод, таким образом, безусловно устойчив.

Очевидное трехмерное обобщение неявного метода переменных направлений

$$\begin{aligned} \frac{T_{ijk}^{n+1/3} - T_{ijk}^n}{\Delta t/3} &= aD_{xx} T_{ijk}^{n+1/3} + aD_{yy} T_{ijk}^n + aD_{zz} T_{ijk}^n, \\ \frac{T_{ijk}^{n+2/3} - T_{ijk}^{n+1/3}}{\Delta t/3} &= aD_{xx} T_{ijk}^{n+1/3} + aD_{yy} T_{ijk}^{n+2/3} + aD_{zz} T_{ijk}^{n+1/3}, \\ \frac{T_{ijk}^{n+1} - T_{ijk}^{n+2/3}}{\Delta t/3} &= aD_{xx} T_{ijk}^{n+2/3} + aD_{yy} T_{ijk}^{n+2/3} + aD_{zz} T_{ijk}^{n+1} \end{aligned}$$

уже не является безусловно устойчивым, так как соответствующий коэффициент перехода

$$G = G_1 G_2 G_3 = \frac{1 - \frac{4}{3} r_y \sin^2 \frac{k_y \Delta y}{2} - \frac{4}{3} r_z \sin^2 \frac{k_z \Delta z}{2}}{1 + \frac{4}{3} r_x \sin^2 \frac{k_x \Delta x}{2}} \dots$$

не всегда меньше единицы.

Трехмерный вариант метода переменных направлений оказывается лишь условно устойчивым и имеющим первый порядок аппроксимации.

### 5.3.8. Методы расщепления

Для расчета трехмерных и многомерных задач вычислительной гидродинамики более удобными являются методы расщепления. Основная их идея состоит в расщеплении многомерного конечно-разностного оператора на произведение одномерных при сохранении суммарного порядка аппроксимации.

Простым примером такого подхода является неявная схема расщепления для решения (5.62):

$$\begin{aligned}\frac{T_{ij}^{n+1/2} - T_{ij}^n}{\Delta t} &= a \frac{T_{i+1,j}^{n+1/2} - 2T_{ij}^{n+1/2} + T_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2}, \\ \frac{T_{ij}^{n+1} - T_{ij}^{n+1/2}}{\Delta t} &= a \frac{T_{ij+1}^{n+1} - 2T_{ij}^{n+1} + T_{ij-1}^{n+1}}{\Delta y^2}.\end{aligned}\quad (5.78)$$

Для исследования аппроксимации схемы (5.78) запишем ее в виде

$$(E - r_x \Delta_{xx})(E - r_y \Delta_{yy})T^{n+1} = T^n.$$

Последнее выражение можно переписать в виде

$$(E - r_x \Delta_{xx} - r_y \Delta_{yy} + r_x r_y \Delta_{yy} \Delta_{xx})T^{n+1} = (E - r_x \Delta_{xx} - r_y \Delta_{yy} + O(\Delta t^2))T^{n+1} = T^n,$$

эквивалентном неявной схеме (5.72), имеющей первый порядок аппроксимации.

Поскольку оба шага схемы (5.78) составляют одномерные неявные схемы, она абсолютно устойчива.

Для повышения порядка аппроксимации до второго на каждом шаге (5.78) можно использовать одномерные схемы Кранка — Николсона:

$$\begin{aligned}\frac{T^{n+1/2} - T^n}{\Delta t} &= aD_{xx} \frac{T^{n+1/2} + T^n}{2}, \\ \frac{T^{n+1} - T^{n+1/2}}{\Delta t} &= aD_{yy} \frac{T^{n+1/2} + T^{n+1}}{2}.\end{aligned}\quad (5.79)$$

Эта схема представляется в виде

$$T^{n+1} = \left(E - \frac{r_y}{2} \Delta_{yy}\right)^{-1} \left(E + \frac{r_y}{2} \Delta_{yy}\right) \left(E - \frac{r_x}{2} \Delta_{xx}\right)^{-1} \left(E + \frac{r_x}{2} \Delta_{xx}\right) T^n.$$

Из приведенного выражения вытекает следующее соотношение:

$$T^{n+1} = \left(E + r_y \Delta_{yy} + r_x \Delta_{xx} + \frac{1}{2}(r_x^2 \Delta_{xx}^2 + 2r_x \Delta_{xx} r_y \Delta_{yy} + r_y^2 \Delta_{yy}^2) + \dots\right) T^n. \quad (5.80)$$

Для коммутирующих операторов  $\Delta_{xx}$ ,  $\Delta_{yy}$  из последнего выражения следует

$$T^{n+1} = \left[E + \Delta t(D_{yy} + D_{xx}) + \frac{\Delta t^2}{2}(D_{yy} + D_{xx})^2 + \dots\right] T^n,$$

откуда следует второй порядок аппроксимации по времени схемы расщепления (5.79).

Общую схему метода расщепления для многомерного уравнения диффузионного типа

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^M A_{\alpha} T = f$$

с положительными разностными операторами  $A_\alpha \geq 0$  можно записать в следующем виде [Марчук, 1989]. На интервале  $t^{n-1} \leq t \leq t^{n+1}$  последовательно решаются разностные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{T^{n+1/M-1} - T^{n-1}}{\Delta t} + A_1^n \frac{T^{n+1/M-1} + T^{n-1}}{2} &= 0; \\ &\dots \\ \frac{T^n - T^{n-1/M}}{\Delta t} + A_M^n \frac{T^n + T^{n-1/M}}{2} &= f^n; \\ \frac{T^{n+1/M} - T^n}{\Delta t} + A_M^n \frac{T^n + T^{n+1/M}}{2} &= f^n; \\ &\dots \\ \frac{T^{n+1} - T^{n+(M-1)/M}}{\Delta t} + A_1^n \frac{T^{n+1} + T^{n+(M-1)/M}}{2} &= 0, \end{aligned} \quad (5.81)$$

где  $A^n = A(t^n, \tilde{T}^n)$ ,  $\tilde{T}^n = T^{n-1} - \Delta t A(t^{n-1}, T^{n-1}) T^{n-1}$ .

Схема расщепления (5.81) абсолютно устойчива и имеет второй порядок аппроксимации.

#### 5.4. Численные модели нелинейных волновых процессов

Простейшей моделью нелинейных волновых процессов в средах с дисперсией является уравнение Кортевега — де Вриза (КдВ):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (5.82)$$

В волновых процессах, описываемых уравнением (5.82), дисперсия, компенсируя действие нелинейности, дает возможность формироваться стационарным волнам конечной амплитуды — уединенным и периодическим.

Уравнение КдВ имеет решение в виде уединенной волны — солитона:

$$u = u_0 \cosh^{-2} \left[ \frac{u_0^{1/2} (x - u_0 t / 3)}{(12\beta)^{1/2}} \right].$$

Численное моделирование уравнения КдВ можно производить с помощью следующих конечно-разностных методов [Березин, 1982].

1. Трехслойная явная схема со вторым порядком аппроксимации  $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$ :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + u_i^n \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \beta \frac{u_{i+2}^n - 2u_{i+1}^n + 2u_{i-1}^n - u_{i-2}^n}{2\Delta x^3} = 0. \quad (5.83)$$

Схема (5.83) устойчива при  $\frac{\Delta t}{\Delta x} \left( |u| + \frac{3\sqrt{3}\beta}{2\Delta x^2} \right) \leq 1$ .

2. Двухшаговая явная схема Лакса — Вендроффа со вторым порядком аппроксимации  $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$ :

$$\begin{aligned} u_{i+1/2}^{n+1/2} &= \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_i^n) - \\ &- \frac{\Delta t}{4\Delta x} \left[ (u_i^{n+1})^2 - (u_i^n)^2 + \frac{2\beta}{\Delta x^2} (u_{i+2}^n - 3u_{i+1}^n + 3u_i^n - u_{i-1}^n) \right], \\ u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ (u_{i+1/2}^{n+1/2})^2 - (u_{i-1/2}^{n+1/2})^2 + \frac{2\beta}{\Delta x^2} (u_{i+3/2}^{n+1/2} - 3u_{i+1/2}^{n+1/2} + 3u_{i-1/2}^{n+1/2} - u_{i-3/2}^{n+1/2}) \right]. \end{aligned} \quad (5.84)$$

Для схемы (5.84) условие устойчивости  $\Delta t \leq \Delta x^3/4\beta$  более жесткое, чем для схемы (5.83).

3. Трехслойная явная схема с порядком аппроксимации  $O(\Delta t^2, \Delta x^4)$ :

$$\begin{aligned} &\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + u_i^n \frac{-u_{i+2}^n + 8u_{i+1}^n - 8u_{i-1}^n + u_{i-2}^n}{12\Delta x} + \\ &+ \beta \frac{-u_{i+3}^n + 8u_{i+2}^n - 13u_{i+1}^n + 13u_{i-1}^n - 8u_{i-2}^n + u_{i-3}^n}{8\Delta x^3} = 0. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Условие устойчивости схемы (5.85):  $\Delta t \leq 0.216 \Delta x^3/\beta$ .

Уравнение КдВ можно также решать с помощью спектрального метода, используя разложение в ряд Фурье:

$$u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(t) \exp(ikx). \quad (5.86)$$

Подставляя это разложение в уравнение (5.82), получаем бесконечную систему уравнений для амплитуд гармоник:

$$\frac{da_k}{dt} = -\frac{ik}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{k-n} a_n + i\beta k^3 a_k.$$

Система обрезается на некотором максимальном волновом числе  $k_{max}$ , значение которого подбирается с помощью пробных расчетов. С обзором современных методов интегрирования нелинейных уравнений типа (5.82) четвертого порядка точности по времени можно познакомиться в [Kassam, Trefethen, 2005]. Применение спектральных методов в вычислительной гидродинамике подробно описано в книге [Canuto et al., 2006].

## ГЛАВА 6

### МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Приближение пограничного слоя широко используется в аналитической гидродинамике как асимптотический метод получения решений уравнений Навье-Стокса и тепломассопереноса при больших числах Рейнольдса.

Уравнения переноса неразрывности, импульса и энергии для двумерного плоского или осесимметричного стационарного турбулентного пограничного слоя имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x}(r^m \rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(r^m \rho v) = 0 \\ & \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - U_e \frac{dU_e}{dx} \right) = \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial y} \left[ r^m (\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial y} \right], \\ & \rho \left( u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) = \\ & = \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial y} \left[ r^m \left\{ \left( \frac{\mu}{\text{Pr}} + \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t} \right) \frac{\partial h}{\partial y} + \left\{ \mu \left( 1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) + \mu_t \left( 1 - \frac{1}{\text{Pr}_t} \right) \right\} u \frac{\partial u}{\partial y} \right\} \right], \end{aligned} \quad (6.1)$$

где  $x$  — продольная координата,  $y$  — координата, направленная по нормали к стенке,  $u$ ,  $v$  — продольная и поперечная скорости,  $h$  — энтальпия,  $m = 0, 1$  соответствует плоскому и осесимметричному случаям,  $r$  — радиус кривизны поверхности,  $U_e$  — скорость потока на внешней границе пограничного слоя,  $\mu$ ,  $\mu_t$  — динамическая и турбулентная вязкости соответственно,  $\text{Pr}$  и  $\text{Pr}_t$  — молекулярное и турбулентное числа Прандтля.

В отличие от стационарных уравнений Навье-Стокса, имеющих эллиптический тип, уравнения пограничного слоя относятся к параболическому типу. Корректная постановка начальных и граничных условий включает в себя начальные условия во входном сечении пограничного слоя:

$$u(y, 0) = u_0(y), \quad h(y, 0) = h_0(y),$$

и граничные условия на обтекаемой поверхности:

$$u = 0, \quad h = h_w, \quad \text{при } y = 0,$$

а также на внешней границе пограничного слоя:

$$u = U_e, \quad h = h_e, \quad \text{при } y \rightarrow \infty.$$

Для задания поперечной скорости  $v$  в начальном сечении необходимо знать продольную производную продольной скорости  $\partial u / \partial x$ . Если такая информация отсутствует, можно воспользоваться уравнениями движения и неразрывности (6.1) для того, чтобы получить искомое условие:

$$v(y, 0) = -\frac{u}{r^m} \int_0^y u^{-2} \left( U_e \frac{dU_e}{dx} + \frac{1}{\rho r^m} \frac{\partial}{\partial y} \left[ r^m (\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right) r^m dy.$$

Уравнения пограничного слоя являются нелинейными уравнениями параболического типа, поэтому численные методы их решения сходны с численными методами решения нелинейного уравнения теплопроводности. Наиболее распространенными методами являются неявный метод и метод Кранка — Николсона. Вследствие своей условной монотонности (см. п. 5.3.3) иногда, особенно при расчете турбулентных течений, схема Кранка — Николсона неустойчива, поэтому более популярна неявная схема второго порядка точности, в которой производная по  $x$  аппроксимируется как

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{n+1} = \frac{3u_i^{n+1} - 4u_i^n + u_i^{n-1}}{2\Delta x}. \quad (6.2)$$

Для удобства будем ниже обозначать  $u_i^{n+1}$  как  $u_i$ ,  $u_i^n$  как  $\tilde{u}_i$ ,  $u_i^{n-1}$  как  $\hat{u}_i$ .

Схему неявного метода для уравнения пограничного слоя несжимаемой жидкости

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (6.3)$$

можно записать следующим образом:

$$u_i \frac{u_i - \tilde{u}_i}{\Delta x} + v_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta y} = U_e \frac{U_e - \tilde{U}_e}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta y} \left( \nu_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta y} - \nu_{i-1/2} \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta y} \right). \quad (6.4)$$

Поперечная скорость вычисляется с помощью численного интегрирования уравнения неразрывности:

$$v_i = -\int_0^{y_i} \frac{\partial u}{\partial x} dy. \quad (6.5)$$



Система уравнений (6.4), (6.5) нелинейна и требует линеаризации. Рассмотрим наиболее распространенные методы линеаризации уравнений пограничного слоя.

**1. Метод запаздывающих коэффициентов**, в котором нелинейные коэффициенты берутся с предыдущего сечения пограничного слоя:

$$u_i = \tilde{u}_i + O(\Delta x).$$

В этом методе первого порядка точности на каждом шаге решается уравнение

$$\tilde{u}_i \frac{u_i - \tilde{u}_i}{\Delta x} + \tilde{v}_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta y} = \tilde{U}_e \frac{U_e - \tilde{U}_e}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta y} \left( \tilde{v}_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta y} - \tilde{v}_{i-1/2} \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta y} \right).$$

**2. Итерационная замена** коэффициентов. На каждом шаге по  $x$  проводятся внутренние итерации до достижения сходимости:

$$u_i^k \frac{u_i^{k+1} - \tilde{u}_i}{\Delta x} + v_i^k \frac{u_{i+1}^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}}{2\Delta y} = \tilde{U}_e \frac{U_e - \tilde{U}_e}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta y} \left( v_{i+1/2}^k \frac{u_{i+1}^{k+1} - u_i^{k+1}}{\Delta y} - v_{i-1/2}^k \frac{u_i^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}}{\Delta y} \right).$$

В качестве начального приближения нелинейных коэффициентов берутся их значения с предыдущего сечения пограничного слоя, например  $u_i^0 = \tilde{u}_i$ .

**3. Квазилинеаризация по Ньютону.** Нелинейные слагаемые уравнения (6.4) линеаризуются с помощью общего выражения (5.59), например:

$$(u_i^{k+1})^2 \approx 2u_i^k u_i^{k+1} - (u_i^k)^2, \\ \left( v \frac{\partial u}{\partial y} \right)^{k+1} \approx v^k \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^{k+1} + v^{k+1} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^k - v^k \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^k.$$

Некоторым недостатком этого метода является то, что из-за присутствия множителя  $v^{k+1}$  уравнения приходится решать методом модифицированной или матричной прогонкой [Андерсон и др., 1990].

**4. Экстраполяция коэффициентов** с предыдущего сечения с помощью соотношения

$$u_i = \tilde{u}_i + \left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right|_i \Delta x + O(\Delta x^2) = \tilde{u}_i + \frac{\tilde{u}_i - \hat{u}_i}{\Delta x} \Delta x + O(\Delta x^2) = 2\tilde{u}_i - \hat{u}_i + O(\Delta x^2).$$

Для присутствующих в (6.4) коэффициентов переноса в полуцелых узлах могут быть использованы различные аппроксимации, например:

$$v_{i+1/2} = \frac{v_i + v_{i+1}}{2}, \quad v_{i+1/2} = \frac{2v_i v_{i+1}}{v_i + v_{i+1}}$$

и др. [Самарский, Гулин, 1989].

Наиболее простым методом из перечисленных является метод запаздывающих коэффициентов, не требующий внутренних итераций. При наличии

сильной нелинейности, например при расчете системы уравнений дифференциальных моделей турбулентности, целесообразно использовать метод итерационной замены. При необходимости можно использовать также экстраполяцию коэффициентов или квазилинеаризацию.

В ряде случаев от проблем с определением поперечной скорости можно избавиться с помощью преобразования Мизеса:  $x, y \rightarrow x, \psi$ , где функция тока определена как  $\psi(x, y) = \int_0^y u(x, y') dy'$ , а компоненты скорости находятся из соотношений:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v.$$

В переменных Мизеса уравнение пограничного слоя (6.3) приобретает простой вид:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \nu u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right).$$

## ГЛАВА 7

### ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Уравнения Навье-Стокса для сжимаемой жидкости образуют смешанную систему гиперболически-параболических уравнений, а для несжимаемой жидкости — эллиптически-параболических. Поэтому в этих двух случаях используются разные численные методы решения.

В данной главе рассматриваются численные методы решения системы уравнений Навье-Стокса несжимаемой жидкости. Эти уравнения имеют вид (см. п. 1.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i, \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0, \quad \tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (7.1)$$

В ряде случаев рассматривается также уравнение переноса пассивной субстанции, например температуры:

$$\rho c_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial (u_i T)}{\partial x_i} \right] = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \sigma, \quad q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (7.2)$$

Для решения уравнений сжимаемой жидкости широко используются рассмотренные выше явные методы расчета: методы Дюфорта — Франкела, Лакса — Вендроффа, Мак-Кормака и др. Применение этих методов для расчета несжимаемых течений затруднительно из-за ограничения на шаг по времени, налагаемого условием Куранта — Фридрихса — Леви  $\Delta t \leq \Delta x / c_{sound}$ , так как скорость звука в жидкости  $c_{sound}$  слишком велика ( $\sim 10^3$  м/с).

Несжимаемость течения приводит к дополнительным вычислительным трудностям: в уравнение неразрывности входят лишь компоненты скорости. Поэтому в данном случае нет прямой связи с давлением, которая в случае

сжимаемых течений осуществляется через плотность. Для расчета давления требуется решать эллиптическое уравнение Пуассона совместно с уравнением импульсов.

### 7.1. Особенности дискретизации уравнений Навье-Стокса

Как уже отмечалось в п. 1.2, уравнения переноса импульса, тепла и массы можно представить в виде обобщенного уравнения переноса (1.4), поэтому дискретизацию уравнений Навье-Стокса удобно изучать на примере дискретизации уравнения (1.4).

Вместо принятого выше обозначения величин в узлах сетки с помощью нижних и верхних индексов удобно применять более простую систему обозначений узлов вычислительного шаблона, использующую в качестве индексов наименования сторон света [Ferziger, Peric, 1996]. Центральная точка шаблона обозначается нижним индексом  $P$ , а соседние узлы — нижними индексами, соответствующими сторонам света (рис. 11).

В компьютерной памяти удобнее хранить параметры узлов двух- и трехмерных сеток в одномерных массивах, задавая правило однозначного соответствия узлов с индексом одномерного массива. Пример такой параметризации для трехмерного массива приведен в табл. 2 [Ibid.].

В принятых обозначениях система конечно-разностных уравнений (пяти-точечный шаблон для двумерного уравнения) записывается в виде

$$A_W \varphi_W + A_S \varphi_S + A_P \varphi_P + A_N \varphi_N + A_E \varphi_E = Q_P, \quad (7.3)$$

для  $1 < l < N_i N_j N_k$ ,  $N_s$  — количество узлов сетки вдоль  $s$ -направления.

Таблица 2

#### Соответствие трехмерной и одномерной параметризаций узлов сетки

Узел сетки	Обозначение	Одномерный индекс
$i, j, k$	P	$l = (k-1)N_j N_i + (i-1)N_i + j$
$i-1, j, k$	W	$l - N_j$
$i, j-1, k$	S	$l - 1$
$i, j+1, k$	N	$l + 1$
$i+1, j, k$	E	$l + N_j$
$i, j, k-1$	B	$l - N_i N_j$
$i, j, k+1$	T	$l + N_i N_j$

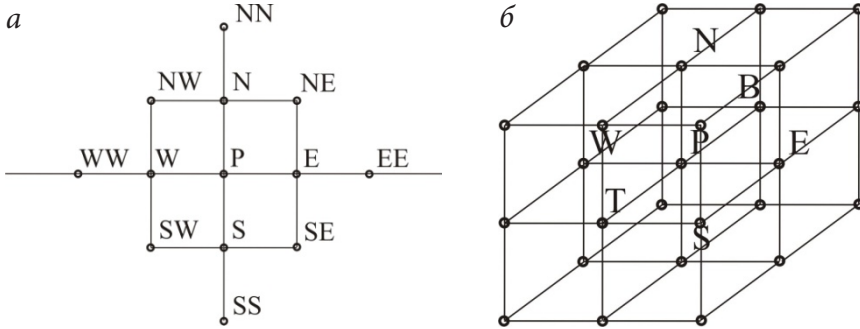


Рис. 11. Обозначения узлов вычислительного шаблона в двумерных (а) и трехмерных (б) задачах

Соотношение (7.3) часто записывается в компактном виде:

$$A_P \Phi_P + \sum_{nb} A_{nb} \Phi_{nb} = Q_P, \quad (7.4)$$

где индекс  $nb$  обозначает соседние узлы (от англ. neighbors).

Используя метод конечных объемов (см. п. 2.5), проинтегрируем обобщенное уравнение переноса по элементарному объему, грани которого проходят через середины отрезков, соединяющих данный узел с соседними (рис. 12):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \Phi dV + \int_S u_i \Phi dS_i = \int_S D_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dS_i + \int_V \sigma_\Phi dV. \quad (7.5)$$

Входящие в соотношение баланса (7.5) интегралы по элементарному объему и его поверхности могут быть получены различными способами.

Для равномерных, или квазиравномерных (см. п. 2.2), сеток объемные интегралы с достаточной точностью (второй порядок аппроксимации) могут быть вычислены с использованием объемного аналога формулы прямоугольников:

$$\int_V \Phi dV = \Phi_P V_P, \quad \int_V \sigma_\Phi dV = \sigma_{\Phi P} V_P, \quad (7.6)$$

где  $V_P$  — объем элементарного объема.

Поверхностные интегралы в (7.5) разбиваются на сумму интегралов по всем граням элементарного объема:

$$\int_S f dS_i = \sum_k \int_{S_k} f dS_i. \quad (7.7)$$

Рассмотрим одну из граней, например грань  $e$  прямоугольного контрольного объема, изображенного на рис. 12, и интеграл  $F_e = \int_{S_e} f dS_i$ . Этот интеграл

может быть аппроксимирован следующими способами. Самым простым является использование формулы прямоугольников

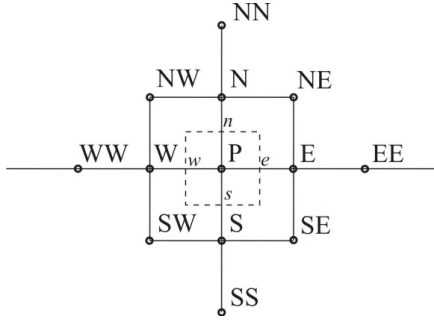


Рис. 12. Элементарный объем

$$F_e = f_e S_e, \quad (7.8)$$

обеспечивающей второй порядок аппроксимации.

Другой вариант — использование формулы трапеций

$$F_e = \frac{(f_{ne} + f_{se})}{2} S_e, \quad (7.9)$$

также обеспечивающей второй порядок аппроксимации.

Более высокого порядка аппроксимации можно добиться, используя квадратурную формулу Симпсона:

$$F_e = \frac{(f_{ne} + 4f_e + f_{se})}{6} S_e. \quad (7.10)$$

Производную по времени будем аппроксимировать направленной разностью первого порядка точности:

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_P \approx \frac{\Phi_P - \tilde{\Phi}_P}{\Delta t} + O(\Delta t), \quad (7.11)$$

где тильдой в соответствии с обозначениями предыдущей главы обозначено значение величины на предыдущем шаге по времени. Для достижения второго порядка аппроксимации можно использовать аппроксимацию (6.2).

Применив аппроксимации (7.6), (7.8) и (7.11) к соотношению (7.5), получим:

$$\begin{aligned} V_P \frac{\Phi_P - \tilde{\Phi}_P}{\Delta t} + (u_e \Phi_e - u_w \Phi_w) S_e + (v_n \Phi_n - v_s \Phi_s) S_n = \\ = D \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_e S_e + D \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_s S_n + \sigma_p V_P. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Входящие в (7.12) диффузионные потоки аппроксимируются центральными разностями со вторым порядком точности с помощью соотношения

$$D \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_e = D_e \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta x}. \quad (7.13)$$

Важной частью дискретизации уравнения переноса является адекватная аппроксимация величин в центрах граней контрольных объемов, например величины  $\Phi_e$  для точки  $e$ , являющейся серединой отрезка, соединяющего узлы  $P$  и  $E$  (см. рис. 12). Второй порядок аппроксимации обеспечивает линейная интерполяция:

$$\Phi_e = \frac{\Phi_E + \Phi_P}{2}. \quad (7.14)$$

Однако выражение (7.14) оказывается эквивалентно аппроксимации конвективных слагаемых центральными разностями, приводящей, как уже было показано в предыдущих главах, к немонотонности разностной аппроксимации и нефизическим осцилляциям решения, особенно при больших значениях сеточного числа Рейнольдса.

К безусловно монотонной разностной схеме приводит интерполяция по потоку:

$$\Phi_e = \begin{cases} \Phi_P, & u_e > 0 \\ \Phi_E, & u_e < 0 \end{cases}$$

или

$$u_e \Phi_e = \frac{u_e + |u_e|}{2} \Phi_P + \frac{u_e - |u_e|}{2} \Phi_E. \quad (7.15)$$

Интерполяция (7.15) эквивалентна противопоточной схеме аппроксимации конвективных слагаемых. Из разложения в ряд Тейлора в окрестности точки  $e$

$$u_e \Phi_e = u_e \Phi_P + \frac{u_e \Delta x}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_e + \dots$$

видно, что интерполяция по потоку привносит дополнительную схемную диффузию.

Меньшую схемную диффузию дает квадратичная интерполяция по потоку, эквивалентная схеме QUICK Леонарда, обеспечивающая третий порядок аппроксимации:

$$\Phi_e = \begin{cases} \frac{6}{8} \Phi_P + \frac{3}{8} \Phi_E - \frac{1}{8} \Phi_W, & u_e > 0 \\ \frac{6}{8} \Phi_E + \frac{3}{8} \Phi_P - \frac{1}{8} \Phi_{EE}, & u_e < 0 \end{cases},$$

или

$$u_e \Phi_e = \frac{9u_e + 3|u_e|}{16} \Phi_P + \frac{9u_e - 3|u_e|}{16} \Phi_E - \frac{u_e + |u_e|}{16} \Phi_W - \frac{u_e - |u_e|}{16} \Phi_{EE}. \quad (7.16)$$

Однако для больших сеточных чисел Рейнольдса условия монотонности и диагонального преобладания для схемы QUICK нарушаются, что может привести к нефизическим осцилляциям и медленной сходимости в процессе итерационного решения соответствующих систем линейных уравнений. Избавиться от нефизических осцилляций помогает использование TVD-схем с ограничителями потоков (см. п. 5.2.6).

Необходимо отметить также, что при использовании схемы QUICK и других схем высокого порядка аппроксимации проекция вычислительного шаблона на каждое пространственное направление перестает быть трехточечной, что не позволяет использовать метод прогонки при решении. Преодолеть эту трудность помогает *метод отложенной коррекции* (Deferred Correction). Конечно-разностная аппроксимация высокого порядка представляется в виде суммы противопоточной схемы и остатка, который выносится в источник-ый член и вычисляется из предыдущей итерации:  $F_e = F_e^{low} + (F_e^{high} - F_e^{low})^{old}$ . Рассмотрим применение метода отложенной коррекции на примере уравнения конвекции-диффузии:

$$c \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right). \quad (7.17)$$

В качестве аппроксимации высокого порядка точности возьмем схему QUICK 3-го порядка точности, приводящей к разностной схеме

$$\left( 1 - \frac{3}{8}R \right) \Phi_E - \left( 2 + \frac{3}{8}R \right) \Phi_P + \left( 1 + \frac{7}{8}R \right) \Phi_W - \frac{R}{8} \Phi_{WW} = 0, \quad (7.18)$$

где  $R = c\Delta x/D$  — сеточное число Рейнольдса.

Противопоточная схема 1-го порядка точности для уравнения (7.17) имеет вид

$$\Phi_E - (2 + R)\Phi_P + (1 + R)\Phi_W = 0. \quad (7.19)$$

Перепишем схему (7.18), выделяя из нее группу членов (7.19):

$$\Phi_E - (2 + R)\Phi_P + (1 + R)\Phi_W = R \left( \frac{3}{8}\Phi_E - \frac{5}{8}\Phi_P + \frac{1}{8}\Phi_W + \frac{1}{8}\Phi_{WW} \right).$$

Метод отложенной коррекции реализуется в виде итерационного процесса:

$$\Phi_E - (2 + R)\Phi_P + (1 + R)\Phi_W = R \left( \frac{3}{8}\Phi_E - \frac{5}{8}\Phi_P + \frac{1}{8}\Phi_W + \frac{1}{8}\Phi_{WW} \right)^{old}. \quad (7.20)$$

При этом на каждой итерации для решения (7.20) используется метод прогонки, счет по которому ввиду диагонального преобладания для матрицы коэффициентов левой части (7.20) всегда устойчив. При использовании метода отложенной коррекции необходимо особое внимание уделять контролю сходимости процесса (7.20), так как в случае недостаточной сходимости внутренних итераций решение будет подвержено некомпенсированной схемной вязкости противопоточной схемы.

Рассмотрим теперь важный вопрос о различных способах выбора размещения переменных на сетке. В двумерном уравнении Навье-Стокса присутствуют три неизвестных — две компоненты скорости и давление. Возможны два способа размещения переменных:



- 1) разнесенная сетка (Staggered Grid), на которой давление и компоненты скорости размещены в разных местах;
- 2) совмещенная сетка (Colocated Grid) — все величины хранятся в одних узлах.

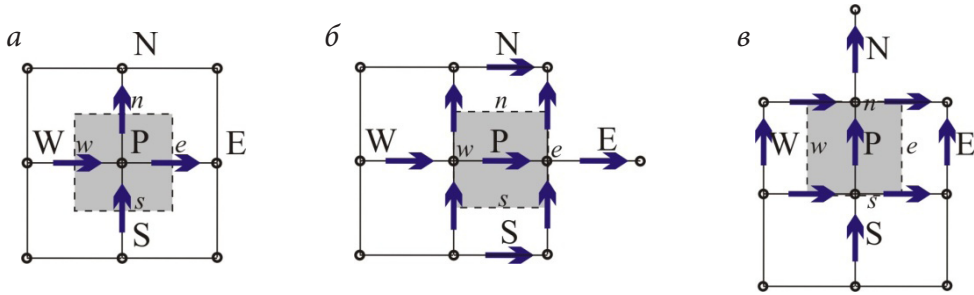


Рис. 13. Расположение давления и компонент скорости на разнесенной сетке и контрольные объемы для уравнения неразрывности (а), x-компоненты скорости (б) и y-компоненты скорости (в)

Расположение компонент скорости и давления на разнесенной сетке показано на рис. 13. Давление хранится в основных узлах, компоненты вертикальной скорости — в вертикальных полуцелых узлах, компоненты горизонтальной скорости — в горизонтальных полуцелых узлах (см. направление стрелок в местах хранения компонент скорости на рис. 13). Для уравнения неразрывности и каждой из компонент скорости имеется отдельный элементарный объем. Аппроксимация уравнения неразрывности со вторым порядком по элементарному объему сводится к простому соотношению (см. рис. 13, а):

$$(u_e - u_w)S_e + (v_n - v_s)S_n = 0.$$

Аппроксимация каждой из компонент уравнения переноса импульса после интегрирования по своим элементарным объемам осуществляется описанным выше способом, причем градиент давления для каждой из компонент скорости удобно аппроксимируется центральной разностью со вторым порядком (см. рис. 13, б, в). В результате на разнесенной сетке возникает сильная связь между давлением и полем скорости, которая помогает избежать осцилляций поля давления, характерных для решения уравнений на совмещенной сетке [Ferziger, Peric, 1996].

При дискретизации уравнений динамики жидкости важна согласованность аппроксимации градиента давления для сохранения консервативности конечно-разностных уравнений. Поскольку дискретизации подвергается уравнение сохранения импульса, то для полученных конечно-разностных уравнений, вообще говоря, не гарантировано сохранение энергии, если к этому не приложены специальные меры. Выделим вклад градиента давления в баланс энергии несжимаемой жидкости, который можно записать как

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \frac{u^2}{2} dV = \dots - \int_V u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} dV = \dots + \int_V p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV - \oint_S u_i p dS_i = \dots - \oint_S u_i p dS_i. \quad (7.21)$$

Конечно-разностный аналог вклада градиента давления в выражении (7.21) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N u_i G_i p \Delta V_i &= \sum_{S_b} p u_n \Delta S - \sum_{i=1}^N p D_i u_i \Delta V_i, \text{ или} \\ \sum_{i=1}^N (u_i G_i p + p D_i u_i) \Delta V_i &= \sum_{S_b} p u_n \Delta S, \end{aligned} \quad (7.22)$$

где  $G_i p$  — численная аппроксимация градиента давления,  $D_i u_i$  — численная аппроксимация дивергенции скорости, используемая в уравнении неразрывности. Последний член в (7.22) представляет собой интеграл по границе объема.

Рассмотрим для простоты одномерный случай, когда градиент давления аппроксимируется левой разностью, а дивергенция — правой на равномерной сетке. В этом случае (7.22) принимает вид

$$\sum_{i=1}^N [u_i (p_i - p_{i-1}) + p_i (u_{i+1} - u_i)] = u_{N+1} p_N - u_1 p_0 \quad (7.23)$$

и действительно сводится к разности граничных значений в согласии с (7.22).

В этом случае в конечно-разностных уравнениях аппроксимации дивергенции и градиента давления согласованы, так как сохраняют «поверхностный» характер влияния градиента давления на баланс энергии. В том случае, если бы использовались, например, правые разности для градиента давления и для уравнения неразрывности, в правой части (7.23) возникли бы дополнительные объемные члены, нарушающие баланс энергии. Поэтому направления разностей при аппроксимации градиента давления в уравнении переноса компоненты скорости и производной этой компоненты скорости в уравнении неразрывности должны быть противоположны [Ferziger, Peric, 1996].

## 7.2. Итерационные алгоритмы совместного решения уравнений переноса импульса и неразрывности

После дискретизации системы уравнений Навье-Стокса и неразрывности, а также линеаризации нелинейных слагаемых одним из способов, рассмотренных в гл. 6, приходится на каждом шаге по времени (или внешней итерации при решении стационарной задачи) решать систему уравнений, непрерывный аналог которой имеет вид

$$\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial t} + \frac{\partial (u_j^n u_i^{n+1})}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}^{n+1}}{\partial x_i}, \quad (7.24)$$

$$\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} = 0. \quad (7.25)$$

Трудностью при решении (7.24) является нахождение давления на текущем шаге по времени  $p^{n+1}$  таким образом, чтобы рассчитанное по (7.24) поле скорости  $u_i^{n+1}$  удовлетворяло уравнению неразрывности (7.25).

### 7.2.1. Методы проекции

В семействе методов коррекции давления проблема расчета поля давления решается следующим образом. Сначала находится промежуточное поле скорости  $\tilde{u}_i$  из уравнения импульсов, в котором давление взято с предыдущего шага по времени:

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_j^n \tilde{u}_i)}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{\tau}_{ij}}{\partial x_i}. \quad (7.26)$$

Поле скорости  $\tilde{u}_i$ , вообще говоря, не удовлетворяет уравнению неразрывности. Поэтому на следующем этапе ищутся поправки к полю скорости и давления для того, чтобы удовлетворить это уравнение:

$$u_i^{n+1} = \tilde{u}_i + u'_i, \quad p^{n+1} = p^n + p'. \quad (7.27)$$

Подставляя (7.27) в (7.26) и в уравнение неразрывности, получим уравнения для поправок скорости и давления:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_j^n u'_i)}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_i}, \quad (7.28)$$

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i}. \quad (7.29)$$

Пренебрегая в (7.28) вязкими и конвективными членами, получим:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} \approx -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i}, \quad \text{или} \quad \Delta p' \approx -\rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u'_i}{\partial x_i}. \quad (7.30)$$

Производную по времени от поправки скорости можно аппроксимировать следующим образом:  $\partial u'_i / \partial t \approx u'_i / \Delta t$ <sup>6</sup>, тогда с учетом (7.29) получим уравнение Пуассона для давления

$$\Delta p' = \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i}, \quad (7.31)$$

решая которое найдем искомые поправки к скорости (7.27).

<sup>6</sup> Так как на предыдущем шаге по времени при  $t = t^n$  поле скорости удовлетворяло уравнению неразрывности, то при  $t = t^n$  поправка  $u'_i$  равна нулю.

Из (7.30) видно, что поправка к скорости является безвихревой, поскольку выступает градиентом некоторого потенциала, пропорционального давлению. Методы подобного типа, в которых на первом шаге вычисляется поле скорости, не удовлетворяющее уравнению неразрывности, а затем из него выделяется соленоидальная составляющая («соленоидальная проекция»), называются *методами проекции*.

Приближению (7.30) можно придать интересную физическую интерпретацию. Уравнения (7.30) совпадают с уравнениями теории импульсивного движения жидкости<sup>7</sup> (например, в результате гидроудара). Такие уравнения получаются из полных уравнений Навье-Стокса в пределе очень малой временной длительности удара, т. е. когда

$$\frac{\partial p'}{\partial x_i} \sim \delta(t - t^{n+1}) \frac{\partial \Pi}{\partial x_i},$$

где величина  $\Pi = \int p' dt$  называется импульсом давления.

Таким образом, приближение (7.30) соответствует кратковременному гидравлическому удару, «возвращающему жидкость в несжимаемое состояние».

## 7.2.2. Метод SIMPLE

Рассмотрим реализацию этой идеи в популярном методе SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation) [Патанкар, 1984]. Конечно-разностное уравнение импульсов, которое необходимо решить на  $(n + 1)$ -м шаге по времени, имеет вид

$$A_P^u u_{i,P} + \sum_{nb} A_{nb}^u u_{i,nb} = Q_{u_i}^{n+1} - \left( \frac{\delta p^{n+1}}{\delta x_i} \right)_P.$$

Уравнение решается итерациями, которые будем называть *внешними* (в отличие от *внутренних итераций* при решении системы линейных уравнений). На первом шаге  $m$ -й внешней итерации решается уравнение для промежуточного поля скорости:

$$A_P^u \tilde{u}_{i,P}^m + \sum_{nb} A_{nb}^u \tilde{u}_{i,nb}^m = Q_{u_i}^{m-1} - \left( \frac{\delta p^{m-1}}{\delta x_i} \right)_P. \quad (7.32)$$

Затем ищется такая поправка к нему  $u_i'$ , которая удовлетворяла бы конечно-разностному уравнению неразрывности, т. е.

$$\left( \frac{\delta u_i'}{\delta x_i} \right)_P = - \left( \frac{\delta \tilde{u}_i^m}{\delta x_i} \right)_P. \quad (7.33)$$

Уравнение для соответствующих поправок скорости и давления следует из (7.32):

<sup>7</sup> См., например: Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. С. 580–584.

$$A_p^{u_i} u'_{i,p} + \sum_{nb} A_{nb}^{u_i} u'_{i,nb} = - \left( \frac{\delta p'}{\delta x_i} \right)_p. \quad (7.34)$$

В методе SIMPLE суммой в левой части (7.34) пренебрегается, после чего получается приближенное решение:

$$u'_{i,p} \approx - \frac{1}{A_p^{u_i}} \left( \frac{\delta p'}{\delta x_i} \right)_p, \quad (7.35)$$

подставляя которое в (7.33), получим уравнение Пуассона для поправки давления:

$$\frac{\delta}{\delta x_i} \left[ \frac{1}{A_p^{u_i}} \left( \frac{\delta p'}{\delta x_i} \right)_p \right] = \left( \frac{\delta \tilde{u}_i^m}{\delta x_i} \right)_p. \quad (7.36)$$

Как показали численные эксперименты, вычисленную отсюда поправку давления необходимо подвергнуть нижней релаксации, так что итоговые выражения для давления и скорости имеют вид

$$p^m = p^{m-1} + \alpha_p p',$$

$$u_{i,p}^m \approx \tilde{u}_{i,p}^m - \frac{\alpha_p}{A_p^{u_i}} \left( \frac{\delta p'}{\delta x_i} \right)_p, \quad (7.37)$$

где  $\alpha_p \leq 1$  — коэффициент релаксации.

Рекомендуемое значение  $\alpha_p$  составляет около 0,8 [Патанкар, 1984]. Уравнения для промежуточной скорости также рекомендуется решать с помощью предложенного Патанкаром оригинального варианта метода нижней релаксации, в котором вместо уравнения (7.32) решается уравнение

$$\frac{A_p^{u_i}}{\alpha_u} \tilde{u}_{i,p}^m + \sum_{nb} A_{nb}^{u_i} \tilde{u}_{i,nb}^m = Q_{u_i}^{m-1} - \left( \frac{\delta p^{m-1}}{\delta x_i} \right)_p + \frac{1 - \alpha_u}{\alpha_u} A_p^{u_i} \tilde{u}_{i,p}^{m-1}, \quad (7.38)$$

где  $\alpha_u$  — коэффициент нижней релаксации, оптимальное значение которого составляет [Ferziger, Peric, 1996]:

$$\alpha_u = 1 - \alpha_p. \quad (7.39)$$

Фактически уравнение (7.38) можно получить из (7.32) добавлением в левую часть производной по псевдовремени  $\tau$ , причем шаг по псевдовремени равен  $\Delta\tau = \frac{\alpha_u}{(1 - \alpha_u) A_p^{u_i}}$ . Уравнение (7.38) при этом решается неявным методом до установления, что повышает устойчивость итерационного процесса.

### 7.2.3. Метод SIMPLEC

Слабым местом приведенного в п. 7.2.2 вывода уравнения для поправки давления (7.35) является пренебрежение суммой в левой части (7.34). С точки

зрения рассмотренной аналогии действия поправки давления с гидравлическим ударом такое пренебрежение означает, что скорость от действия импульса поправки давления меняется только в точке  $P$ , в то время как для соседних точек мы полагаем  $u'_{i,nb} \approx 0$ . Между тем гидравлический удар действует на весь объем жидкости сразу, поэтому скорость в соседних узлах должна меняться на величину такого же порядка. Исходя из этих соображений можно уточнить приближение (7.35), приняв в (7.34)  $u'_{i,nb} \approx u'_{i,P}$ . Тогда вместо (7.35) получим:

$$u'_{i,P} \approx -\frac{1}{A'_P + \sum_{nb} A_{nb}^{u_i}} \left( \frac{\delta p'}{\delta x_i} \right)_P. \quad (7.40)$$

Уравнение Пуассона для поправки давления (7.36) меняется на

$$\frac{\delta}{\delta x_i} \left[ \frac{1}{A'_P + \sum_{nb} A_{nb}^{u_i}} \left( \frac{\delta p'}{\delta x_i} \right)_P \right] = \left( \frac{\delta \tilde{u}_i^m}{\delta x_i} \right)_P. \quad (7.41)$$

Данный метод известен как SIMPLEC (SIMPLE Corrected) [Van Doormaal, Raithby, 1984]. Он обладает более быстрой сходимостью при решении стационарных задач. Из сравнения (7.40), (7.41) с соотношениями (7.36)–(7.38) метода SIMPLE видно, что метод SIMPLEC эквивалентен методу SIMPLE с коэффициентом релаксации давления, равным

$$\alpha_P = 1 + \frac{\sum_{nb} A_{nb}^{u_i}}{A'_P}. \quad (7.42)$$

Далее нетрудно проверить, что для всех консервативных схем должно выполняться соотношение на коэффициенты разностной схемы:

$$A'_P = A_P^t - \sum_{nb} A_{nb}^{u_i},$$

где  $A'_P$  — вклад от нестационарного члена. Для полностью неявной схемы (7.12), например  $A'_P = \rho/\Delta t$ , уравнение для поправки давления в методе SIMPLEC принимает вид, совпадающий с уравнением (7.31):

$$\frac{\delta}{\delta x_i} \left[ \left( \frac{\delta p'}{\delta x_i} \right)_P \right] = \frac{\rho}{\Delta t} \left( \frac{\delta \tilde{u}_i^m}{\delta x_i} \right)_P.$$

Для стационарных задач  $A'_P = 0$ , и в этом случае необходимо решать уравнение для скорости с нижней релаксацией (7.38). В этом случае

$$A_P^{u_i} = -\frac{\sum_{nb} A_{nb}^{u_i}}{\alpha_u},$$

и выражение (7.42) совпадает с приведенным выше соотношением (7.39), что можно рассматривать как его обоснование.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990. Т. 1–2.

Березин Ю. А. Моделирование нелинейных волновых процессов. Новосибирск: Наука, 1982. 160 с.

Булеев Н. И. Пространственная модель турбулентного обмена. М.: Наука, 1989. 344 с.

Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.

Головизнин В. М., Самарский А. А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Математическое моделирование. 1998. Т. 10. № 1. С. 86–100.

Ильин В. П. Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. 345 с.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.

Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости: Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.

Рябенский В. С. Введение в вычислительную математику. М.: Физматлит, 2000. 296 с.

Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. М.: Едиториал УРСС, 2004. 248 с.

Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.

Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.

Яненко Н. Н., Шокин Ю. И. О корректности первых дифференциальных приближений разностных схем // ДАН СССР. 1968. Т. 182. № 4. С. 776–778.

Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1991. Т. 1–2.

Boysan F. CFD Perspectives for the Future // Proc. IV Int. Conf. on CFD in the Oil and Gas, Metallurgical & Process Industries SINTEF / NTNU. Trondheim, Norway, 6–8 June 2005. P. 1–7.

Canuto C., Hussaini M. Y., Quarteroni A., Zang T. A. Spectral Methods. Fundamentals in Single Domains. Berlin: Springer, 2006.

Doormaal Van J. P., Raithby G. D. Enhancement of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flow // Numer. Heat Transfer. 1984. Vol. 7. № 2. P. 147–163.

*Ferziger J.H., Peric M.* Computational Methods for Fluid Dynamics. Berlin: Springer, 1996.

*Harten A.* On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes // SIAM J. Numer. Anal. 1984. Vol. 21. № 1. P. 1–23.

*Kassam A.-K., Trefethen L. N.* Fourth-order time stepping for stiff PDEs // SIAM J. Sci. Comput. 2005. Vol. 26. № 4. P. 1214–1233.

*Peyret R.* Handbook of Computational Fluid Mechanics. N. Y.: Academic Press, 2000. 467 p.

*Warming R. F., Hyett B. J.* The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference method // J. Comp. Phys. 1974. Vol. 14. P. 159–179.



Учебное издание

**Сиковский** Дмитрий Филиппович

## **МЕТОДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕПЛОФИЗИКИ**

Учебное пособие

На обложке изображены визуализации результатов численного моделирования факельного горения угольной пыли в топке котла П-67 Березовской ГРЭС-1 и кавитационного обтекания гидрокрыла NASA 0015, выполненного с помощью пакета программ SigmaFlow.

Редактор *Е. П. Войтенко*  
Верстка *А. С. Терёшкиной*

Подписано в печать 10.04.2013 г.  
Формат 70 × 100 1/16. Уч.-изд. л. 6,1. Усл. печ. л. 7,9.

Тираж 100 экз. Заказ №  
Редакционно-издательский центр НГУ.  
630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2.

